

**Université de Tunis  
ISEFC**

**Cours : AU2**

**SYSTEMES ASSERVIS  
LINEAIRES**

**Octobre 2002**

## **INTRODUCTION**

- 1/ Définition :**
- 2/ Notion de linéarité :**
- 3/ Stabilité :**
- 4/ Théorème**
- 5/ Signaux canoniques :**
- 6/ Rapidité :**
- 7/ Précision :**
- 8/ Principe de superposition:**
- 9/ Caractéristiques statique et dynamiques :**
- 10/ Réponse indicielle :**
- 11/ Transmittance opérationnelle :**
- 12/ Transmittance harmonique**

## **DIAGRAMMES ET ABAQUES**

### **I. Diagramme de Bode :**

- 1. Diagramme est abaque de Black : Définition du diagramme de Black :**
- 2. Construction et allure des diagrammes de Black :**
  
- 3. Abaque de Black :**

### **II. Diagramme de Nyquist :**

- 1. Définition du diagramme de Nyquist :**
- 2. Construction et allure des diagrammes de Nyquist :**

## **ANALYSE ET SYNTHESE DES SYSTEME ASSERVIS LINEAIRE PAR LA METHODE TEMPORELLE**

### **I. Introduction :**

### **II. Etude de la stabilité :**

### **III. Critère de Routh :**

### **IV. Rapidité d'un système asservi linéaire :**

- 1. Rappel sur les systèmes de second ordre :**
- 2. Critère algébrique d'amortissement : Critère de NASLIN :**

### **Précision des systèmes asservis linéaires :**

- 1. Système à retour unitaire :**
- 2. Système à retour non unitaire :**
- 3. Système à deux entrées :**

### **V. Classe d'un système asservi :**

**ANALYSE ET SYNTHESE DES SYSTEME  
ASSERVIS LINEAIRE PAR LA  
METHODE HARMONIQUE**

- 1.Introduction :**
- 2.Critère de Nyquist :**
- 3. Marge de gain :**
- 4.Marge de phase :**

**LES REGULATEURS**

- I- Introduction :**
- II- Rôle des régulateurs ou correcteurs :**
- 1-Correcteurs série :**
  - a- Action proportionnelle :**
  - b- Action intégral :**
  - c- Action dérivée :**
  - d- Action combinée :**
  - d- Correction par retard de phase :**

**ANALYSE ET SYNTHESE DES SYSTEME  
ASSERVIS LINEAIRE PAR LA  
METHODE DE LIEU DES RACINES**

- 1. Introduction :**
- 2. Marge de stabilité absolue et relative :**

**I. Lieu d'Evans :**

- 1. Configuration pôles-zéros de la fonction de transfert  $F(p)$  d'un système asservi linéaire :**
- 2. Propriétés et allure du lieu d'Evans :**
- 3. Construction graphique des lieux d'Evans :**

**III. Correction dans le plan de Laplace :**

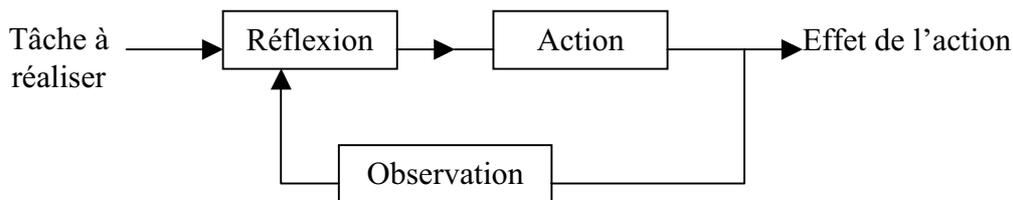
- 1. Correcteur à avance de phase :**
- 2. Correction à retard de phase :**
- 3. Correcteur retard-avance :**

# INTRODUCTION

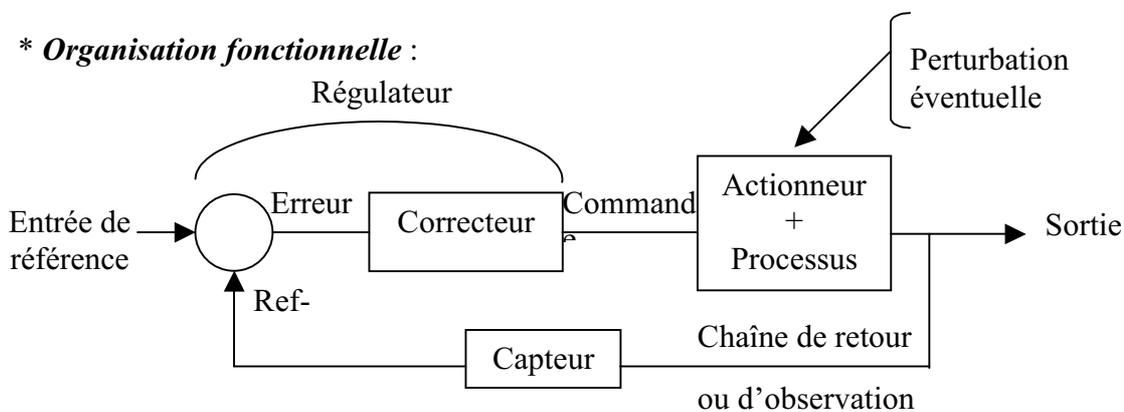
## 1/ Définition :

Un système asservi est un système bouclé c'est à dire possédant une rétroaction (contre réaction ) de la sortie sur l'entrée.

Il copie le comportement de l'homme dans les trois phases essentielles de son travail.



## \* Organisation fonctionnelle :



- Le régulateur élabore le signal de commande.
- L'actionneur maîtrise la puissance fournie au processus.
- Le capteur contrôle la grandeur asservie et en rend compte au régulateur.

## 2/ Notion de linéarité :

\* *Au sens mathématique* :  $x \rightarrow f(x)$

$f$  est linéaire  $\rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

\* *Au sens physique* :

un système est linéaire s'il vérifie la linéarité mathématique + l'invariance temporelle



\* *Linéarité mathématique* :

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow s_1 \\ e_2 &\rightarrow s_2 \\ \lambda_1 e_1 &\rightarrow \lambda_1 s_1 \\ e_1 + e_2 &\rightarrow s_1 + s_2 \end{aligned}$$

\* *Invariance temporelle* :  $e(t - \tau) \rightarrow s(t - \tau)$   
 $e(t + \tau) \rightarrow s(t + \tau)$

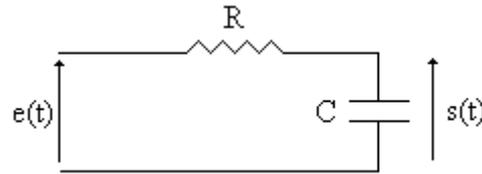
Exemple : un circuit RC.

**2.1: Théorème** : Un système est linéaire au sens physique s'il est décrit par une équation différentielle à coefficients constants.

**Exemples:**

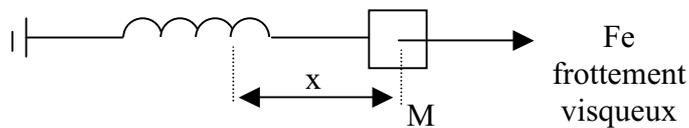
$$1/ e(t) = R i(t) + s(t) = R C \frac{ds}{dt} + s(t)$$

soit  $e = R C s' + s$   
c'est un système linéaire



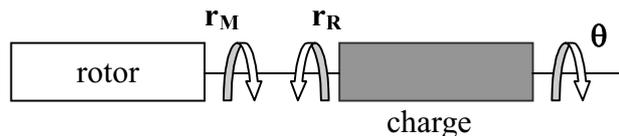
$$2/ Mx'' = -k x - f x' + Fe$$

c'est un système linéaire

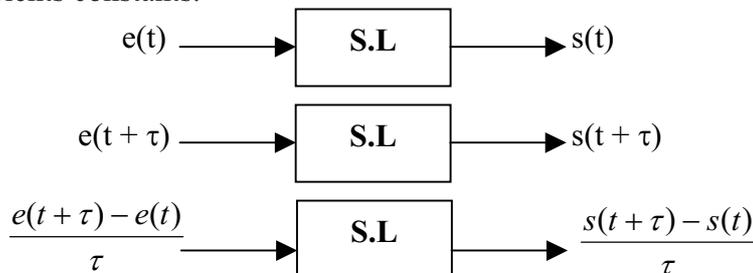


3/  $r_M$  : couple moteur  
 $r_R$  : couple résistant  
 $J$  : inertie

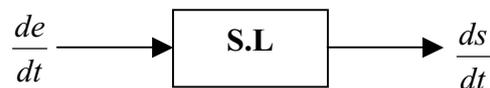
$$J\theta'' = -\underbrace{F\theta'}_{r_R} + r_M \iff J\theta'' + f\theta' = r_M$$



Remarque : On peut démontrer qu'un système linéaire invariant est régi par une équation différentielle à coefficients constants.



Quand  $\tau \rightarrow 0$ , on a :



Il en est de même pour la dérivée à l'ordre n ainsi que pour la primitive d'ordre n. La relation entre "e" et "s" est donc une équation intégrale différentielle de la forme :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s = b_m e^m + b_{m-1} e^{m-1} + \dots + b_0 e$$

**2.2 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients :**

Soit  $a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S' + a_0 S = g(t)$   
SG ( $g \neq 0$ ) = SG ( $g = 0$ ) + SP ( $g \neq 0$ )

SG ( $g = 0$ ) : c'est la solution générale de l'équation sans second membre.

SP ( $g \neq 0$ ) : c'est la solution particulière de l'équation.

a. Recherche de SG ( $g = 0$ )

On écrit l'équation caractéristique de l'équation différentielle:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$\exists$  plusieurs possibilités :  $\lambda_1 \dots \dots \dots \lambda_n$

\*  $\exists \lambda_i$  distincts et réels:  $s(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t}$

\*  $\exists$  racines multiples :

soit  $j / \lambda_j$  : racine d'ordre  $k$  :  $s(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} + (\lambda_1 + \lambda_2 t + \dots \dots \dots \lambda_k t^n) e^{\lambda_i t}$

\*  $\exists$  racines complexes conjuguées :  $\lambda_j = \alpha + j\omega$   
 $\overline{\lambda_j} = \alpha - j\omega$

$$s(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} + A \sin(\omega t + \varphi) e^{\alpha t}$$

b- Recherche de SP ( $g \neq 0$ )

tout dépend de la forme de  $g(t)$

\*  $g(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots \dots \dots + \alpha_p t^p = P_p(t)$  polynôme de degré  $P$

SP ( $g \neq 0$ ) est un polynôme de  $d^o p$  si  $a_0 \neq 0$   
 de  $d^o p+1$  si  $a_0 = 0$   $a_1 \neq 0$

$SP(g \neq 0) = Q_p(t)$
-------------------------

* $g(t) = e^{mt} P_p(t)$	$SP(g \neq 0) = e^{mt} Q_p(t)$
--------------------------	--------------------------------

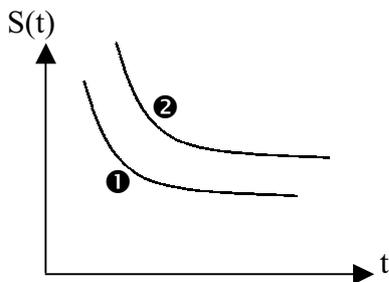
* $g(t) = P_p(t) \sin \omega t$	$SP(g \neq 0) = Q_p(t) \sin$
---------------------------------	------------------------------

3/ Stabilité :

On dit qu'un système est stable lorsque celui-ci tend à revenir à son état d'équilibre permanent quand on lui applique une perturbation de courte durée. La notion de stabilité est indépendante de la forme de l'entrée, pour l'étudier, il suffit donc de considérer SG ( $g = 0$ )

Exemple :

\*  $\lambda_i$  réels distincts :  $s(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t}$



$t \rightarrow \infty ; s(t) \rightarrow 0$   
 si  $\lambda_i < 0 \Rightarrow$  stabilité

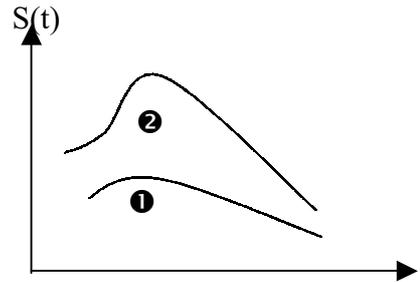
Les deux systèmes 1/ et 2/ sont stables seulement 2/ revient à son état de repos après un temps beaucoup plus long.

\*  $\lambda_i$  doubles :  $s(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t} + (C_j + C'_j t) e^{\lambda_j t}$

1/ et 2/ sont stables

$t \rightarrow \infty ; s(t) \rightarrow 0$

$\lambda_i < 0$



**4/ Théorème**

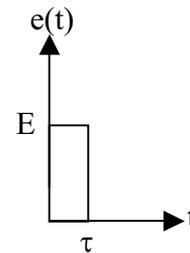
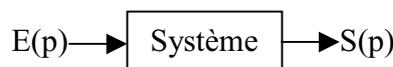
**Un système linéaire est stable si et seulement si la partie réelle de toutes les racines de son equation caracteristique est négative**

**5/ Signaux canoniques :**

**5.1. Impulsion : percussion :**

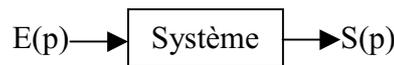
$e(t) = E \delta(t) ; E(p) = E$

$s(t)$  est une réponse impulsionnelle

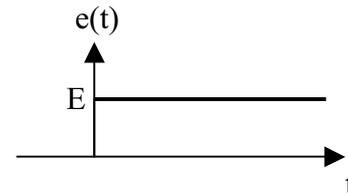


**5.2. Echelon de position :**

$e(t) = E.u(t)$  avec  $u(t) = 0$  si  $t < 0$   
 $= 1$  si  $t > 0$



$$E(p) = \frac{E}{p}$$



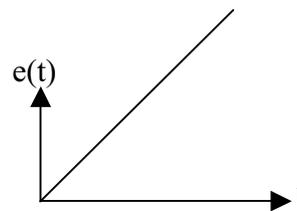
$s(t)$  est une réponse indicielle :  $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

**5.3. Echelon de vitesse : rampe :**

$e(t) = E.t u(t)$

$$E(p) = \frac{E}{p^2}$$

$s(t)$  est dite réponse de vitesse

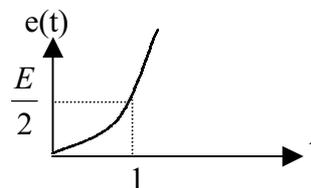


**5.4. Echelon d'accélération :**

$e(t) = E \frac{t^2}{2} u(t)$

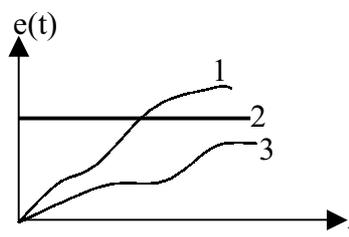
$$E(p) = \frac{E}{p^3}$$

$S(t)$  est dite réponse d'accélération.

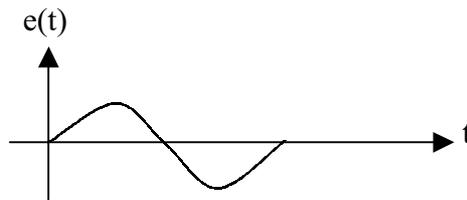


\* Entrée causale :

$t > 0 \quad e(t) \neq 0$

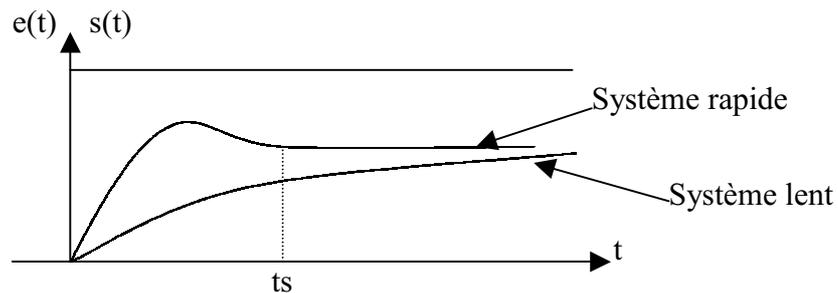


\* Entrée sinusoïdale :



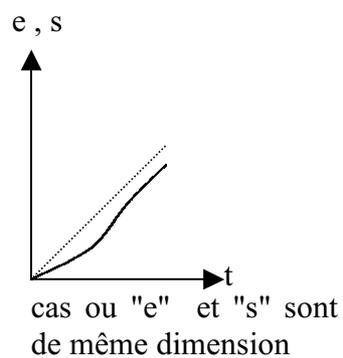
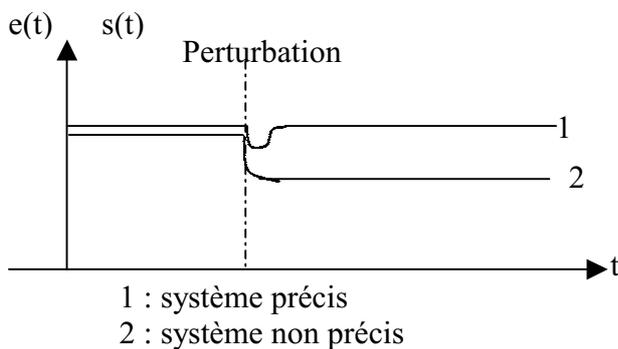
**6/ Rapidité :**

Un système à une rapidité satisfaisante s'il se stabilise à son niveau constant en un temps jugé satisfaisant.

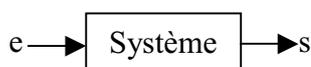


**7/ Précision :**

Un système est précis si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances.



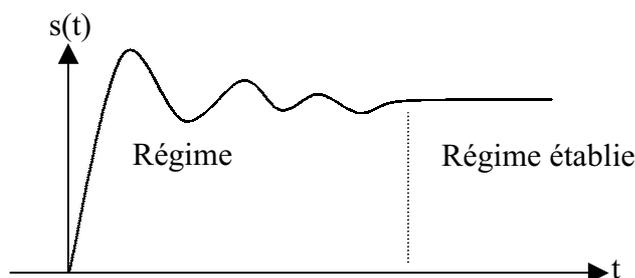
**8/ Principe de superposition:**



$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow s_1 \\ 2 \cdot e_1 &\rightarrow 2 \cdot s_1 \\ e_1 + e_2 &\rightarrow s_1 + s_2 \end{aligned}$$

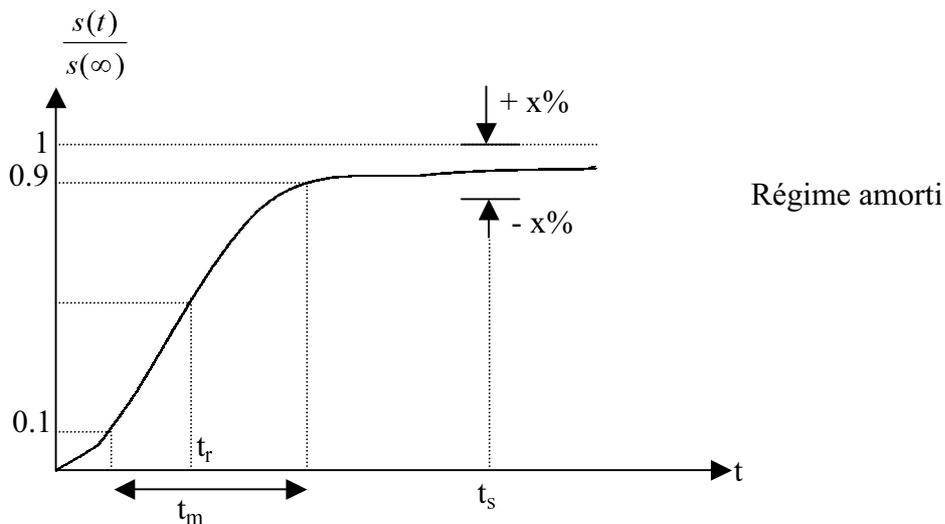
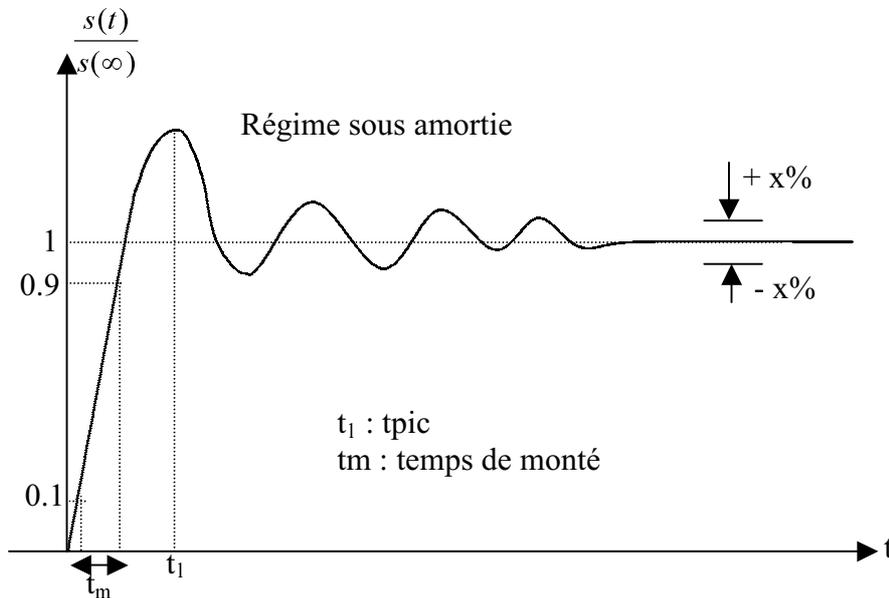
Ce qu'on applique à l'entrée on le retrouve à la sortie

**9/ Caractéristiques statique et dynamiques :**



**10/ Réponse indicielle :**

$\lim s(t) = s(\infty)$  ; quand  $t \rightarrow \infty$



$t_m$  : C'est le temps de monté nécessaire pour  $\frac{s(t)}{s(\infty)}$  passe de 0,1 à 0,9

$t_r$  : C'est le temps de retard nécessaire pour que  $\frac{s(t)}{s(\infty)}$  atteint 0,5

$t_s$  : C'est le temps de stabilisation est le temps à partir duquel  $s(t)$  reste à  $x\%$  du régime définitive ( $x = 5$  ou  $2$ )

$t_p$  : C'est le temps de pic

**11/ Transmittance opérationnelle :**

**11.1. Définition :**

Un système linéaire est régi par une équation différentielle de la forme

$$(1) a_n S^{(n)} + a_{n-1} S^{(n-1)} + \dots + a_0 S = b_m e^{(n)} + b_{m-1} e^{(m-1)} + \dots + b_0 e$$

$$L [ e(t) ] = E(p)$$

$$L [ e'(t) ] = pE(p) - e(0)$$

$$L [ e^n(t) ] = p^n E(p) - p^{(n-1)} e(0) - \dots - e^{n-1}(0)$$

de même pour s(t)

La transformée de Laplace de (1) s'écrit pour n = m = 2

$$S(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} E(p) + cte$$

cte : dépend des conditions initiales e(0) ; e'(0) ; S(0) ; S'(0)

Un choix correct des variables "e" et "s" permet d'éliminer le 2ème terme (cte) il suffit de prendre toutes les conditions initiales nulles.

On définit donc la transmittance opérationnelle pour n = m = 2

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

H(p) : transmittance opérationnelle ou isomorphe

**12/ Transmittance harmonique**

**12.1. Définition**



En régime établi s(t) = S<sub>0</sub> sin(ωt + φ)

$$H(j\omega) = \frac{S_0}{E_0} e^{i\varphi} \text{ est appelée transmittance harmonique}$$

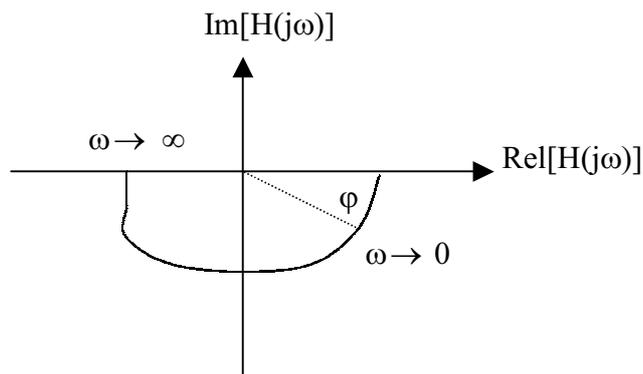
$$H(j\omega) = [H(p)]_{p=j\omega}$$

H(jω) s'obtient en remplaçant dans H(p) p par jω

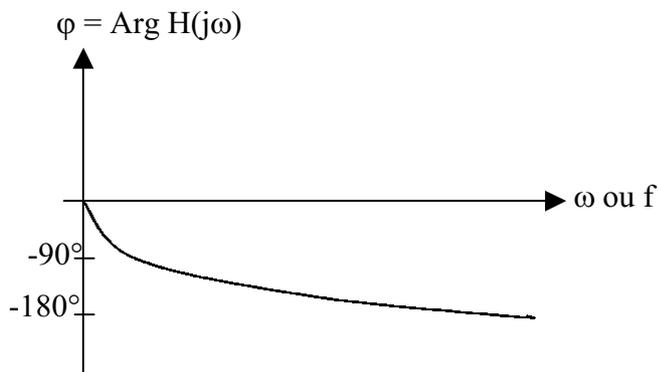
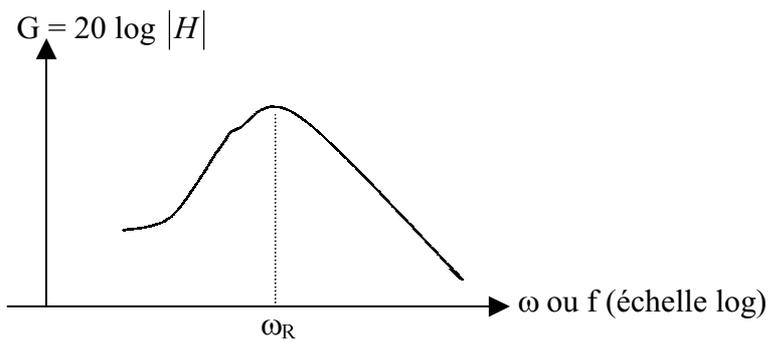
**12.2. Représentation :**

\* Lieu de Nyquist :

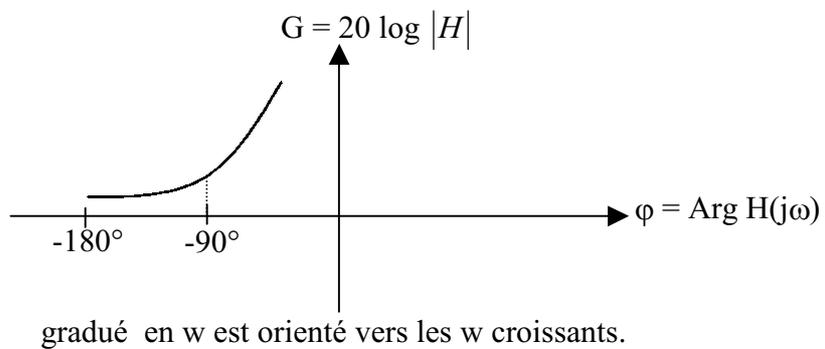
lieu gradué en ω et orienté vers les ω croissants



\* Lieu de Bode :



\* Lieu de Nichols ou (Black) :



## DIAGRAMMES ET ABAQUES

Ce chapitre a pour objet la représentation de la réponse en fréquences  $T(j\omega)$  en boucle ouverte ou  $F(j\omega)$  en boucle fermée d'un système asservi linéaire au moyen de diagrammes de différents types. Pratiquement, il est plus intéressant de faire l'étude et la synthèse d'un tel système à partir de  $T(j\omega)$  (le gain  $K$  par exemple intervient alors linéairement). En général, on représente donc la réponse en fréquences en boucle ouverte : on va voir que des abaques permettent de déterminer graphiquement la réponse en fréquences en boucle fermée  $F(j\omega)$  à partir de  $T(j\omega)$ .

Les diagrammes de base sont les diagrammes de Bode.

### IV. Diagramme de Bode :

La représentation dans le plan de Bode d'une réponse en fréquences consiste à tracer séparément, en fonction de la pulsation  $\omega$ , le module et l'argument de cette réponse, qui représentent respectivement l'affaiblissement et le déphasage subis par des signaux sinusoidaux de différentes pulsations appliquées à l'entrée du système qui possède la réponse en fréquences considérée.

Dans le plan de Bode, il n'existe pas d'abaque qui permette d'obtenir directement la réponse en fréquences en boucle fermée  $F(j\omega)$  d'un système asservi à partir de sa réponse en fréquences en boucle ouverte  $T(j\omega)$  tracée dans ce plan.

Dans cette première partie, on suppose que l'on désire représenter la réponse en fréquences  $T(j\omega)$ . Il est bien évident que l'on pourrait utiliser la même méthode pour représenter directement  $F(j\omega)$ .

En ce qui concerne la courbe du module de  $T(j\omega)$ , appelée diagramme d'amplitude, on représente, en fonction de  $\omega$ , le module  $A$  de  $T(j\omega)$  exprimé en décibels, soit :

$$A \text{ dB} = 20 \log_{10} |T(j\omega)|$$

L'argument d'un produit de quantités complexes étant égal à la somme des arguments de chacun des termes du produit, la courbe  $\arg T(j\omega)$  est encore appelée diagramme de phase.

Une fonction de transfert en boucle ouverte se présente, sous la forme du produit de terme de la forme :

### 1. Terme $K(j\omega)^\alpha$ :

Le diagramme d'amplitude de ce terme est la courbe  $A(\omega)$  :

$$A \text{ dB} = 20 \log_{10} K \cdot \omega^\alpha$$

Soit :

$$A \text{ dB} = K \text{ dB} + 20 \alpha \log_{10} \omega .$$

Cette relation montre que la courbe  $A(\log_{10} \omega)$  est une droite : il est donc commode de tracer  $A$  en fonction de  $\log_{10} \omega$ , ce qui revient en pratique à tracer  $A$  en fonction de  $\omega$ , les valeurs de  $\omega$  étant portées sur une échelle logarithmique.  $A$ , exprimé en décibels, est porté sur une échelle linéaire et l'on emploie donc du papier semi-logarithmique. La droite horizontale  $A = 0$  dB (appelée « axe 0 dB ») est généralement distincte de l'axe des pulsations  $\omega$  (fig.1).

Pour une octave, c'est-à-dire pour un intervalle  $(\omega, 2\omega)$ , la pente de la droite  $A(\omega)$  est :

$$20\alpha \log_{10} \frac{2\omega}{\omega} = \alpha \cdot 20 \log_{10} 2 \cong 6\alpha \text{ dB/octave} .$$

Cette droite coupe l'axe 0 dB en un point  $\omega_0$  tel que :

$$\log_{10} \omega_0^\alpha = -\log_{10} K$$

soit au point :

$$\omega_0 = 1/K^{1/\alpha} .$$

Enfin, pour  $\omega = 1$  :

$$A \text{ dB} = K \text{ dB} .$$

Si  $\alpha = 0$ ,  $A(\omega)$  est une droite horizontale d'ordonnée  $K$  dB.

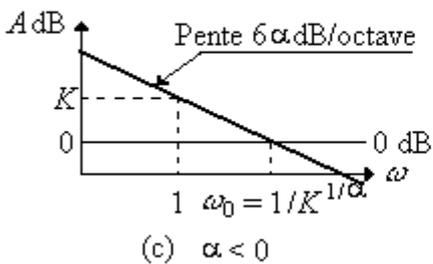
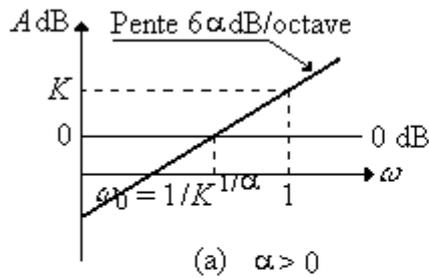


fig.2

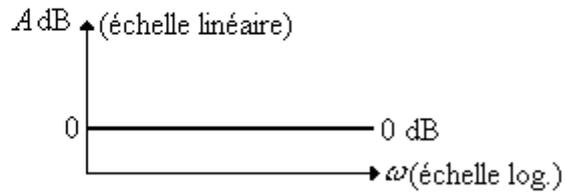


fig.1

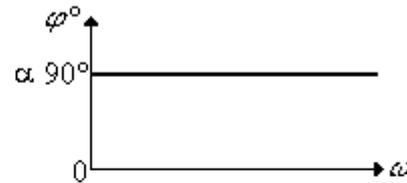


fig.3

On a représenté les droites correspondant à des valeurs positive, nulle et négative de  $\alpha$  sur les figures 2a, b, c.

Le diagramme de phase du terme  $K(j\omega)^\alpha$  est la courbe donnant, en fonction de  $\omega$  :

$$\varphi = \arg K(j\omega)^\alpha,$$

soit la droite horizontale (fig.3) :

$$\varphi = \alpha.90^\circ.$$

Pour des raisons de commodité de lecture et de tracé du module et de l'argument d'une réponse en fréquences pour une certaine pulsation, les diagrammes de phase sont tracés en dessous des diagrammes d'amplitude correspondants, avec la même échelle logarithmique que ces derniers pour la pulsation  $\omega$ .

## 2. Terme $(1+j\omega\tau)^\beta$ :

Considérons tout d'abord le terme :

$$1+j\omega\tau \quad (\beta = 1), \quad \tau > 0,$$

correspondant à une racine réelle négative  $p = -1/\tau$  du numérateur de  $T(p)$ .

Quand  $\omega$  tend vers zéro

$$|1 + j\omega\tau| = (1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2}$$

tend vers 1, et quand  $\omega$  tend vers l'infini  $|1 + j\omega\tau|$  tend vers  $\omega\tau$ : le diagramme d'amplitude du terme considéré possède donc deux asymptotes, les droites  $A = 1$  et  $A = \omega\tau$ .  $A$  étant exprimé, on l'a vu, en décibels, et les valeurs de  $\omega$  portées sur une échelle logarithmique, la première de ces asymptotes est confondue avec l'axe 0 dB ( $A_{dB} = 20 \log_{10} 1 = 0$ ); le second est une droite de pente 6 dB/octave qui coupe l'axe 0 dB à la pulsation (appelée parfois *pulsation de cassure*):  $\omega = 1/\tau$ . Alors on effectue  $\omega\tau = 1$ , soit 0 dB.

Pour cette pulsation, la courbe réelle d'amplitude possède une ordonnée égale à 3 dB (alors:  $(1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2} = \sqrt{2}$ ). Pour les pulsations  $\omega = 1/2\tau$  et  $\omega = 2/\tau$ , on peut vérifier que ses ordonnées sont supérieures de 1 dB à celles de ses asymptotes (fig.4a).

D'une façon générale, un diagramme réduit à ses asymptotes est appelé *diagramme asymptotique*.

Le diagramme de phase du terme  $1 + j\omega\tau$  est la courbe :

$$\varphi = \arg(1 + j\omega\tau),$$

soit :

$$\varphi = \arg \operatorname{tg}(\omega\tau).$$

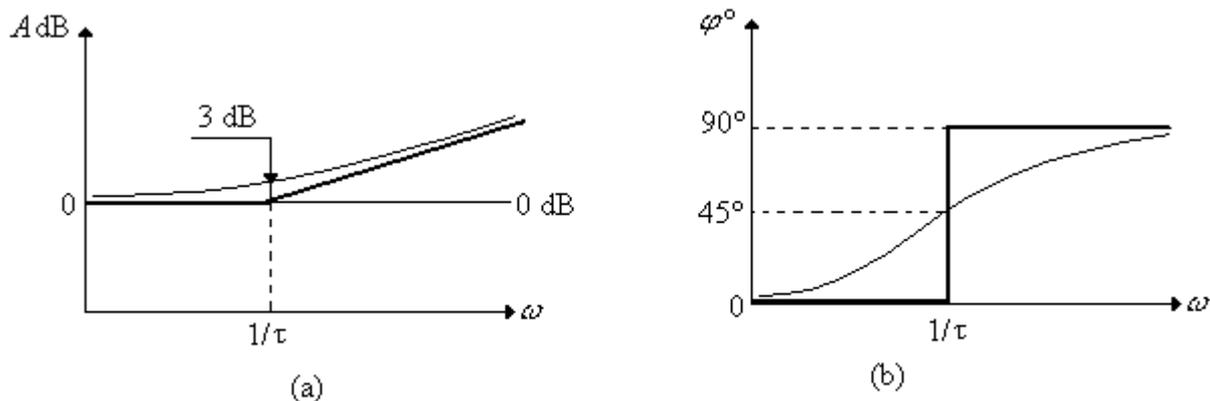


fig.4

Quand  $\omega$  tend vers zéro,  $\varphi$  tend vers zéro et quand  $\omega$  tend vers l'infini,  $\varphi$  tend vers  $90^\circ$ . Pour  $\omega = 1/\tau$ ,  $\varphi = 45^\circ$ .

On peut représenter de façon simplifiée la variation de  $\varphi$  au moyen du diagramme asymptotique dessiné en traits épais sur la figure 4b.

Si l'on considère maintenant le terme :  $1 - j\omega\tau$ ,  $\tau > 0$ , correspondant à une racine réelle positive  $p = 1/\tau$  du numérateur de  $T(p)$ , son module est identique à celui du terme  $1 + j\omega\tau$ . Son argument est identique en valeur absolue mais de signe opposé à celui de  $1 + j\omega\tau$ .

Des termes de la forme :

$$\frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - j\omega\tau}$$

ont respectivement des modules, exprimés en décibels, et des arguments identiques en valeur absolue mais de signes opposés à ceux de :  $1 + j\omega\tau$  et  $1 - j\omega\tau$ .

Enfin, si pour le terme considéré,  $\beta > 1$ , les diagrammes d'amplitude et de phase correspondant sont obtenus par  $\beta$  additions graphiques d'un terme de l'une des formes mentionnées ci-dessus.

### 3. Terme $(1 - \omega^2/\omega_n^2 + j 2 \zeta \omega/\omega_n)^\gamma$ :

Considérons le terme :

$$1 - \omega^2/\omega_n^2 + j 2 \zeta \omega/\omega_n, \quad \text{avec } \zeta > 0 \quad (1)$$

correspondant à deux racines imaginaires conjuguées à parties réelles négatives du numérateur de  $T(p)$ .

Le diagramme d'amplitude d'un terme de cette forme est la courbe :

$$A \text{ dB} = 20 \log_{10} [(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2 \zeta \omega/\omega_n)^2]^{1/2}.$$

Quand  $\omega$  tend vers zéro,  $A$  dB tend vers zéro et le diagramme d'amplitude possède une asymptote confondue avec l'axe 0 dB.

Quand  $\omega$  tend vers l'infini, le module du terme considéré tend vers  $(\omega/\omega_n)^2$  ce qui met en évidence l'existence d'une seconde asymptote, de pente 12 dB/octave, qui coupe l'axe 0 dB à la pulsation :  $\omega = \omega_n$ . La forme de la courbe réelle dépend du paramètre  $\zeta$ .

L'argument :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

tend vers zéro avec  $\omega$  et tend vers  $180^\circ$  quand  $\omega$  tend vers l'infini. Pour  $\omega = \omega_n$  :  $\varphi = 90^\circ$ .

Au voisinage de ce point, l'argument  $\varphi$  augmente d'autant plus vite avec  $\omega$  que  $\zeta$  possède une valeur faible.

On a représenté figures 5a et b les allures des diagrammes d'amplitude et de phase de terme de la forme (1). On a dessiné en traits épais sur ces figures les diagrammes asymptotiques correspondant (qui ne dépendent pas de  $\zeta$ ).

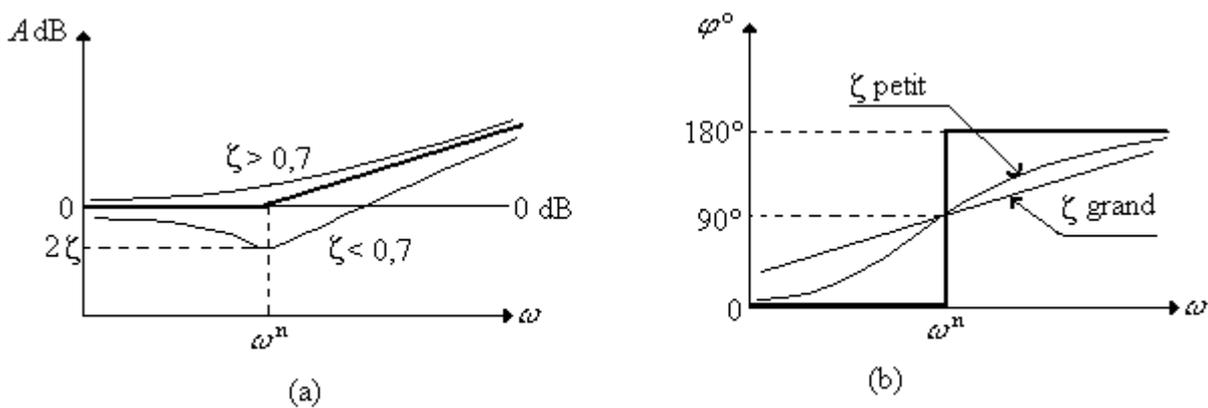


fig.5

Connaissant les variations en fonction de  $\omega$  du module et de l'argument d'un terme de la forme (1), il est facile d'en déduire ceux de termes de la forme :

$$1 - \omega^2 / \omega_n^2 - j 2 \zeta \omega / \omega_n, \quad \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_n^2 + j 2 \zeta \omega / \omega_n}, \quad \text{avec } \zeta > 0$$

#### 4. Terme $e^{-j\omega\tau}$ :

Le module de  $e^{-j\omega\tau}$  est toujours égal à l'unité.

Son argument  $\varphi$  s'écrit :

$$\varphi = -\omega\tau.$$

Lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ ,  $\varphi$  varie donc de 0 à  $-\infty$ . Dans un plan semi-logarithmique, il est toujours possible de construire la courbe  $\varphi(\omega)$  point par point.

## V. Diagramme est abaque de Black :

### 4. Définition du diagramme de Black :

Dans le plan dénommé plan de Black, on représente une réponse en fréquences  $T(j\omega)$  en portant en abscisse l'argument  $\varphi$  de  $T(j\omega)$ , exprimé en degrés et en ordonnée le module  $A$  de  $T(j\omega)$  exprimé en décibels (fig.6).

La courbe obtenue, appelée *diagramme de Black* ou *lieu de transfert dans le plan de Black* (ou en abrégé *lieu de Black*) est graduée en pulsations  $\omega$ . Un tel lieu est une utilisation très commode, car un changement de gain  $K$  d'un système se traduit par une translation parallèle à l'axe des ordonnées. La multiplication de plusieurs réponses en fréquences se réduit d'autre part à une addition vectorielle.

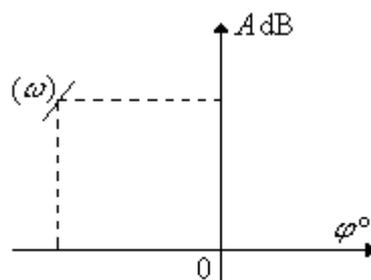


fig.6

### 5. Construction et allure des diagrammes de Black :

C'est à partir des diagrammes de Black d'une réponse en fréquences  $T(j\omega)$  qu'il est le plus commode de tracer son diagramme de Black. L'allure d'un tel lieu dépend, aux fréquences élevées, de la différence  $n - m$  entre les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert  $T(p)$  et, aux fréquences basses, de l'ordre de multiplicité  $\alpha$  du pôle à l'origine de  $T(p)$ .

Aux pulsations élevées :

$$[T(j\omega)]_{\omega \rightarrow \infty} \cong \frac{A_m}{B_n} \frac{1}{(j\omega)^{n-m}}$$

le module de  $T(j\omega)$  tend vers zéro ( $-\infty$  dB).

Pour  $n - m = 1, 2, 3, \dots$  les arguments de  $T(j\omega)$  tendent respectivement vers :  $-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, \dots$  lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Aux fréquences élevées, les droites verticales qui possèdent ces abscisses sont donc des asymptotes pour les lieux de transfert dans le plan de Black, qui peuvent avoir les allures dessinées figures 7a, b, c : celles-ci correspondent à des valeurs de  $n - m$  respectivement égales à 1, 2 et 3.

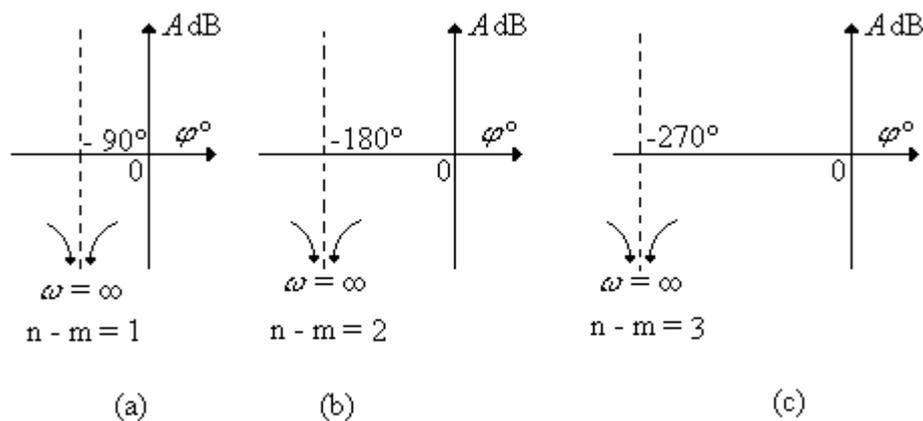


fig.7

Aux basses fréquences :

$$[T(j\omega)]_{\omega \rightarrow 0} \cong K / (j\omega)^\alpha .$$

Si  $\alpha = 0$ ,  $T(j\omega)$  tend vers le nombre réel  $K$  lorsque  $\omega$  tend vers zéro et le lieu de Black a l'une des allures dessinées figure 8a.

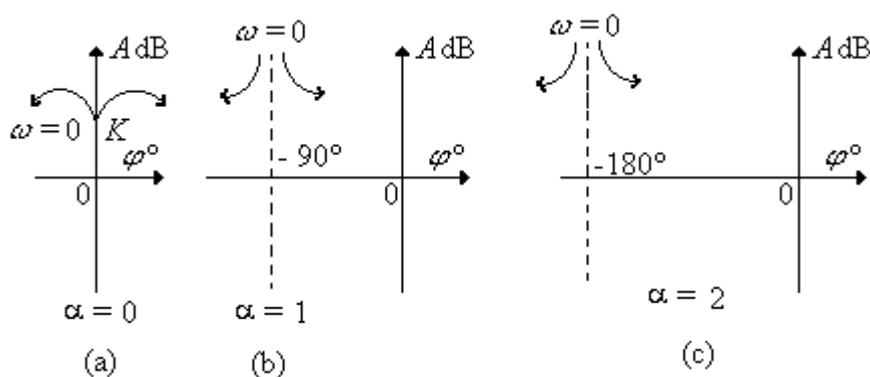


fig.8

Si  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$  le lieu de Black possède aux pulsations basses des asymptotes verticales d'abscisses  $-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, \dots$  et il a, pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$  par exemple l'une des allures dessinées figures 8b et c.

## 6. Abaque de Black :

De la réponse en fréquences en boucle ouverte  $T(j\omega)$  d'un système asservi l'abaque de Black permet de déduire pour chaque pulsation  $\omega$  le module  $\lambda$  dB et l'argument  $\varphi$  degrés de la réponse en fréquences du système asservi à retour unitaire équivalent au système donné :

$$F_u(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)}$$

Si l'on écrit  $T(j\omega)$  sous la forme exponentielle :

$$T(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(\omega) = |T(j\omega)| \\ \varphi = \arg T(j\omega) \end{cases}$$

$F_u(j\omega)$  s'écrit sous la forme :

$$F_u(j\omega) = B(\omega) e^{j\psi}$$

avec :

$$B(\omega) = |F_u(j\omega)| = \frac{A}{(1 + A^2 + 2A \cos \varphi)^{1/2}}$$

$$\psi = \arg F_u(j\omega) = \arctg \frac{\sin \varphi}{A + \cos \varphi}$$

L'abaque de Black est donc obtenu en traçant dans le plan de Black :

- les lieux des points pour lesquels :

$$20 \log_{10} B = \lambda \text{ dB} = \text{Cte}$$

lieux appelés *contours d'amplitude*,

- les lieux des points pour lesquels :

$$\arctg \frac{\sin \varphi}{A + \cos \varphi} = \psi^\circ = \text{Cte}$$

lieux appelés *contours de phase*.

Etant donné le lieu de Black  $T(j\omega)$  de la réponse en fréquences en boucle ouverte d'un système asservi, tracé sur l'abaque de Black, si un point  $M$  de ce lieu, correspondant à la pulsation  $\omega_1$ , se trouve par exemple (fig.9) à l'intersection des courbes :  $\lambda = -6$  dB et  $\psi = -40^\circ$ , de l'abaque de Black,  $-6$  dB et  $-40^\circ$  représentent l'amplitude et la phase de  $F_u(j\omega)$  à la pulsation  $\omega_1$ .

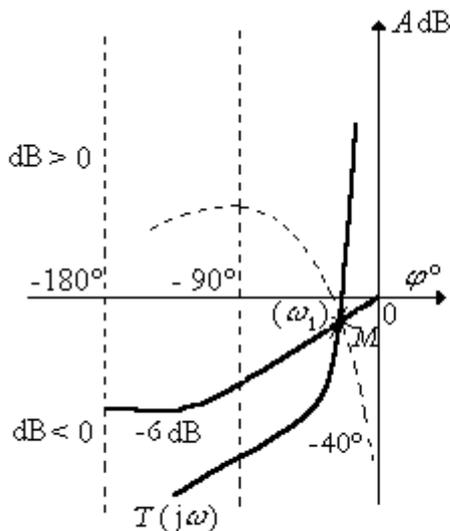


fig.9

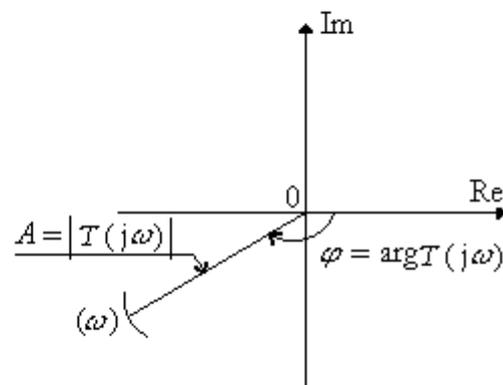


fig.10

## VI. Diagramme de Nyquist :

### 3. Définition du diagramme de Nyquist :

Le *diagramme de Nyquist*, ou lieu de transfert dans le plan de Nyquist (ou en abrégé *lieu de Nyquist*), d'un système de réponse en fréquences  $T(j\omega)$  est le lieu des points définis en coordonnées polaires par un rayon vecteur égal à la valeur arithmétique  $A$  du module de  $T(j\omega)$  et par un angle polaire  $\varphi$  égal à l'argument de  $T(j\omega)$  (fig.10). Ce lieu est gradué en pulsations  $\omega$ .

### 4. Construction et allure des diagrammes de Nyquist :

A partir des diagrammes de Bode d'une réponse en fréquences  $T(j\omega)$ , il est facile de construire le diagramme de Nyquist de cette réponse. Son allure dépend, aux fréquences élevées, de la différence

$n - m$  entre les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert  $T(p)$  et, aux fréquences basses, de l'ordre de multiplicité  $\alpha$  du pôle à l'origine de  $T(p)$ .

en transposant dans le plan de Nyquist les résultats indiqués précédemment dans le plan de Black, on trouve pour allure des diagrammes de Nyquist lorsque les pulsation tendent vers l'infini et vers zéro les allures représentées figures 11a, b, c et 12a, b, c.

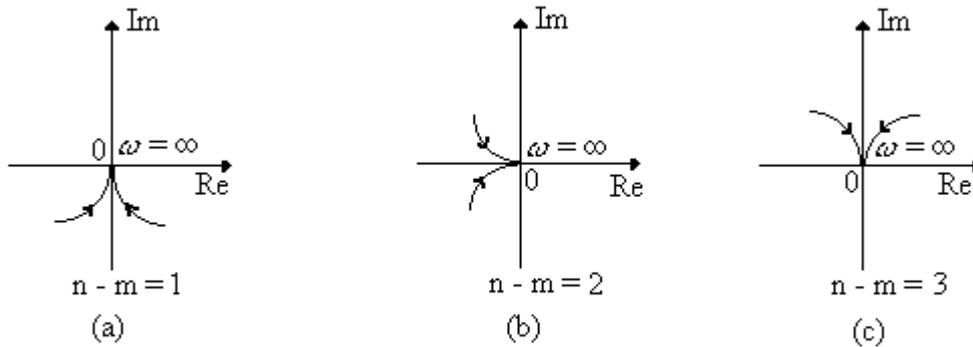


fig.11

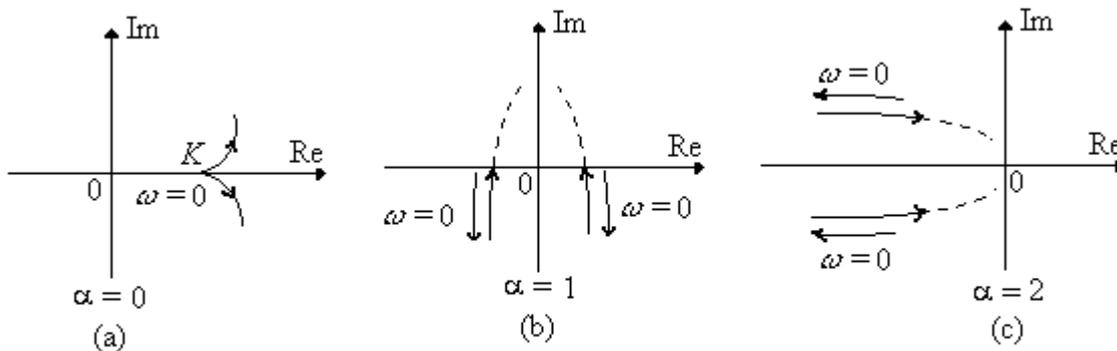


fig.12

## SYSTEME LINEAIRE

### Système de 1<sup>ère</sup> ordre :

A/définition :

On appelle un système linéaire un système de 1<sup>ère</sup> ordre si la relation entre sa sortie et son entrée est décrite par l'équation différentielle :

$$S(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

$\tau > 0$  : constante de temps

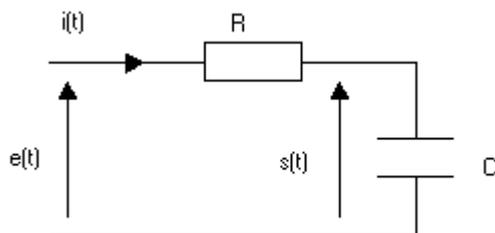
K : gain statique

d'où la transmittance  $H(p)$  :  $S(p) + \tau p S(p) = K E(p)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Exemple des systèmes de 1<sup>ère</sup> ordre :

Circuit RC



$$e(t) = Ri(t) + s(t) \quad \text{or on a} \quad i(t) = C \left( \frac{ds(t)}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow e(t) = RC \left( \frac{ds(t)}{dt} \right) + s(t)$$

$$E(p) = RCp S(p) + S(p) \Rightarrow$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Avec  $K=1$  et  $\tau = RC$

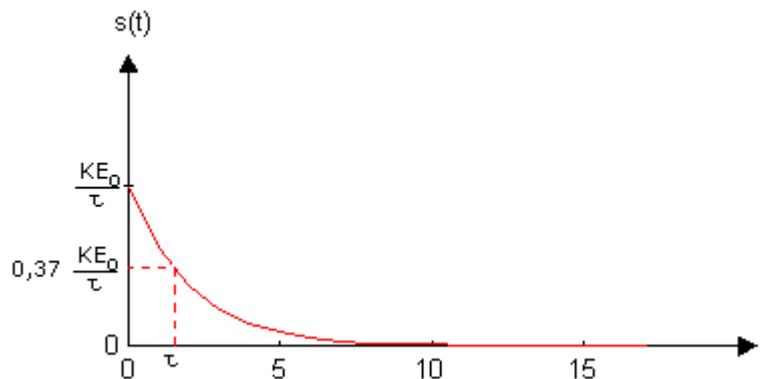
B/ Réponses aux signaux canoniques :

- Réponse impulsionnelle :

$$e(t) = E_0 \delta(t) \Rightarrow E(p) = E_0$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{1 + \tau p}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{KE_0}{\tau} \exp(-t / \tau)$$



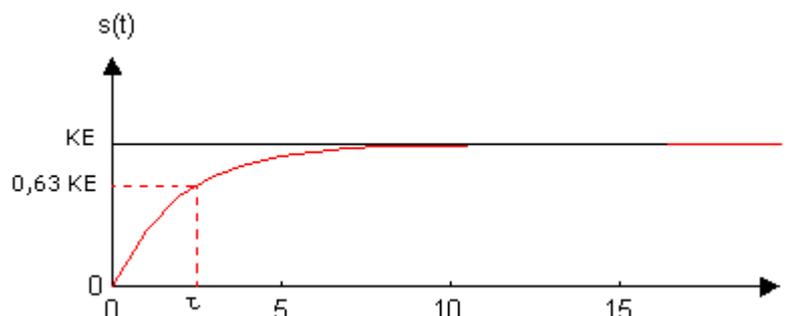
- Réponse indicielle :

$$e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = E_0/p$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE}{p(1 + \tau p)}$$

$$\Rightarrow s(t) = KE \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

- Réponse harmonique (fréquentielle):



$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \exp(j\varphi)$$

avec  $\varphi = -\text{Arctg}(\tau\omega)$

- Lieu de Nyquist:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{K\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2} = X + jY$$

$$X = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \Rightarrow 1 + \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} \Rightarrow \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1$$

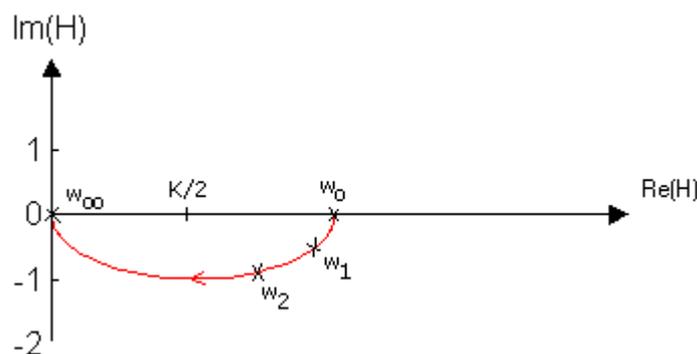
$$Y = - \frac{K\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow Y = - \frac{K\omega\tau}{K/X} = -\tau\omega X$$

$$\Rightarrow Y^2 = \omega^2 X^2 \tau^2 = (K/X - 1)X^2 = KX - X^2$$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 - KX = 0 \Rightarrow (X - K/2)^2 + Y^2 - K^2/4 = 0$$

$$\Rightarrow (X - K/2)^2 + Y^2 = (K/2)^2 \quad \text{cercle de centre } (K/2, 0) \text{ et de rayon } K/2$$



- Lieu de Bode :

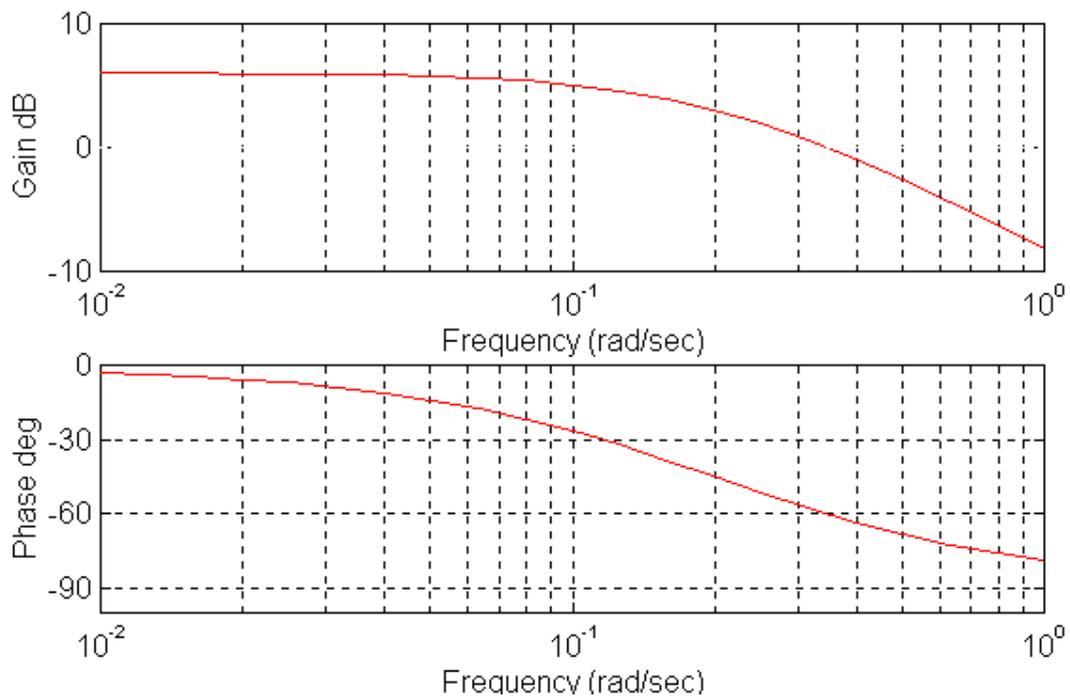
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}} \exp(j\varphi)$$

avec  $\varphi = -\text{Arctg}(\tau\omega)$

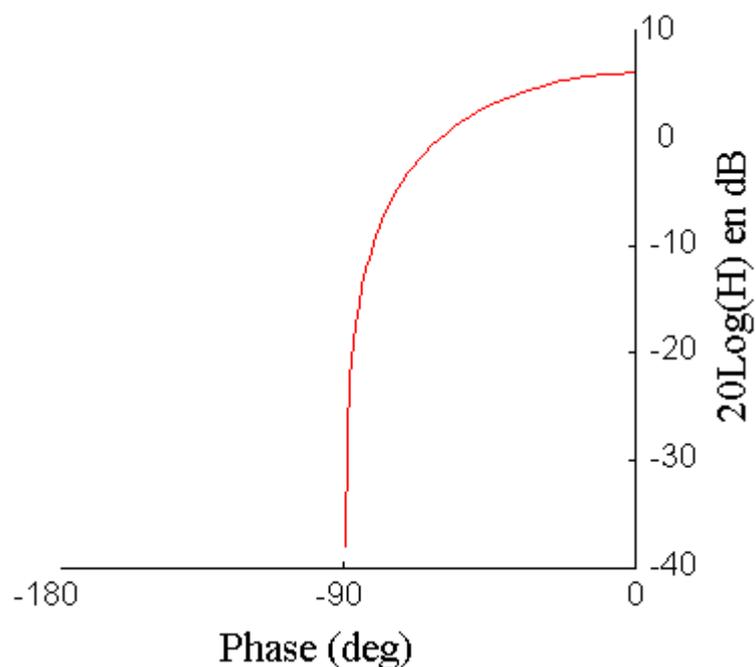
$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}$$

$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 10\text{Log}(1 + \tau^2\omega^2)$$

$$\text{Arg}(H) = -\text{Arg}(1 + j\tau\omega)$$



- Lieu de Black:



**Système de 1<sup>er</sup> ordre généralisé :**

A/ Définition :

Ce sont des systèmes linéaires régie par une équation différentiel de type suivant:

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = K[e(t) + \tau' \frac{de(t)}{dt}]$$

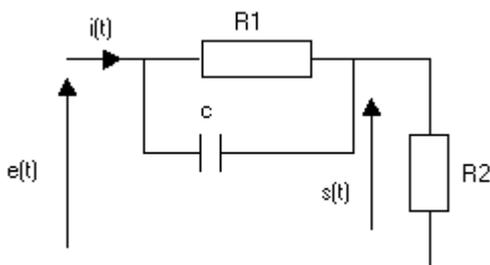
$$\Rightarrow S(p) + \tau p S(p) = K E(p) + K \tau' p E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$$

Si on note  $\tau' = \lambda \tau$

$$\Rightarrow H(p) = K \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$$

**EXEMPLE:**



$$S(p) = \frac{R_2}{R_1/Cp + R_2 + 1/Cp} E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = S(p)/E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{R_2 (R_1 + 1/Cp)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)/Cp} = \frac{R_2 (1 + R_1 Cp)}{(R_1 + R_2) (1 + R_1 R_2 Cp / (R_1 + R_2))}$$

$$\Rightarrow K = R_2 / (R_1 + R_2) ; \tau = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) ; \tau' = R_1 C ; \lambda = (R_1 + R_2) / R_2$$

B/ Réponses aux signaux canoniques :

- Réponse indicielle:

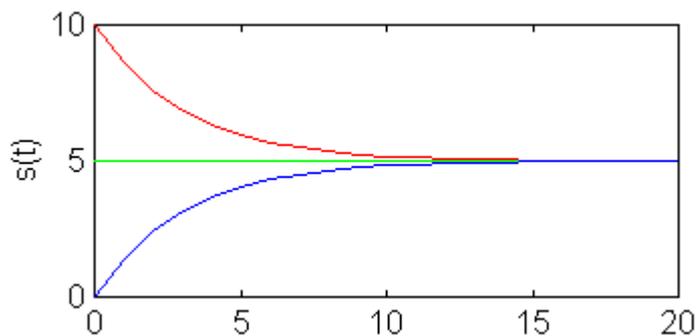
$$e(t) = E_0 u(t); E(p) = E_0/p$$

$$S(p) = KE_0 \frac{(1 + \tau\lambda p)}{(1 + \tau p)p} = \frac{KE_0}{(1 + \tau p)p} + \frac{KE_0\tau\lambda p}{(1 + \tau p)p}$$

$$S(p) = \frac{KE_0}{(1 + \tau p)p} + \frac{KE_0\lambda}{(p + 1/\tau)}$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 - \exp(-t/\tau)) + KE_0\lambda \exp(-t/\tau)$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 + (\lambda - 1) \exp(-t/\tau))$$



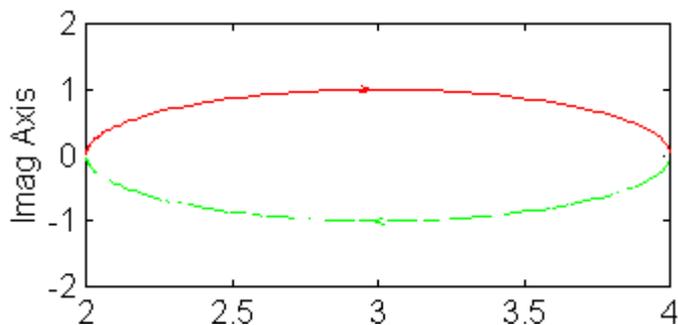
- Réponses harmonique:

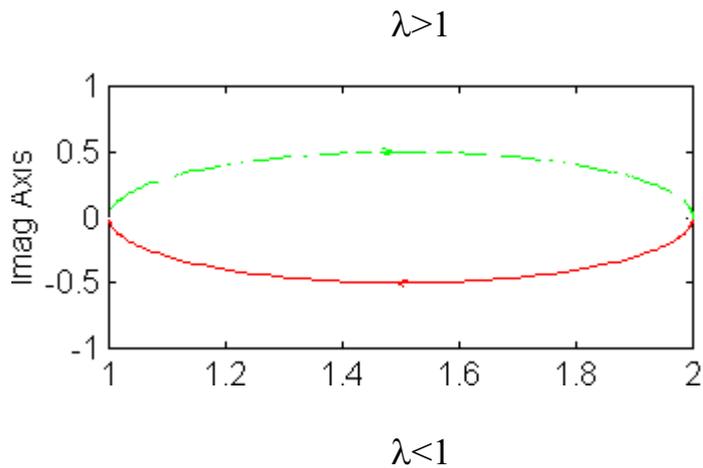
$$H(j\omega) = K \frac{1 + j\omega\lambda\tau}{1 + j\omega\tau} = x + jy$$

$$\Rightarrow y^2 + (x - K(\lambda + 1)/2)^2 = (K(\lambda - 1)/2)^2$$

C'est l'équation d'une cercle de centre  $(K(\lambda + 1)/2, 0)$  et de rayon  $K(\lambda - 1)/2$

- Lieu de Nyquist :





• **Lieu de Bode :**

$$H(j\omega) = K \frac{1}{1 + j\lambda\tau\omega} (1 + j\lambda\tau\omega)$$

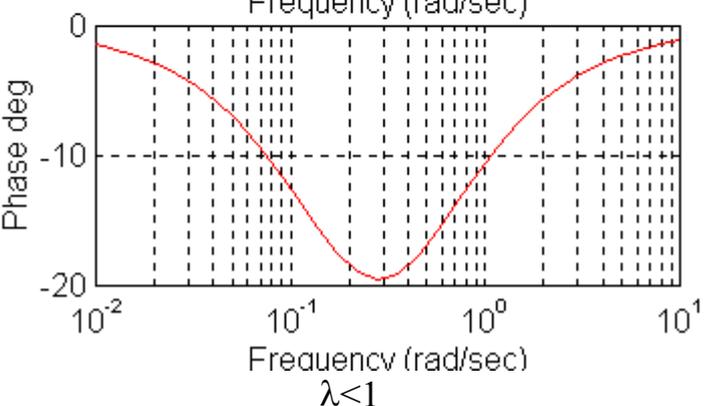
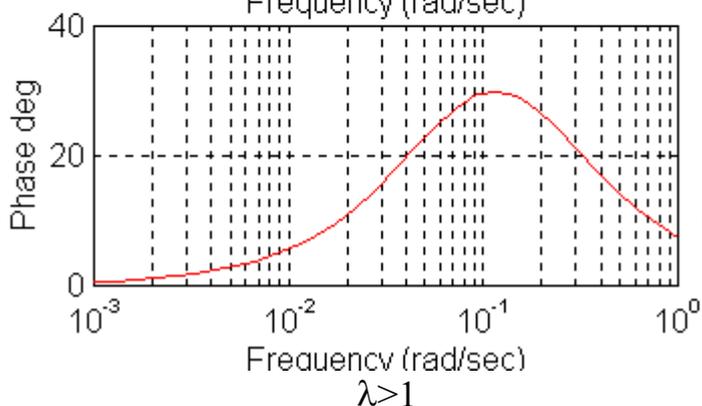
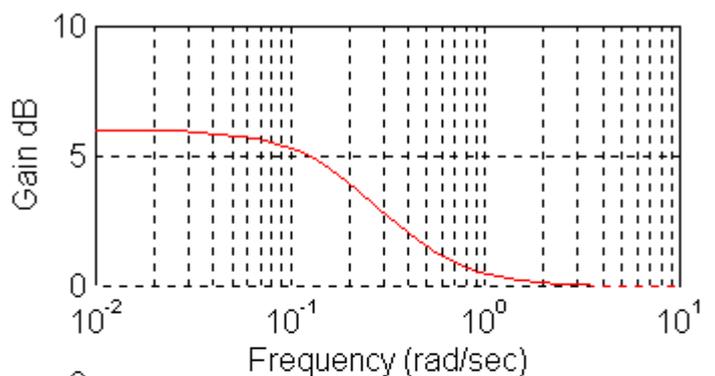
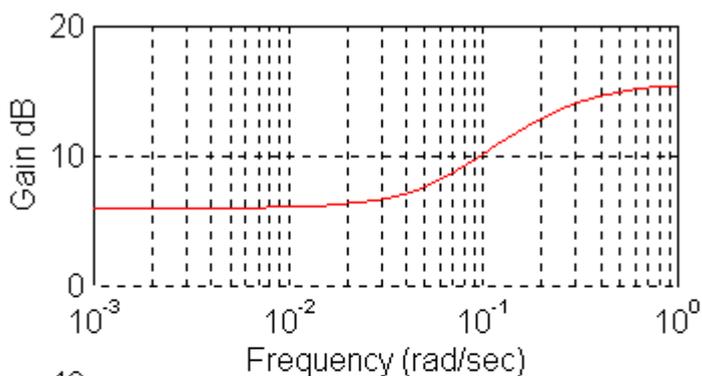
on pose

$$H_1 = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

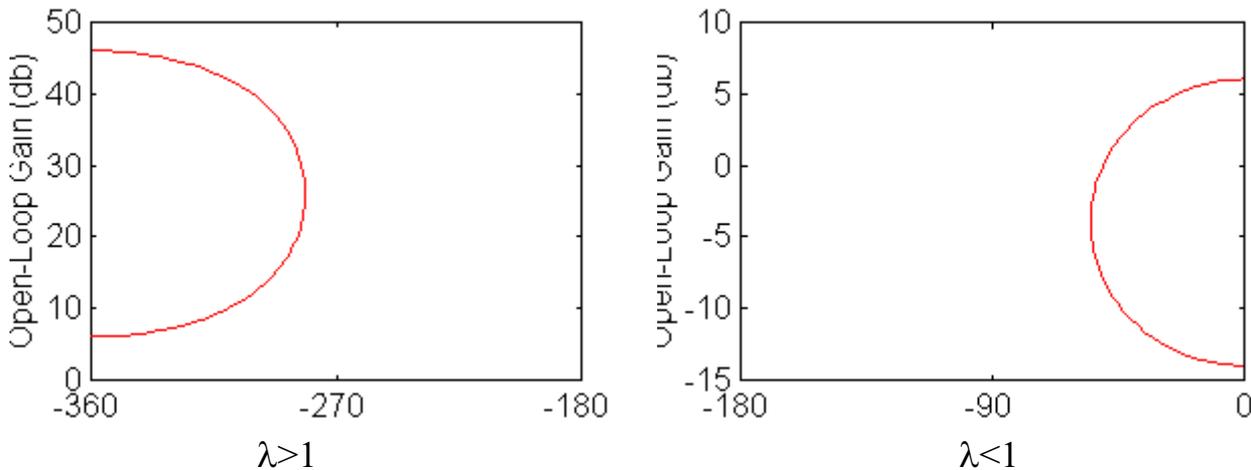
$$H_2 = (1 + j\lambda\tau\omega)$$

$$\Rightarrow 20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(H_1) + 20\text{Log}(H_2) + 20\text{Log}(K)$$

$$\text{Arg}(H) = \text{Arg}(H_1) + \text{Arg}(H_2)$$



• **Lieu de Black :**



**Système du second ordre:**

**3.1 Définition :**

Un système est dit second ordre s'il est régi par une équation différentiel de la forme:

$$d^2s/dt^2 + 2mw_0 ds/dt + w_0^2 s(t) = Kw_0^2 e(t)$$

Avec

$K = s_0/e_0$ : gain statique

$m$ : coefficient d'amortissement

$w_0$ : pulsation propre non amortie

D'où sa transmittance  $H(p)$  :

$$p^2 S(p) + 2mw_0 p S(p) + w_0^2 S(p) = Kw_0^2 E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$$

**3.2 Calcul des racines de l'équation caractéristique :**

$$p^2 + 2mw_0 p + w_0^2 = 0$$

$$\Delta' = m^2 w_0^2 - w_0^2 = w_0^2 (m^2 - 1) \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = w_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

$$a/ m > 1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow p_1 = -m w_0 + w_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

$$p_2 = -m w_0 - w_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

$$b/ m = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j w_0$$

$$c/ m = 1 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = -w_0$$

$$d/ 0 < m < 1 \Rightarrow p_1 = -m w_0 + j w_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

$$p_2 = -m w_0 - j w_0 (m^2 - 1)^{1/2}$$

**3.3 Réponse indicielle :**

$$E(p) = E_0/p$$

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

soit  $p_1$  et  $p_2$  les racines de  $p^2 + 2mw_0 p + w_0^2$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C}{p}$$

$$\text{avec } A = \frac{p-p_1}{Kw_0^2 E_0} ; B = \frac{p-p_2}{Kw_0^2 E_0} ; C = \frac{p}{Kw_0^2 E_0}$$

$$\text{avec } A = \frac{p-p_1}{(p_1-p_2)p_1} ; B = \frac{p-p_2}{(p_2-p_1)p_2} ; C = \frac{p}{p_1 p_2}$$

$$\Rightarrow s(t) = (A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t) + C) u(t)$$

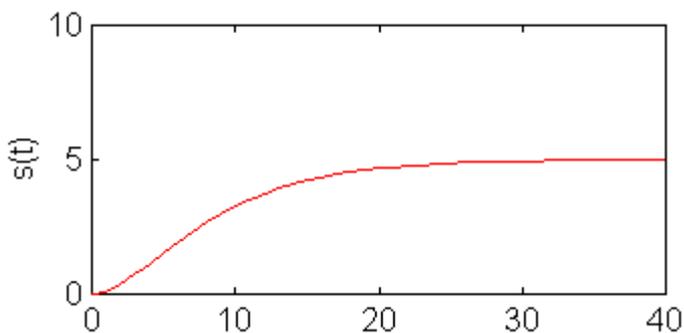
$$a/ m > 1 \quad p_1 = -mw_0 + w_0((m^2-1)^{1/2})$$

$$p_2 = -mw_0 - w_0((m^2-1)^{1/2})$$

$$p_1 p_2 = w_0^2$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right) u(t)$$

$$\text{avec } \tau_1 = -1/p_2 ; \tau_2 = -1/p_1 ; \tau_2 > \tau_1$$



réponse hyperamortie

$$b/ m = 0 \quad p_{1,2} = \pm jw_0$$

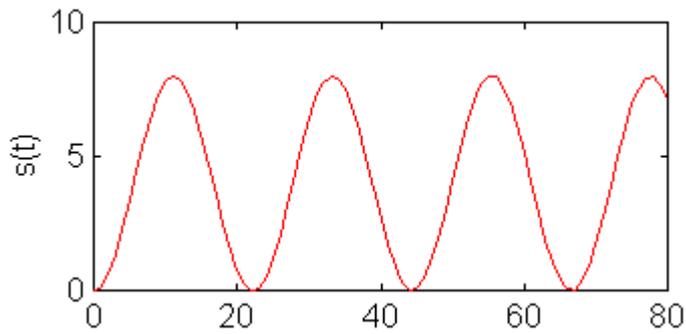
$$p_1 p_2 = w_0^2$$

$$s(t) = KE_0 \left( 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \exp(p_1 t) + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \exp(p_2 t) \right) u(t)$$

$$\text{avec } \frac{p_2}{p_1 - p_2} = \frac{p_1}{p_2 - p_1} = -1/2$$

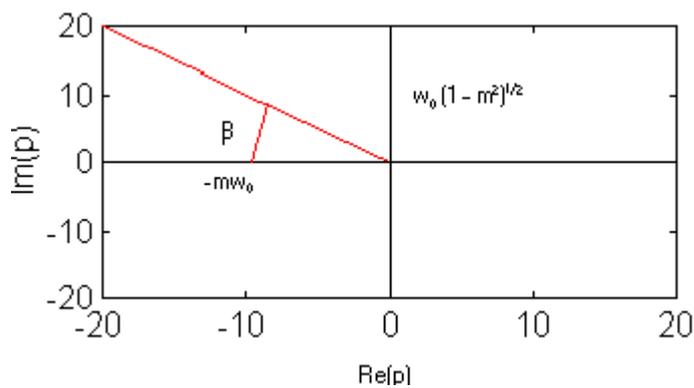
$$s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\exp(jw_0 t) + \exp(-jw_0 t)}{2} \right) u(t)$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 - \cos(w_0 t)) u(t)$$



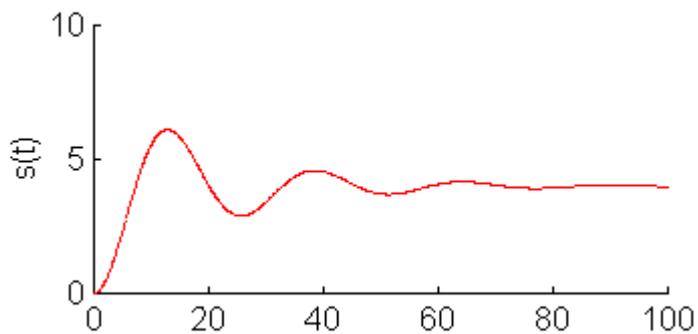
Système oscillant

c/  $0 < m < 1$



$$\cos\beta = m ; \sin\beta = (1-m^2)^{1/2} ; \operatorname{tg}\beta = (1-m^2)^{1/2} / m$$

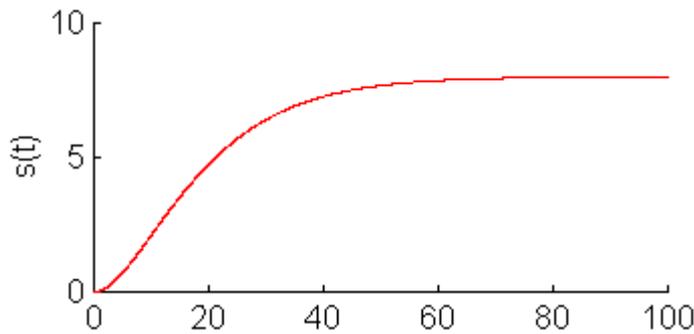
$$\Rightarrow s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\exp(-mw_0 t)}{(1-m^2)^{1/2}} \sin(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta) \right) u(t)$$



système oscillant amortie

d/  $m=1$        $p_1 = p_2 = -w_0$

$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 - (1 + t/\tau) \exp(-t/\tau)) u(t)$       avec  $1/\tau = w_0$



3.4 Paramètres d'un système de 2ème ordre :

a/ **Dépassement : D**

$$D\% = 100 \frac{S_{\max} - S_{\infty}}{S_{\infty}}$$

$\Rightarrow D\% = 100 \exp\left(-\frac{m\Pi}{(1-m^2)^{1/2}}\right)$

b/ **Temps de pic : tp**

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{\exp(-mw_0t)}{(1-m^2)^{1/2}} \sin(w_0(1-m^2)^{1/2}t + \beta)\right)$$

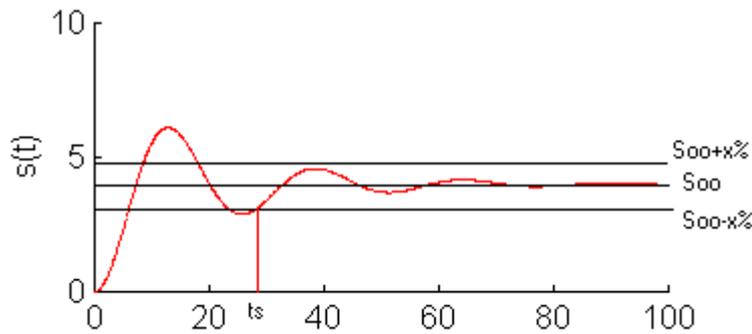
$$\frac{s(t)}{dt} = KE_0 \left(mw_0 \frac{\exp(-mw_0t)}{(1-m^2)^{1/2}} \sin(w_0(1-m^2)^{1/2}t + \beta) - KE_0 \left(\frac{\exp(-mw_0t)}{(1-m^2)^{1/2}}\right) w_0(1-m^2)^{1/2} \cos(w_0(1-m^2)^{1/2}t + \beta)\right) = 0$$

$\Rightarrow \text{tg}(w_0(1-m^2)^{1/2}t + \beta) = (1-m^2)^{1/2} / m = \text{tg}\beta \Rightarrow w_0(1-m^2)^{1/2}t = k\Pi$   
 $\Rightarrow t = k\Pi / w_0(1-m^2)^{1/2}$       avec  $(k = 1,2,3, \dots)$

temps de 1<sup>ère</sup> pic       $tp = \frac{\Pi}{w_0(1-m^2)^{1/2}}$

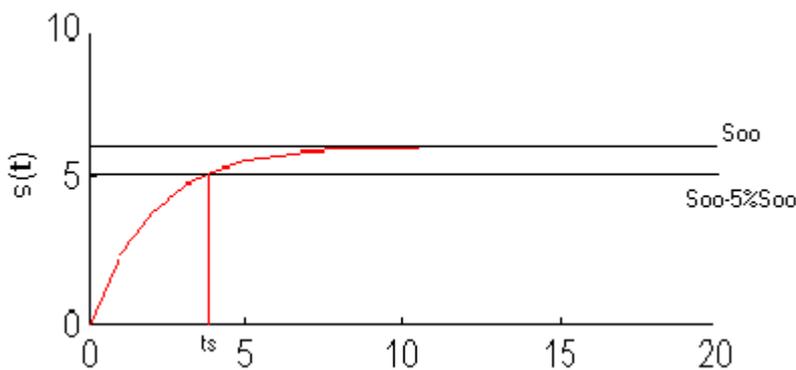
c/ **Temps de stabilisation : ts**

- $t_s$  pour un système de 2<sup>ème</sup> ordre : déterminer graphiquement
- $t_s$  à  $\pm 5\%$        $t_s \approx 3/m\omega_0$
- $t_s$  à  $\pm 2\%$        $t_s \approx 4/m\omega_0$



- $t_s$  pour un système de 1<sup>ère</sup> ordre: déterminer analytiquement ou graphiquement
- $s(t) = KE ( 1 - \exp(-t/\tau) )$
- $t_s$  à 5%  $\Rightarrow 0,95KE = KE ( 1 - \exp(-t_s/\tau) )$
- $\Rightarrow \exp(-t_s/\tau) = 0,05$

$\Rightarrow t_s = 3\tau$



**d/ Influence des paramètres sur les réponses indicielles :**

- variation de K  $\Rightarrow$  variation de  $S_{\infty}$
- variation de m  $\Rightarrow$  variation de D,  $t_p$ ,  $t_s$
- variation de  $\omega_0$   $\Rightarrow$  variation de  $t_p$ ,  $t_s$

**3.5 Réponse harmonique des systèmes de 2ème ordre :**

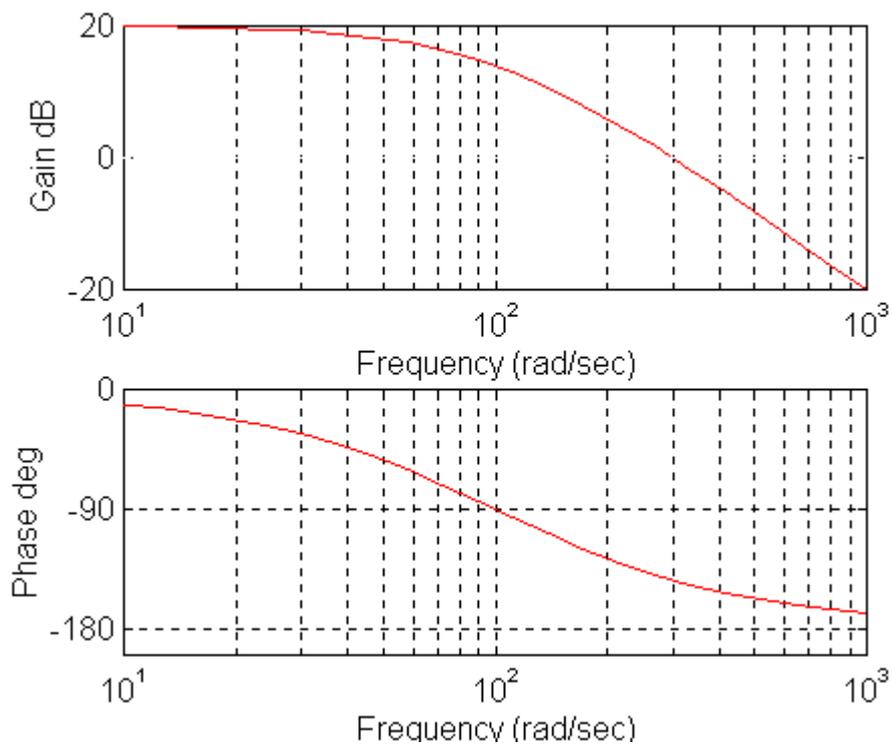
a/  $m=1$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)}$$

**Lieu de Bode**

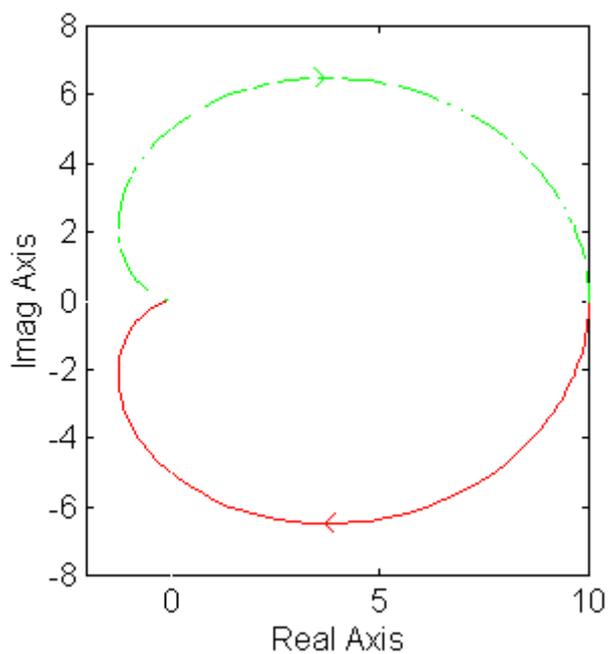
$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}(1 + j\tau_1^2\omega^2) - 20\text{Log}(1 + j\tau_2^2\omega^2)$$

$$\text{Arg}(H) = -\text{Arg}(1 + j\tau_1\omega) - \text{Arg}(1 + j\tau_2\omega)$$

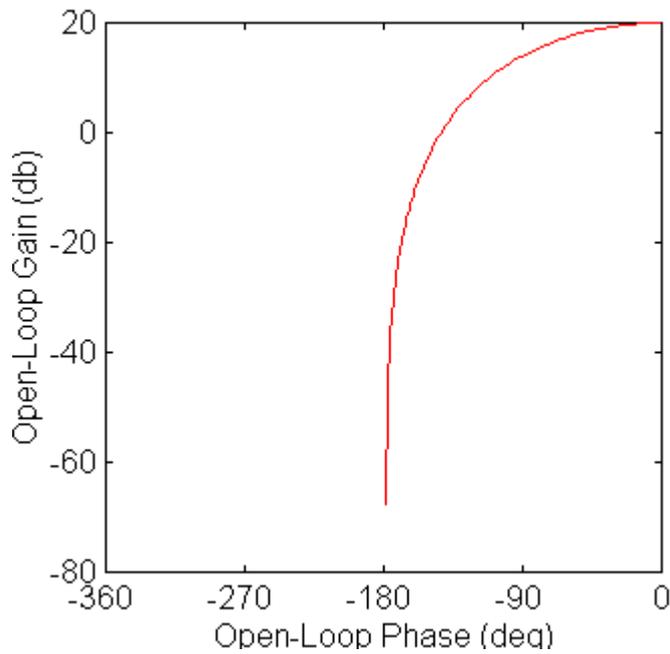


**Lieu de Nyquist**

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau_1\omega + j\tau_2\omega - \tau_1\tau_2\omega^2} = \frac{K(1 - \tau_1\tau_2\omega^2)}{1 + (j\omega(\tau_1 + \tau_2) - \tau_1\tau_2\omega^2)}$$



**Lieu de Black**



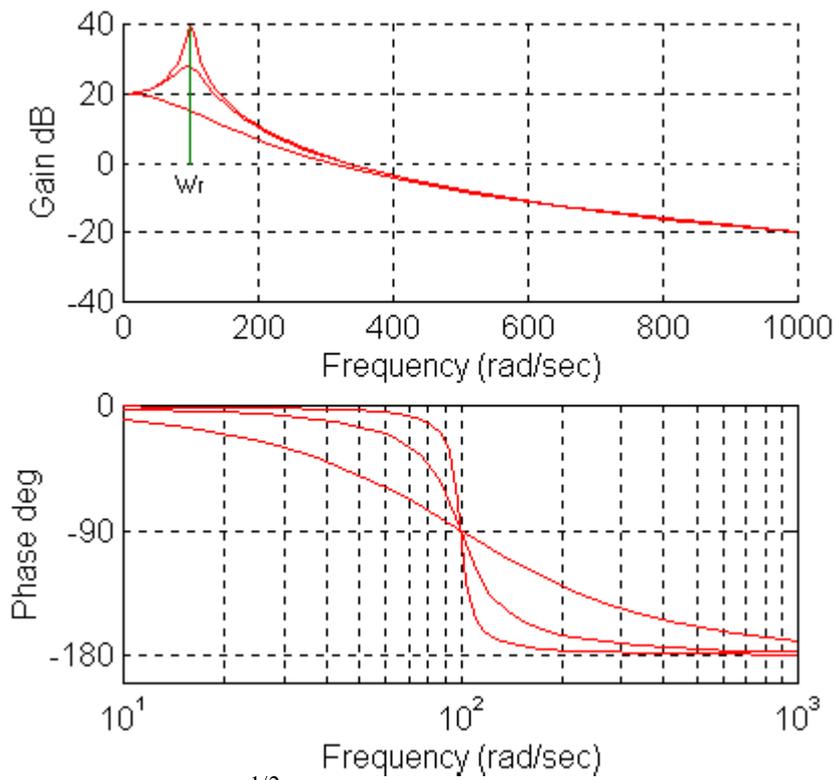
b/  $0 < m < 1$

$$p_{1,2} = -mw_0 \pm jw_0(1 - m^2)^{1/2}$$

$$H(jw) = \frac{Kw_0^2}{w_0^2 - w^2 + 2jmw_0w} \Rightarrow |H| = \frac{Kw_0^2}{((w_0^2 - w^2)^2 + 4m^2w^2w_0^2)^{1/2}}$$

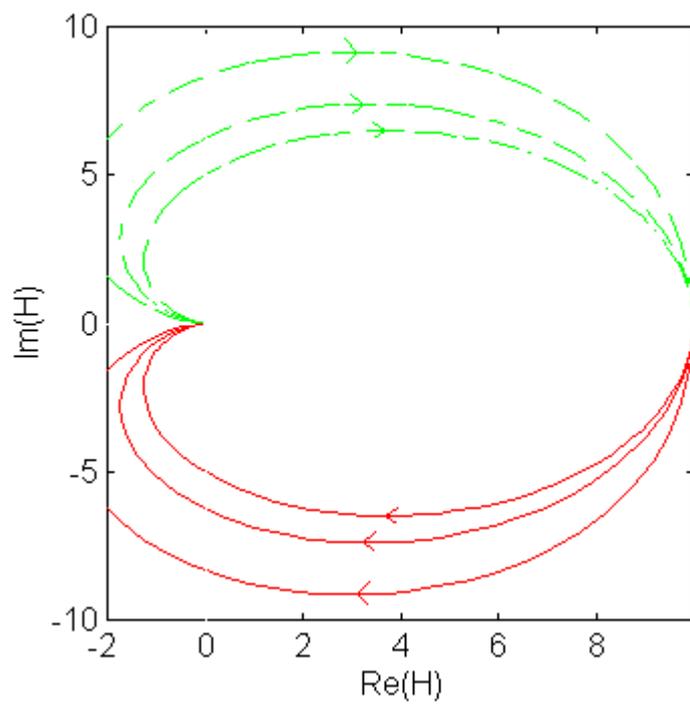
$$\begin{aligned} w \longrightarrow 0 &\Rightarrow |H| \longrightarrow K \\ w \longrightarrow \infty &\Rightarrow |H| \longrightarrow Kw_0^2/w^2 \end{aligned}$$

**Lieu de Bode**

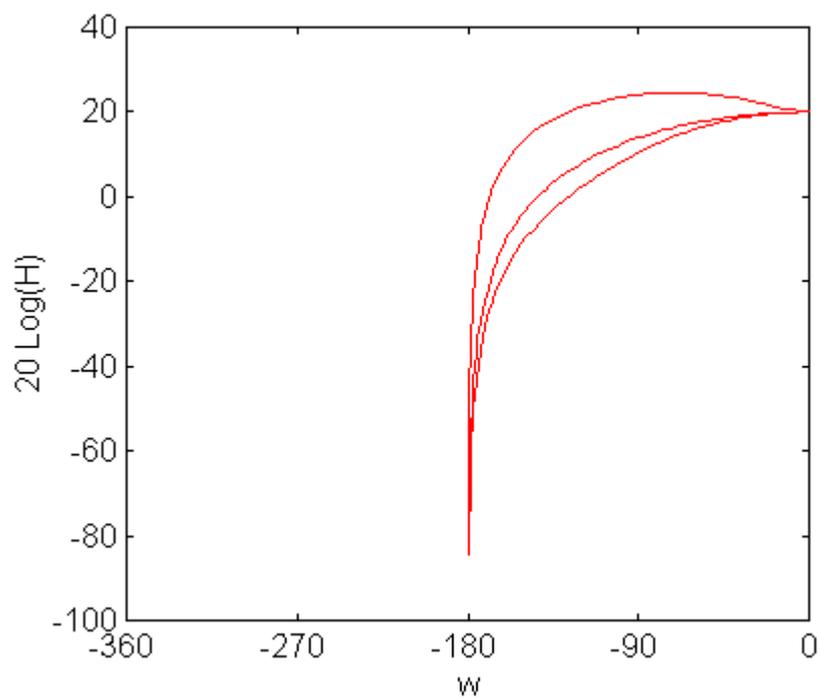


$$w_r = w_0 (1-2m^2)^{1/2}$$

**Lieu de Nyquist**

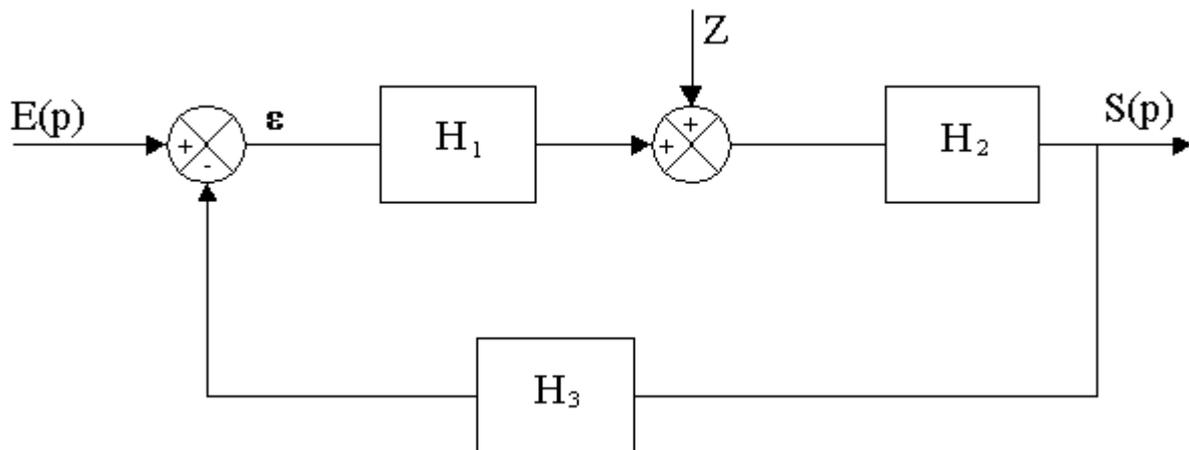


**Lieu de Black**



**ANALYSE EST SYNTHÈSE DES SYSTEMES**  
**ASSERVIS LINEAIRE PAR LA**  
**METHODE TEMPORELLE**

**VI. Introduction :**



E : entrée (consigne)

S : sortie

$\varepsilon$  : erreur

Z : perturbation

$H_1, H_2, H_3$  : transmittances

- Si  $Z = 0$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} = G_1$$

- Si  $E = 0$

$$\frac{S(p)}{Z(p)} = \frac{H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} = G_2$$

$$\boxed{S(p) = G_1 E + G_2 Z}$$

- $1 + H_1 H_2 H_3$  : **équation caractéristique du système**

l'équation caractéristique c'est le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

*Remarque :*

Un système asservi est dit performant s'il est : - stable

- rapide
- précis

Le but de l'étude temporelle est d'étudier les 3 caractéristiques fondamentales d'un système asservi : cette étude est basée sur l'équation caractéristique.

**VII. Etude de la stabilité :**

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité est : si les racines de l'équation caractéristique (les zéros de D(p)) sont négatives ou à partie réelle négative.

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

**Remarque :**

L'étude de la stabilité consiste à résoudre l'équation D(p) = 0 ce qui rend cette condition inexploitable lorsque l'ordre du système devient important.

Il suffit de déterminer la partie réelle des racines en utilisant le *critère de Routh*.

**VIII. Critère de Routh :**

Table de Routh

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	$a_0$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...	$a_1$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	
$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	

avec :

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \quad ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

Si le système est d'ordre  $n$  on a  $(n+1)$  ligne sur la table de Routh.  
La condition nécessaire et suffisante de la stabilité s'explique sur le tableau de Routh par :

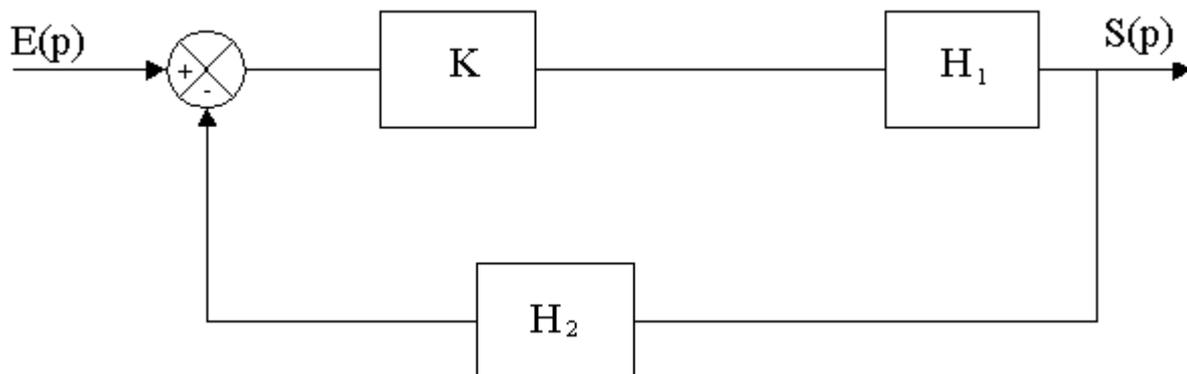
- Tous les  $a_i$  sont positifs.
- Tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> colonne du tableau de Routh sont positifs (ou de même signe).

**Remarque :**

- Pour chaque ligne on peut multiplier tous les coefficients par un coefficient positif quelconque.
- Le nombre de changement de signe sur la 1<sup>ère</sup> colonne de Routh est égal au nombre de pôles a partie réelle positif.

Exemples d'application :

1) soit le schéma fonctionnel suivant



avec :

$$H_1 = \frac{1}{(1+8p)(1+2p)} \quad ; \quad H_2 = \frac{1}{1+0,5p}$$

Déterminer K pour que le système soit stable ?

$$G(p) = \frac{KH_1}{1 + KH_1H_2} = \frac{K(1 + 0,5p)}{K + (1 + 0,5p)(1 + 2p)(1 + 8p)}$$

l'équation caractéristique est donc :

$$\Rightarrow D(p) = K + (1 + 0,5p)(1 + 2p)(1 + 8p) = 8p^3 + 21p^2 + 10,5p + (1 + K)$$

no

le système est d'ordre 3 d'où le tableau de Routh contient 4 lignes

8	10,5
21	K+1
$\frac{(21 \times 10,5) - 8(K + 1)}{21}$	0
K+1	

$\Rightarrow$  pour que le système soit stable il faut que :

$$\begin{cases} \frac{220,5 - 8(K + 1)}{21} > 0 \\ K + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < 26,5625 \\ K > -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow -1 < K < 26,5625} \Rightarrow \text{le système est stable.}$$

2) Soit un système décrit par l'équation suivante :  $D(p) = p^4 + p^3 - p - 1$   
Déterminer le nombre des pôles à partie réelle positive ?

table de Routh

1	0	-1
1	-1	0
1	-1	0
$\varepsilon > 0$	0	0
-1		

On a un seul changement de signe donc on a un seul pôle à partie réelle positif.

### **IX. Rapidité d'un système asservi linéaire :**

#### **4. Rappel sur les systèmes de second ordre :**

$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad \text{et} \quad 4m^2 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2}$$

On constate que la rapidité d'un système de second ordre est étroitement lié au coefficient d'amortissement  $m$ , par analogie au système de 2<sup>ème</sup> ordre on va définir pour un système d'ordre quelconque des critères d'amortissement qui dépendent des coefficients de l'équation caractéristiques.

## 5. Critère algébrique d'amortissement : Critère de NASLIN :

Soit  $G(p)$  une fonction de transfert d'un système d'ordre  $n$  :

$$G(p) = \frac{K}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

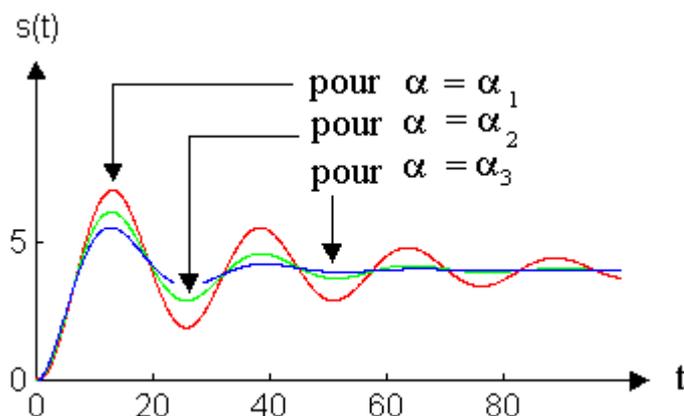
on définit les critères algébriques suivants :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \\ \alpha_2 &= \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \\ \alpha_3 &= \frac{a_3^2}{a_2 a_4} \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} &= \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}}$$

Le critère algébrique d'amortissement consiste à donner lorsque si possible à ces rapports caractéristiques une valeur supérieur ou égale à  $\alpha$  ( $\alpha$  étant fixé).

### Expérience 1 :

- on fixe  $n$  (ordre du système)  $> 2$
- on trace des réponses indicielles pour différentes valeurs de  $\alpha$  .



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  ; pour n fixe et  $\alpha$  variable  
on constate que D varie avec  $\alpha$ .

### Expérience 2 :

- on varie n ( $n > 2$ )
- on trace les réponses pour  $\alpha = \alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \text{cte}$   
pour une même valeur de  $\alpha$  et pour n variable on constate qu'on a des dépassements presque égaux.

A partir de ces 2 expérience on dresse le tableau de valeur suivant :

$\alpha$	1,6	1,75	2	2,4
D%	40	20	6	1
m	0,3	0,45	0,7	0,9

$\alpha$  est relié à D% par la relation

$$\boxed{\text{Log}(D\%) = 4,8 - 2\alpha} \quad ;$$

le temps de pic est déterminé par la relation

$$\boxed{tp = 2,2 \frac{a_1}{a_0}}$$

### Exemples d'application :

1) Soit un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{8p^3 + 21p^2 + 10,5p + (1 + K)}$$

Déterminer la valeur de K qui garantit un dépassement inférieur ou égale à 6% ?

$$D\% \leq 6\% \Rightarrow \alpha_i \geq 2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(10,5)^2}{21(K+1)} \geq 2$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(21)^2}{8 \times 10,5} \geq 2$$

$$\alpha_1 \geq 2 \Rightarrow K \leq \frac{(10,5)^2}{42} - 1$$

$$\Rightarrow K \leq 1,625$$

2) Soit un système tel que :

$$H(p) = \frac{0,25}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 0,25}$$

Calculer le dépassement et le temps de pic ?

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{1}{0,25 \times 2} = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{4}{1 \times 2} = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

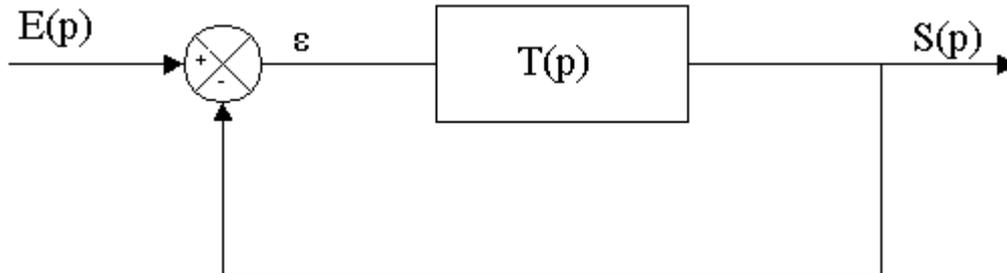
d'où :

$$\text{Log}(D\%) = 4,8 - 2 \times 2 \quad \Rightarrow D\% = 6\%$$

$$tp = 2,2 \frac{a_1}{a_0} \Rightarrow tp = 2,2 \frac{1}{0,25} \quad \Rightarrow tp = 8,8s$$

## Précision des systèmes asservis linéaires :

### 4. Système à retour unitaire :



$$\varepsilon(p) = \text{consigne} - \text{sortie} = E(p) - S(p)$$

On définit deux régime de fonctionnement :

- régime transitoire (régime dynamique)  $\Rightarrow$  Erreur dynamique
- régime permanent (régime statique)  $\Rightarrow$  Erreur statique

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

$\varepsilon(p)$  ?

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - T(p) \varepsilon(p)$$

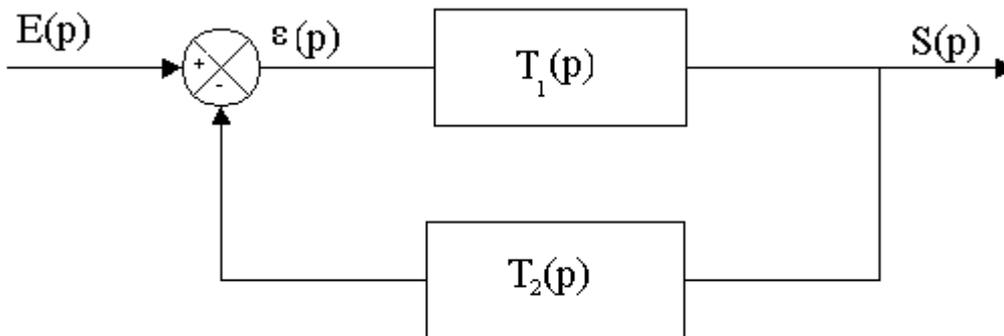
$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

d'où :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

on constate que l'erreur dépend de l'entrée et du système

### 5. Système à retour non unitaire :

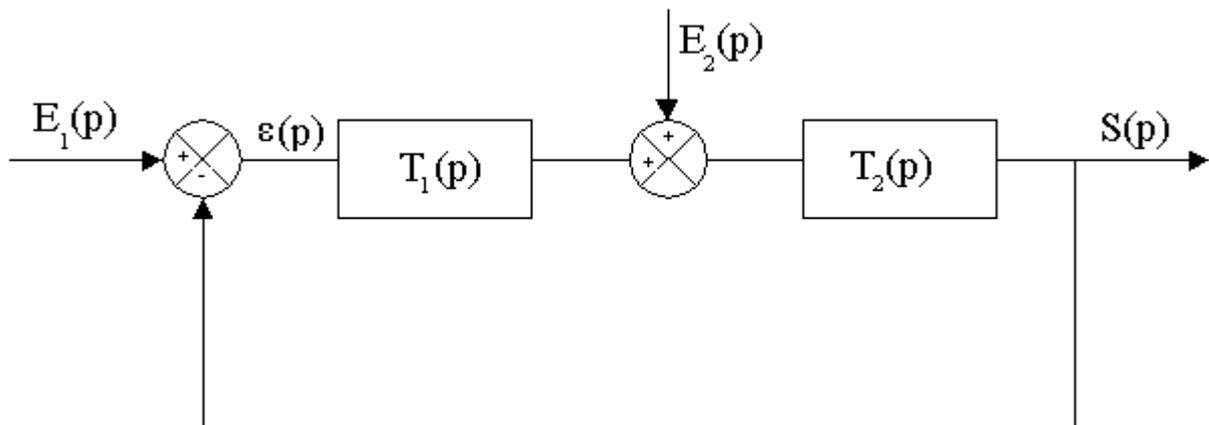


$$\varepsilon(p) = E(p) - T_2(p) S(p) \quad S(p) = T_1(p) \varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

6. Système à deux entrées :



$$\varepsilon(p) = E_1(p) - S(p) = E_1(p) - T_2(p) (E_2(p) + T_1(p) \varepsilon(p))$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E_1(p) - T_2(p)E_2(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_1(p) - T_2(p)E_2(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

dans la suite on va s'intéresser à l'erreur pour un système à retour unitaire.

## X. Classe d'un système asservi :

Système à retour unitaire

$$T(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots}{a_0 + a_1 p + \dots} = \frac{K_\alpha}{p^\alpha} \frac{1 + \dots}{1 + \dots} \quad : \text{transmittance en boucle ouvert d'un}$$

système à retour unitaire

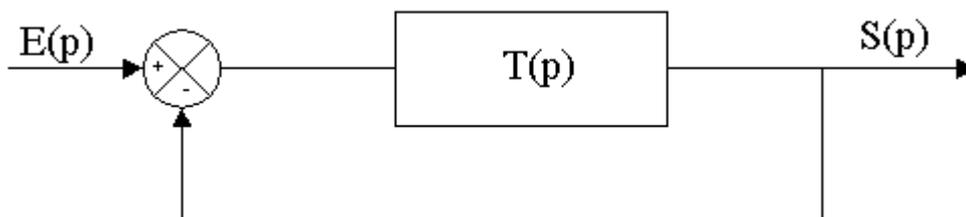
$\alpha$  : nombre d'intégration dans  $T(p)$ , si  $p \rightarrow 0$  on a :

$$T(p) \cong \frac{K_\alpha}{p^\alpha}$$

$\alpha$  : classe de système

**Exemples :**

1-  $T(p) = \frac{K}{p^2(1+Tp)}$   $\rightarrow$  ce système est de classe 2



2-  
avec :

$$T(p) = \frac{K}{ap^3 + bp^2 + cp} \quad \rightarrow \text{ce système est de classe 1}$$

l'erreur en régime permanent pour un tel système est :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

elle peut s'écrire encore :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + \frac{K_{\alpha}}{p^{\alpha}}}$$

on va dresser un tableau d'erreur en tenant compte de la nature de l'entrée et de la classe du système

### Tableau des erreurs statiques :

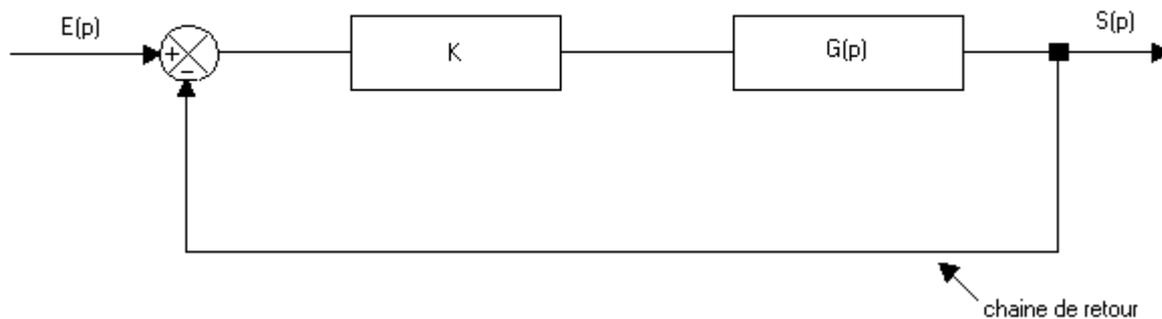
entrée \ $\alpha$	0	1	2	3
Impulsion $e(t)=E_0 \delta(t)$	0	0	0	0
Echelon $e(t)=E_0 u(t)$	$\frac{E_0}{1+K_0}$	0	0	0
Echelon de vitesse $e(t)=E_0 t u(t)$	$\infty$	$\frac{E_0}{K_1}$	0	0
Echelon d'accélération $e(t)=E_0 t^2 u(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{E_0}{K_2}$	0

**Remarques :** on constate d'après ce tableau que :

- La précision augmente avec la classe de système
- L'erreur statique pour une entrée impulsionnelle vaut zéro
- Pour une classe donnée l'erreur se détériore si le signal d'entrée devient plus dût

## Analyse et synthèse des S.A.L par la méthode Harmonique

### 1. Introduction :

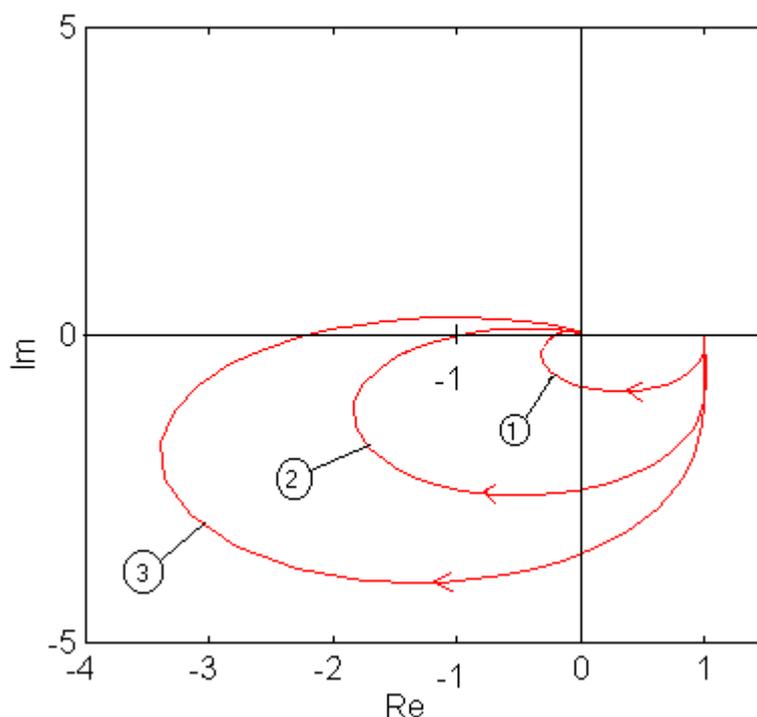


Souvent on ne dispose pas de  $G(p)$  par contre des essais expérimentaux sont possible, le traçage de  $G(p)$  (tracé de Bode, Nyquist, Black) nous permet de conclure sur la stabilité.

Il s'agit d'étudier la stabilité en boucle fermée à partir de tracé de sa transmittance en boucle ouverte.

### 2. Critère de Nyquist :

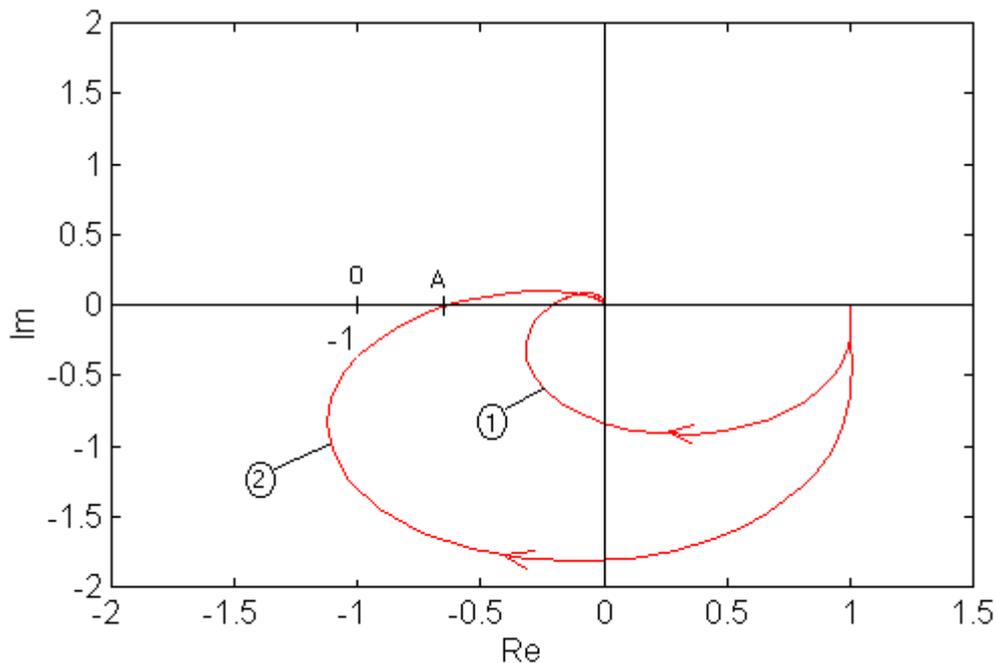
Un système stable en boucle ouverte et stable en boucle fermé si la courbe de Nyquist de  $G(j\omega)$  d'écrite dans le sens des fréquences croissantes laisse le point critique de coordonné  $(-1,0)$  à sa gauche.



Le système 1 est stable, le système 2 est marginalement stable, le système 3 est instable.

## 2. Marge de gain : **MG**

Soient deux systèmes de transmittance  $G_1$  et  $G_2$  en boucle ouverte.



En voie intuitivement que 1 est plus stable que 2, la notion de marge de gain permet de quantifier cette impression.

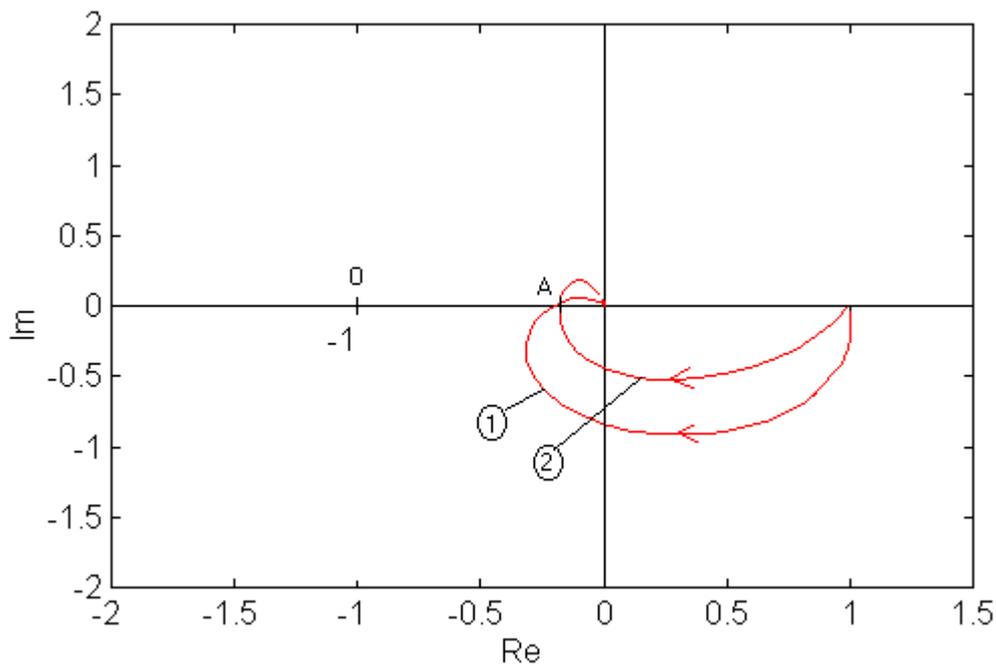
Par définition la marge de gain est donnée par l'inverse de la distance OA, 'A' étant l'intersection de  $G(j\omega)$  avec l'axe de réel.

$$MG = a = 1/OA$$

$$MG_{db} = a_{db} = -20\text{Log}(OA)$$

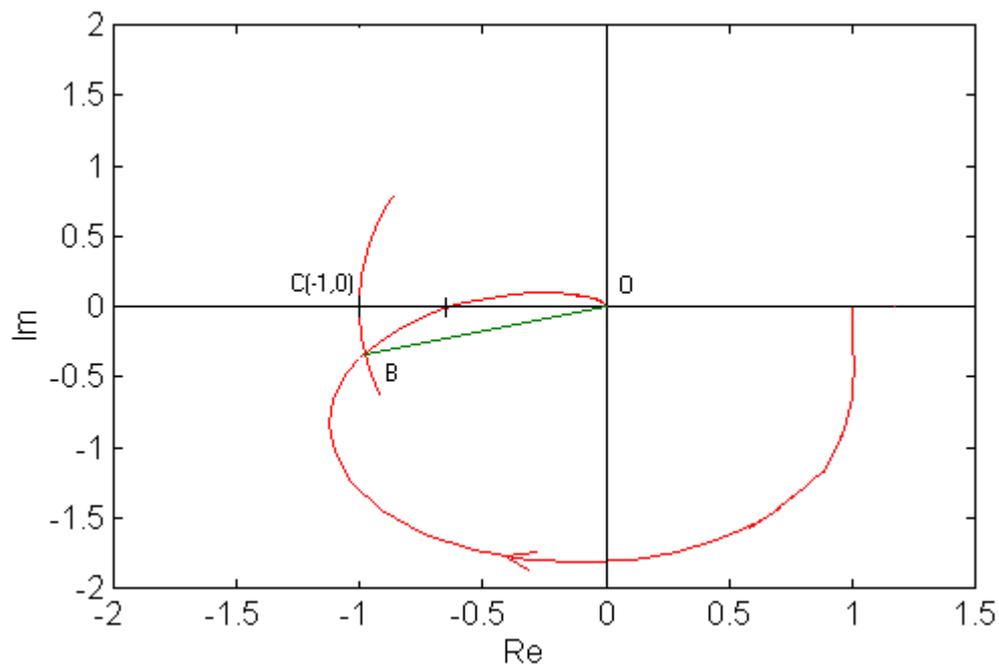
La condition nécessaire de stabilité est que la marge de gain soit positive, cette condition est nécessaire mais elle n'est pas suffisante.

## 4. Marge de phase :



2 est plus stable que 1 tandis qu'ils ont la même marge de gain ce si nous montre que la notion de marge de gain reste insuffisante pour caractériser la stabilité d'un système si pour ce là nous introduisons la notion de marge de phase.

Soit 'B' l'intersection de cercle de centre 'O' et de rayon 1 avec la courbe de



Nyquist, l'angle orienté  $CB = \psi$  correspond à la marge de phase et compté positivement dans le sens trigonométrique  $\psi = \Pi + \text{Arg}G(j\omega)$

**Condition de stabilité de Nyquist :**

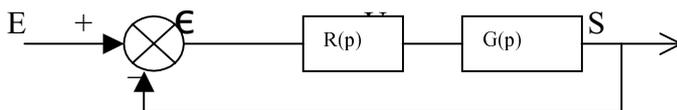
Un système stable en boucle ouverte et stable en boucle fermé si  $\psi > 0$  et  $a_{db} > 0$ .

## Chapitre VII

# Les régulateurs

### Les régulateurs

#### I- Introduction :



$G(p)$  : Processus à régler

$R(p)$  : Régulateur

$\varepsilon(p)$  : Erreur

$E(p)$  : Consigne

$U(p)$  : Signal de commande

**II- Rôle des régulateurs ou correcteurs :**

- ❑ Pour obtenir une bonne précision il faut avoir une ou plusieurs intégration en chaîne directe .
  - ❑ Pour avoir un bon degré de stabilité il faut que :
    - Le gain soit le plus faible possible en B.O d'où une faible B.P .
    - Le déphasage soit faible d'où un minimum d'intégration possible .

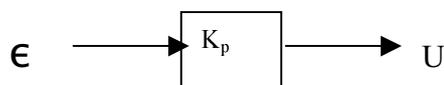
(régulateur proportionnel ) .

Les régulateurs ou correcteurs ont pour but de délivrer un signal de commande U du système de manière à préserver les exigences de précision et de stabilité , à priori incompatibles. On distingue deux types de correcteurs : Correcteurs série et correcteurs parallèle.

**1-Correcteurs série :**

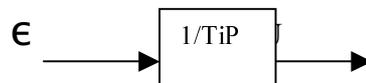
Le correcteur série est inséré en série avec la chaîne direct (avec le processus ). On distingue trois fonctions principales :

**d- Action proportionnelle :**



$$U(p) = K_p \epsilon(p) ; u(t) = K_p \epsilon(t)$$

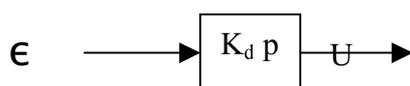
**e- Action intégral :**



$$U(p) = (1/T_i p) \epsilon(p) = (K_i / p) \epsilon(p)$$

$$u(t) = 1/T_i \int \epsilon(\theta) d\theta ; \quad K_i = 1/T_i$$

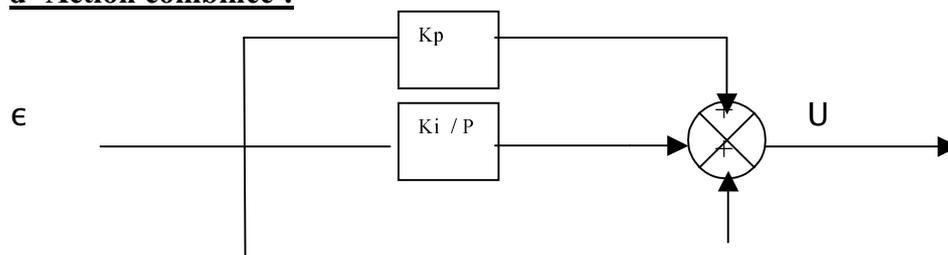
**f- Action dérivée :**



$$U(p) = K_d p . \epsilon(p) ;$$

$$u(t) = K_d . (d\epsilon(t) / t) ;$$

**d- Action combinée :**



$$U(p) = (K_p + K_i/p + K_d \cdot p) \varepsilon(p) \quad \boxed{K_d \cdot p} \text{ correcteur PID}$$

**I** : annule l'erreur statique

**P** : améliore la stabilité et la précision

**D** : stabilité + rapidité

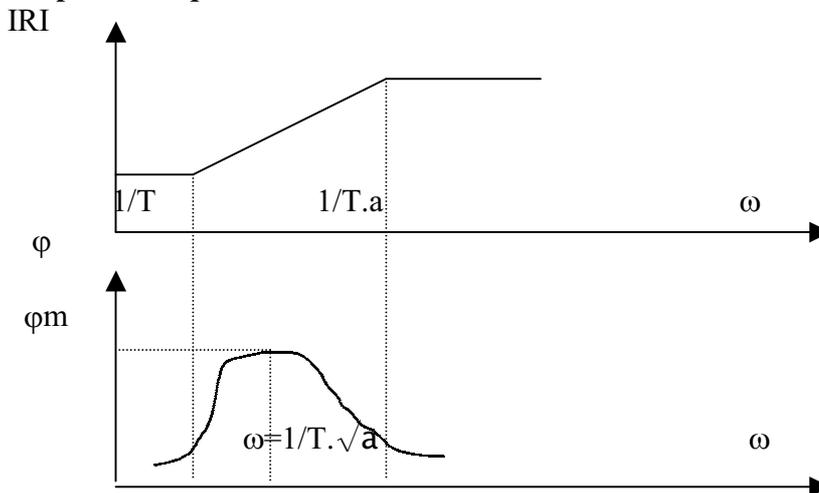
**d- Correction par retard de phase** : ou correcteur proportionnel dérivé

$$R(p) = U(p)/E(p) = K_p + K_d \cdot p = K(1+T_d \cdot p)$$

L'action dérivée n'est pas physiquement réalisable elle est approximée par une transmittance de la forme :  $T_d \cdot p / (1+\tau \cdot p)$  ;  $\tau < T_d$

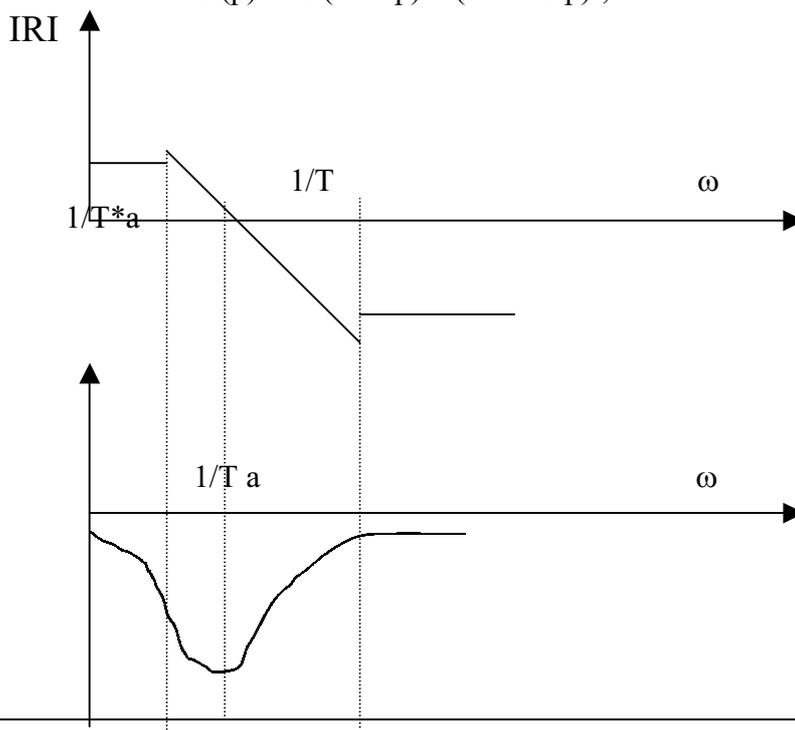
$$\begin{aligned} R(p) &= K (1 + (T_d \cdot p / (1+\tau \cdot p))) \\ &= K (1+\tau \cdot p + T_d \cdot p) / (1+\tau \cdot p) \\ &= K(1+(\tau+T_d \cdot p) / (1+\tau \cdot p)) \\ R(p) &= K (1+T \cdot p) / (1+ a \cdot T \cdot p) ; \quad a < 1 \end{aligned}$$

□ Réponse fréquentielle :



□ Correction à avance de phase ( ou PI ) :

$$R(p) = K (1+T \cdot p) / (1+ a \cdot T \cdot p) ; \quad a > 1$$





**Remarque :**

Un correcteur à avance de phase élève la courbe de phase dans la région BF et MF et abaisse la courbe de gain dans BF par contre un correcteur à retard de phase abaisse la courbe de gain dans HF et abaisse la courbe de phase, dans certains cas on doit faire une correction par avance de phase pour répondre aux exigences des systèmes.

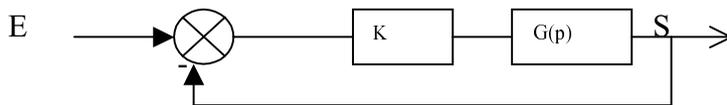
## Chapitre VIII

# **Analyse & Synthèse des Systèmes Asservis Linéaires par la méthode du lieu des pôles**

**Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaires  
par la méthode du lieu des pôles**

**□ Introduction :**

Variation du lieu des pôles en fonction du gain.



$$\text{F.T.B.O : } KG(p) = \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + a_{m-2}p^{m-2} + \dots + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0}; m \leq n$$

$$= K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

Le système est stable si les pôles de  $\frac{KG(p)}{1 + KG(p)}$  sont à parties réelles négatives

Les pôles sont les racines de  $1 + KG(p) = 0$  : E.C

$$1 + KG(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{N(p)}{D(p)} = 0$$

Soit  $D(p) + KN(p) = 0$

En générale, la position des racines change quand K varie. le géométrique des racines tracés dans le plan P en fonction de K s'appelle lieu des racines.

Si  $K = 0$  les racines de l'E.C sont les pôles de G le lieu des racines part toujours d'un pôle de la fonction en B.O.

→ Si  $K \rightarrow \infty$  les racines tendent vers les zéros de G ( p ) .

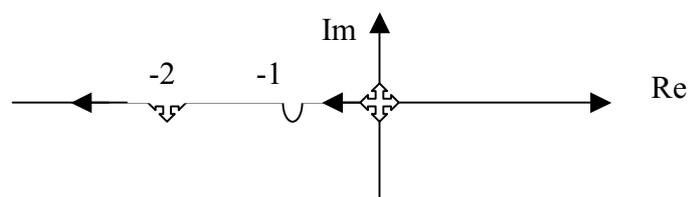
**Règle1 :** si K varie de 0 à l'∞ les lieux de pôles en BF partent des pôles en B.O pour aboutir aux zéros en B.O ou l'∞.

**Exemple 1 :**

$$G(p) = \frac{K(p+1)}{p(p+2)}; \quad H(p) = \frac{G}{1+G}$$

E.C  $\Rightarrow 1+G = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K(p+1)}{p(p+2)} = 0 \Rightarrow p(p+2) + K(p+1) = 0$

Soit  $p^2 + p(k+2) + K = 0$   
 $P_1 = -0.5 \cdot (2+K) + (1+K^2/4)^{1/2}$   
 $P_2 = -0.5 \cdot (2+K) - (1+K^2/4)^{1/2}$



**Règle2 :** Les parties des lieux des pôles appartenant à l'axe réel se trouvent à gauche d'un nombre impair des pôles et des zéros pour  $k > 0$  :  $k < 0$  c'est l'inverse.

**Remarque :** pour  $K < 0$  les parties des lieux des pôles appartiennent à l'axe réel se trouvent à droite d'un nombre impaire des pôles et des zéros.

**Règle 3 :** Le lieu des pôles est symétrique par rapport à l'axe réel .

**Règle 4 :** Le lieu des pôles possèdent n branches avec (n - m) directions asymptotiques .

n : nombres des pôles .

m : nombres des zéros .

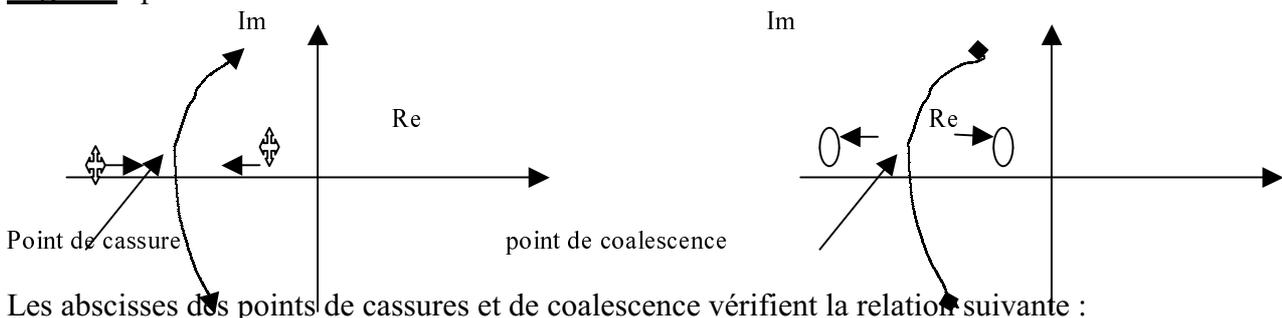
**Règle 5 :** Les directions asymptotiques sont données par la relation :

$$\theta = (2\lambda + 1) \Pi / (n - m) ; \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

**Remarque :** Les asymptotes concourent en un point de l'axe réel d'abscisses  $X_c$

$$X_c = (\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^m Z_i) / (n - m)$$

**Règle6 :** points de branchements



Les abscisses des points de cassures et de coalescence vérifient la relation suivante :

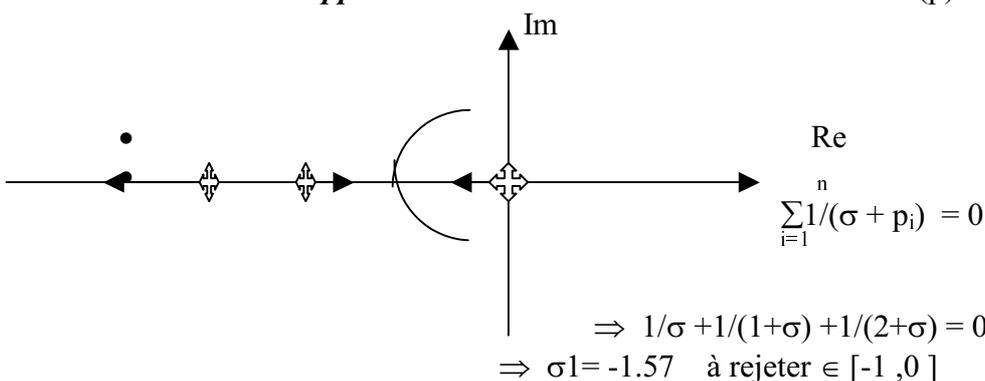
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma + P_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(\sigma + Z_i)} \quad -P_i \text{ et } -Z_i \text{ sont les pôles et les zéros}$$

Les points de branchement peuvent être aussi obtenues en résolvant l'équation suivante :

$$dG/dp = 0$$

**EXEMPLE d'application :**

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$



$$\sigma_2 = -0.42$$

**Règle7:** condition sur les modules et les arguments .

$$G(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

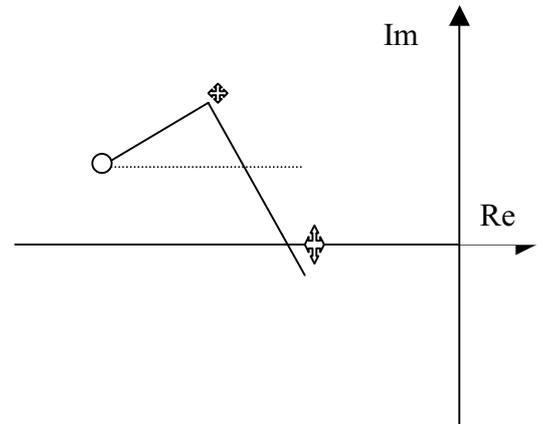
$$p-p_1 \longrightarrow \vec{P_1M} [P_1M ; \psi_1]$$

$$p-z_1 \longrightarrow \vec{Z_1M} [Z_1M ; \phi_1]$$

$$|G| = \frac{Z_1M \cdot Z_2M \cdot \dots \cdot Z_mM}{P_1M \cdot P_2M \cdot \dots \cdot P_nM} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n} = 1/K$$

$$1 + K G(p) = 0 \quad G(p) = -1/K$$

soit  $|G|=1/K$ .  $\text{Arg}G = (2\lambda+1)\pi$



**Relation entre les arguments :**

$$\text{Arg} G = \sum_{i=1}^m \text{Arg} (p - z_i) - \sum_{i=1}^n \text{Arg} (p - p_i)$$

$$\text{Arg} G = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \psi_i = (2\lambda+1)\pi$$

Si on n'a pas des zéros on peut écrire selon la condition sur le module :

$$(1/\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3) = 1/K$$

**Règle8:** ANGLES DE DEPART ET D'ARRIVEE

L'angle de départ du lieu des racines d'un pôle complexe est donné par la relation suivante :

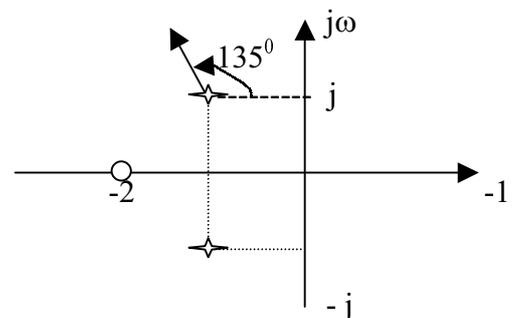
$$\theta_D = 180^\circ + \text{Arg} G'$$

où Arg G' est la phase de G calculée au pôle complexe sans tenir compte de la contribution de ce pôle particulier .

**Exemple :** Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}, \quad K > 0$$

$\sigma$



L'angle de départ du lieu des racines au pôle complexe  $S = -1 + j$  se calcule comme suit l'angle de  $G$  en  $S = -1 + j$ , sans tenir compte de la contribution du pôle  $S = -1 + j$  est  $(-45^\circ)$ .

D'où l'angle de départ est :  $\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

L'angle d'arrivée du lieu des racines en un zéros complexe est donné par la relation suivante :

$$\theta_A = 180^\circ - \text{Arg } G''$$

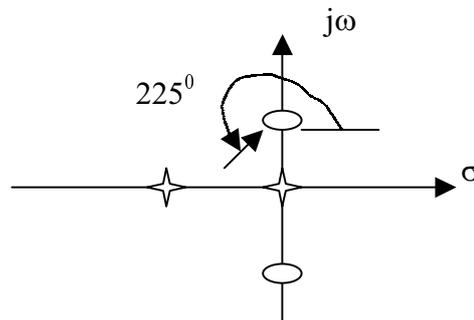
où  $\text{Arg } G''$  est la phase de  $G$  calculée au zéros complexe, sans tenir compte de l'effet de zéro

Exemple :

$$G(s) = \frac{k(s + j)(s - j)}{s(s + 1)}, \quad k > 0$$

L'angle d'arrivée du lieu des racines au zéros complexe  $S = j$  est :

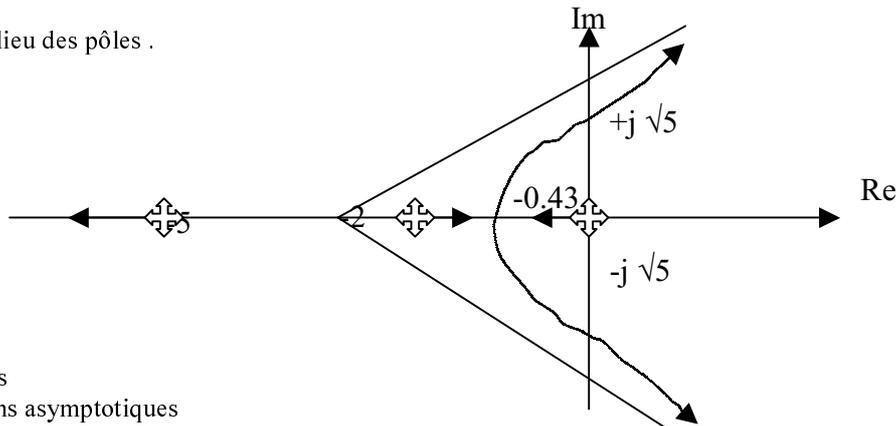
$$\theta_A = 180^\circ - (-45^\circ) = 225^\circ$$



Exemple :

$$\text{soit } G(p) = \frac{K}{P(p+1)(p+2)(p+5)}$$

Tracer le lieu des pôles .



3 branches

3 directions asymptotiques

$$X_c = -6/3 = -2 ;$$

$$\theta_1 = \pi / 3 ; \theta_2 = \pi ; \theta_3 = 5\pi / 3$$

$$\text{E.C : } 1 + KG(p) = 0$$

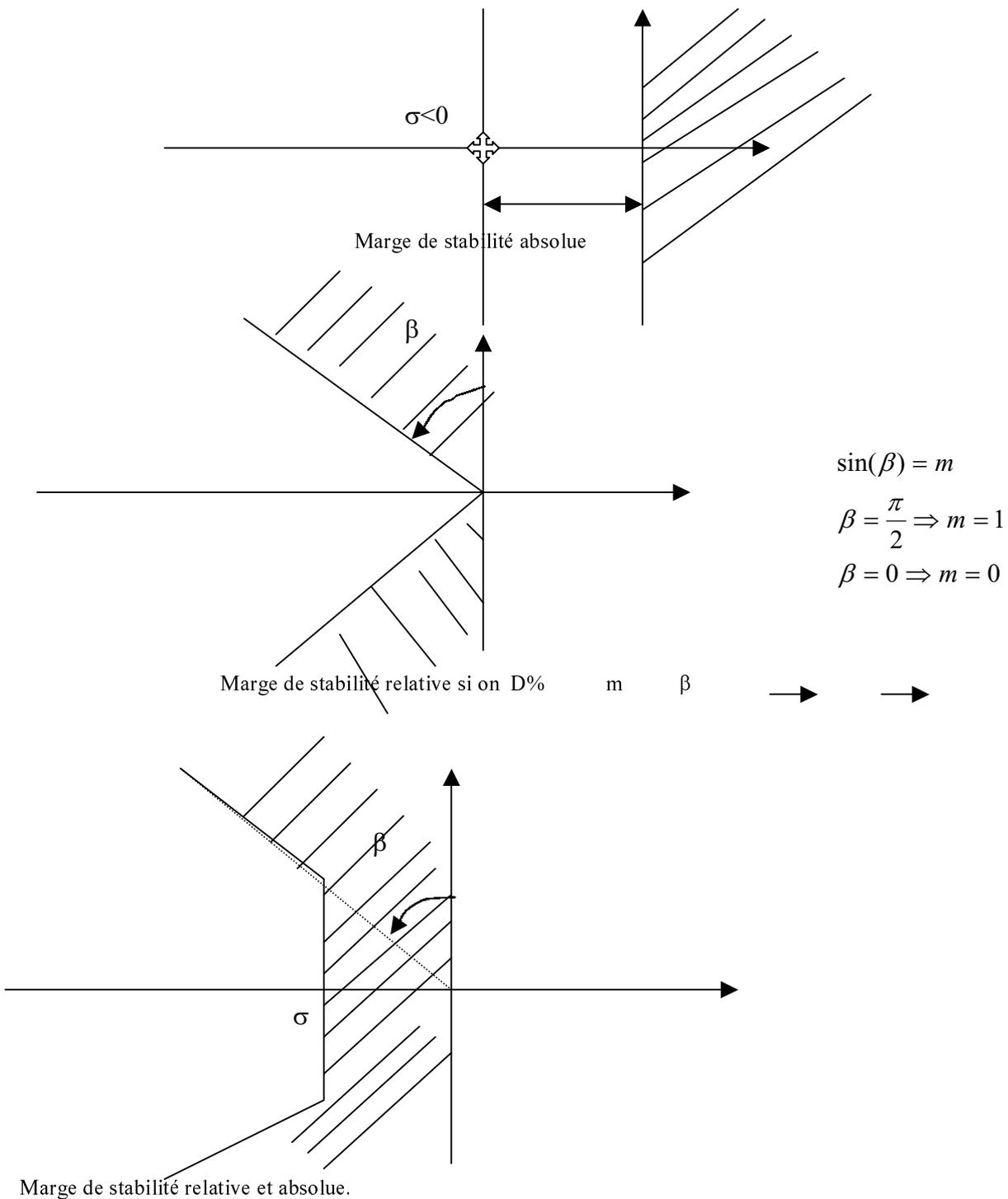
$$\Rightarrow p^3 + 6p^2 + 5p + K = 0$$

par ROUTH :

$p^3$	1	5		
$p^2$	6	K	$K < 30$ et $K > 0$	$K_c = 30$
$p^1$	$(30 - K)/6$	0		
$p^0$	K			

$$\text{Polynôme auxiliaire : } 6p^2 + K = 0 \quad \rightarrow \quad 6p^2 + 30 = 0 \quad \rightarrow \quad P = \pm j(5)^{1/2} \quad \rightarrow$$

□ Marge de stabilité absolue et relative :



## ETUDE D'UN SYSTEME ASSERVI LINEAIRE PAR LA METHODE DU LIEU D'EVANS

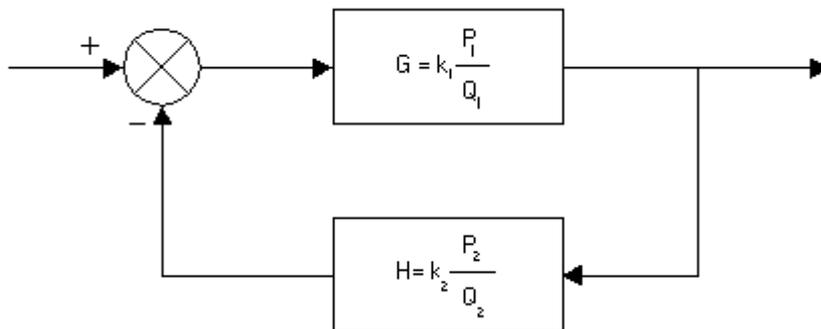
### I. Lieu d'Evans :

#### 1. Configuration pôles-zéros de la fonction de transfert F(p) d'un système asservi linéaire :

##### 1.1 Rappel : Relation entre les pôles et zéros :

La figure si dessous représente le diagramme fonctionnel d'un système asservi dont la fonction de transfert de la chaîne direct est :

$$G(p) = k_1 P_1(p)/Q_1(p)$$



La fonction de transfert de la chaîne de retour :

$$H(p) = k_2 P_2(p)/Q_2(p)$$

Le système considéré a pour fonction de transfert en boucle fermée

$$F(p) = \frac{G}{1 + GH} = \frac{k_1 P_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + k_1 k_2 P_1 P_2}$$

Donc,

a) Les zéros de F(p) sont :

- les zéros de  $P_1$ , soit les zéros de la fonction de transfert G de la chaîne direct ;

- les zéros de  $Q_2$ , soit les pôles de la fonction de transfert  $H$  de la chaîne retour.

b) Les pôles de  $F(p)$  sont les racines de l'équation :

$$Q_1 Q_2 + k_1 k_2 P_1 P_2 = 0 \quad (1)$$

Si l'on introduit la fonction de transfert en boucle ouverte du système :

$T = kP/Q$  (en posant  $k_1 k_2 = k$ ,  $P_1 P_2 = P$  et  $Q_1 Q_2 = Q$ )

de la forme :

$$T(p) = k \frac{\prod(p - z_i)}{\prod(p - p_j)} \quad (2)$$

l'équation (1) est l'équation caractéristique du système :

$$1 + T(p) = 0 \quad (3)$$

Ses racines dépendent de la valeur du coefficient  $k$ , donc du gain en boucle ouverte  $K$  du système asservi, lié à  $k$  par la relation :

$$K = k \frac{\prod(-z_i)}{\prod(-p_j)}$$

Par contre les zéros de  $F(p)$  ne sont pas modifiés si  $K$  varie.

## 1.2. Lieu d'Evans :

Puisque les performances d'un système asservi dépendent directement de son gain en boucle ouverte  $K$ , élément de réglage dont on dispose une fois déterminés les autres éléments du système, il est intéressant de connaître l'évolution dans le plan de Laplace des pôles de  $F(p)$  lorsque le gain  $K$ , ou le coefficient  $k$  qui lui est proportionnel, varie de zéro à l'infini : les pôles de  $F(p)$  décrivent alors un certain lieu géométrique, gradué en valeur de  $K$  et orienté dans le sens des valeur croissante de  $k$ . Ce lieu est appelé lieu d'Evans, ou lieu des racines (de l'équation caractéristique), ou lieu des pôles (de la fonction de transfert en boucle fermée du système).

Remarquant que les termes de lieu des racines ou lieu des pôles risque de prêter à confusion car ces pôles peuvent dépendre d'autre paramètres que du coefficient  $k$  et décrire des lieu qui sont évidemment fonction des paramètres considérés: En évite toute équivoque en convenant d'appelé lieu d'Evans le lieu des pôles de  $F(p)$  lorsque  $k$  varie.

### 1.3. Conditions définissant le lieu d'Evans :

Etant donnée une certaine configuration dans le plan de Laplace des pôles  $p_j$  et des zéros  $z_i$  de la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  d'un système asservi, un point  $M$  de ce plan appartient au lieu d'Evans si son affixe  $p = a + jb$  est racine de l'équation caractéristique:

$$1 + T(p) = 0$$

Soit en écrivant  $T(p)$  sous la forme de

$$\frac{\prod(p - z_i)}{\prod(p - p_j)} = -\frac{1}{k}$$

Géométriquement  $M$  est un point du lieu d'Evans si la relation vectorielle

$$\frac{\prod Z_i M}{\prod P_j M} = -\frac{1}{k} \quad (4)$$

est satisfaite.

Cette relation est équivalent aux deux suivantes, d'une part :

$$\sum \arg Z_i M - \sum \arg P_j M = \pm (2\lambda + 1) \pi; \quad (5)$$

$\lambda$  étant un nombre entier : le second membre de (4) est en effet, un nombre réel négatif . Et d'autre part :

$$\frac{\prod |Z_i M|}{\prod |P_j M|} = -\frac{1}{k} \quad (6)$$

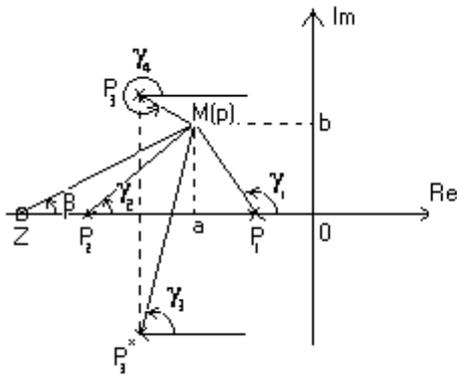


Fig 1

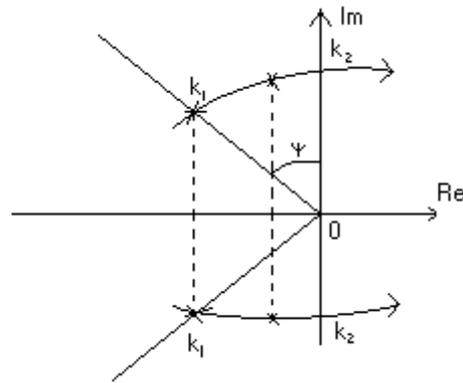


Fig 2

La relation (5), appelée *condition sur les argument*, définit les points du plan de Laplace qui forment le lieu d'Evans. La relation (6) permet de calculer la valeur de k correspondant à chaque point M du lieu d'Evans, donc de graduer celui-ci.

Ainsi, dans le cas de la configuration pôles-zéros de T(p) représentée figure 1, M est un point du lieu d'Evans, c'est à dire que

$p = a + jb$  est pôle de la fonction de transfert en boucle fermée F(p) correspondant à T(p), si :

$$\beta - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) = 2(\lambda + 1)\pi$$

La valeur du coefficient k au point M, s'il appartient au lieu, est donnée par :

$$k = \frac{|P_1 M| |P_2 M| |P_3^* M| |P_3 M|}{|Z M|}$$

Sans préjuger de l'allure des lieux d'Evans, on peut prévoir cependant dès maintenant que le lieu relatif à un système asservi qui devient instable quand le gain en boucle ouverte K, donc le coefficient k, dépasse une certaine valeur, possède au moins deux branches correspondant à des racines imaginaires conjuguée dont les parties réelles décroissent en valeur absolue lorsque k augmente (Fig 2) : d'après les critères de précision dynamique établis précédemment, pour  $k = k_1$ , l'amortissement du terme correspondant aux deux racines imaginaires conjuguées est égal à  $\sin\psi$  ; pour  $k = k_2$ , le système asservi est juste oscillant ; pour  $k > k_2$ , il est instable. Si l'angle  $\psi$  est correctement choisi ; le système considéré possède pour  $k = k_1$  le plus grand gain en boucle ouverte K, c'est à dire la meilleure précision statique

correspondant à une précision dynamique donnée, et par conséquent des performances optimales.

## 2. Propriétés et allure du lieu d'Evans :

On va établir maintenant des propriétés du lieu d'Evans qui permettent d'en déterminer certains points particuliers, certaines branches et d'en tracer par conséquent l'allure.

### **2.1 Propriétés du lieu d'Evans :**

2.1.1. Nombre de branches du lieu : A chaque racine de l'équation caractéristique :

$$1 + T(p) = 0$$

correspond une branche du lieu, dont le nombre est donc égal au degré de cette équation que l'on peut écrire :

$$kP(p) + Q(p) = 0 \quad \text{puisque l'on a posé } T(p) = kP(p)/Q(p).$$

Pour un système physique, le degré  $m$  de  $P$  étant inférieur au degré  $n$  de  $Q$ , le nombre de branches du lieu est égal à  $n$ , c'est à dire au nombre de pôles de  $T(p)$ .

2.1.2 Symétrie : Les coefficients de l'équation caractéristique :

$$kP + Q = 0$$

étant réels, les racines imaginaires de cette équation interviennent par paires conjuguées : les branches du lieu d'Evans correspondant à ces racines sont donc symétriques par rapport à l'axe réel. Celles qui correspondent à des racines réelles de l'équation caractéristique sont des portions de l'axe réel (Fig 3).

2.1.3 Départ et arrivée des branches : On peut écrire l'équation caractéristique sous la forme :

$$k \frac{\prod (p - z_j)}{\prod (p - p_j)} = -1, \quad \text{soit } kP/Q = -1$$

le degré  $m$  de  $P$  étant inférieur au degré  $n$  de  $Q$ .

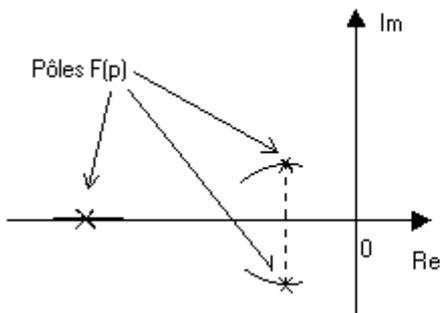


Fig 3

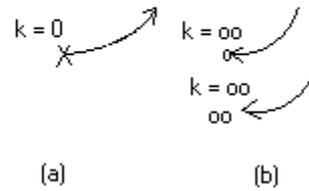


Fig 4

- Les points de départ du lieu sont les valeurs vers lesquelles tendent les racines de l'équation caractéristique lorsque le coefficient  $k$  tend vers zéro : pour que cette équation soit alors toujours satisfaite, il faut que  $Q$  tende vers les  $n$  pôles  $p_j$  : les points de départ des branches sont donc les  $n$  pôles de  $T(p)$  (Fig 4a).
- Les points d'arrivée des branches correspondent à  $k$  tendant vers l'infinie : l'équation caractéristique reste satisfaite si  $Q/P$  tend vers l'infinie avec  $k$ , c'est-à-dire si  $P$  tend vers zéro : il faut donc que les racines de l'équation caractéristique tendent vers les  $m$  zéros  $z_i$  de  $P$ .

Mais l'équation caractéristique possède  $n > m$  racines finies et les  $n-m$  zéros manquants de  $P$  sont rejetés à l'infini.

Pour  $k$  infini, le lieu d'Evans, possède  $m$  points d'arrivée, les  $m$  zéros de  $T(p)$ , et il comporte  $n-m$  branches infinies (Fig 4b).

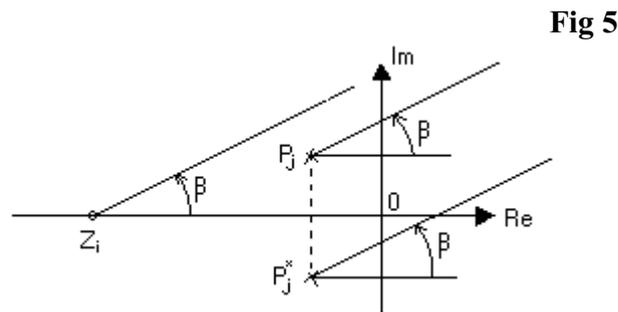
#### 2.1.4 Asymptotes :

##### a) Direction asymptotiques :

Ce sont les  $n-m$  directions dans lesquelles se trouvent rejetées les  $n-m$  racines de l'équation caractéristique lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Si un point  $M$  du lieu d'Evans est rejeté à l'infini, les vecteurs  $Z_iM$  et  $P_jM$  deviennent tous parallèles à une direction dont on désigne par  $\beta$  l'angle qu'elle fait avec l'axe réel (Fig 5). Quels que soient  $i$  et  $j$  on a :

$$\arg Z_iM = \arg P_jM = \beta ;$$



$m$  étant le nombre de zéros et  $n$  étant le nombre de pôles, la condition des angles relative au point  $M$  s'écrit donc :

$$\sum \arg Z_i M - \sum \arg P_j M = m\beta - n\beta = \pm (2\lambda + 1)\pi.$$

D'où en choisissant le signe  $-$  dans le second membre de cette équation

$$\beta = (2\lambda + 1) \pi / (n - m),$$

relation qui définit  $n - m$  directions différentes obtenues pour  $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$ .

#### b) Intersection des asymptote avec l'axe réel :

Il est possible de montrer que les asymptote d'un lieu d'Evans sont concourantes en un point d'abscisse  $\delta$  donnée par l'expression suivante :

$$\delta = (\sum p_j - \sum z_i) / (n - m).$$

### 3. Construction graphique des lieux d'Evans :

Les propriétés du lieu d'Evans qui viennent d'être établies permettent, on l'a vu, d'en esquisser le tracé. Mais il est souvent nécessaire de déterminer de façon précise une partie de lieu, par exemple celle qui se trouve au voisinage de ses points de rencontre avec la limite du domaine définissant l'amortissement et la rapidité souhaités pour le système.

La méthode la plus rapide de déterminer de lieu d'Evans consiste à tester des points du plan de Laplace situés dans des régions délimitées par la connaissance de l'allure du lieu, en cherchant si un point  $M$  que l'on suppose appartenir au lieu vérifie la condition des angles :

$$\sum \arg Z_i M - \sum \arg P_j M = \pm (2\lambda + 1)\pi.$$

Un point M du lieu d'Evans ayant été déterminé ainsi par approximations successives, la valeur de k correspondant à ce point est donnée par la relation :

$$k = \frac{\prod |P_j M|}{\prod |Z_i M|}$$

Les opérations d'addition des angles, puis de multiplication et de division des longueurs nécessitées par cette méthode sont grandement facilitées par l'utilisation d'une règle à calcul appelée «spirule».

## II. Correction dans le plan de Laplace :

De même que pour l'étude d'un asservissement dans les plans de Bode et de Black, il y a plusieurs manières d'envisager sa correction dans le plan de Laplace. On se limitera ici au cas des correcteurs classiques à avance de phase, retard de phase et retard-avance placés en cascade dans la chaîne d'action, et on montrera les modifications qu'apportent de tels correcteurs au lieu d'Evans d'un système.

### 4. Correcteur à avance de phase :

On peut envisager, à titre d'exemple, l'action d'un correcteur de fonction de transfert :

$$D(p) = \frac{1}{a} \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$

avec  $a > 1$

ou :

$$D(p) = (p - z_a) / (p - p_a)$$

en posant :

$$z_a = -1/a\tau \quad \text{et} \quad p_a = -1/\tau$$

En langage de pôles et de zéros, cette correction par avance de phase d'un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  se traduit donc par l'adjonction à la configuration des pôles et des zéros de  $T(p)$  d'un pôle et d'un zéro réels négatifs (Fig 6), le zéro étant le plus proche de l'origine.

Dans ce type de correction, ce sont les zéros de facteur  $D(p)$  qui diminuent la durée du régime transitoire de la réponse du système, les pôles étant des éléments « parasites » qui réduisent l'action des zéros et ne sont introduits que pour des raisons technologiques.

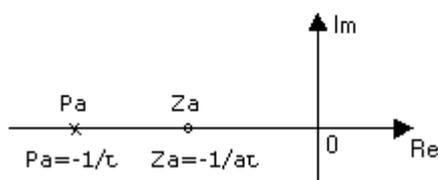


Fig 6

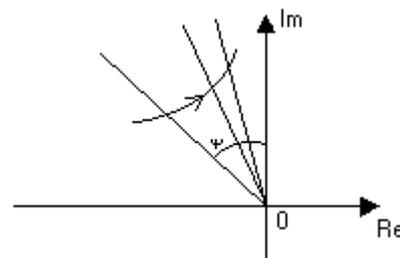


Fig 7

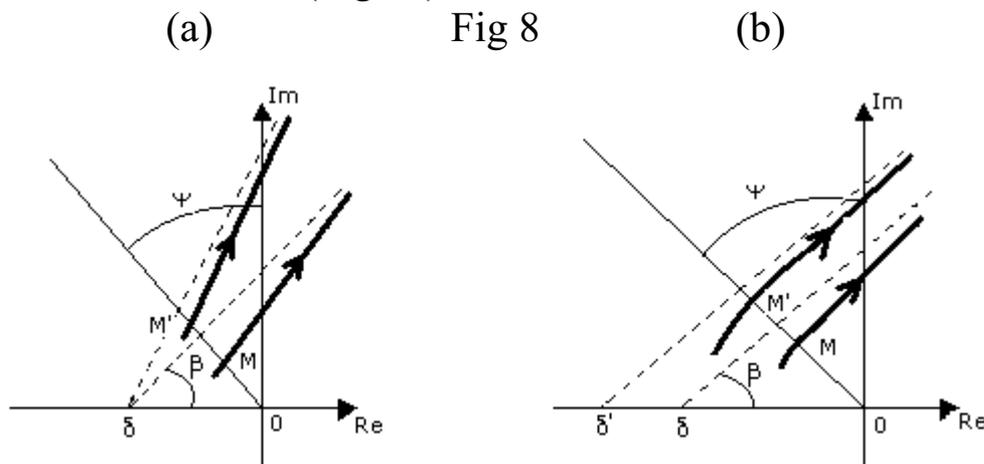
L'effet apporté par le facteur  $D(p)$  considéré sur des systèmes proches de systèmes du second ordre peut être mis en évidence dans le plan de Laplace grâce aux critères de performances établis précédemment : l'amortissement de tels systèmes diminue quand leur gain en boucle ouverte  $K$  augmente et leur lieu d'Evans possède donc des branches qui, lorsque  $k$  augmente, coupent les demi-droites issues de l'origine pour des valeurs décroissantes de l'angle  $\psi$  définissant l'amortissement (Fig 7).

Une telle branche possède une direction asymptotique qui fait avec l'axe réel un angle  $\beta = \pi/(n - m)$ .

$(n - m)$  : différence entre les degrés du dénominateur et du numérateur de  $T(p)$  et qui coupe l'axe réel en un point d'abscisse :

$$\delta = (\sum p_j - \sum z_i)/(n - m).$$

L'adjonction d'un zéro à la configuration de  $T(p)$  se traduit donc par une augmentation de l'angle  $\beta$  (Fig 8a). Pour  $p$  infini, les points du lieu d'Evans correspondant à la configuration du système corrigé sont donc situés plus loin de l'origine du plan de Laplace que ceux du système non corrigé : les deux lieux ne pouvant se couper lorsque  $p$  diminue (des conditions des angles différentes ne pouvant définir un même point !), tous les points du lieu d'Evans corrigé sont plus éloignés de l'origine qu'avant correction. En particulier, pour un amortissement donné, définie par un angle  $\psi$ , le temps de réponse se trouve réduit (Fig 8a).



Si on considère maintenant le pôle, associé dans la pratique au zéro du facteur de correction, l'angle  $\beta$  est inchangé, mais l'abscisse  $\delta'$  de l'asymptote du lieu d'Evans est située plus loin de l'origine après correction (Fig 8b), est la précision dynamique du système se trouve également améliorée.

L'abscisse  $\delta'$  est d'autant plus grande en valeur absolue et la correction d'autant plus efficace que la différence :

$$|p_a| - |z_a| = (a - 1) |z_a|$$

est grande, c'est-à-dire que  $a$  possède une valeur élevée.

## 5. Correction à retard de phase :

Soit le facteur de correction :

$$D(p) = b \frac{1 + \tau p}{1 + b \tau p} \quad \text{avec } b > 1$$

On peut écrire :

$$D(p) = \frac{p - z_b}{p - p_b}$$

en posant :  $z_b = -1/\tau$  ,  $p_b = -1/b\tau$ .

Dans le plan de Laplace, la correction par retard de phase consiste donc à adjoindre à une configuration donnée de pôles et de zéros, un pôle et un zéro supplémentaires, le pôle étant plus proche de l'origine que le zéro (Fig 9).

Soit M un point du lieu d'Evans d'un système proche d'un système du second ordre ; supposons que la valeur du coefficient k en ce point confère au système non corrigé considéré des performances en régime transitoire satisfaisantes. Le gain en boucle ouverte au point M est :

$$K = k \frac{\prod(-z_i)}{\prod(-p_j)}$$

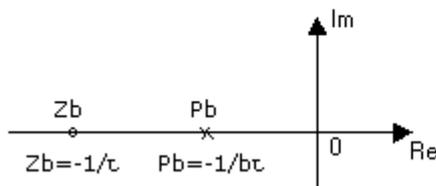


Fig 9

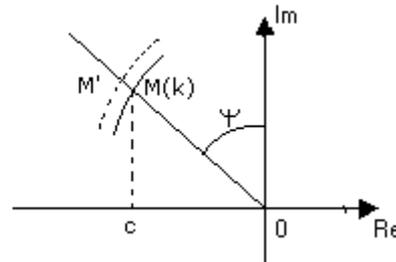


Fig 10

Si on ajoute à la configuration pôles-zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte du système un pôle  $p_b$  et un zéro  $z_b$  ( $|z_b| = b|p_b|$ ) situés de telle sorte que leur influence sur le lieu d'Evans du système non corrigé soit très peu importante, le point  $M'$  du nouveau lieu pour lequel le système possède la précision dynamique souhaitée est très voisin du point M (Fig 10) et le coefficient  $k = \prod |PM| / \prod |ZM|$  est sensiblement le même pour M et  $M'$ . mais pour le point  $M'$  :

$$K' = k \frac{(-z_b)}{(-p_b)} \frac{\prod(-z_i)}{\prod(-p_j)} = bK$$

Le gain en boucle ouverte au point  $M'$  est donc multiplié par  $b$  (en supposant identiques les valeurs de  $k$  en  $M$  et  $M'$ ) et la précision statique du système asservi se trouve d'autant plus améliorée que  $b$  est grand.

Tel est, dans le plan de Laplace, le mode d'action d'un correcteur à retard de phase qui doit donc répondre à des exigences contradictoires :

- pôle et zéro très proches, de telle sorte que l'angle  $\arg Z_b M - \arg P_b M$  soit voisin de zéro et que la condition des angles soit sensiblement la même pour les points  $M$  et  $M'$  ;
- pôle et zéro assez éloignés, de façon que la qualité  $b$  possède une valeur très grande pour diminuer, suffisamment l'écart fini en régime permanent.

Le moyen de concilier ces exigences consiste à placer le pôle  $P_b$  très près de l'origine du plan de Laplace : pour une valeur donnée de  $b$  en effet, l'écartement entre le zéro  $Z_b$  et le pôle  $P_b$ , qui vaut en valeur absolue  $(b - 1) |P_b|$ , est d'autant plus réduit que  $|P_b|$  est petit. Alors un point  $M$  du lieu correspondant à une précision dynamique convenable est en général assez éloigné de  $P_b$  et de  $Z_b$  pour que, vus du point  $M$ , ce pôle et ce zéro soient pratiquement confondus. Si on peut les considérer comme tels, le gain en boucle ouverte du système asservi est multiplié par  $b$ .

Le pôle et le zéro introduits par le correcteur étant très voisins l'un de l'autre, on désigne parfois l'ensemble de ces deux points sous le nom de dipôle.

#### 6. Correcteur retard-avance :

Ce genre de correction, qui correspond par exemple à un facteur :

$$D(p) = \frac{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}{(1 + \tau_3 p)(1 + \tau_4 p)}$$

avec  $\tau_1 \tau_2 = \tau_3 \tau_4$

soit :

$$D(p) = \frac{(p - z_{c1})(p - z_{c2})}{(p - p_{c1})(p - p_{c2})}$$

avec  $z_{c1} = -1/\tau_1$  ,  $z_{c2} = -1/\tau_2$  ,  $p_{c1} = -1/\tau_4$  ,  $p_{c2} = 1/\tau_3$

se traduit par l'adjonction de deux pôles et de deux zéros réels à une configuration donnée (Fig 11).

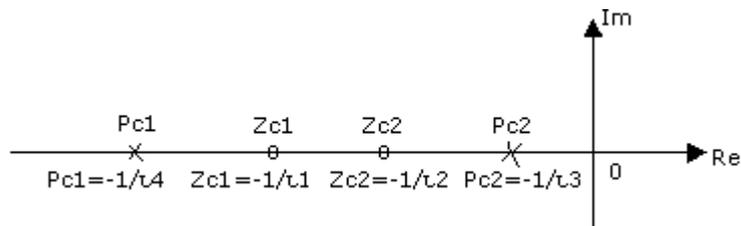


Fig 11