

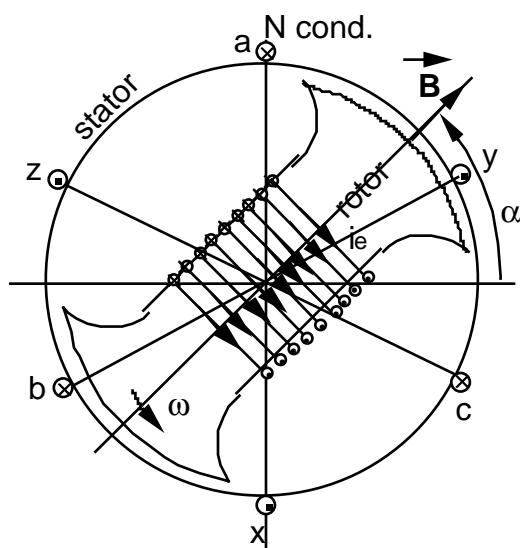
---

## SYSTEMES TRIPHASES

### I PRODUCTION

Un système de Fém triphasé est produit par un alternateur triphasé (génératrice synchrone).  
 Si l'on considère la machine simplifiée schématisée par la figure I.1, comportant 3 enroulements décalés dans l'espace de

**Erreur !**



a-x ; b-y ; c-z : trois bobines décalées de 120°.  
 a,b,c : entrées des bobines.  
 x,y,z : sorties des bobines

*Fig.I.1 : Production d'un système de Fém triphasées.*

On obtient un système de Fém triphasé  $e_a, e_b, e_c$  (éq.I.1).

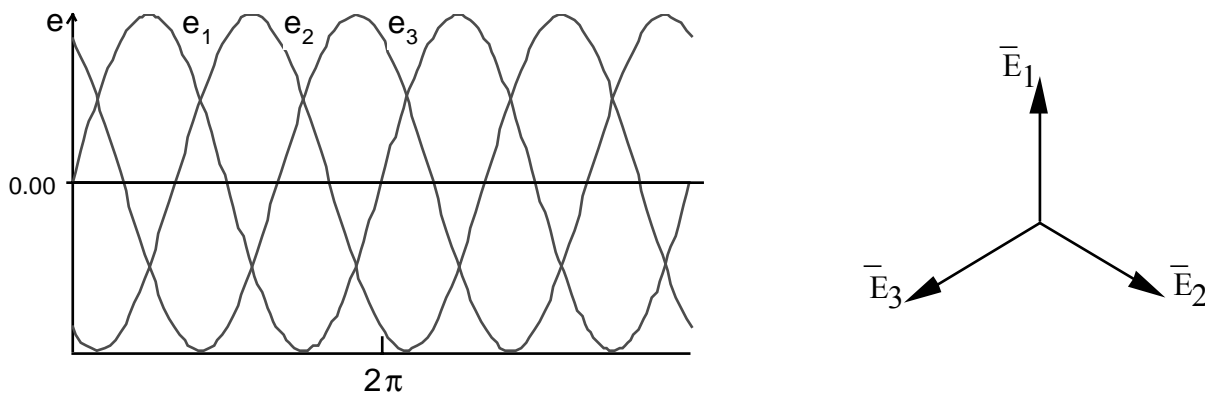
$$e_a = E_{m1} \sin \omega t$$

$$e_b = E_{m2} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (I.1)$$

$$e_c = E_{m1} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

### II. SYSTEMES TRIPHASES EQUILIBRES

Pour trois bobines identiques, les trois Fém  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  et  $\bar{E}_3$  ont même amplitude ( $E_{m1}=E_{m2}=E_{m3}$ ), on dit qu'on a un système triphasé équilibré (fig.I.2).



**Fig.I.2 : Système triphasé équilibré direct.**

En notation complexe, le système équilibré direct s'écrit :

$$\bar{E}_1 = E_1 e^{j0}$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2 \bar{E}_1$$

$$\bar{E}_3 = \bar{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = a \bar{E}_1$$

$$\text{On a : } \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = (1 + a + a^2)\bar{E}_1 = 0.$$

Un réseau triphasé est un réseau comportant des générateurs triphasés, des charges triphasées et des circuits de transmission reliant les générateurs et les charges. Le réseau est dit équilibré lorsque tous ses éléments le sont.

Les connexions entre les enroulements des générateurs et les impédances d'utilisation peuvent se faire en étoile "Y" ou en triangle "Δ" (montages usuels).

## II.1 Montages usuels

### II.1.1 Montage étoile "Y"

La figure II.1 représente un réseau triphasé étoile-étoile avec neutre sorti "Y<sub>N</sub>-y<sub>n</sub>". Le fil commun est appelé fil neutre. Les équations du système s'écrivent :

$$\bar{E}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{V}_{N'N}$$

$$\bar{E}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + \bar{V}_{N'N} \tag{I.2}$$

$$\bar{E}_3 = \bar{Z}_3 \bar{I}_3 + \bar{V}_{N'N}$$

$$0 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + \bar{Z}_3 \bar{I}_3 + 3 \bar{V}_{N'N}$$

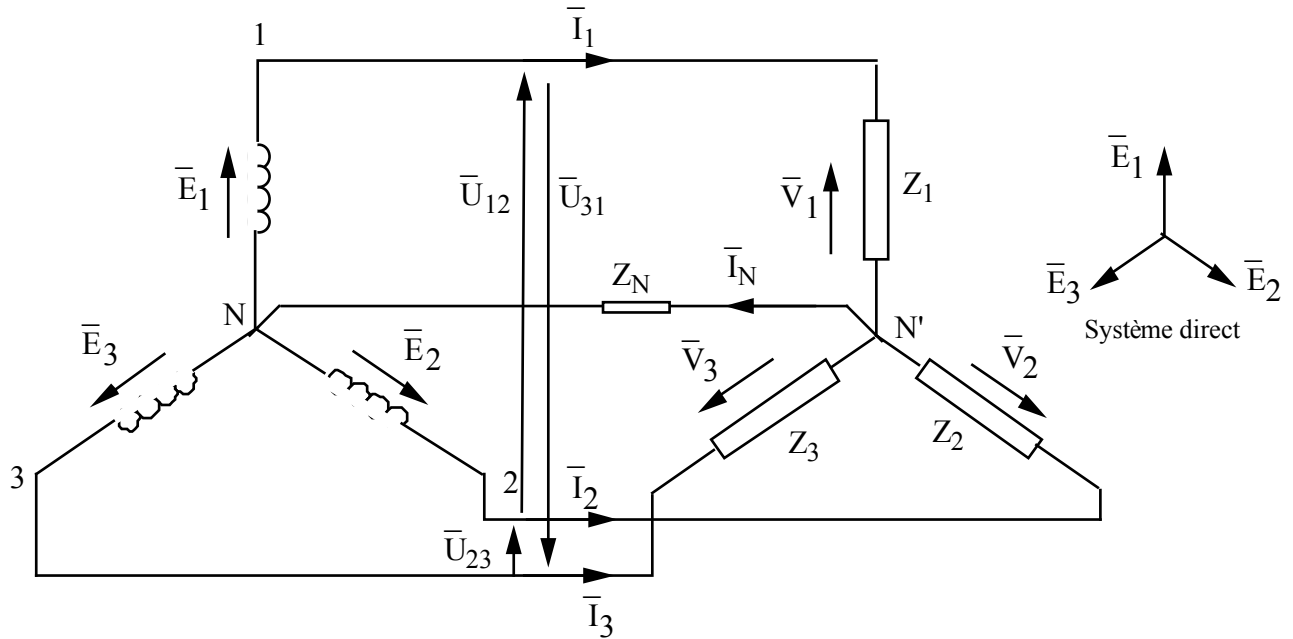
$$\bar{V}_{N'N} = \bar{Z}_N \bar{I}_N = \bar{Z}_N (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)$$

$$0 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + \bar{Z}_3 \bar{I}_3 + 3\bar{Z}_N (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)$$

Si  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$ , on aura :

$$0 = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)(\bar{Z}_N + 3\bar{Z}_N) \Leftrightarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Le fil neutre n'est parcouru par aucun courant, il est possible de le supprimer et d'obtenir un système en étoile à trois fils. Cependant, dans la pratique (réseaux de distribution) où certains déséquilibres existent toujours (installation d'éclairage, par exemple), le fil neutre est indispensable, néanmoins on utilise un fil de plus faible section.



**Fig.II.1 : Système triphasé étoile-étoile avec neutre sorti.**

Les courants  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ , et  $\bar{I}_3$  circulant dans les conducteurs de phases sont déterminés par :

$$\bar{E}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 ; \bar{E}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 ; \bar{E}_3 = \bar{Z}_3 \bar{I}_3$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} ; \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} ; \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}$$

$$i_1 = \text{Im} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_2 = \text{Im} \sin(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_3 = \text{Im} \sin(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})$$

Les trois courants forment donc un système triphasé équilibré direct sinusoïdal (Fig.II.2).

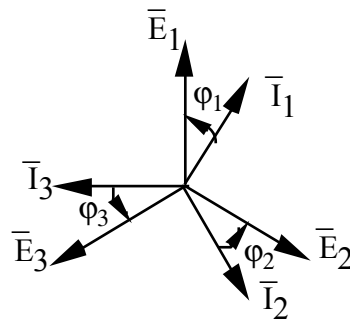


Fig. II.2 : Système équilibré des courants.

### II.1.2 Montage triangle "Δ"

La figure II.3 représente un montage triangle des enroulements.

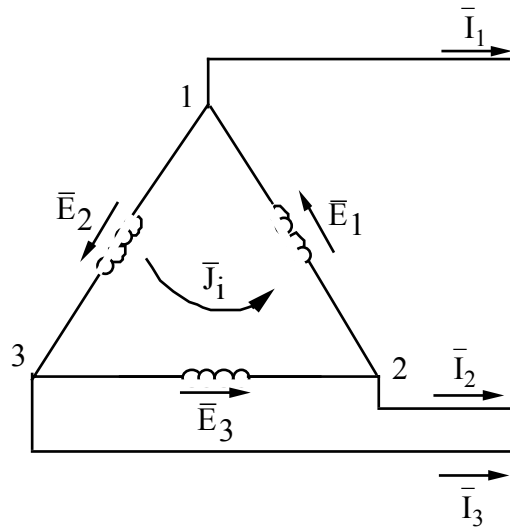


Fig. II.3 : Montage triangle des enroulements.

Si les Fém sont sinusoïdales et en l'absence de charges, le courant dans le triangle fermé de la source est nul :  $J_i = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{z_1 + z_2 + z_3}$ , où  $z_1, z_2, z_3$  sont les impédances des enroulements considérés.

## II.2 Grandeurs de lignes et de phases : grandeurs simples et composées

Les grandeurs simples sont les grandeurs relatives à chacune des phases (bobine) ou à chacun des récepteurs. On désigne par  $J$  le courant et par  $V$  la tension.

Les grandeurs composées sont les grandeurs relatives aux bornes extérieures ou aux fils extérieurs. On désigne par  $U$  la tension de ligne ou tension composée et par  $I$  le courant de ligne.

### II.2.1 Cas du montage étoile

La figure II.4 donne la représentation vectoriel des tensions simples et composées dans le cas

du montage étoile, on a :

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$$

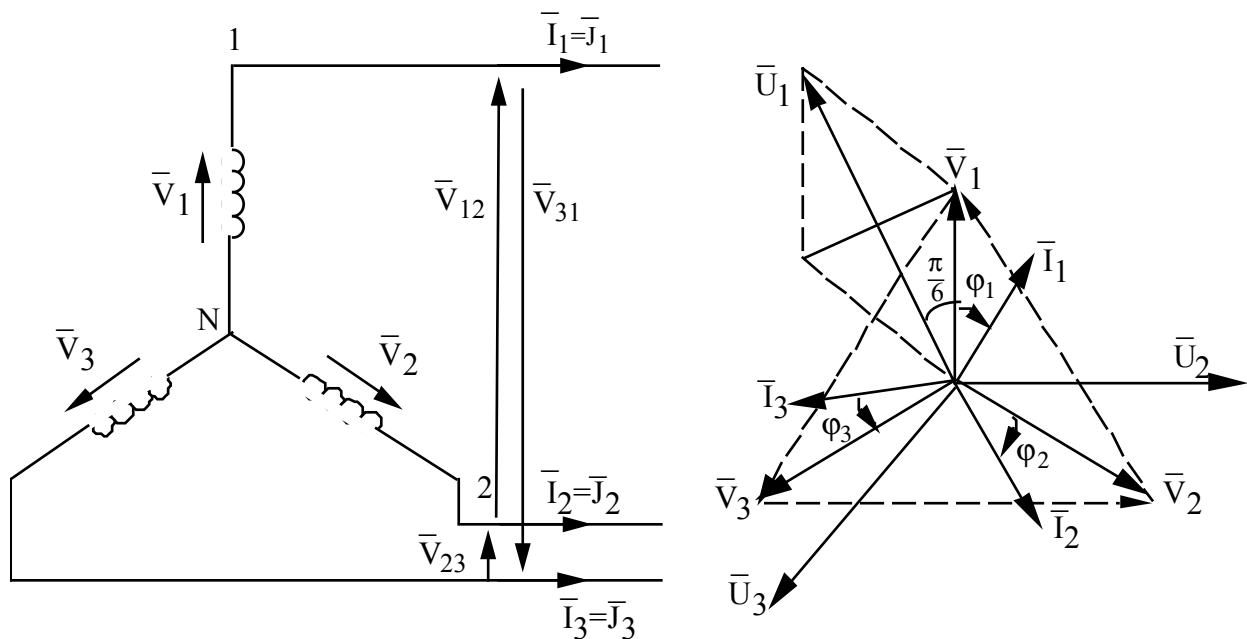
$$\bar{U}_2 = \bar{V}_{23} = \bar{V}_2 - \bar{V}_3$$

$$\bar{U}_3 = \bar{V}_{31} = \bar{V}_3 - \bar{V}_1$$

Si  $V_1 = V_2 = V_3 = V$ , on a  $U_1 = U_2 = U_3 = U$  et  $U = 2V \cos \frac{\pi}{6} = V\sqrt{3}$

On retient donc :  $U = V\sqrt{3}$  et  $I = J$

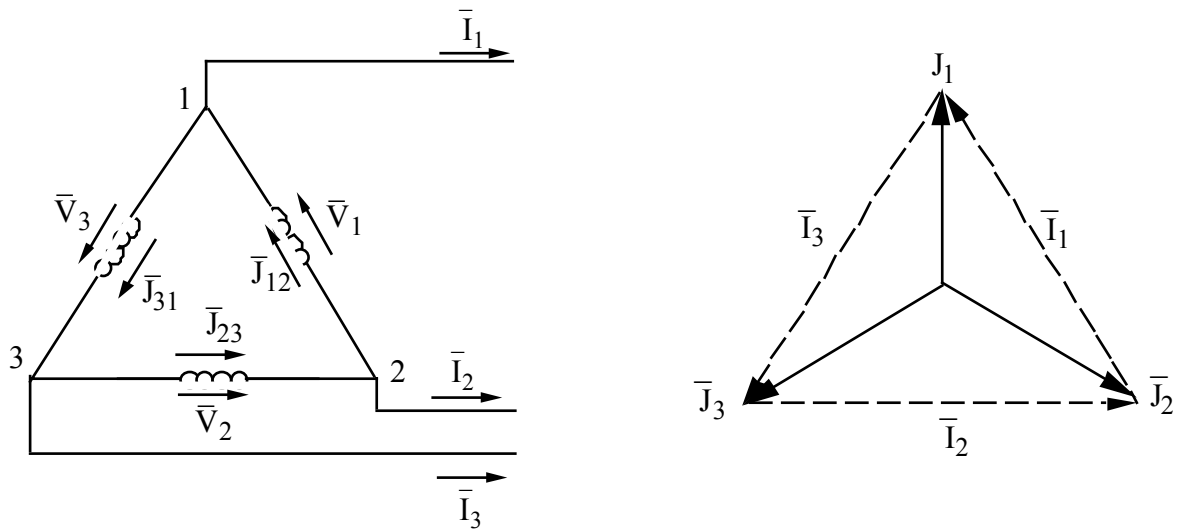
La tension de ligne (tension composée) est égale à la tension de phase (tension simple) multipliée par  $\sqrt{3}$  et le courant de ligne est égal au courant de phase.



*Fig. II.4 : Tensions simples et tensions composées pour un montage étoile.*

### II.2.2 Cas du montage triangle

Sur la figure II.5 sont représentés le montage ainsi que le diagramme vectoriel des courants de phases et de lignes.



*Fig. II.5 : Courant de phases et courants de lignes pour un montage triangle.*

On peut écrire :

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

(II.1)

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_1 ; \bar{U}_2 = \bar{V}_2 ; \bar{U}_3 = \bar{V}_3$$

Le système étant équilibré, on a :  $J_1 = J_2 = J_3 = J$  et  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ . En considérant le triangle "des courants", on démontre facilement, comme précédemment d'ailleurs, que  $I = J\sqrt{3}$ .

Pour un montage triangle la tension de ligne est la même que la tension de phase ( $U = V$ ), le courant de ligne est égal au courant de phase fois  $\sqrt{3}$ .

Remarques :

Pour un montage triangle on peut considérer les tensions étoilées  $\bar{V}'_1, \bar{V}'_2, \text{ et } \bar{V}'_3$  représentant les ddp entre les fils de ligne et un neutre fictif (Fig.II.6). La tension étoilée  $V'$  et la tension composée sont liées par la relation  $U = V'\sqrt{3}$ .

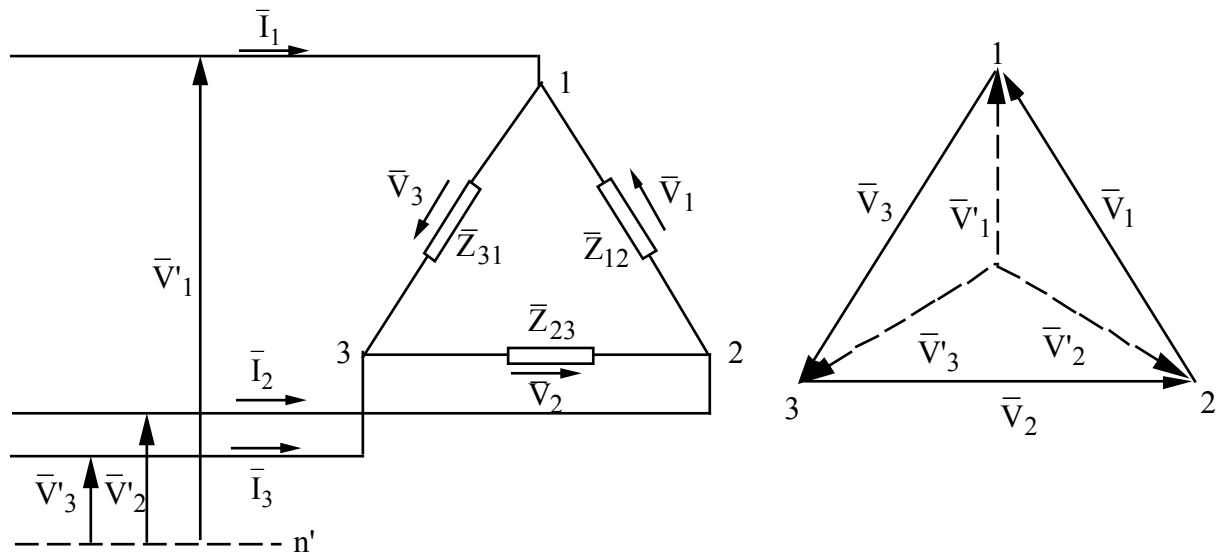


Fig.II.6 : Tensions étoilées.

On vérifie bien que dans un système triphasé équilibré (générateur ou récepteur), couplé en étoile ou en triangle, le déphasage du courant dans un élément sur la tension aux bornes de cet élément est le même que le déphasage du courant dans un fil de ligne sur la tension étoilée relative à ce fil de ligne.

### II.3 Puissance des systèmes triphasés équilibrés

Un système triphasé à trois ou quatre fils peut être considéré comme la superposition de trois systèmes monophasés. Les puissance active et réactive reçues ou fournies par le système triphasé (transmises par la ligne triphasée) seront les sommes des puissances actives et réactives de chaque système monophasé, on a :

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = V_1 J_1 \cos\varphi_1 + V_2 J_2 \cos\varphi_2 + V_3 J_3 \cos\varphi_3$$

$$Q = V_1 J_1 \sin\varphi_1 + V_2 J_2 \sin\varphi_2 + V_3 J_3 \sin\varphi_3$$

$$\tilde{S} = P + jQ = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 = \bar{V}_1 J_1^* + \bar{V}_2 J_2^* + \bar{V}_3 J_3^*$$

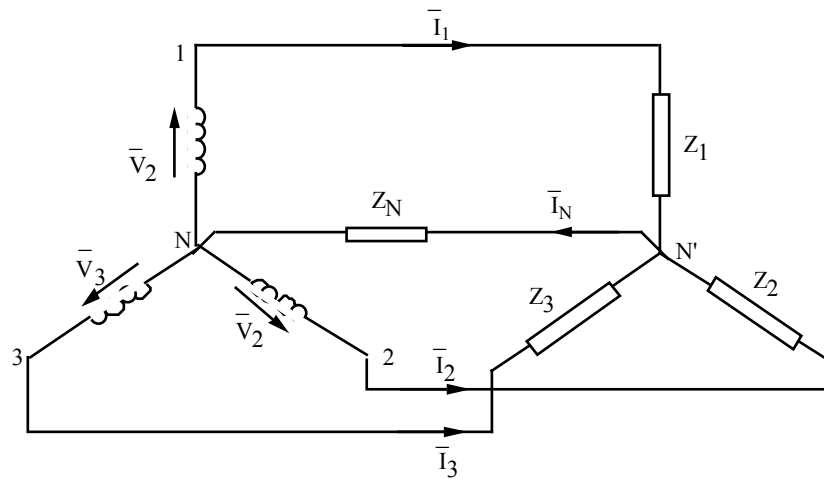
$$\tilde{S} = 3\bar{V} \bar{J}^* = 3VJ (\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$P = 3VJ\cos\varphi ; Q = 3VJ \sin\varphi \text{ et } S = 3VJ$$

$$P = UI\sqrt{3} \cos\varphi ; Q = UI\sqrt{3} \sin\varphi \text{ et } S = UI\sqrt{3}$$

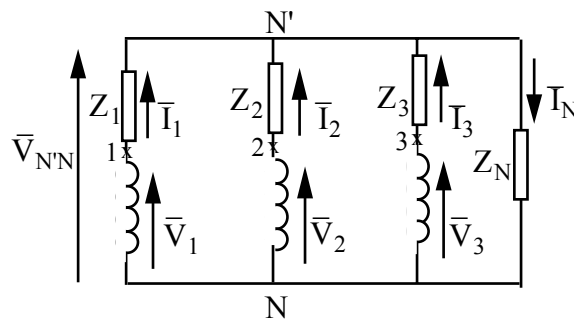
### III. SYSTEMES TRIPHASE NON EQUILIBRES

On se place dans le cas d'une charge triphasée déséquilibrée  $Z_i \neq Z_j$  (Fig.III.1).



**Fig. III.1 : Système triphasé déséquilibré.**

$\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$  forment un système triphasé équilibré, c'est généralement le cas réel dans les réseaux. Le schéma équivalent est représenté sur la figure (III.2).



**Fig. III.2 : Schéma équivalent**

On peut écrire :

$$\bar{V}_{N'N} = \bar{V}_1 - \bar{Z}_1 \bar{I}_1$$

$$\bar{I}_1 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 - \bar{V}_{N'N} \bar{Y}_1$$

$$\bar{I}_2 = \bar{Y}_2 \bar{V}_2 - \bar{V}_{N'N} \bar{Y}_2$$

$$\bar{I}_3 = \bar{Y}_3 \bar{V}_3 - \bar{V}_{N'N} \bar{Y}_3$$

$$\bar{I}_N = \bar{V}_{N'N} \bar{Y}_N$$

$0 = \bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 + \bar{Y}_3 \bar{V}_3 - \bar{V}_{N'N} (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N)$ , on en déduit :

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{\bar{Y}_1 \bar{V}_1 + \bar{Y}_2 \bar{V}_2 + \bar{Y}_3 \bar{V}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N}$$

(III.1)

(III.2)



$\bar{V}_{N'N}$  est la tension nodale, le déplacement du point neutre.

Si le fil neutre n'est pas branché  $Z_N = \infty$  et  $Y_N = 0$ , on aura :

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{Y_1 \bar{V}_1 + Y_2 \bar{V}_2 + Y_3 \bar{V}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (\text{III.3})$$

Pour un système de tension équilibré :  $\bar{V}_1 = V$  ;  $\bar{V}_2 = a^2 V$  et  $\bar{V}_3 = a V$ , on :

$$\bar{V}_{N'N} = V \frac{Y_1 + a^2 Y_2 + a^3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (\text{III.4})$$

Si, par ailleurs,  $Y_1 = Y_2 = Y_3$ , on retrouve  $\bar{V}_{N'N} = 0$ .

Les tensions simples aux bornes des récepteurs peuvent être déterminées par :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1N'} &= \bar{V}_1 - \bar{V}_{N'N} \\ \bar{V}_{2N'} &= \bar{V}_2 - \bar{V}_{N'N} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\bar{V}_{3N'} = \bar{V}_3 - \bar{V}_{N'N}$$

Les courants sont déterminés par :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{1N'}}{\bar{Z}_1} ; \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{2N'}}{\bar{Z}_2} \text{ et } \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{3N'}}{\bar{Z}_3} \text{ et } \bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

Les tensions  $\bar{V}_{1N'}$ ,  $\bar{V}_{2N'}$ ,  $\bar{V}_{3N'}$  ainsi que les courants  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$  forment des systèmes triphasés déséquilibrés.

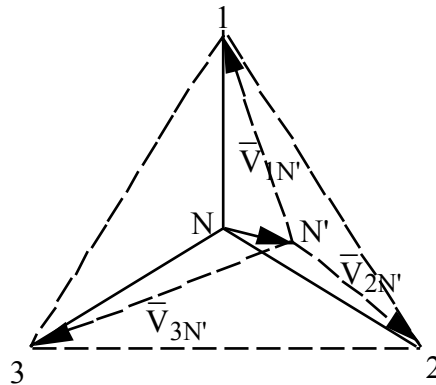
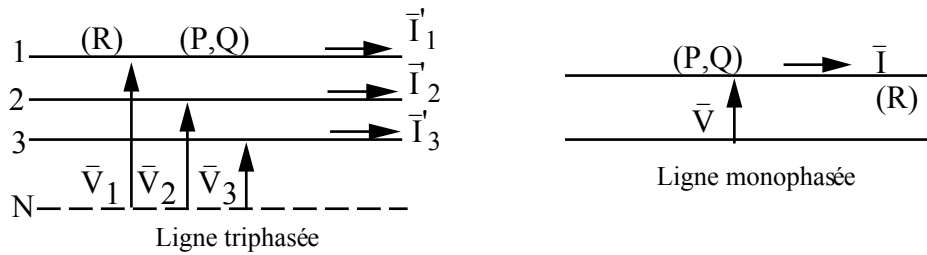


Fig. III.3 : Déplacement du point neutre dans un système déséquilibré.

#### IV. INTERET DES SYSTEMES TRIPHASES

Concernant la production et l'utilisation de l'énergie, les machines synchrones et asynchrones triphasées ont une puissance nominale supérieure de 50 à 100% à celle d'une machine monophasée de même masse (même coût). En régime équilibré, ces machines ont un fonctionnement plus régulier et un meilleur rendement.

Par ailleurs, du point de vue transport, à puissance, tension, et résistance par conducteur constantes les pertes en ligne sont plus faibles que dans une ligne monophasée (Fig.IV.1).



*Fig.IV.1 : Etude comparative des lignes triphasée et monophasée.*

Monophasée : puissance transmise  $P = VI \cos \varphi$   
 pertes Joule en ligne  $P_j = 2RI^2$

Triphasée : puissance transmise  $P = 3VI' \cos \varphi$ , soit  $I' = \frac{I}{3}$   
 pertes Joule en ligne  $P'_j = 3R \frac{I^2}{3^2} = \frac{1}{6} P_j$

La ligne triphasée consomme 6 fois moins que la ligne monophasée, mais on a augmenté de 50% la masse de matériau conducteur.

## V. SYSTEMES TRIPHASES EQUILIBRES EN REGIMES NON SINUSOÏDAUX

Dans le cas général la Fém de chaque phase d'un alternateur ou d'un transformateur triphasé n'est pas sinusoïdale.

Chacune des Fém ( $e_1, e_2, e_3$ ) reproduit la forme des deux autres mais avec un déphasage de  $\frac{2\pi}{3}$  et elle est décomposable en série de Fourier.

$$e_1 = \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (V.1)$$

Les harmoniques des Fém des phases d'ordre  $k$  sont :

$$e_{1k} = E_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$$e_{2k} = E_{mk} \sin[k\omega(t - \frac{T}{3}) + \varphi_k] = E_{mk} \sin [k\omega t - \frac{2\pi}{3} k + \varphi_k]$$

$$e_{3k} = E_{mk} \sin[k\omega(t + \frac{T}{3}) + \varphi_k] = E_{mk} \sin [k\omega t + \frac{2\pi}{3} k + \varphi_k]$$

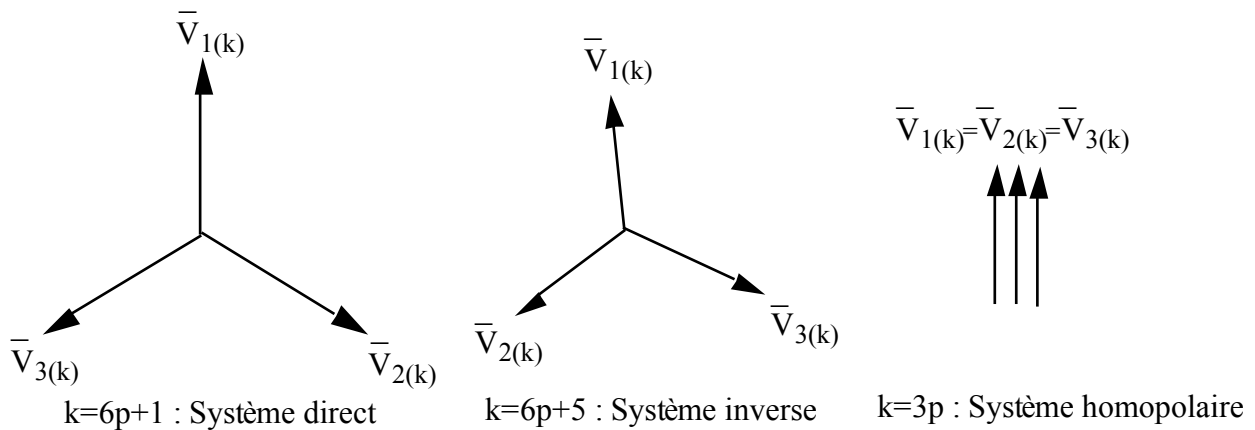
$E_{mk}, \varphi_k$  sont respectivement l'amplitude de l'harmonique et sa phase initiale.

Les Fém sont symétriques par rapport à l'axe des temps, seuls les harmoniques impairs existent alors ( $k = (2n-1) : n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Les harmoniques d'ordres  $k = 6p+1$  ( $p=0, 1, 2, 3, \dots$ ) forment un système triphasé équilibré direct.

Les harmoniques d'ordres  $k=6p+5$  ( $p=0, 1, 2, 3, \dots$ ) forment un système triphasé équilibré inverse.

Les harmoniques d'ordres multiples de trois  $k=3p$  ( $p$  impair) forment un système homopolaire.



*Fig.V.1 : Harmoniques directs inverses et homopolaires.*

### V.1 Montage étoile-étoile équilibré sans fil neutre

Pour un récepteur équilibré  $Y_1=Y_2=Y_3$ , on a :

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{\bar{V}_{1k} + \bar{V}_{2k} + \bar{V}_{3k}}{3} \quad (\text{V.2})$$

Cette relation s'applique pour les harmoniques de même ordre. Pour les harmoniques trois, on a :

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{\bar{V}_{1(3)} + \bar{V}_{2(3)} + \bar{V}_{3(3)}}{3} = \bar{V}_{1(3)} \quad (\text{V.3})$$

Pour les harmoniques directes et inverses  $\bar{V}_{N'N} = 0$ .

En valeurs instantanées la tension de déplacement du point neutre s'écrit :

$$v_{N'N} = V_{m3} \sin(3\omega t + \varphi_3) + V_{m9} \sin(9\omega t + \varphi_9) + \dots$$

sa valeur efficace s'écrit :

$$\bar{V}_{N'N} = \sqrt{\frac{E_{m3}^2}{2} + \frac{E_{m9}^2}{2} + \dots} \quad (\text{V.4})$$

L'équation de tensions d'une maille relative aux harmoniques trois s'écrit :

$$\bar{V}_{N'N} = \bar{V}_{1(3)} - Z_{(3)} \bar{I}_{(3)} = \bar{V}_{1(3)} \quad \square \quad \bar{I}_{(3)} = 0$$

En l'absence du neutre, les courants de lignes ne comportent pas d'harmoniques trois.

### V.2 Montage étoile-étoile équilibré avec fil neutre

Le courant de ligne comporte tous les harmoniques d'ordres multiples de trois qui se retournent par le neutre. Dans ce cas l'équation de tensions d'une maille relative aux harmoniques trois s'écrit :

$$\bar{I}_{N(3)} Z_{N(3)} = \bar{V}_{(3)} - \frac{\bar{I}_{N(3)}}{3} Z_{(3)} \quad \square \quad \bar{I}_{N(3)} = \frac{\bar{V}_{(3)}}{Z_{N(3)} + Z_{(3)}/3} \quad (\text{V.5})$$

$Z_{(3)}$  étant l'impédance équivalente par phase du récepteur et du générateur (ou transformateur) pour les harmoniques trois.

La tension composée ne comporte pas d'harmoniques trois : étant homopolaires ils disparaissent de la tension de ligne.

Les valeurs efficaces des tensions simples et composées sont données par :

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_3^2 + V_5^2 + \dots} \quad \text{et} \quad U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \quad (\text{V.6})$$

$$U_1 = V_1 \sqrt{3}, \quad U_5 = V_5 \sqrt{3}, \quad \dots, \quad U_k = V_k \sqrt{3}$$

On montre aisément que :

$$U = V \sqrt{3} \sqrt{\frac{1 + \tau_5^2 + \tau_7^2 + \tau_{11}^2 + \dots}{1 + \tau_3^2 + \tau_5^2 + \tau_7^2 + \tau_9^2 + \tau_{11}^2 + \dots}} < V \sqrt{3} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Où } \tau_k = \frac{V_k}{V_1} \quad (\text{taux d'harmonique } k)$$

### V.3 Montage triangle du transformateur et de l'alternateur

#### V.3.1 Fonctionnement à vide

En l'absence d'une charge extérieure la somme de tous les harmoniques d'ordres  $k \neq 3p$  des Fém est nulle ; aucun courant dû à ces harmoniques ne circule, les enroulements ne sont parcourus que par les harmoniques (3).

$$J_3 = \frac{3\bar{E}_{(3)}}{3Z_{(3)}} = \frac{\bar{E}_{(3)}}{Z_{(3)}} \quad (\text{V.8})$$

$E_{(3)}$  et  $Z_{(3)}$  représentent respectivement l'impédance de l'enroulement de chaque phase (pour les harmoniques trois) et sa Fém.

#### V.3.2 Fonctionnement en charge

En présence d'une charge extérieure équilibrée, les harmoniques de courants de ligne d'ordres multiples de trois ne circulent pas.

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23}$$

$\bar{J}_{12}$ ,  $\bar{J}_{23}$  et  $\bar{J}_{31}$  sont les courants de phases et  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$  sont les courants de lignes.

Comme les courants  $\bar{J}_{12(3)}$ ,  $\bar{J}_{23(3)}$  et  $\bar{J}_{31(3)}$  sont homopolaires, il en résulte que :

$$\bar{I}_{1(3)} = \bar{I}_{2(3)} = \bar{I}_{3(3)} = 0.$$

La tension de ligne ne comporte pas d'harmoniques trois :

$$\bar{U}_{12(3)} = \bar{E}_3 + Z_3 \bar{J}_3 = 0$$

#### V.4 Grandeurs efficaces et puissance en régime non sinusoïdal

La valeur efficace d'un courant non sinusoïdal  $i = \sum_k I_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k)$ , s'écrit :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_k I_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt$$

$$\text{On a : } i^2 = \sum_{k=1} I_{mk}^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) + \sum_{p,q (p \neq q)} I_{mp} I_{mq} \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(q\omega t + \varphi_q)$$

$$\text{Mais, } \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^T \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(q\omega t + \varphi_q) dt = 0 \quad (\text{V.9})$$

On a, par conséquent :

$$I^2 = \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2} + \frac{I_{m5}^2}{2} + \dots, \text{ et par suite : } I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots} \quad (\text{V.10})$$

La valeur efficace d'un courant non sinusoïdal est égale à la racine carrée de la somme des carrés des valeurs efficaces des harmoniques de divers ordres (y compris bien sûr la composante continue si elle existe).

Ce résultat est utilisé dans le paragraphe V.2 pour les valeurs efficaces des tensions.

La puissance active se calcule à partir de l'expression  $P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$ . Si l'on substitue les séries

de  $u(t)$  et  $i(t)$  à l'expression figurant sous le signe somme, on obtient après intégration, compte tenu des relations V.9 :

$$P = \sum_{k=1} U_k I_k \cos \varphi_k \quad (\text{V.11})$$

Où  $\varphi_k$  représente le déphasage entre les harmonique  $k$  de la tension et du courant.

La puissance active d'un courant non sinusoïdal est égale à la somme des puissances actives de

ses diverses harmoniques.

En triphasé on a :  $P = \sum_{k=1} U_k I_k \sqrt{3} \cos \varphi_k$  et  $\varphi_k$  étant le déphasage entre les grandeurs

harmoniques simples.

**Application :**

Un circuit triphasé est représenté par la figure V.2, il est alimenté par un système de Fém "équilibré" non sinusoïdal  $e_1 = 170 \sin \omega t + 80 \cos 3\omega t + 34 \cos 9\omega t$  ; on a aussi  $R = 9\Omega$  et  $L\omega = 2\Omega$ . Calculer les valeurs indiquées par les appareils de mesure, qui sont tous du système électrodynamique.

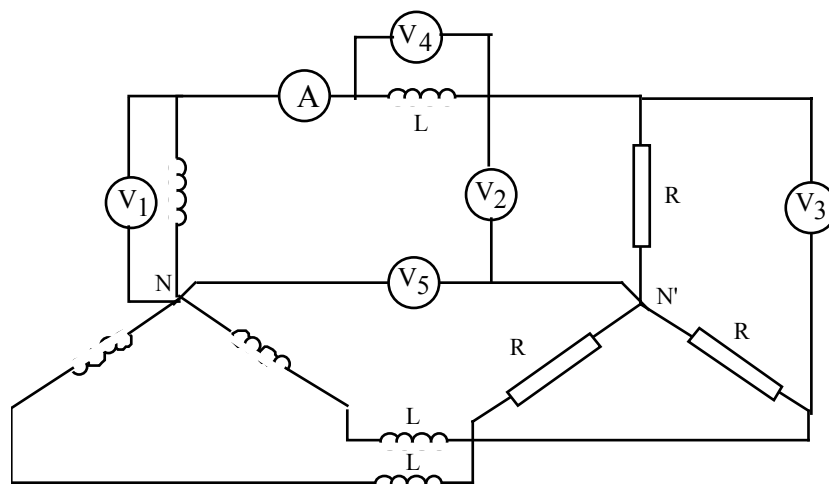


Fig. V.2 : Système triphasé en régime non sinusoïdal.

## VI. COMPOSANTES SYMETRIQUES

Dans l'étude des systèmes déséquilibrés on est souvent amené à considérer un état de fonctionnement déséquilibré comme la superposition de plusieurs états de fonctionnement triphasés équilibrés. Il n'est pas possible de décomposer un système quelconque de trois grandeurs  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$  en une somme de deux systèmes direct et inverse puisqu'il y aurait trois équations à deux inconnues pour calculer les grandeur directe  $V_d$  et inverse  $V_i$ . Un troisième système équilibré indépendant des premiers est donc nécessaire.

Le système inverse est obtenu par une progression de raison  $a$  ( $1, a, a^2$ ), le système direct par une progression de raison  $a^2$  ( $1, a^2, a^4 = a$ ). Le 3<sup>ème</sup> système "homopolaire" est obtenu par une progression de raison  $a^3=1$ , on a :

$$\begin{array}{lll}
 V_{1d} = V_d & V_{1i} = V_i & V_{1o} = V_o \\
 V_{2d} = a^2 V_d & V_{2i} = a V_i & V_{2o} = a^3 V_o = V_o \\
 V_{3d} = a V_d & V_{3i} = a^2 V_i & V_{3o} = a^6 V_o = V_o
 \end{array} \tag{VI.1}$$

## VI.1 transformation de Fortescue

Tout système non équilibré de 3 grandeurs de même fréquence est la superposition de 3 systèmes équilibrés de même fréquence : un système triphasé direct, un système triphasé inverse et un système homopolaire (Fig.VI.1).

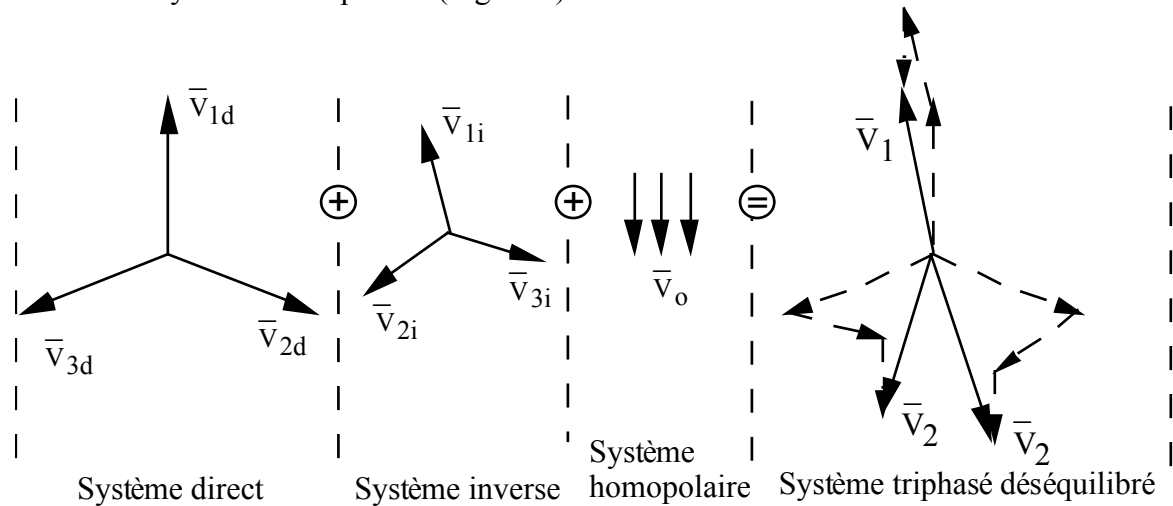


Fig. VI.1 : Composantes symétriques.

$$\begin{array}{l}
 \bar{V}_1 \\
 \bar{V}_2 \\
 \bar{V}_3 \\
 \text{Sys. déséq.}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \bar{V}_d \\
 a^2 \bar{V}_d \\
 a \bar{V}_d \\
 \text{Sys. 3~direct}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 \bar{V}_i \\
 a \bar{V}_i \\
 a^2 \bar{V}_i \\
 \text{Sys. 3~inverse}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 \bar{V}_o \\
 \bar{V}_o \\
 \bar{V}_o \\
 \text{Sys. homopo.}
 \end{array}$$

En formant les sommes  $\bar{V}_1 + a \bar{V}_2 + a^2 \bar{V}_3$ ,  $\bar{V}_1 + a^2 \bar{V}_2 + a \bar{V}_3$  et  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3$ , on obtient :

$$\bar{V}_d = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + a\bar{V}_2 + a^2\bar{V}_3]$$

$$\bar{V}_i = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + a^2\bar{V}_2 + a\bar{V}_3] \quad (\text{VI.2})$$

$$\bar{V}_o = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3]$$

C'est ainsi qu'on pourra ramener l'étude du fonctionnement déséquilibré d'un dispositif triphasé à celles des fonctionnements équilibrés définis par cette décomposition.

## VI.2 Détermination des composantes symétriques

### VI.2.1 Composantes directe et inverse

Tous les systèmes étoilés de 3 vecteurs ayant mêmes extrémités ont les mêmes composantes direct et inverse (Fig.VI.2).

Les tensions  $\bar{V}'_1, \bar{V}'_2, \bar{V}'_3$  s'expriment par :

$$\bar{V}'_1 = \bar{V}_1 + \bar{V}'_{oo'}$$

$$\bar{V}'_2 = \bar{V}_2 + \bar{V}'_{oo'}$$

$$\bar{V}'_3 = \bar{V}_3 + \bar{V}'_{oo'}$$

Les composantes symétriques du système de tensions  $\bar{V}'_1, \bar{V}'_2, \bar{V}'_3$  s'expriment alors, d'après la relation (V.2a), par :

$$\bar{V}'_d = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + a\bar{V}_2 + a^2\bar{V}_3] + \frac{1}{3} \bar{V}_{oo'}(1+a+a^2) = \bar{V}_d$$

$$\bar{V}'_i = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + a^2\bar{V}_2 + a\bar{V}_3] + \frac{1}{3} \bar{V}_{oo'}(1+a+a^2) = \bar{V}_i \quad (\text{VI.3})$$

$$\bar{V}'_o = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3] + \bar{V}_{oo'} = \bar{V}_o + \bar{V}_{oo'}$$

La composante directe et inverse ne dépendant pas de l'origine des vecteurs, on choisit celle qui conduit à la construction la plus simple.

Si l'on choisit comme origine  $O'$  l'extrémité  $\bar{V}_3$ , on a (Fig.2b) :

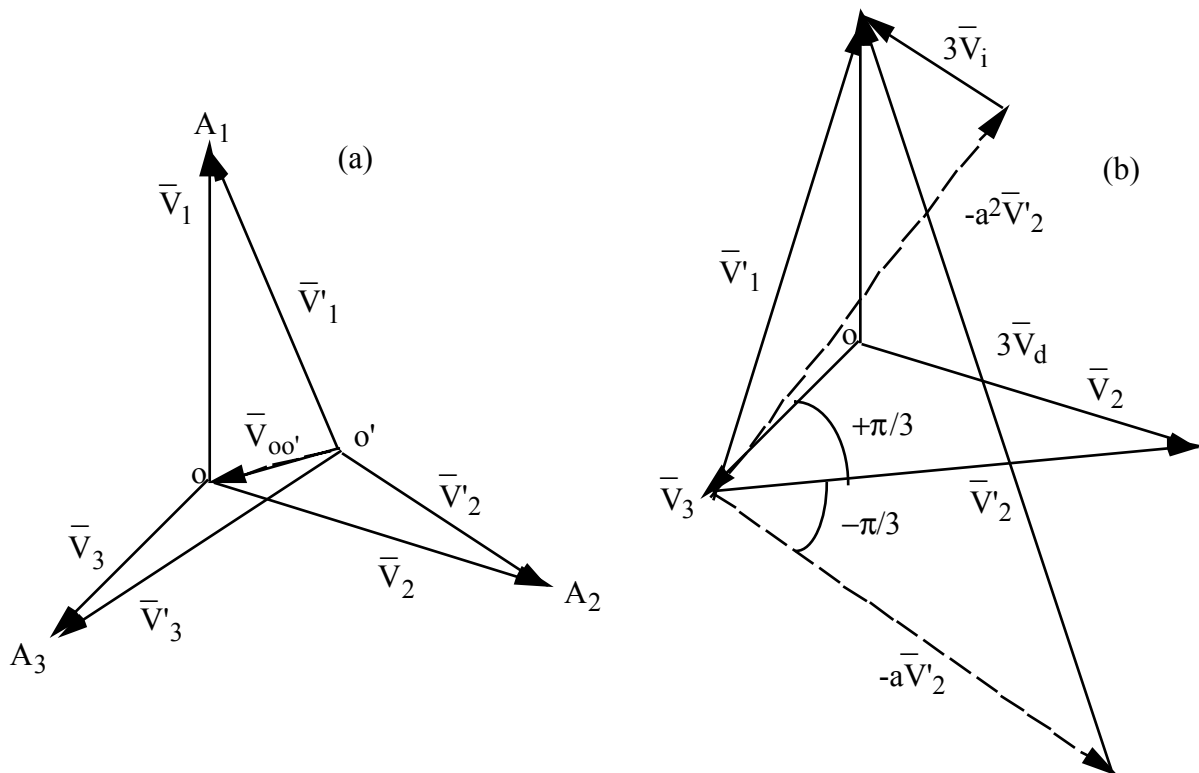


Fig. VI.2 : Systèmes étoilés ayant mêmes extrémités.



$$\bar{V}'_d = \frac{1}{3} [\bar{V}'_1 + a\bar{V}'_2] = \bar{V}_d$$

$$\bar{V}'_i = \frac{1}{3} [\bar{V}'_1 + a^2\bar{V}'_2] = \bar{V}_i$$

### Application

Outre la détermination facile des composantes directe et inverse, cette méthode graphique présente l'avantage de ne pas exiger la connaissance intégrale des grandeurs dont on effectue l'étude. Si l'on cherche les composantes du système triphasé dont le neutre est inaccessible, il suffira de mesurer les tensions composées  $\bar{U}_{12}$ ,  $\bar{U}_{23}$ ,  $\bar{U}_{31}$ , pour construire le triangle dont les sommets désignent les extrémités de  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{V}_2$ ,  $\bar{V}_3$  (Fig.VI.3). Les tensions  $\bar{U}_{13} = -\bar{U}_{31}$  jouent alors le rôle des grandeurs  $\bar{V}'_1$  et  $\bar{V}'_2$ .

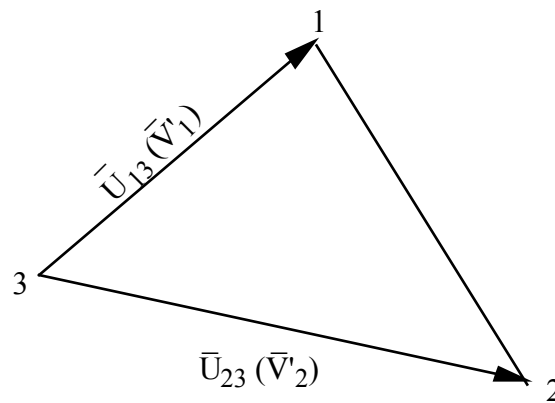


Fig. VI.3 : détermination simplifiée des composantes directe et inverse.

### VI.2.2 Déterminations des composantes homopolaires

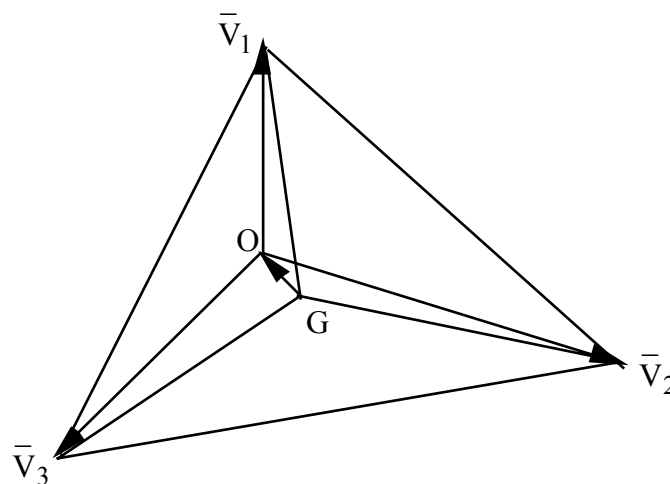


Fig. VI.4 : Détermination des composantes homopolaires.

On détermine le centre de gravité G du triangle formé à partir des extrémités des vecteurs  $\bar{V}_1$ ,

$\bar{V}_2, \bar{V}_3$ , et on a :

$$\bar{V}_o = \frac{1}{3} [\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3]$$

$$\bar{V}_{1G} + \bar{V}_{2G} + \bar{V}_{3G} = 0$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_G + \bar{V}_{1G}, \bar{V}_2 = \bar{V}_G + \bar{V}_{2G} \text{ et } \bar{V}_3 = \bar{V}_G + \bar{V}_{3G}$$

$$\bar{V}_o = \frac{1}{3} [\bar{V}_G + \bar{V}_{1G} + \bar{V}_G + \bar{V}_{2G} + \bar{V}_G + \bar{V}_{3G}] = \bar{V}_G$$

### VI.2.2 Composantes symétriques du système de tensions composées

Ces composantes se déduisent simplement de celle d'un système quelconque de tensions étoilées défini sur la même ligne :

$\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$  est un système de tensions étoilées de composantes  $\bar{V}_d, \bar{V}_i$  et  $\bar{V}_o$ , on a :

$$\bar{U}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = \bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_o - (a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i + \bar{V}_o) = \bar{V}_d (1-a^2) + \bar{V}_i (1-a)$$

$$\bar{U}_{23} = \bar{V}_2 - \bar{V}_3 = (a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i + \bar{V}_o) - (a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i + \bar{V}_o) = \bar{V}_d (a^2-a) + \bar{V}_i (a-a^2)$$

$$\bar{U}_{31} = \bar{V}_3 - \bar{V}_1 = (a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i + \bar{V}_o) - (\bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_o) = \bar{V}_d (1-a) + \bar{V}_i (a^2-1)$$

On en déduit donc :

$$\bar{U}_d = (1-a^2) \bar{V}_d = \sqrt{3} \bar{V}_d e^{+j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{U}_i = (1-a) \bar{V}_i = \sqrt{3} \bar{V}_i e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

### VI.3 Mesure des composantes symétriques des systèmes de tensions simples (étoilées)

Pour la mesure des composantes symétriques, on se limite, ici, à un seul exemple de montage :

#### VI.3.1 Composantes directe et inverse

On considère le montage représenté sur la figure V.5, avec  $L\omega = \frac{1}{C\omega} = R\sqrt{3}$  et un voltmètre de très grande impédance. On peut écrire :

$$\bar{U}_{AD} = \bar{U}_{AC} - \bar{U}_{DC}$$

$$\bar{U}_{DC} = \bar{U}_{BC} \text{ Erreur !}$$

$$\bar{U}_{DC} = -a \bar{U}_{BC} = -a \bar{U}_{23}$$

$$\bar{U}_{AD} = \bar{U}_{13} - (-a) \bar{U}_{23} = 3 \bar{V}_d$$

On se ramène donc à la construction de la figure VI.2b où la grandeur  $\bar{V}'_2$  représente ici

$\bar{U}_{BC} = \bar{U}_{23}$  et  $\bar{V}'_2$  représente  $\bar{U}_{13}$ . Le voltmètre mesure donc  $U_{AD} = 3 V_d$ .

Si l'on permute les connexions des points B et C sur les fils 2 et 3, on obtient :

$\bar{U}_{AD} = \bar{U}_{AB} - \bar{U}_{DB} = \bar{U}_{13} - (-a^2) \bar{U}_{23} = 3 \bar{V}_i$ . On se réfère à la même figure VI.2b, le voltmètre mesure dans ce cas  $3 V_i$ .

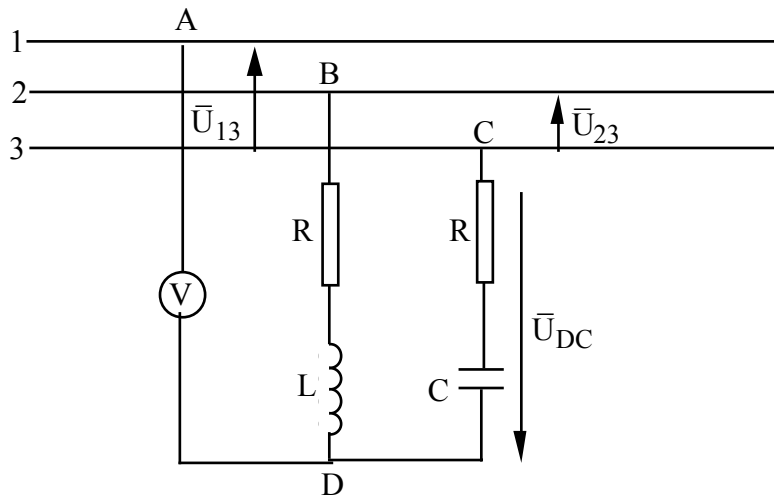


Fig.VI.5 : Montage pour la mesure des composantes directe et inverse.

### VI.3.1 Composante homopolaire

Pour déterminer la composante homopolaire d'un système de tensions simples  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ , on a vu qu'il suffit de connaître le potentiel du centre de gravité du triangle des extrémités de ces tensions. Le montage de la figure VI.6 permet d'effectuer cette mesure. On a :

$$\bar{I}_{R1} + \bar{I}_{R2} + \bar{I}_{R3} = 0, \text{ et par suite :}$$

$$\bar{V}_{R1} + \bar{V}_{R2} + \bar{V}_{R3} = R (\bar{I}_{R1} + \bar{I}_{R2} + \bar{I}_{R3}) = 0.$$

Il en résulte que l'origine des vecteurs  $\bar{V}_{R1}, \bar{V}_{R2}, \bar{V}_{R3}$  constitue le centre de gravité (se référer à la figure VI.4), et le voltmètre mesure donc  $V_0$ .

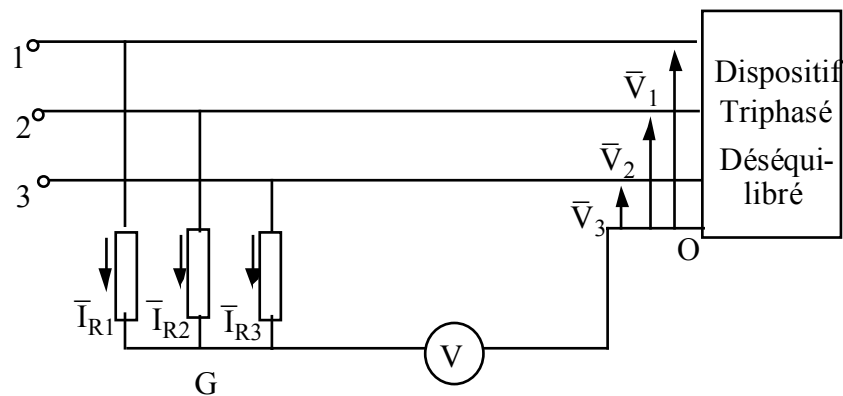


Fig. VI.6 : Détermination de la composante homopolaire.

#### VI.4 Puissances des systèmes déséquilibrés

Sous forme matricielle, la puissance apparente complexe du système s'écrit :

$$|\bar{S}| = |\bar{V}|_t |\bar{I}|^* |$$

$$|\bar{V}| = F |\bar{V}_s|$$

$$|\bar{I}| = F |\bar{I}_s| \square |\bar{I}|^* = F^* |\bar{I}_s^*|$$

$$|\bar{V}|_t = |\bar{V}_s| F_t$$

$$|\bar{S}| = |\bar{V}_s|_t F_t F^* |\bar{I}_s^*|$$

$$F_t F^* = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3|I|$$

$$|\bar{S}| = 3 |\bar{V}_s|_t |\bar{I}_s^*|$$

$$\bar{S} = 3 \bar{V}_d \bar{I}_d^* + 3 \bar{V}_i \bar{I}_i^* + 3 \bar{V}_o \bar{I}_o^* = P + jQ$$

$$\bar{S}_d = 3 \bar{V}_d \bar{I}_d^* = P_d + jQ_d \text{ (puissance apparente directe).}$$

$$\bar{S}_i = 3 \bar{V}_i \bar{I}_i^* = P_i + jQ_i \text{ (puissance apparente inverse).}$$

$$\bar{S}_o = 3 \bar{V}_o \bar{I}_o^* = P_o + jQ_o \text{ (puissance apparente homopolaire).}$$

$$P = P_d + P_i + P_o$$

$$Q = Q_d + Q_i + Q_o$$

Ainsi, la puissance apparente complexe totale, la puissance active totale et la puissance réactive totale sont respectivement égales à la somme, des puissances complexes, des puissances actives et réactives des systèmes direct, inverse et homopolaire.

## CIRCUIT MAGNETIQUE EN REGIME ALTERNATIF

### BOBINES A NOYAU DE FER

#### I BOBINE A NOYAU DE FER MONOPHASE

##### I.1 Fonctionnement

Un enroulement de  $N$  spires de résistance  $R$  bobinées sur un circuit magnétique feuilleté, alimenté par une tension supposée sinusoïdale  $u=U\sqrt{2} \cos\omega t$ , est parcouru par un courant alternatif  $i$ . Les ampères tours  $Ni$  créent un flux  $\Phi_1 = \Phi + \Phi_f$

$\Phi$  : flux canalisé dans le circuit magnétique (saturable).

$\Phi_f$  : flux de fuites canalisé en partie dans le fer et en partie dans l'air ; le circuit magnétique correspondant n'est pas saturé (réductance  $R_f$  constante).

La figure I.1 représente le schéma d'une bobine à noyau de fer.

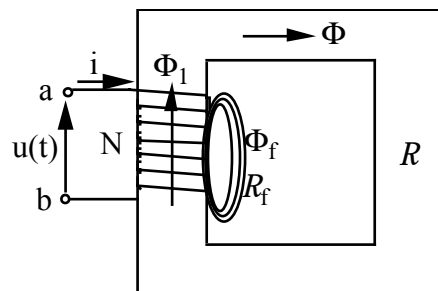


Fig. I.1 : Schéma d'une bobine à noyau de fer.

##### I.2 Schéma équivalent

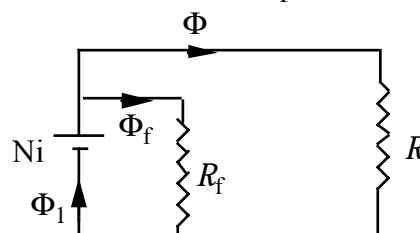
La figure I.2 représente le schéma équivalent d'une bobine à noyau de fer, on a :

$$Ni = R\Phi = R_f\Phi_f$$

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_f}$$

Au flux de fuites on fait correspondre un coefficient d'auto induction constant  $l$  qui caractérise

l'inductance de fuites telle que :  $N\Phi_f = li \quad \square \quad l = \frac{N^2}{R_f}$



---

*Fig. I.2 : Schéma équivalent d'une bobine à noyau de fer.*

### I.3 Equation électrique

L'équation électrique du circuit s'écrit :

$$u + e = Ri$$

où  $e$  est la force électromotrice d'induction :  $e = - \frac{d\Phi_1}{dt}$

$$u = N \frac{d\Phi_1}{dt} + Ri = N \frac{d\Phi}{dt} + l \frac{di}{dt} + Ri$$

Pour les grandeurs sont sinusoïdales équivalentes, on peut écrire :

$$\bar{U} = jN\omega\bar{\Phi} + j l \omega \bar{I} + R\bar{I}$$

### I.4 Bobine parfaite

On suppose qu'il n'y a pas de saturation, pas de fuites magnétiques et pas de pertes par hystérésis et par courants de Foucault, on a :

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} + Ri$$

On néglige la chute Ohmique dans l'enroulement  $Ri \ll N \frac{d\Phi}{dt}$  (hypothèse de Kapp) .

$$\Phi = \frac{1}{N} \int u dt = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Le flux est sinusoïdal :  $\Phi = \Phi_M \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$  avec  $\Phi_M = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega}$  (à tension constante l'amplitude du flux reste constante) .

$$U \spadesuit E = \frac{N\omega}{\sqrt{2}} \Phi_M = 4,44 N f B_M S$$

$U \spadesuit 4,44 N f B_M S$  (formule de Boucherot)

$$Ni = R\Phi \quad i = \frac{R}{N} \Phi = \frac{R}{N^2\omega} U_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad i = \frac{U_m}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$L$  est le coefficient d'inductance propre :  $R = cte \quad L = cte (L = \frac{N^2}{R})$

le courant est sinusoïdal et en phase avec  $\Phi$ .

### I.5 Bobine réelle : forme d'onde du courant absorbé

#### I.5.1 Influence de la saturation

Lorsque le circuit magnétique est saturé la réluctance  $R \neq cte$  donc  $L \neq cte$ .  $u = N \frac{d\Phi}{dt}$  et le flux reste

sinusoïdal, imposé par la tension d'alimentation. Le courant et le flux sont en phase mais  $i$  n'est pas sinusoïdal.

La figure I.3 illustre la méthode graphique pour la détermination de  $i(t)$  à partir de la courbe d'aimantation  $\Phi(i)$  et de  $\Phi(t)$ .

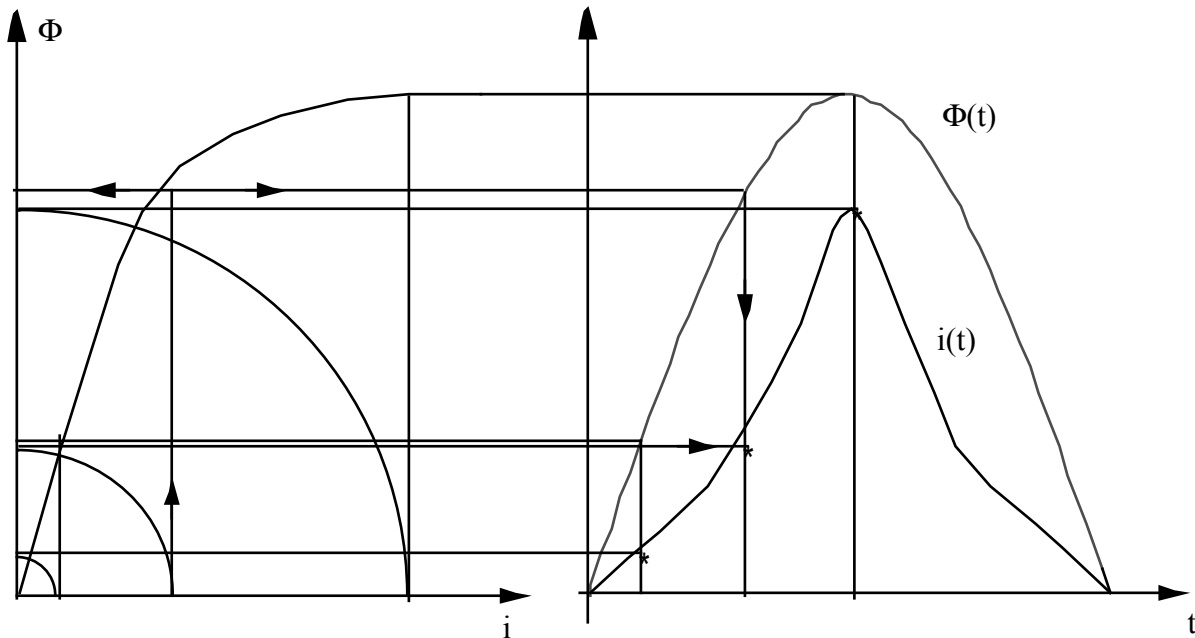


Fig. I.3 : Détermination graphique de  $i(t)$ .

### I.5.1 Influence du phénomène d'hystérésis

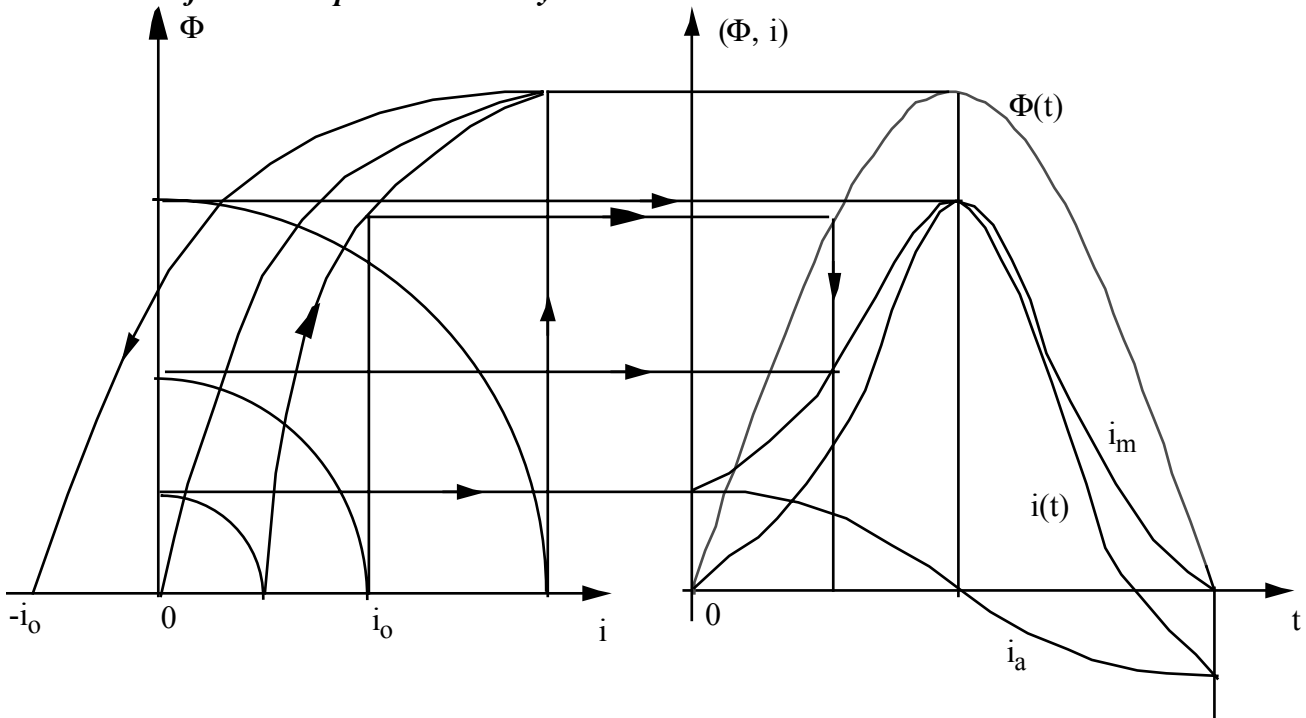


Fig. I.4 : Construction de  $i(t)$  en tenant compte de l'hystérésis.

Le courant n'est pas une fonction sinusoïdale. Il est périodique et ne s'annule pas aux mêmes

instants que le flux. Pour étudier le comportement de la bobine on considère un courant sinusoïdal équivalent (fictif) au courant réel, de même valeur efficace, il correspond aux mêmes effets énergétiques :

$$i = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m3} \sin(3\omega t + \varphi_3) + I_{m5} \sin(5\omega t + \varphi_5) + \dots$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots}$$

$I_1, I_3, I_5, \dots$ , sont les valeurs efficaces des courants harmoniques.

Cependant, pour le traitement vectoriel des équations on peut considérer la composante fondamentale du courant réel.

Graphiquement, on constate qu'il est possible de décomposer la courbe  $i(t)$  en une composante  $i_a$  sinusoïdale en quadrature avancée sur le flux donc en phase avec la tension  $u$  et d'une courbe  $i_m = i - i_a$ , en phase avec le flux et qui n'est pas sinusoïdale (elle pourrait être construite à partir de  $\Phi(i)$  dépourvue d'hystérésis).

Le courant sinusoïdal équivalent s'écrit :  $\bar{I} = \bar{I}_m + \bar{I}_a$ .

La composante réactive  $\bar{I}_m$  est en phase avec le flux, elle crée le flux et la composante active

$\bar{I}_a$  est en phase avec la tension  $u$  (c'est une composante active due aux pertes par hystérésis et courants de Foucault).

$\alpha$  représente le déphasage de  $\bar{\Phi}$  par rapport à  $\bar{I}$  ; il n'est pas dû seulement à l'hystérésis du matériau mais aussi au courant de Foucault.

Cependant, si les pertes par courants de Foucault sont réduites on peut assimiler  $\alpha$  à l'angle hystérétique, on a :  $\sin \alpha = \frac{P_H + P_F}{UI}$

Les pertes fer  $P_f = P_H + P_F = UI_a$ .

On définit une résistance  $R_f$  qui traduit les pertes fer :  $R_f = \frac{U}{I_a} = \frac{U^2}{P_f}$ .  $R_f$  simule les pertes par hystérésis et par courants de Foucault, elle est en parallèle avec une inductance idéalisée.

On a :  $\bar{U} = R_f \bar{I}_a = jL\omega \bar{I}_m$ .

La relation d'Hopkinson s'écrit :  $R \bar{\Phi} = N \bar{I}_m$ .

La figure I.5 représente le schéma équivalent ainsi que le diagramme vectoriel.



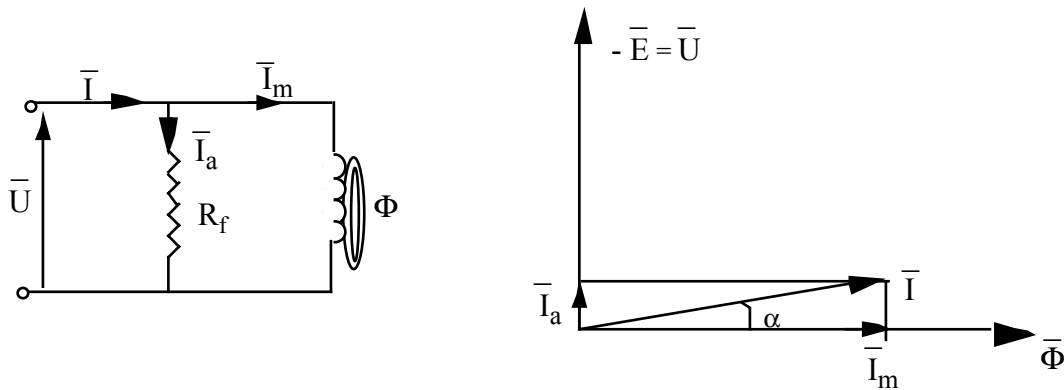


Fig. I.5 : Schéma équivalent et diagramme vectoriel.

**I.5.2 Diagramme général de fonctionnement et schéma équivalent**

L'équation général met en évidence successivement la chute ohmique et la chute inductive. Le schéma équivalent (Fig. I.6) rend compte des équations de fonctionnement suivantes :

$$\bar{U} = jN\omega\bar{\Phi} + R\bar{I} + j\omega\bar{I}$$

$$\bar{U} = -\bar{E} + j\omega\bar{I} + R\bar{I}$$

$$I_a = \frac{P_f}{E} \text{ et } \bar{I} = \bar{I}_m + \bar{I}_a.$$

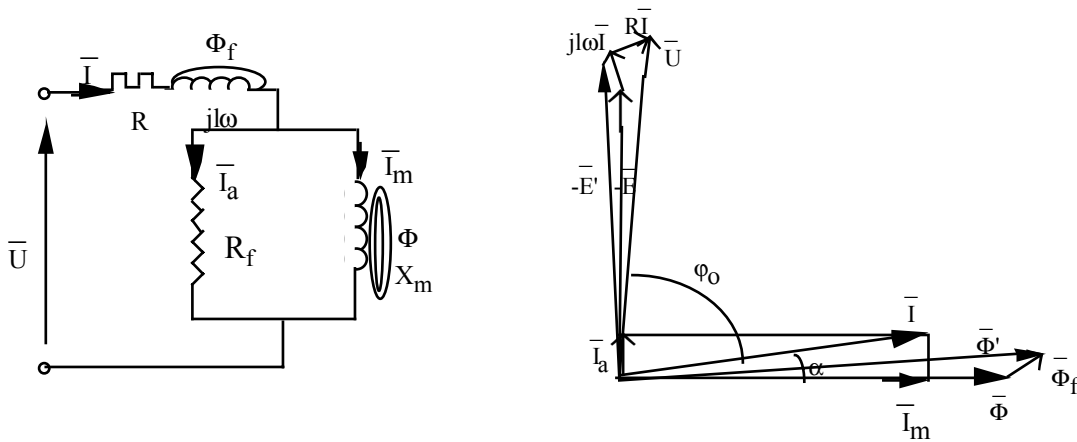


Fig. I.6 : Schéma équivalent et diagramme vectoriel.

$E I_a$  : pertes fer.

$E I_m$  : puissance magnétisante

$R I^2$  : pertes Joule

**Schéma équivalent série :**

Le schéma équivalent (Fig. I.7) peut être du type série, dont les éléments peuvent être déterminés à partir de ceux du schéma équivalent parallèle. On a :

$$R'_f + jX'_m = R_f / (jX_m)$$

$$R'_f + jX'_m = \frac{R_f jX_m}{R_f + jX_m}$$

$$R'_f + jX'_m = \frac{R_f X_m^2 + j R_f^2 X_m}{R_f^2 + X_m^2} \quad \square \quad R'_f = R_f \frac{X_m^2}{R_f^2 + X_m^2} \quad \text{et} \quad X'_m = X_m \frac{R_f^2}{R_f^2 + X_m^2}$$

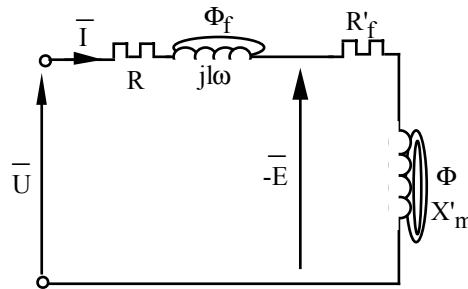


Fig. I.7 : Schéma équivalent série.

## I.6 Pertes ferromagnétiques

### I.6.1 Pertes par hystérésis

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'unité de volume vaut :  $W_h = \int_c H dB$ .

La surface de la boucle d'hystérésis (Fig.I.8) représente l'énergie dégagée par l'unité de volume de la substance pendant la durée du cycle d'aimantation.

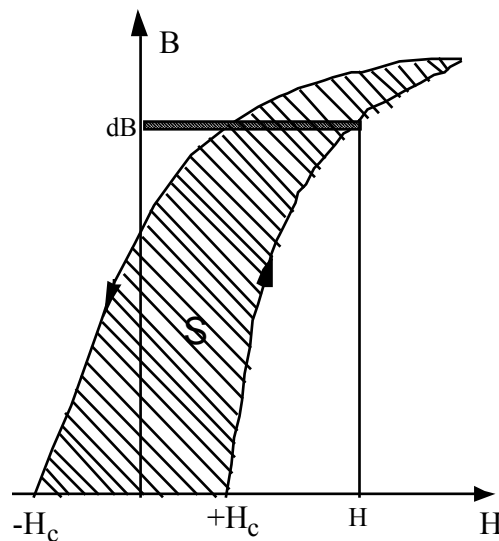


Fig. I.8 : Représentation de l'énergie dissipée au cours du cycle d'hystérésis.

Pour les calculs des pertes par hystérésis, on utilise les expressions empiriques.

a - Formule de Steinmetz :  $P_H = \eta v f B_M^{1,6}$

b - Formule de Richter :  $P_H = a v f B_M + b v f B_M^2$

où,  $v$  représente le volume du matériau,  $f$  est la fréquence du cycle et  $\eta$ ,  $a$ ,  $b$  sont des constantes dépendant de la nature du matériau.

Pour les inductions  $B_M \geq 1$  T, la formule de Richter se réduit pratiquement à :  $P_H = b v f B_M^2$

### 1.6.2 Pertes par courants de Foucault

Les courants de Foucault sont induits dans la masse du matériau ferromagnétique. Ces courants produisent, par effet Joule, une dissipation d'énergie et un échauffement du circuit magnétique.

Une approche simple peut conduire au calcul de ces pertes. Considérons, en effet, une tôle de longueur  $L$  et d'épaisseur  $e$  soumise à un champ d'induction  $B = B_m \cos \omega t$  dirigée suivant  $L$  (Fig. I.9).

Une spire conductrice de résistivité  $\rho$  de longueur assimilée à  $2l$  de section  $Ldx$  présente une résistance  $r$ , telle que :  $r = \frac{2l\rho}{Ldx}$ . Cette spire embrasse un flux  $\Phi = BS = B \cdot 2 \cdot l$ , avec :

$\Phi = 2x l B_M \cos \omega t$ , on a alors :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = 2x \omega l B_M \sin \omega t$$

$$E = \sqrt{2} \cdot l B_M \omega = \sqrt{8} \cdot l B_M \pi f$$

$$i = \frac{E}{r} = \frac{\sqrt{8} \cdot l B_M \pi f}{2 l \rho} Ldx = \frac{\sqrt{2} l B_M \pi f}{\rho} x dx$$

Les pertes de puissance dans le circuit élémentaire considéré sont :  $dP_F = ri^2 = Ei$

$$dP_F = \frac{4\pi^2 l L f^2 B_M^2}{\rho} x^2 dx \text{ et par suite :}$$

$$P_F = \int_0^{e/2} dP_f = \frac{4\pi^2 l L f^2 B_M^2}{\rho} \int_0^{e/2} x^2 dx$$

$$P_F = \frac{4 \pi^2 l L e^3}{24 \rho} f^2 B_M^2$$

Le volume  $v = eL$ , on obtient :

$$P_F = \frac{\pi^2}{6} \frac{v e^2}{\rho} f^2 B_M^2 = K_F f^2 B_M^2$$

Les pertes par courants de Foucault sont proportionnelles au carré de l'épaisseur de la tôle, inversement proportionnelles à la résistivité, proportionnelles au carré de l'induction et au carré de la fréquence. On réduit ces pertes par l'utilisation de tôles fines (0,3 à 0,5 mm Hz) et par addition, au matériau ferromagnétique, des impuretés favorables augmentant sa résistivité.

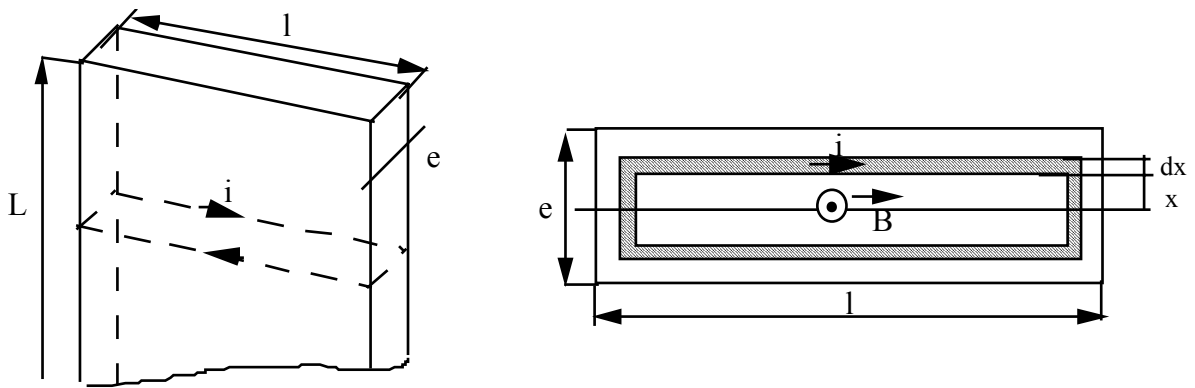


Fig. I.9 : Courant de Foucault induit dans une tôle.

### I.6.2 Pertes ferromagnétiques totales

$$P_f = P_F + P_H$$

Pour les inductions max  $\geq 1$  T, on a :

$$P_f = b v f B_M^2 + K v f^2 B_M^2$$

Pour une même induction on peut séparer les pertes mesurées à 2 fréquences.

$$\begin{cases} P_{f1} = \alpha f_1 + \beta f_1^2 \\ P_{f2} = \alpha f_2 + \beta f_2^2 \end{cases} \quad \square \quad \alpha = \frac{f_2^2 P_{f1} - f_1^2 P_{f2}}{f_1 f_2 (f_2 - f_1)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{f_2 P_{f1} - f_1 P_{f2}}{f_1 f_2 (f_2 - f_1)}$$

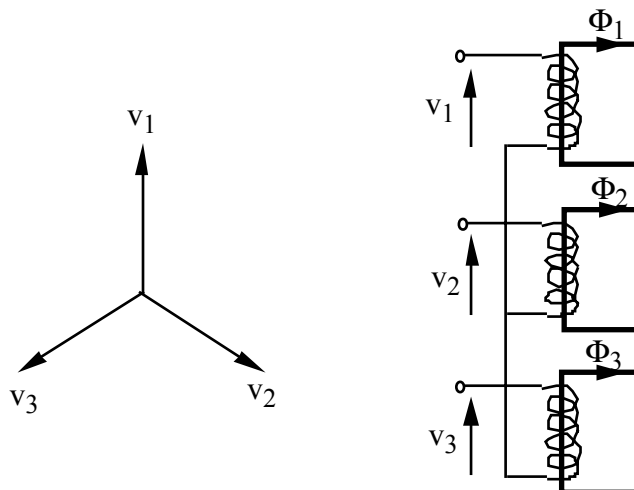
## II BOBINE A NOYAU DE FER TRIPHASE

### II.1 Constitution

#### II.1.1 A éléments monophasés

C'est la juxtaposition de 3 bobines monophasées, chacune porte un enroulement alimenté à partir d'un système de tensions triphasé.

Pour cette constitution symétrique, il n'y a pas de couplage magnétique entre les enroulements (Fig. II.1).



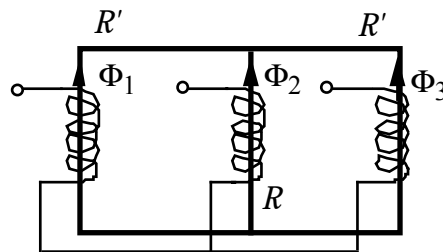
---

*Fig. II.1 : Bobine à noyau de fer à éléments monophasés.*

### **II.1.2 Bobine à circuit magnétique lié**

- *Constitution à trois colonnes :*

Pour ce circuit magnétique (Fig. II.2), il y a couplage magnétique entre les différents enroulements. La partie du flux embrassé par une bobine et qui n'embrasse une autre des enroulements doit circuler à l'extérieur du circuit magnétique (flux de dispersion). Toutes les composantes des flux qui ne satisfont pas à  $\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 = 0$ , leur somme constitue un flux de dispersion (flux homopolaire) qui circule à l'extérieur du circuit magnétique.

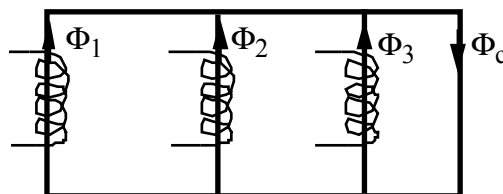


*Fig. II.1 : Circuit magnétique à flux forcés.*

- *Constitution à 4 colonnes :*

Il y a couplage magnétique entre les différents enroulements (Fig. II.3). La partie du flux embrassé par une bobine peut se fermer sans intéresser un autre des deux enroulements et sans quitter le circuit magnétique.

Pour certaines conditions de fonctionnement la 4<sup>ème</sup> colonne peut constituer des trajets de fermeture du flux (circuit magnétique à flux libre).



*Fig. II.3 : Circuit magnétique à flux libre.*

Il y a couplage magnétique entre les enroulements. La partie du flux embrassé par une bobine peut se fermer sans intéresser un autre des deux enroulements et sans quitter le circuit magnétique.

Pour certaines conditions de fonctionnement la 4<sup>ème</sup> colonne peut constituer des trajets de fermeture du flux (circuit magnétique à flux libre).

## **II.2 Calcul des inductances propres et des mutuelles inductances**

### **II.2.1 Schéma équivalent**

On désigne par  $R_n$  la réluctance d'un noyau + éventuellement les culasses et par  $R_\alpha$  la réluctance de fuites de chaque enroulement.

On a le schéma équivalent représenté sur la figure II.4.

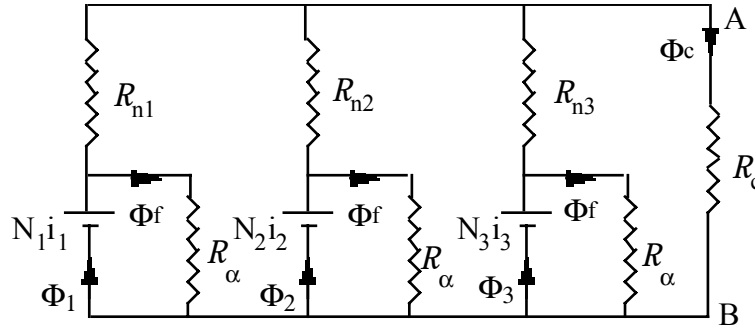


Fig. II.4 : Schéma équivalent d'une bobine à noyau de fer triphasé.

$R_c$  désigne la réluctance correspondant au trajet commun des flux (flux homopolaires), elle dépend du circuit magnétique. Les colonnes non bobinées constituent un trajet des flux de fuites de faible réluctance vis à vis du trajet des fuites dans l'air :  $R_c = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$ .

Pour une bobine à 3 colonnes (à flux forcés),  $R_c$  est très élevée. Le trajet des flux de fuites commun est constitué par l'air et la carcasse du transformateur.

### II.2.2 Calcul des inductances propres et des mutuelles inductances

Pour calculer l'inductance de l'enroulement 1, on ne considère que le flux  $\Phi_1$  créé par cet enroulement :  $L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1}$ .

Pour calculer la mutuelle inductance des enroulements 1 et 2, on calcule le flux dans 1 provenant de 2 ou vice versa :  $M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}$ .  $M_{21} < 0$  puisque  $\Phi_{21} < 0$  (sens contraire de  $\Phi_{22}$ ).

### II.3 Equations de fonctionnement de la bobine triphasée

On admet la symétrie magnétique et soit :

$R$  la résistance d'un enroulement,  $L$  est l'inductance propre d'un enroulement,  $M$  est la mutuelle inductance d'un enroulement,  $v_1, v_2, v_3$  et  $i_1, i_2, i_3$  sont les grandeurs électriques des trois enroulements. En supposant un circuit magnétique non saturé, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \\ v_2 &= R i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \\ v_3 &= R i_3 + L \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

En régime sinusoïdal, l'équation de la phase 1 s'écrit en notation complexe :

$$\bar{V}_1 = R\bar{I}_1 + jL\omega\bar{I}_1 + jM\omega\bar{I}_2 + jM\omega\bar{I}_3$$

### II.3.1 Système direct ou inverse

Pour un système direct ou inverse ( $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ ), on a :

$$\bar{V}_1 = R\bar{I}_1 + j(L - M)\omega\bar{I}_1$$

Pour ce système d'alimentation, l'inductance cyclique est  $L_d = L_i = L - M$

### II.3.2 Système homopolaire

Pour un système homopolaire, de courant  $\bar{I}_0 = \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3$  et de tension  $\bar{V}_0$ , on a :

$$\bar{V}_0 = R\bar{I}_0 + j(L + 2M)\omega\bar{I}_0$$

L'inductance cyclique est alors :  $L_0 = L + 2M$

Pour une bobine à 3 éléments monophasés, on a :  $L_i = L_0 = L$  et  $M = 0$ .

## II.4 Calcul direct des inductances cycliques

En exploitant le schéma équivalent représenté sur le figure II.3, avec  $N$  le nombre de spires de chaque enroulement,  $\Phi_i$  le flux dans un enroulement et  $\Phi_{fi}$  le flux de fuites propre, on peut écrire :

$$\bar{\Phi}_{f1} = \frac{N\bar{I}_1}{R_\alpha}, \bar{\Phi}_{f2} = \frac{N\bar{I}_2}{R_\alpha}, \bar{\Phi}_{f3} = \frac{N\bar{I}_3}{R_\alpha}.$$

Les flux qui parcourent les trois noyaux de réluctance  $R_n$  sont  $(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_{f1})$ ,  $(\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_{f2})$ ,  $(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_{f3})$ .

### II.4.1 Cas des systèmes direct et inverse

Pour un système direct et inverse, on a :

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0 \text{ et } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0.$$

$$\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 = 0 \text{ et } \bar{\Phi}_{f1} + \bar{\Phi}_{f2} + \bar{\Phi}_{f3} = 0 \text{ (} \bar{V}_1 \blacktriangleright jN\omega\bar{\Phi}_1 \text{)}.$$

Le flux résultant dans  $R_c$  est nul. Il en résulte qu'il n'y a pas de différence de comportement pour une alimentation par un système direct ou inverse de tension entre une bobine à flux libre et à flux forcé (A et B sont au même potentiel magnétique), on a :

$$\bar{\Phi}_1 = N\bar{I}_1 \left( \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_\alpha} \right)$$

$$\text{or } \bar{\Phi}_1 \blackspadesuit j \frac{\bar{V}_1}{N\omega} \text{ d'où } \bar{V}_1 = j\omega \left( \frac{N^2}{R_n} + \frac{N^2}{R_\alpha} \right) \bar{I}_1$$

Les inductances cycliques sont donc :

$$L_d = L_i = \frac{N^2}{R_n} + \frac{N^2}{R_\alpha}$$

En général

$$R_\alpha \gg R_n \square L_d = L_i = \frac{N^2}{R_n}$$

#### II.4.2 Cas des systèmes homopolaires

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = \bar{V}_o \text{ et } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_o.$$

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_3 = \bar{\Phi}_o \text{ et } \bar{\Phi}_{f1} = \bar{\Phi}_{f2} = \bar{\Phi}_{f3} = \bar{\Phi}_{fo} \text{ (bobine symétrique).}$$

Le flux résultant dans la branche  $R_c$  est :

$$(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_{f1}) + (\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_{f2}) + (\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_{f3}) = 3R_c (\bar{\Phi}_o - \bar{\Phi}_{fo})$$

Le flux dans  $R_c$  est important et le comportement de la bobine sera différent suivant la valeur de  $R_c$  (le type du circuit magnétique). On peut écrire :

$$N\bar{I}_o = R_n(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_{f1}) + 3R_c (\bar{\Phi}_o - \bar{\Phi}_{fo})$$

$$N\bar{I}_o = (R_n + 3R_c)(\bar{\Phi}_o - \bar{\Phi}_{fo})$$

$$\bar{V}_o \blackspadesuit jN\omega\bar{\Phi}_o \text{ et } \bar{\Phi}_{fo} = \frac{N\bar{I}_o}{R_\alpha}$$

On a alors :

$$N\bar{I}_o \left( 1 + \frac{R_n + 3R_c}{R_\alpha} \right) = (R_n + 3R_c) \frac{\bar{V}_o}{jN\omega}$$

$$\bar{V}_o = j\omega \left( \frac{N^2}{R_n + 3R_c} + \frac{N^2}{R_\alpha} \right) \bar{I}_o = j\omega L_o \bar{I}_o$$

$$L_o = \frac{N^2}{R_n + 3R_c} + \frac{N^2}{R_\alpha}$$

Pour une bobine à 4 noyaux  $R_c$  est de même ordre de grandeur que  $R_n$  et  $R_\alpha \gg R_n$  et

$$L_o \blackspadesuit \frac{N^2}{4R_n}.$$

Pour une bobine à flux forcé  $R_c \gg R_n$  et dépend de l'environnement du circuit magnétique (cuve, etc.), il en résulte que l'inductance homopolaire  $L_o \blackspadesuit \frac{N^2}{R_n + 3R_c}$  est plusieurs dizaines



---

de fois inférieure à l'inductance cyclique directe ou inverse  $L_d \propto \frac{N^2}{R_n}$  .

Pour un couplage étoile avec neutre, le courant homopolaire circule,  $L_0$  existe. Pour un couplage étoile sans neutre ou triangle, le courant homopolaire ne circule pas et l'impédance homopolaire vue de la ligne est infinie.

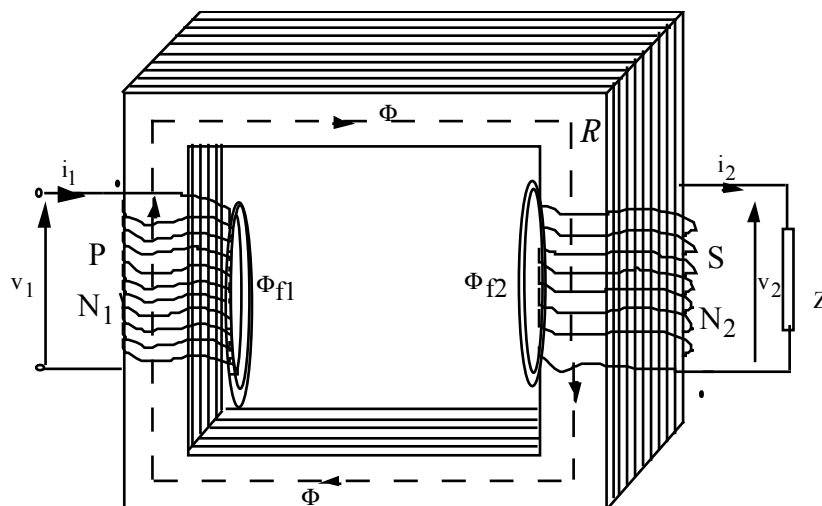
---

## TRANSFORMATEUR MONOPHASE

### I. DESCRIPTION, PRINCIPE GENERAL

Le transformateur est constitué par deux enroulements bobinés sur un circuit magnétique fermé sur lui même, de faible réluctance et feuilleté dans le sens de l'induction pour réduire les courants de Foucault (Fig.I.1).

Les deux enroulements sont ainsi couplés magnétiquement avec un coefficient de couplage entre le primaire et le secondaire (liés par mutuelle inductance  $M$ ).



*Fig. I.1 : Schéma d'un transformateur monophasé.*

Ce système électromagnétique a la propriété fondamentale de transformer un premier niveau de tension en un second niveau de tension sans toutefois changer la nature de l'énergie mise en jeu.

Les enroulements peuvent être bobinés dans le même sens ou en sens inverse, on dit encore pas à gauche ou pas à droite.

On prendra pour  $i_1$  et  $i_2$  les sens positifs conformes avec le sens du flux  $\Phi$ .

Le circuit primaire absorbe de l'énergie, il est considéré comme un récepteur.

Le circuit secondaire fournit de l'énergie à une charge  $Z$ , il est considéré comme un générateur.

Le sens naturel du courant secondaire  $i_2$  correspond à un flux secondaire  $\Phi_2$  obéissant à la loi de Lenz : autrement dit les deux flux  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  engendrés respectivement par  $N_1 i_1$  et  $N_2 i_2$

s'opposent conformément à la loi de Lenz et les deux enroulements sont caractérisés par une mutuelle inductance de signe contraire aux signes des inductances propres.

Le sens du courant secondaire qu'on a adopté correspond à un flux  $\Phi_2$  positif (même sens que  $\Phi_1$ ), il en résulte que la mutuelle inductance est de même signe que  $L$ .

Pour le sens de  $i_2$  adopté, conformément au théorème d'Ampère, la relation d'Hopkinson s'écrit :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = R \Phi$$

## II. EQUATIONS DE FONCTIONNEMENT

### II.1 Circuit primaire

La loi de Kirchoff appliquée au circuit primaire conduit à l'équation suivante :

$$v_1(t) + e_1(t) = R_1 i_1(t)$$

$v_1$  : tension appliquée au circuit primaire,

$e_1$  : force contre électromotrice induite dans l'enroulement primaire,

$i_1$  : courant dans l'enroulement primaire,

$R_1$  : résistance de l'enroulement primaire.

La loi de l'induction électromagnétique appliquée au circuit primaire s'écrit :

$$e_1(t) = - N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

$N_1$  est le nombre de spires de l'enroulement primaire,

$\Phi_1$  est le flux magnétique dans le primaire, c'est le flux par spire du primaire (créé par les ampères-tours primaires).

On a le même processus que pour la bobine à noyau de fer.

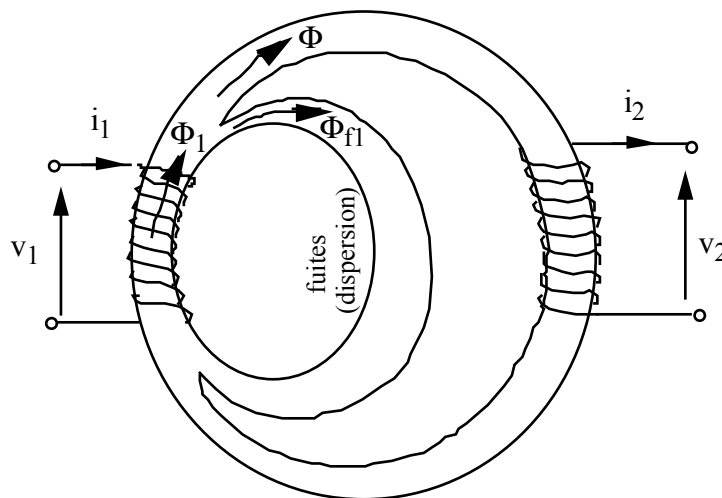


Fig. II.1 : Représentations des flux.

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_{f1}$$

$\Phi$  est le flux principal commun aux deux enroulements primaire et secondaire (flux utile dans

le noyau).

$\Phi_{f1}$  est le flux de fuites de l'enroulement primaire, auquel correspond une inductance de fuites

(ou inductance de dispersion),  $l_1 = \frac{N_1 \Phi_{f1}}{i_1}$ .

Ce flux de fuites  $\Phi_{f1}$  ne contribue pas à l'induction de la tension secondaire.

La force électromotrice primaire s'exprime alors par :

$$e_1(t) = - N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} - l_1 \frac{d\Phi_{f1}}{dt}$$

L'équation des tensions au primaire s'écrit :

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} + R_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt}$$

## II.2 Circuit secondaire

En appliquant la loi de Kirchoff au circuit secondaire, compte tenu des conventions de signes, on a :

$$v_2(t) = e_2(t) - R_2 i_2$$

$$e_2 = - N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

$\Phi_2$  est le flux qui traverse le circuit magnétique, commun au primaire et au secondaire :

$$\Phi_2 = \Phi + \Phi_{f2}.$$

$\Phi$  est flux qui traverse le circuit magnétique, commun au primaire et au secondaire.

$\Phi_{f2}$  est le flux de dispersion de l'enroulement secondaire (flux de fuites secondaire), il est, comme celui de primaire, proportionnel au courant  $i_2$ , auquel correspond donc une inductance

de fuites  $l_2 = \frac{N_2 \Phi_{f2}}{i_2}$ .

$$e_2 = - N_2 \frac{d\Phi}{dt} - l_2 \frac{di_2}{dt}$$

L'équation des tensions secondaire s'écrit alors :

$$- v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} + l_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

Le théorème d'Ampère sous la forme de la relation d'Hopkinson (équation des ampères-tours), s'écrit :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = R \Phi$$

$\Phi$  est le flux commun canalisé dans le circuit magnétique (défini précédemment),  $R$  est la réluctance de ce circuit.

## III. EQUATIONS EN REGIME SINUSOIDAL ET DIAGRAMME VECTORIEL

On suppose que l'alimentation du transformateur par une tension sinusoïdale donne naissance

à des courants et des flux sinusoïdaux. On peut donc écrire les équations en notation complexe.

$$\bar{V}_1 = jN_1\omega\bar{\Phi} + (R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 = -\bar{E}_1 + Z_1\bar{I}_1$$

$$\bar{V}_2 = -jN_2\omega\bar{\Phi} - (R_2 + j\omega L_2) \bar{I}_2 = \bar{E}_2 - Z_2\bar{I}_2$$

$$N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 = R\bar{\Phi}$$

Remarque : Flux à vide et flux en charge.

En charge l'apparition du courant  $i_2$  produit une force magnétomotrice (F.m.m)  $N_2i_2$  qui a un effet démagnétisant conformément à la loi de Lenz. Elle tend à diminuer le flux  $\Phi_0$  qui existe à vide donc à réduire la force contre électromotrice  $e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$  ; il en résulte que  $v_1 - e_1$  croît, le courant  $i_1$  subit une variation importante ( $i_{10} - i_1$  :  $i_{10}$  est de quelques % de  $i_1$ ), son effet magnétisant compense l'action démagnétisante de  $N_2i_2$  (l'équilibre électrique est conservé). Le flux total  $\Phi_1$  satisfait approximativement à  $v_1 - N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \approx 0$ .

Le flux  $\Phi_1$  imposé par  $v_1$  est sinusoïdal et est sensiblement constant entre le fonctionnement à vide et le fonctionnement en charge.

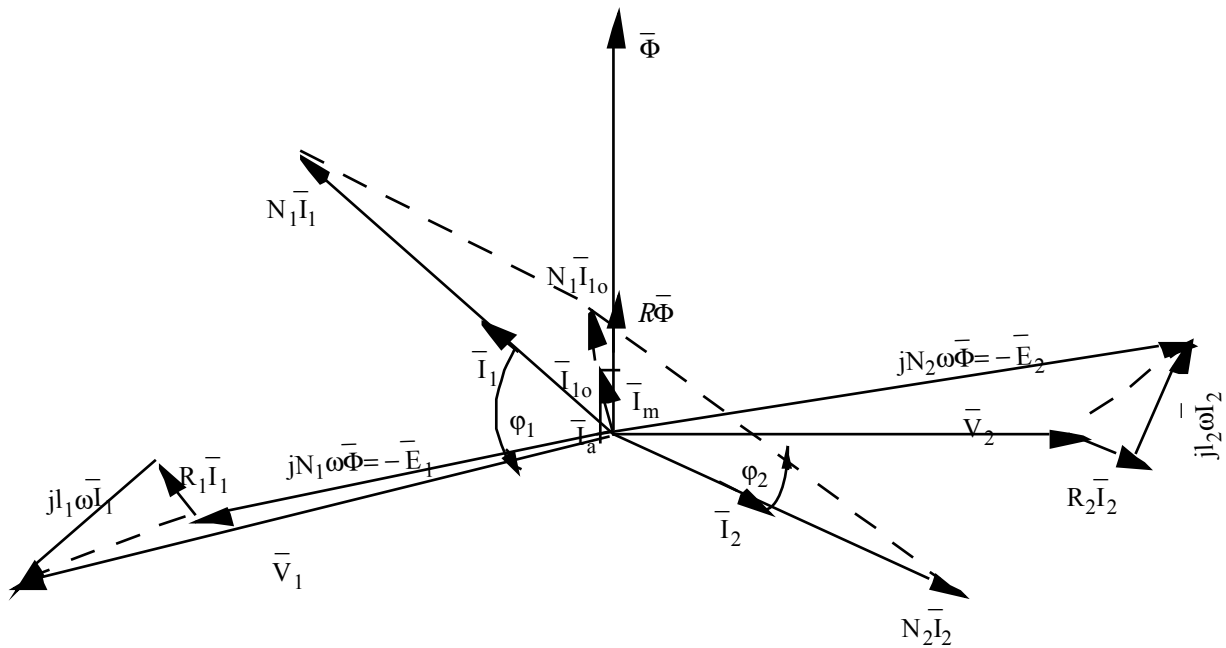
Cependant, en charge le flux de fuites  $\Phi_{f1}$  augmente, donc le flux commun  $\Phi$  en charge diminue encore légèrement. La différence est assez faible pour qu'on puisse considérer pratiquement  $\Phi \approx \Phi_0$  ; on a :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = R\Phi$$

$$N_1 i_{10} = R\Phi_0 \approx R\Phi$$

$$N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 \approx N_1\bar{I}_{10}$$

Les équations des tensions primaire et secondaire ainsi que celle des ampères-tours conduisent au diagramme vectoriel du transformateur.



**Fig. III.1 : Diagramme vectoriel du transformateur.**

Pour tracer le diagramme vectoriel, on suppose connus  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ , ainsi que le point de fonctionnement du circuit secondaire ( $V_2$ ,  $I_2$ ,  $\varphi_2$ ).

On peut connaître également  $I_{10}$  et le déphasage  $\alpha$  entre le flux  $\bar{\Phi}$  et  $\bar{I}_{10}$ , on a :

$$\sin\alpha = \frac{P_f}{V_1 I_{10}} \spadesuit \frac{P_o}{V_1 I_{10}}$$

On part des deux vecteurs  $\bar{I}_2$  et  $\bar{V}_2$ , on trace  $R_2\bar{I}_2$  en phase avec  $\bar{I}_2$  puis  $jI_2\omega\bar{I}_2 \square \bar{E}_2$  ; on trace  $\bar{\Phi}$  en quadrature avancée sur  $\bar{E}_2$ . La connaissance de  $\alpha$  permet de tracer  $N_1\bar{I}_{10}$  et par suite  $N_1\bar{I}_1$

(d'après la relation  $N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 = N_1\bar{I}_{10}$ ).

A partir de l'extrémité du vecteur  $-\bar{E}_1$  (dédit de  $\bar{E}_2$ ) on mène  $R_1\bar{I}_1$  en phase avec  $\bar{I}_1$  puis  $jI_1\omega\bar{I}_1$  (quadrature avancée) ; on en déduit donc  $\bar{V}_1$ ,  $\varphi_1$  ainsi que  $\bar{I}_1$ .

#### IV. TRANSFORMATEUR PARFAIT

Pour simplifier l'étude du transformateur on pourrait tenir compte de certaines considérations physiques. En effet, le transformateur est réalisé de façon que les chutes Ohmiques  $R_1I_1$  et  $R_2I_2$  soient faibles  $V_1$  et  $V_2$  respectivement, et que les chutes inductives soient également faibles devant  $E_1$  et  $E_2$  respectivement, puisqu'elles représentent les flux de fuites.

Il est donc légitime de faire des approximations sur ces termes qui sont faibles.

Par ailleurs, le terme  $R\Phi$  est faible, du fait que  $R$  est faible du moins en l'absence de la

saturation (grande perméabilité).

Compte tenu de ces considérations, on pourrait définir théoriquement avec certaines hypothèses un transformateur "parfait".

- Perméabilité  $\mu$  infinie  $\square R = 0$ ,
- pas de flux de fuites,
- pas de pertes ferromagnétiques ( $\mu \neq 0 \square H \neq 0$  : pas d'hystérésis),
- les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont nulles.

Les équations de fonctionnement de ce transformateur deviennent alors :

$$\bar{V}_1 = jN_1\omega\bar{\Phi}$$

$$\bar{V}_2 = -jN_2\omega\bar{\Phi}$$

$$N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 = 0$$

Les tensions sont dans le rapport des nombres de spires et les courants dans le rapport inverse.

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = -\frac{N_2}{N_1} = -m \quad \text{et} \quad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -m$$

$\bar{V}_2 = -m\bar{V}_1$  et  $\bar{I}_1 = -m\bar{I}_2$  (m étant le rapport de transformation).

#### IV.1 Formule de Boucherot

$$V_1 = N_1\omega\Phi = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_1 f \Phi_m \quad \square \quad V_1 = 4,44 N_1 f B_m S$$

Le transformateur parfait (TP) transmet intégralement sa puissance à la charge, en effet :

$$\bar{S}_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = -\frac{\bar{V}_2}{m} (-m\bar{I}_2)^* = \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$$

$$\bar{S}_2 = \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \bar{S}_1 = P_1 + jQ_1 = P_2 + jQ_2 \quad \square \quad P_1 = P_2 \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_2$$

Le diagramme vectoriel du TP devient (Fig.IV.1).

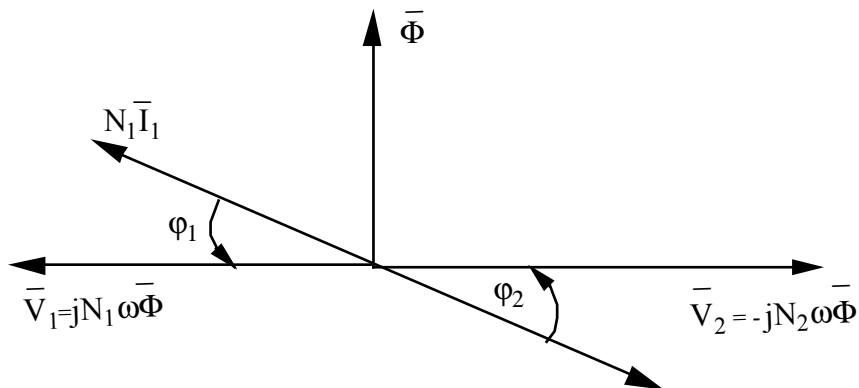


Fig.IV.1 : Diagramme vectoriel d'un transformateur parfait.

**IV.2 Impédance ramenée**

On peut ramener l'impédance secondaire d'un TP au primaire et vice versa (Fig.IV.2).

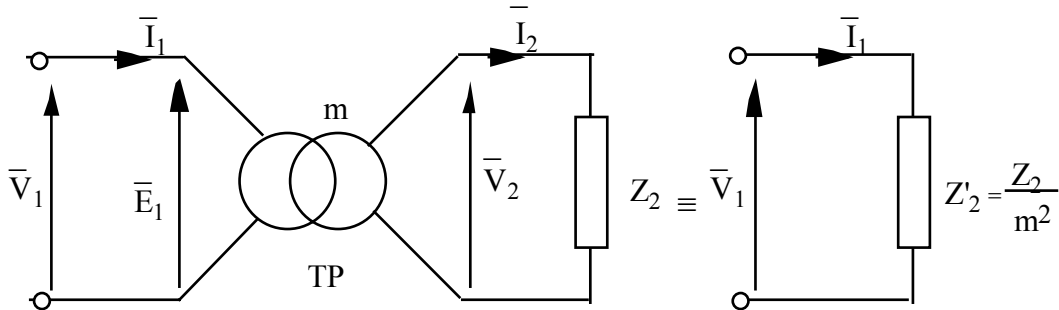


Fig. IV.2 : Impédance ramenée.

$$\bar{V}_2 = -Z_2 \bar{I}_2 \quad \square \quad -m \bar{V}_1 = Z_2 \frac{\bar{I}_1}{m} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{Z_2}{m^2}$$

L'impédance du transformateur parfait vue du secondaire est  $m^2$  fois plus petite que l'impédance  $Z_2$  branchée au secondaire.

Généralisation :

On peut ramener au primaire d'un TP une partie de l'impédance secondaire  $Z_2$  en la divisant par  $m^2$ . On peut également ramener du primaire une impédance  $Z_1$  au secondaire en la multipliant par  $m^2$ . Les schémas équivalents sont représentés sur la figure IV.3.

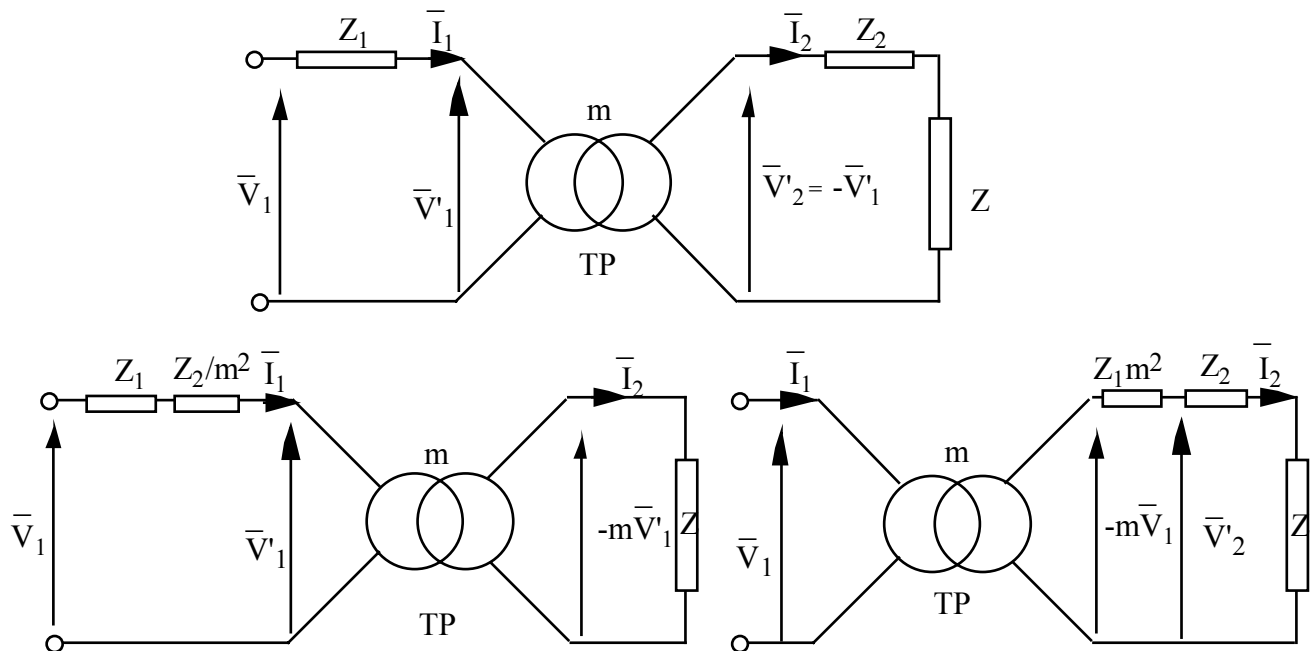


Fig.IV.3 : Impédances ramenées, schémas équivalents.

Pour la source, les trois schémas sont équivalents.



## V. SCHEMA EQUIVALENT DU TRANSFORMATEUR

Les équations de fonctionnement sont les suivantes :

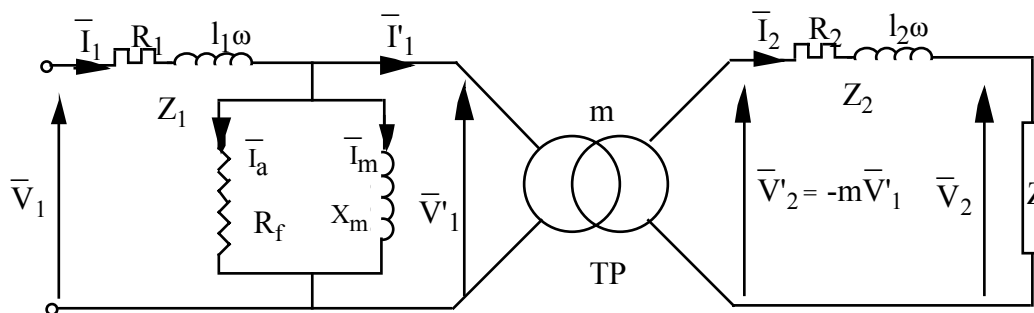
$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j l_1 \omega \bar{I}_1 = \bar{V}'_1 + Z_1 \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_2 = \bar{E}_2 - R_2 \bar{I}_2 - j l_2 \omega \bar{I}_2 = \bar{V}'_2 - Z_2 \bar{I}_2$$

$$\bar{V}'_2 = -m \bar{V}'_1$$

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_{10} = -m_1 \bar{I}_2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{équations d'un TP} \\ \bar{I}'_1 = -m_1 \bar{I}_2 \end{array} \right\}$$

Le schéma équivalent doit satisfaire à toutes les équations de fonctionnement.

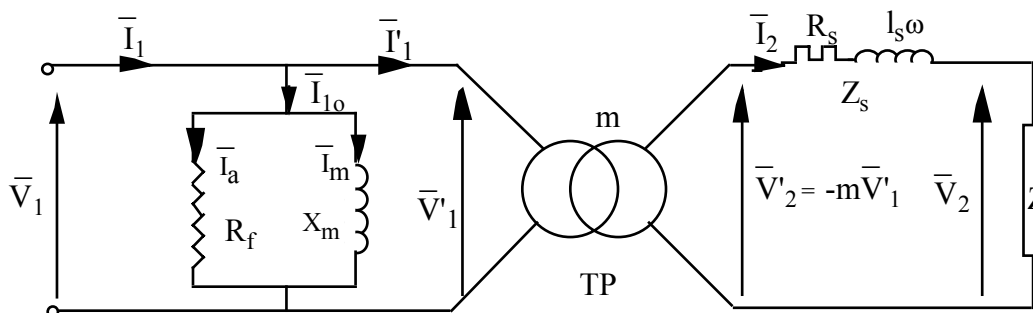


*Fig. V.1 : Schéma équivalent d'un transformateur.*

On a :  $Z_1 \bar{I}_1 \ll (\bar{I}_1 - \bar{I}_{10}) Z_1$  puisque  $\bar{I}_1 \ll \bar{I}_{10}$

Cette chute de tension est faible devant  $\bar{V}_1$ , on aura donc un schéma pratiquement équivalent au précédent en amenant la bobine inductive fictive ( $X_m/R_f$ ) en amont de  $Z_1$ .

Compte tenu de ces considérations et après avoir ramené l'impédance  $(R_1 + j l_1 \omega)$  au secondaire, on obtient le schéma équivalent simplifié du transformateur (Fig. V.2).



*Fig. V.2 : Schéma équivalent du transformateur ramené au secondaire.*

$$Z_1 \text{ ramenée au secondaire } \varnothing Z'_1 = m^2 Z_1$$

$$Z'_1 = m^2 R_1 + j m^2 l_1 \omega$$

$$Z_s = Z'_1 + Z_2 = (m^2 R_1 + R_2) + j (m^2 l_1 + l_2) \omega$$

$$Z_s = R_s + j\omega l_s = R_s + jX_s$$

L'impédance secondaire des pertes peut être ramenée au primaire :

$$Z_1 \oslash Z'_2 = \frac{Z_2}{m^2}$$

$$Z_p = Z_1 + Z'_2 = \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right) + j\omega\left(l_1 + \frac{l_2}{m^2}\right) = R_p + jX_p$$

## VI. ETUDE DU TRANSFORMATEUR AVEC L'HYPOTHESE DE KAPP

### VI.1 Hypothèse de Kapp, schéma équivalent

L'hypothèse de Kapp consiste à négliger le courant primaire à vide devant le courant en charge. Ce qui revient à supposer que le circuit magnétique est de réluctance nulle. Cette hypothèse permet d'éliminer, dans le schéma équivalent, la bobine fictive magnétisante ( $Z_m$ ). Compte tenu de cette hypothèse, on a :

$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 + R_1 \bar{I}_1 + j l_1 \omega \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 - (R_1 + j l_1 \omega) m \bar{I}_2$$

$$-m \bar{V}_1 = m \bar{E}_1 + (R_1 + j l_1 \omega) m \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = \bar{E}_2 - (R_2 + j l_2 \omega) \bar{I}_2$$

$$-m \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = m \bar{E}_1 - \bar{E}_2 + m^2 (R_1 + j l_1 \omega) \bar{I}_2 + (R_2 + j l_2 \omega) \bar{I}_2$$

On pose  $\bar{V}_{20} = -m \bar{V}_1$  : tension aux bornes du secondaire à vide, c'est également la tension aux bornes du secondaire du TP.

$$\bar{V}_{20} = \bar{V}_2 + (m^2 R_1 + R_2) \bar{I}_2 + j(m^2 l_1 + l_2) \omega \bar{I}_2$$

Cette équation conduit au schéma équivalent suivant :

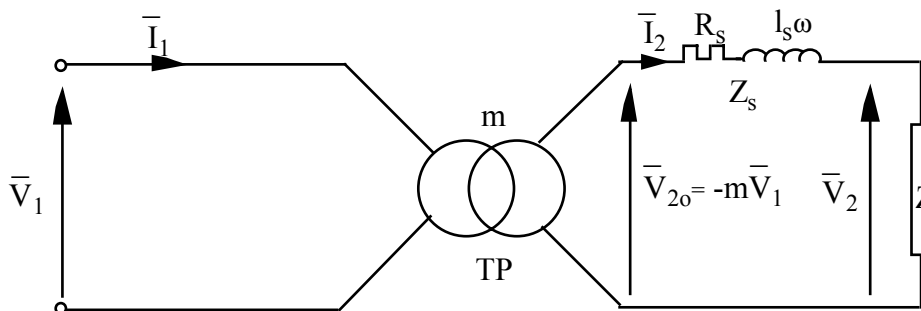


Fig. VI.1 : Schéma équivalent du transformateur ramené au secondaire selon l'hypothèse de Kapp.

### VI.2 Diagramme des tensions : diagramme de Kapp

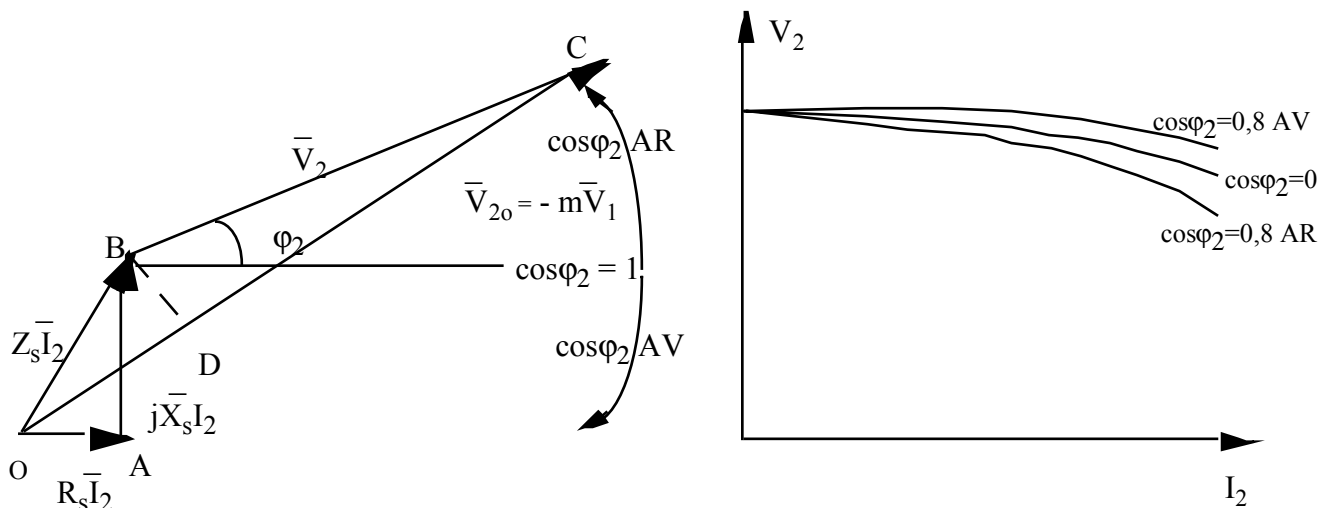


Fig. VI.2 : Diagramme de Kapp, caractéristique en charge  $V_2 = f(I_2)$  à  $V_1 = cte$ .

OAB est le triangle fondamental (triangle de Kapp).

### VI.3 Diagramme du triangle fondamental, chute de tension efficace

$$\Delta V = V_{20} - V_2 = mV_1 - V_2$$

Le triangle de Kapp OAB est de très petites dimensions devant celles des segments  $OC = mV_1$  et  $BC = V_2$ . La détermination de la chute de tension efficace se ramène à la mesure du segment  $OD = OC - BC$  (Fig.VI.3).

La chute de tension  $\Delta V = OD$  ( $\varphi_2 \spadesuit \varphi_2$ )

$$OD = OA \cos \varphi_2 + AB \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right)$$

$$OD = OA \cos \varphi_2 + AB \sin \varphi_2$$

$$\Delta V \spadesuit R_s I_2 \cos \varphi_2 + X_s I_2 \sin \varphi_2$$

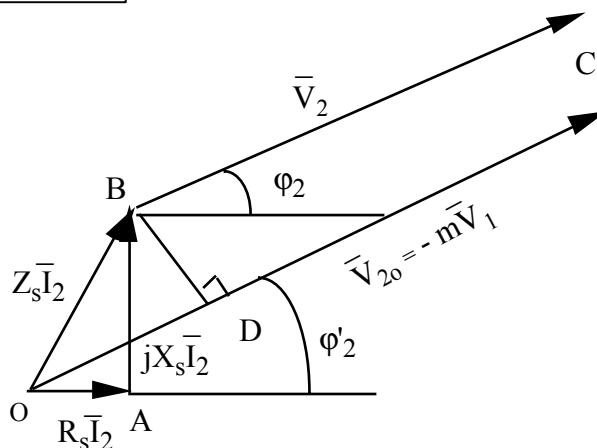


Fig. VI.3 : Diagramme de Kapp.

On peut améliorer la précision en considérant le diagramme de la figure VI.4 :

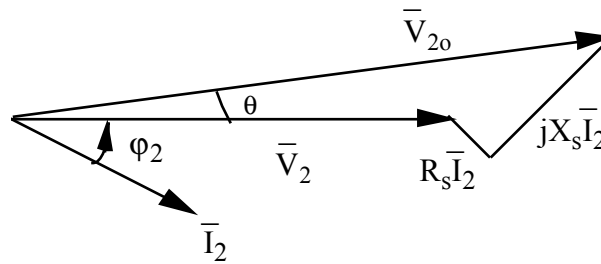


Fig. VI.4 : Amélioration de la précision.

$$\theta \text{ est petit, } \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \approx 1 - \frac{\sin^2\theta}{2}$$

$$V_{20}\cos\theta = V_2 + R_s I_2 \cos\varphi_2 + X_s I_2 \sin\varphi_2 \quad (1)$$

$$V_{20}\sin\theta = -R_s I_2 \sin\varphi_2 + X_s I_2 \cos\varphi_2 \quad (2)$$

$$(2) \div \sin\theta = (-R_s I_2 \sin\varphi_2 + X_s I_2 \cos\varphi_2)/V_{20}$$

$$(1) \div \cos\theta = (V_2 + R_s I_2 \cos\varphi_2 + X_s I_2 \sin\varphi_2)/V_{20}$$

$$V_2 + R_s I_2 \cos\varphi_2 + X_s I_2 \sin\varphi_2 = V_{20} - \frac{1}{2V_{20}} (-R_s I_2 \sin\varphi_2 + X_s I_2 \cos\varphi_2)^2$$

$$\Delta V \approx R_s I_2 \cos\varphi_2 + X_s I_2 \sin\varphi_2 + \frac{V_{20}}{2} \left[ \frac{R_s I_2 \sin\varphi_2 - X_s I_2 \cos\varphi_2}{V_{20}} \right]^2$$

### Remarques

La chute de tension vectorielle en charge est :

$$*\bar{V}_{20} - \bar{V}_2 = -m\bar{V}_1 - \bar{V}_2 = R_s \bar{I}_2 + jX_s \bar{I}_2$$

\* La chute de tension relative est définie par :

$$\Delta v\% = \frac{\Delta V}{V_1} 100 = \frac{v_r}{V_1} 100 \cos\varphi_2 + \frac{v_s}{V_1} 100 \sin\varphi_2 = \Delta v_r\% \cos\varphi_2 + \Delta v_s\% \sin\varphi_2$$

$$v_r = R_s I_2 \text{ et } v_s = X_s I_2$$

## VII. METHODE DE BOUCHEROT

On utilise le théorème de Boucherot relatif à la conservation des puissances active et réactive pour déterminer, dans la cas général,  $V_1$ ,  $I_1$  et  $\varphi_1$  à partir d'un point de fonctionnement en charge ( $V_2$ ,  $I_2$ ,  $\varphi_2$ ) et les paramètres du transformateur ( $m$ ,  $P_f$ ,  $Q_m$ ,  $R_s$  et  $X_s$ ).

Si l'on considère le schéma équivalent du transformateur dans l'hypothèse de Kapp (Fig.VI.1), on peut écrire :

$$P_1 = V_1 I_1 \cos\varphi_1 = P_f + P'_1 = P_{10} + P'_1 ; \text{ avec } P'_1 = (P_1)_{TP}.$$

$$Q_1 = V_1 I_1 \sin\varphi_1 = Q_{1m} + Q'_1 = Q_0 + Q'_1 ; \text{ avec } Q_{1m} \approx Q_0 = \sqrt{V_1 I_{10}^2 - P_{10}^2}$$

$$P'_1 = V_1 I'_1 \cos\varphi'_1 = R_s I_2^2 + V_2 I_2 \cos\varphi_2$$

$$Q'_1 = V_1 I'_1 \sin\varphi'_1 = X_s I_2^2 + V_2 I_2 \sin\varphi_2$$

$$I'_1 = m I_2$$

On en déduit la valeur de  $S'_1 = V_1 I'_1 \sqrt{P'^2_0 + Q'^2_1}$

On détermine alors  $V_1 = \frac{S'_1}{I'_1}$

$P_1$  et  $Q_1$  sont donc déterminées, puisque  $P'_1$  et  $Q'_1$  sont déterminées. On calcule

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = V_1 I_1, \text{ ce qui conduit à } I_1 \text{ et } \cos\varphi_1 = \frac{P_1}{S_1}.$$

## VIII. EQUATIONS DU TRANSFORMATEUR : METHODE DES INDUCTANCES DE FUITES

### VIII.1 Inductance de fuites globales du primaire et secondaire

$$\begin{aligned} N_1 \Phi_{f1} = I_1 i_1 \quad \square \quad I_1 &= \frac{N_1 \Phi_{f1}}{i_1} \\ \square \quad I_1 &= \frac{N_1^2}{R_{f1}} \\ N_1 i_1 = R_{f1} \Phi_{f1} \quad \square \quad \Phi_{f1} &= \frac{N_1 i_1}{R_{f1}} \end{aligned}$$

La réluctance  $R_1$  correspond au flux total  $\Phi_1$ , on a :  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{f1}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{N_1^2}{R_1} - \frac{N_1^2}{R} = L_1 - \frac{N_1^2}{R} \frac{N_2}{N_2} \\ N_2 \Phi &= M i_1 \quad \square \quad M = \frac{N_2}{i_1} \Phi \\ M &= \frac{N_2}{i_1} \frac{N_1 i_1}{R} = \frac{N_1 N_2}{R} \\ \square \quad I_1 &= L_1 - \frac{N_1}{N_2} M \text{ et } I_2 = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M \end{aligned}$$

$L_1$  est l'inductance propre de l'enroulement primaire et  $M$  est la mutuelle inductance. On définit de même une inductance de fuites globale du secondaire.

$$l_1 = L_1 - \frac{M}{m} \quad \text{et} \quad l_2 = L_2 - mM$$

### VIII.2 Equations du transformateur

Cette équation associe à des flux totalement canalisés par le circuit magnétique des inductances. Elle ne serait donc exact qu'en l'absence de saturation.

On désigne par :

-  $\Phi_{11}$  le flux par spire dû au courant primaire seul ( $\Phi_1$ )

-  $\Phi_{12}$  la fraction de  $\Phi_{11}$  qui traverse une spire du secondaire ( $\Phi$ ), on a :

$$N_2 \Phi_{12} = M i_1$$

$$N_1 \Phi_{11} = L_1 i_1$$

$$N_2 \Phi_{22} = L_2 i_2$$

Les flux totaux dont le primaire et secondaire sont le siège sont :

$$N_1\Phi_{1t} = N_1\Phi_{11} + N_1\Phi_{21}$$

$$N_2\Phi_{2t} = N_2\Phi_{22} + N_2\Phi_{12}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} + R_1 i_1$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} + R_1 i_1$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1$$

$$v_2 = -R_2 i_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

En régime sinusoïdal on a :

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 + jM \omega \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = -R_2 \bar{I}_2 - jL_2 \omega \bar{I}_2 + jM \omega \bar{I}_1$$

- à vide :  $I_2 = 0$

$$\frac{\bar{V}_{20}}{\bar{V}_1} \blackspadesuit - \frac{M}{L_1} = - \frac{N_2}{N_1}$$

$$I_1 = 0 \quad \square \quad \frac{\bar{V}_{10}}{\bar{V}_2} \blackspadesuit - \frac{M}{L_2} = - \frac{N_1}{N_2}$$

### VIII.3 Schéma équivalent

$$N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 = N_1 \bar{I}_{10}$$

$$N_1 (\bar{I}_1 - \bar{I}_{10}) = -N_2 \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 + jM \omega \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 - j\omega M \frac{N_1}{N_2} \bar{I}'_1$$

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 + j\omega M \frac{N_1}{N_2} \bar{I}_1 - j\omega M \frac{N_1}{N_2} \bar{I}'_1$$

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 + j\omega M (\bar{I}_1 - \bar{I}'_1) \frac{N_1}{N_2}$$

En négligeant les pertes magnétiques on aura :

$$(\bar{I}_1 - \bar{I}'_1) \blackspadesuit \bar{I}_m$$

$$\boxed{\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 + j\omega \frac{N_1}{N_2} M \bar{I}_m} \quad (a)$$

$$\bar{V}_2 = -R_2 \bar{I}_2 - jL_2 \omega \bar{I}_2 - j\omega M \bar{I}_1$$

$$\text{Soit } \bar{V}'_2 = -\frac{N_1}{N_2} \bar{V}_2 = \frac{N_1}{N_2} R_2 \bar{I}_2 + jL_2 \omega \frac{N_1}{N_2} \bar{I}_2 + jM \omega \frac{N_1}{N_2} \bar{I}_1$$

$$\bar{V}'_2 = -R_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \bar{I}'_1 - j l_2 \omega \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \bar{I}'_1 + jM \omega (\bar{I}_1 - \bar{I}'_1) \frac{N_1}{N_2}$$

$$\boxed{\bar{V}'_2 = -\frac{R_2}{m^2} \bar{I}'_1 - j\omega \frac{l_2}{m^2} \bar{I}'_1 + j\omega \frac{M}{m} \bar{I}_m} \quad (b)$$

Les deux équations (a) et (b) conduisent au schéma équivalent suivant (Fig. VIII.1).

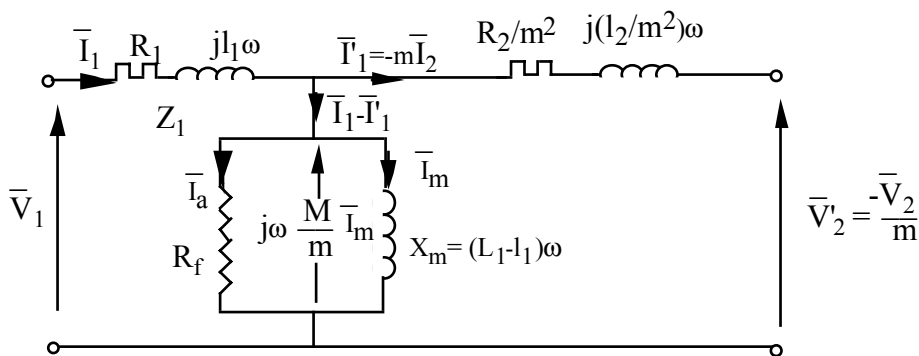


Fig. VIII.1 : Schéma équivalent du transformateur ramené au primaire.

Si l'on tient compte des pertes magnétiques, il y a lieu d'ajouter une résistance en parallèle sur l'inductance principale.

### IX. DETERMINATION DES ELEMENTS DU SCHEMA EQUIVALENT

#### IX.1 Essai à vide

Un essai à vide permet de déterminer le schéma équivalent (Fig. IX.1), identique à celui d'une bobine à noyau de fer.

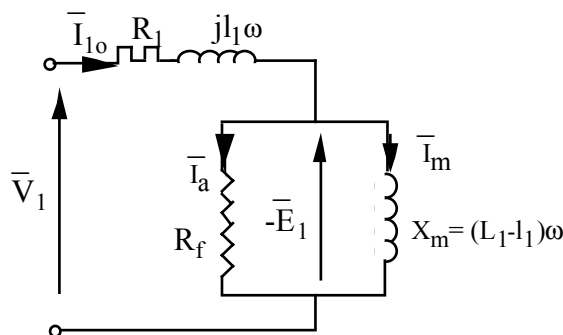


Fig. IX.1 : Schéma équivalent à vide.

$$\bar{V}_1 \spadesuit - \bar{E}_1$$

$$L_m = (L_1 - l_1)\omega = \frac{V_1}{I_m}$$

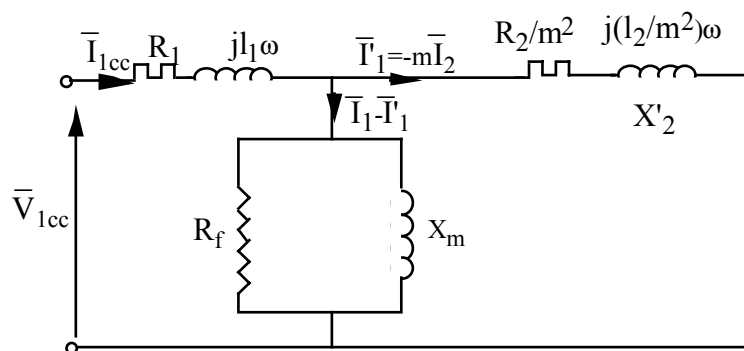
$$R_f = \frac{V_1}{I_a}$$

$$P_{10} = V_1 I_{10} \cos\varphi_0 \square \cos\varphi_0$$

$$I_a = I_{10} \cos\varphi_0 \text{ et } I_m = I_{10} \sin\varphi_0$$

**IX.2. Essai en court-circuit**

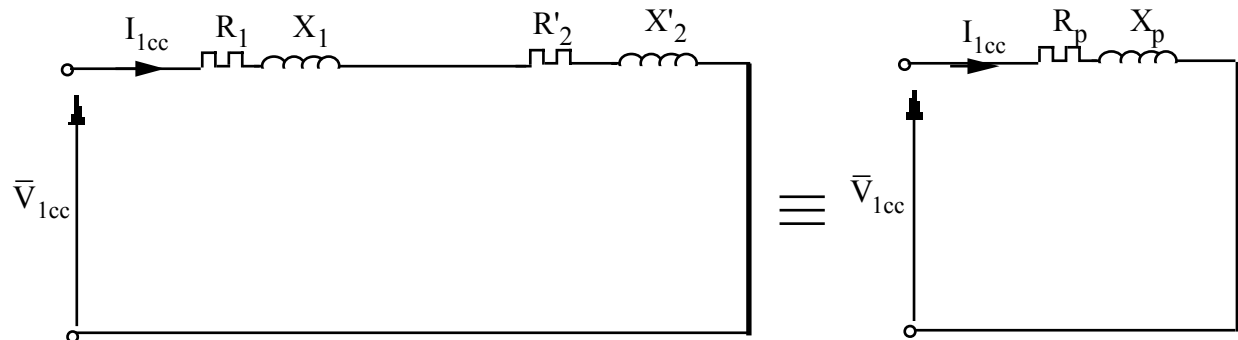
$\bar{V}_2 = 0$  et  $\bar{V}'_2 = 0$ , on a le schéma équivalent suivant (Fig.IX.2).



*Fig. IX.2 : Schéma équivalent en court-circuit.*

$$R'_2 \ll R_f \text{ et } X'_2 \ll X_m$$

$R'_2$  et  $X'_2$  court-circuité  $X_m$  et  $R_f$  et on aura le schéma équivalent suivant :



*Fig. IX.3 : Schéma équivalent simplifié en court-circuit.*

$$Z_p = R_p + j X_p = (R_1 + \frac{R_2}{m^2}) + j(X_1 + \frac{X'_2}{m^2})$$

$$\bar{V}_{1cc} = Z_p \bar{I}_{1cc} = I_{1cc} \sqrt{R_p^2 + X_p^2}$$

Lors du court-circuit, la source voit une impédance équivalente  $Z_p$  faible, le transformateur doit être connecté sous tension réduite, choisie de telle façon qu'elle conduise à un courant d'intensité nominale.

Sous tension réduite, l'induction est aussi réduite, le circuit magnétique n'est pas saturé, les pertes fer sont alors négligeables.



$$P_{1cc} = R_p^2 I_{1cc}^2 \square R_p^2 = \frac{P_{1cc}}{I_{1cc}^2}$$

## X. RENDEMENT DU TRANSFORMATEUR

Le rendement est le quotient de la puissance débité par le secondaire à la puissance absorbée par le primaire.

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos\phi_2}{V_1 I_1 \cos\phi_1} = \frac{V_2 I_2 \cos\phi_2}{V_2 I_2 \cos\phi_2 + \text{Pertes}}$$

Les pertes à considérées sont celles dans le fer du circuit magnétique et celles dans le cuivre des bobines.

$$P_f \spadesuit P_{1o} = P_H + P_F$$

$$P_j = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = P_{1cc} = R_s I_2^2 = R_p I_1^2$$

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos\phi_2}{V_2 I_2 \cos\phi_2 + P_f + R_s I_2^2}$$

Si l'on suppose que  $V_2$  et  $\cos\phi_2$  constants, on peut écrire :

$$\eta = \frac{V_2 \cos\phi_2}{V_2 \cos\phi_2 + \frac{P_f}{I_2} + R_s I_2}$$

Ce rendement est maximum pour  $I_2 = I_{2op}$ .

$\eta$  est maximum ( $\eta_{max}$ ) pour  $(\frac{P_f}{I_2} + R_s I_2)_{min}$  et comme le produit de ces deux termes ( $\frac{P_f}{I_2} \times R_s I_2$ )

est constant, on a :  $\frac{P_f}{I_{2op}} = R_s I_{2op}$  ou  $P_f = R_s I_{2op}^2 \square I_{2op} = \sqrt{\frac{P_{1op}}{R_s}} = I_n \sqrt{\frac{P_f}{P_{jn}}}$

$$\eta_{max} = \frac{K \sqrt{\frac{P_{1o}}{R_s}}}{K \sqrt{\frac{P_{1o}}{R_s}} + P_{1o} + R_s \frac{P_{1o}}{R_s}} = \frac{K \sqrt{P_{1o}}}{K \sqrt{P_{1o}} + 2P_{1o} \sqrt{R_s}}$$

Le maximum de rendement doit correspondre à un courant  $I_{2op}$  inférieur au courant nominal.

Sur la figure X.1, on représente les courbes  $\eta = f(I_2)$  à différents facteurs de puissance.

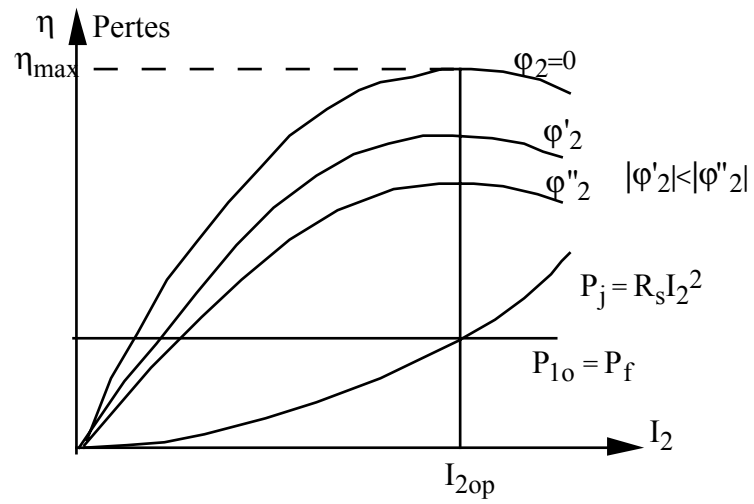


Fig. X.1 : Variation du rendement en fonction du courant de charge.

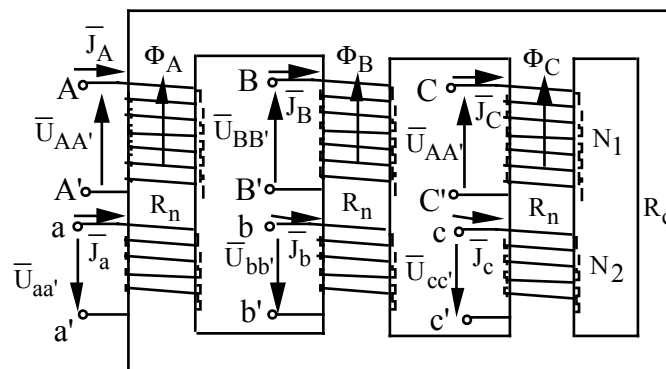
## TRANSFORMATEUR TRIPHASE

### I. CONSTITUTION ET EQUATIONS DES ENROULEMENTS

Le circuit magnétique à 3 ou à 4 colonnes, à flux forcé ou à flux libre, est asymétrique (Fig.I.1). En régime sinusoïdal équilibré à succession de phase directe ou inverse, on a :

$$\bar{\Phi}_A + \bar{\Phi}_B + \bar{\Phi}_C = 0.$$

En régime déséquilibré ou non sinusoïdal, les composantes homopolaires du flux circulent dans  $R_c$  correspondant à la réluctance de la 4<sup>ème</sup> colonne (flux libre) ou à la réluctance de l'air et une partie de la cuve (circuit du flux de dispersion).



*Fig. I.1 : Transformateur triphasé.*

#### I.1 Equations

$$u_{AA'} = R_1 J_A + l_1 \frac{dJ_A}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_A}{dt}$$

$$- u_{aa'} = R_2 J_a + l_2 \frac{dJ_a}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_A}{dt}$$

$$N_1 \bar{J}_A + N_2 \bar{J}_a = R_n \bar{\Phi}_A + R_c (\bar{\Phi}_A + \bar{\Phi}_B + \bar{\Phi}_C)$$

Pour  $(\bar{\Phi}_A + \bar{\Phi}_B + \bar{\Phi}_C) = 0$ , on a :

$$N_1 \bar{J}_A + N_2 \bar{J}_a = R_n \bar{\Phi}_A$$

C'est ainsi que chaque ensemble de deux enroulements sur une même colonne se comporte comme un transformateur monophasé, mais ceci n'est vrai qu'en régime équilibré sinusoïdal. Si l'on suppose la symétrie du circuit magnétique, les trois transformateurs monophasés sont identiques.

## I.2 Courant à vide

Admettons qu'il s'agisse d'un transformateur parfait et qu'il n'y ait pas de neutre, on peut écrire conformément à la figure I.2 :

$$N_1 \bar{J}_A - R'_n \bar{\Phi}_A = N_1 \bar{J}_B - R_n \bar{\Phi}_B = N_1 \bar{J}_C - R'_n \bar{\Phi}_C$$

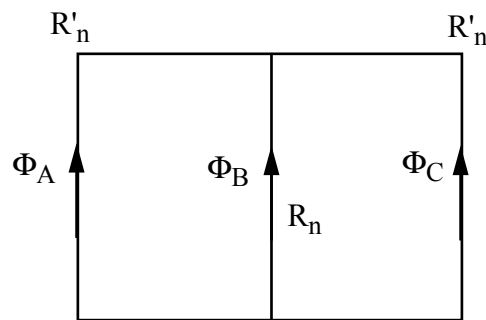
$$N_1 \bar{J}_A - N_1 \bar{J}_B = R'_n \bar{\Phi}_A - R_n \bar{\Phi}_B$$

$$N_1 \bar{J}_A - N_1 \bar{J}_C = R'_n \bar{\Phi}_A - R_n \bar{\Phi}_B, \text{ avec } \bar{J}_A + \bar{J}_B = -\bar{J}_C, \text{ on a :}$$

$$3N_1 \bar{J}_B = 2 R_n \bar{\Phi}_B - R'_n \bar{\Phi}_C - R'_n \bar{\Phi}_A$$

$$3N_1 \bar{J}_A = 2 R'_n \bar{\Phi}_A - R_n \bar{\Phi}_B - R'_n \bar{\Phi}_C$$

$$3N_1 \bar{J}_C = 2 R'_n \bar{\Phi}_C - R'_n \bar{\Phi}_A - R_n \bar{\Phi}_B$$



*Fig. I.2 : Circuit magnétique triphasé asymétrique.*

Les équations des ampères-tours permettent de tracer le diagramme vectoriel et de déterminer les courants  $\bar{J}_A$ ,  $\bar{J}_B$  et  $\bar{J}_C$  (Fig. I.3).

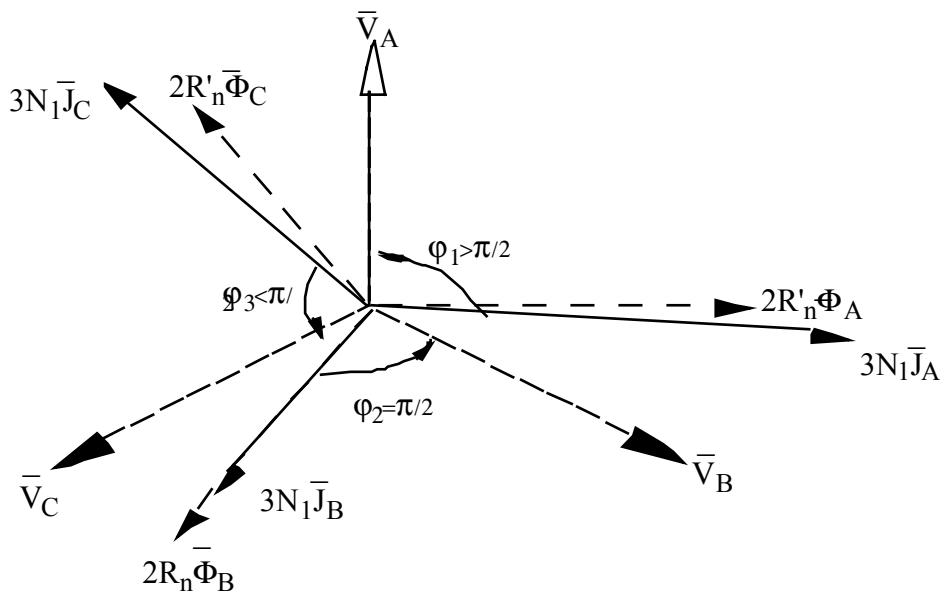


Fig. I.3 : Diagramme vectoriel des ampères-tours.

On remarque que  $\bar{J}_B$  est en quadrature arrière sur  $\bar{V}_B$  et que  $J_B < J_A = J_C$  et que  $\phi_1 > \frac{\pi}{2}$  et  $\phi_3 < \frac{\pi}{2}$ .

Les bobines A et B font échange de puissances mais la puissance totale à vide est nulle (transformateur simplifié). Il y a déséquilibre des courants à vide, qui est insignifiant pour le fonctionnement en charge.

## II. COUPLAGE DES ENROULEMENTS, RAPPORT DE TRANSFORMATION

Pour un transformateur triphasé deux modes de connexion sont possibles, un mode pour le primaire et un mode pour le secondaire. L'association de ces deux modes constitue le couplage.

### II.1 Couplages normalisés

#### II.1.1 Convention

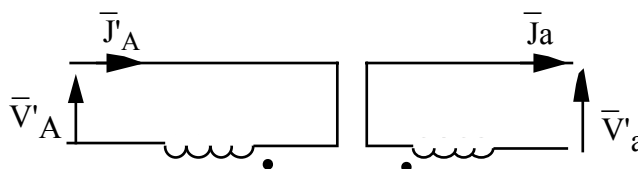
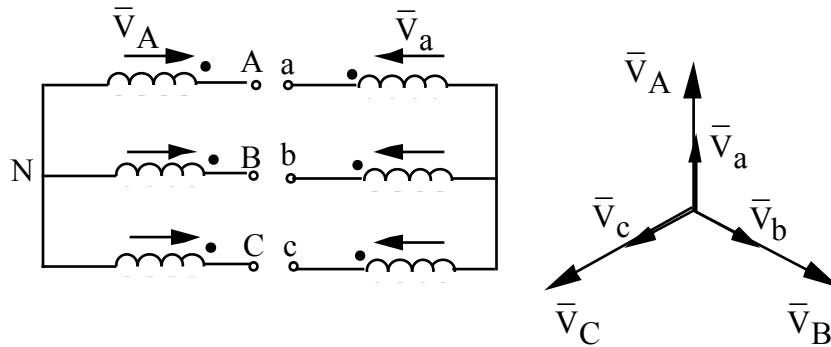


Fig. II.1 : Convention de sens (les points marqués indiquent les bornes homologues).

$$\bar{V}'_a = \frac{N_2}{N_1} \bar{V}'_{A'} \text{ et } N_1 \bar{V}'_{A'} = N_2 \bar{J}_a : (\bar{J}'_{A'} = m \bar{J}_a).$$

**II.1.2 Etoile - étoile : Yy**



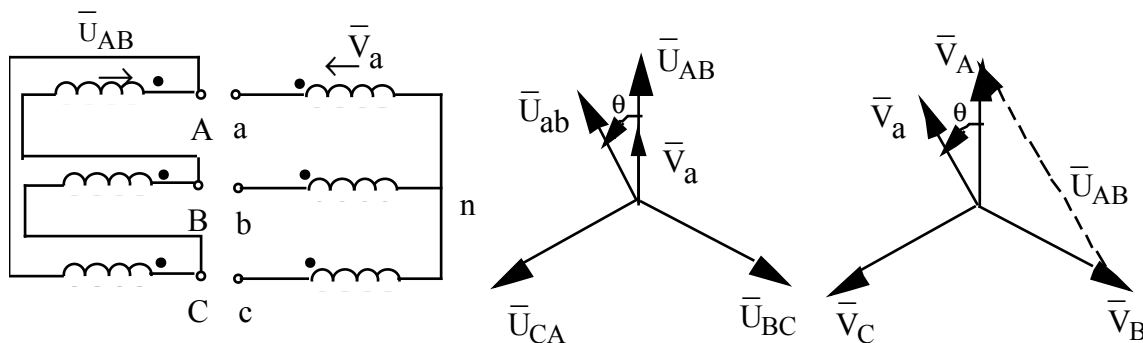
*Fig. II.2 : Couplage étoile-étoile, diagramme vectoriel des tensions.*

Le rapport de transformation  $m$  est donné par :  $m = \frac{U_{ab}}{U_{AB}} = \frac{\sqrt{3}V_A}{\sqrt{3}V_a} = \frac{N_1}{N_2} = m_c$

En très haute tension (au primaire), on a intérêt à choisir un couplage étoile pour que chaque bobine n'ait à supporter que  $V = \frac{U}{\sqrt{3}}$ . Si le neutre est branché les harmoniques trois peuvent circuler dans les conducteurs de lignes.

**II.1.3 Triangle-étoile : Dy**

Pour les très forts courants, on préfère le montage triangle, où chaque enroulement n'est parcouru que par un courant  $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$ . Les harmoniques 3 des courants circulent dans le triangle et les forces magnétomotrices correspondantes équilibrent celles du secondaires et par conséquent le flux homopolaire est imperceptible.



*Fig. II.3 : Couplage triangle-étoile, diagramme vectoriel.*

$$m = \frac{U_{ab}}{U_{AB}} = \sqrt{3} \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{3} m_c$$

**II.1.4 Etoile-triangle : YNd**

Pour ce couplage on a :  $m = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} m_c$

### II.1.5 Eoile - zigzag : Yz

Pour ce couplage le déséquilibre est réparti entre les colonnes différentes et les harmoniques trois de tension existant dans les demi-enroulements sont opposés et n'apparaissent donc pas entre phases et neutre.

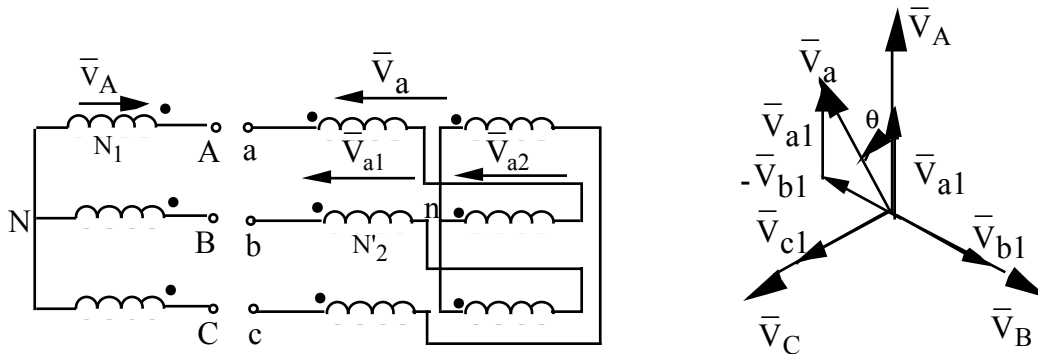


Fig. II.3 : Couplage étoile - zigzag, diagramme vectoriel.

$$\bar{V}_a = \bar{V}_{a1} - \bar{V}_{b1} = \frac{N'_2}{N_1} \bar{V}_A - \frac{N'_2}{N_1} \bar{V}_B = \frac{N'_2}{N_1} \bar{U}_{AB}$$

$$m = \frac{U_{ab}}{U_{AB}} = \frac{V_a}{V_A} = \frac{N'_2}{N_1} \frac{U_{AB}}{V_A} = \sqrt{3} \frac{V_A N'_2}{V_A N_1}$$

$$m = \sqrt{3} \frac{N'_2}{N_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{N_2}{N_1}$$

## II.2 Désignation des tensions

- Tension simple : tension entre bornes d'une bobine.
- Tension composée : tension entre les bornes extérieures.
- Tension étoilée : tension entre une borne extérieure et un point neutre (réel pour le mode étoile et fictif pour le mode triangle).

La tension étoilée est différente de la tension simple (généralement).

\* Montage étoile : tension étoilée = tension simple

\* Montage triangle : tension étoilée est différente de la tension simple (neutre fictif).

Les tensions étoilée et composée sont déphasées de  $\frac{\pi}{6}$ .

## II.3 Indice horaire

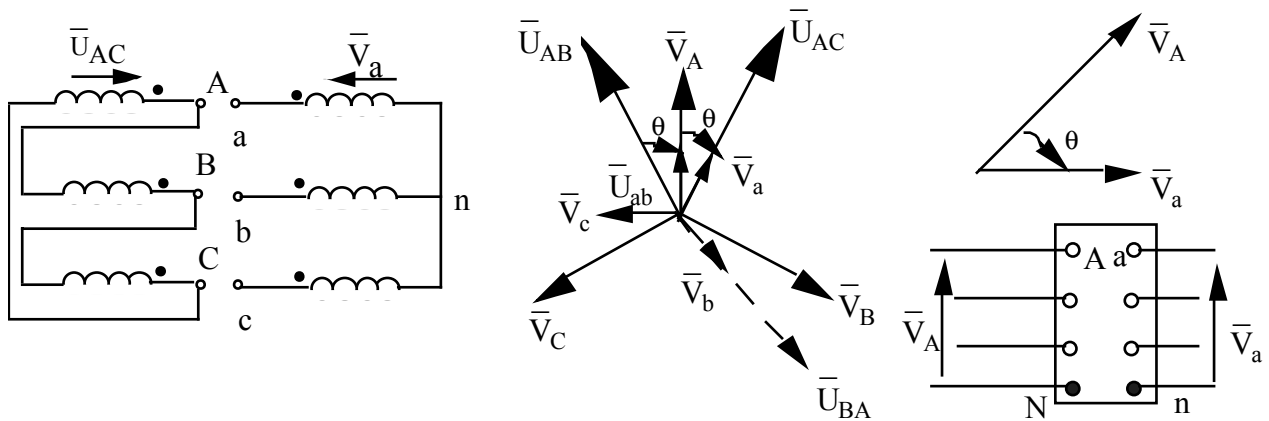


Fig. II.4 : Indice horaire.

Le retard  $\theta$  de  $\bar{V}_a$  sur  $\bar{V}_A$  est identique au retard de  $\bar{V}_{ab}$  sur  $\bar{V}_{AB}$ . Le transformateur triphasé est caractérisé par la valeur de ce déphasage qu'il introduit entre les tensions homologues. Les valeurs de  $\theta$  sont toujours des multiples entiers de  $\pm \frac{\pi}{6}$  ( $\theta = I * \frac{\pi}{6}$ ) ; cela correspond à l'heure indiqué par une montre dont le cadran porterait "deux vecteurs tensions homologues HT et BT", le vecteur HT pointant sur 12 tandis que le vecteur BT joue le rôle de l'aiguille des heures. Le nombre I représente l'indice horaire du transformateur.

### III ETUDE DES TRANSFORMATEURS TRIPHASES

#### III.1 Méthode du transformateur colonne

On ramène l'étude du fonctionnement équilibré du transformateur triphasé à celle d'une colonne (transformateur colonne).

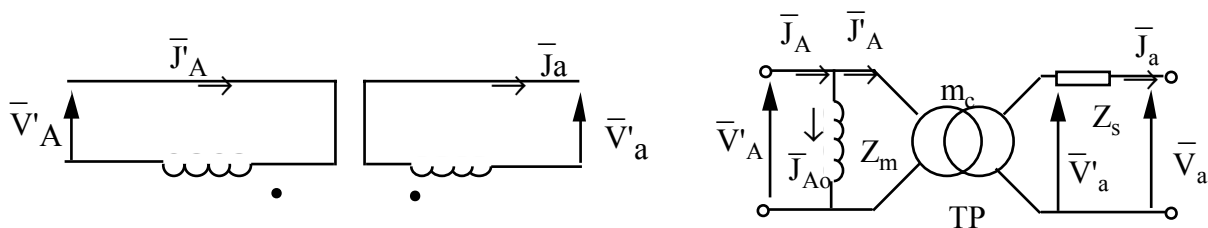


Fig. III.1 : Schéma équivalent, transformateur colonne.

On peut écrire les équations suivantes :

$$\bar{V}'_a = m\bar{V}_A ; \bar{J}'_A = m\bar{J}_a \text{ et } \bar{J}'_A = \bar{J}'_A - \bar{J}_{A0}$$

$$\bar{V}_a = \bar{V}'_a - Z_s\bar{J}_a$$

$$\bar{V}_a = m_c\bar{V}'_A - Z_s\bar{J}_a$$



Le diagramme vectoriel est représenté sur la figure III.2.

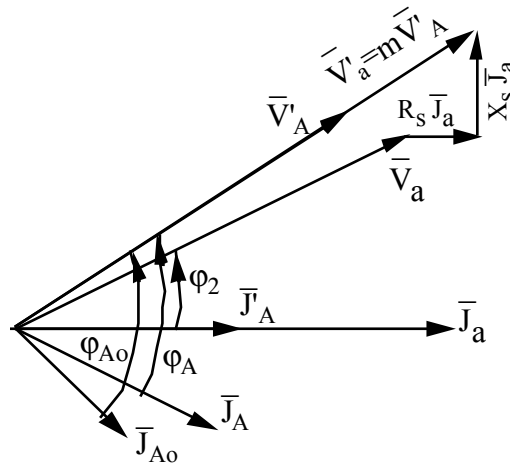


Fig. III.2 : Diagramme vectoriel, transformateur colonne.

Pour étudier un transformateur triphasé par la méthode du transformateur colonne connaissant le couplage des enroulements, on procède comme suit :

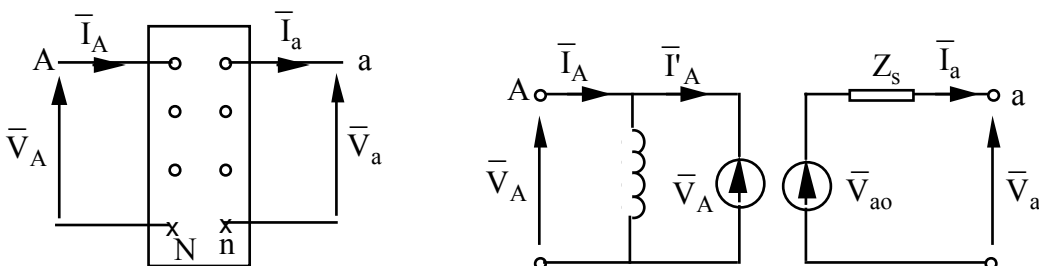
- Ramener les données à une colonne : tension par enroulement, courant dans les enroulements, puissances et pertes par colonne en tenant du couplage.
- Résoudre le problème posé relatif à une colonne.
- Exprimer les résultats aux bornes des enroulements triphasés : tension et courant en ligne, puissance et pertes globales en fonction des couplages.

A vide on a :  $m_c = \frac{V_{20}}{V_1}$  et  $P_{10c} = \frac{P_{10}}{3}$  (pertes par colonne) ;  $R_{fc} = \frac{V_1^2}{P_{10c}}$  et  $X_{mc} = \frac{V_1^2}{Q_{10c}}$

En court-circuit on a :  $Z_{sc} = \frac{m_c V_{1cc}}{J_{2cc}}$  ;  $R_{sc} = \frac{P_{1cc}}{3J_{2cc}^2}$  et  $X_{sc} = \sqrt{Z_{sc}^2 - R_{sc}^2}$

### III.2 Méthode des dipôles équivalents de Thévenin : Schéma monophasé équivalent

L'étude sera faite par phase : 2 phases homologues seront remplacées par des dipôles de Thévenin.



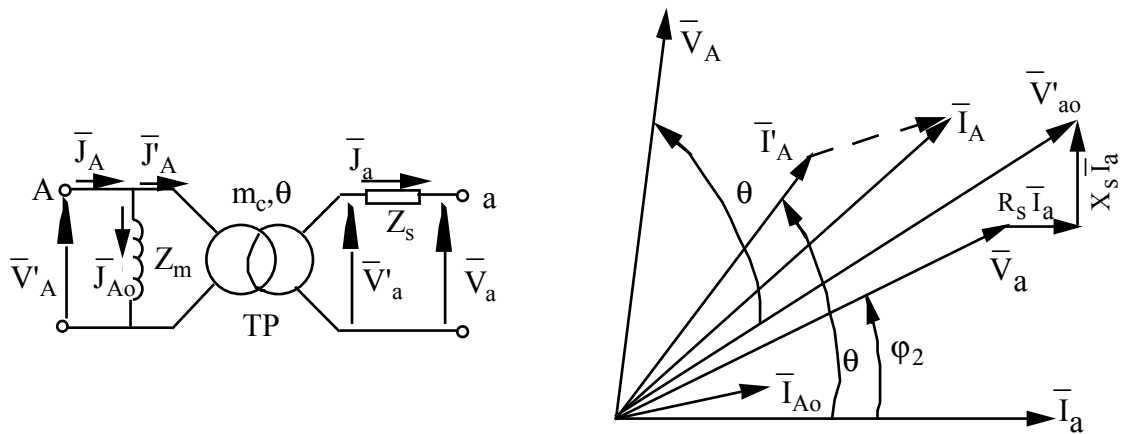


Fig. III.3 : Schéma équivalent, méthode du transformateur monophasé.

Les équations sont les suivantes :

$$\bar{V}_a = \bar{V}_{a0} - Z_s \bar{I}_a$$

$$\bar{V}_a = m \bar{V}_A e^{-j\theta} - Z_s \bar{I}_a$$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{A0} + \bar{I}'_A$$

$$\bar{I}'_A = m \bar{I}_a e^{j\theta}$$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{A0} + m \bar{I}_a e^{j\theta}$$

\* Calcul des éléments du schéma équivalent :

$$m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{V_{a0}}{V_A} = \frac{V_{20}}{V_1}$$

Pour un couplage Y on a :

$$P_{10} = \sqrt{3} U_{AB} I_A \cos(\bar{V}_A, \bar{I}_A) = 3 V_A I_A \cos(\bar{V}_A, \bar{I}_A) = 3 P_{1op}$$

Pour un couplage Δ on a :

$$P_{10} = \sqrt{3} U_{AB} I_A \cos(\bar{U}_{AB}, \bar{J}_A) = 3 V_A I_A \cos(\bar{U}_{AB}, \bar{J}_A)$$

$$\text{Or } \varphi(\bar{U}_{AB}, \bar{J}_A) = \varphi(\bar{V}_A, \bar{I}_A), \text{ donc } P_{10} = 3 V_A I_A \cos(\bar{V}_A, \bar{I}_A) = 3 P_{1op}$$

On a alors :

$$P_{1op} = \frac{P_{10}}{3}$$

$$R_f = \frac{V_1^2}{P_{1op}} = \frac{U_1^2}{3 P_{1op}} = \frac{U_1^2}{P_{10}} \quad \text{et} \quad X_m = \frac{U_1^2}{Q_{10}}$$

On court-circuit, on a :

$$Z_s = \frac{mV_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{mU_{1cc}}{\sqrt{3}I_{2cc}} ; R_s = \frac{P_{1cc}^2}{3I_{2cc}^2} \text{ et } X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2}$$

#### IV. FONCTIONNEMENT EN PARALLELE DE DEUX TRANSFORMATEURS

##### IV.1 Equations électriques et diagramme vectoriel

Les bornes homologues étant connectées entre elles, on peut considérer le schéma équivalent de deux transformateurs T' et T'' couplés en parallèle (Fig. IV.1).

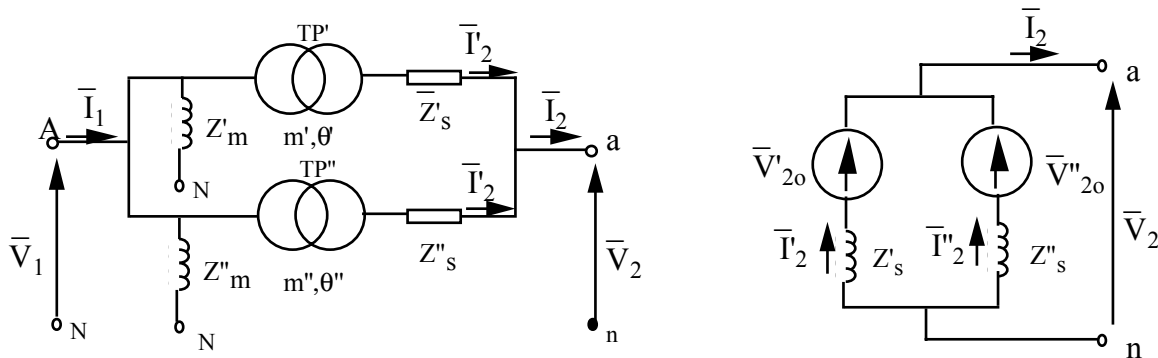


Fig. IV.1 : Schémas équivalents monophasés de deux transformateurs couplés en parallèle.

$$\bar{V}_2 = m' \bar{V}_1 e^{-j\theta'} - Z_s \bar{I}'_2$$

$$\bar{V}_2 = m'' \bar{V}_1 e^{-j\theta''} - Z_s \bar{I}''_2$$

Pour  $\theta' = \theta'' = \theta$  et  $m' = m'' = m$  (conditions de couplage en parallèle de deux transformateurs), on a :

$$Z_s \bar{I}'_2 = Z_s \bar{I}''_2$$

$$\varphi'_{cc} = \arctg \frac{X'_s}{R'_s} \text{ et } \varphi''_{cc} = \arctg \frac{X''_s}{R''_s}$$

Le diagramme vectoriel est représenté sur la figure IV.2.

$$\psi = \varphi''_{cc} - \varphi'_{cc}$$

$$\text{On pose } k = \frac{I'_2}{I''_2} = \frac{Z''_2}{Z'_2}$$

$$\bar{I}'_2 = k \bar{I}''_2 e^{j\psi} \text{ ou } \bar{I}''_2 = \frac{1}{k} \bar{I}'_2 e^{-j\psi}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 = (1 + k e^{j\psi}) \bar{I}''_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 = (1 + \frac{1}{k} e^{j\psi}) \bar{I}'_2$$

$$\frac{I_2}{I''_2} = 1 + k e^{j\psi} \text{ et } \frac{I_2}{I'_2} = 1 + \frac{1}{k} e^{j\psi}$$

On connaît  $\psi = \varphi''_{cc} - \varphi'_{cc}$  et pour  $k = \frac{Z''_2}{Z'_2}$ , pour un courant  $I_2$  donné, on a :

$$\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}_2}{1 + k e^{j\psi}} \text{ et } I'_2 = k I''_2.$$

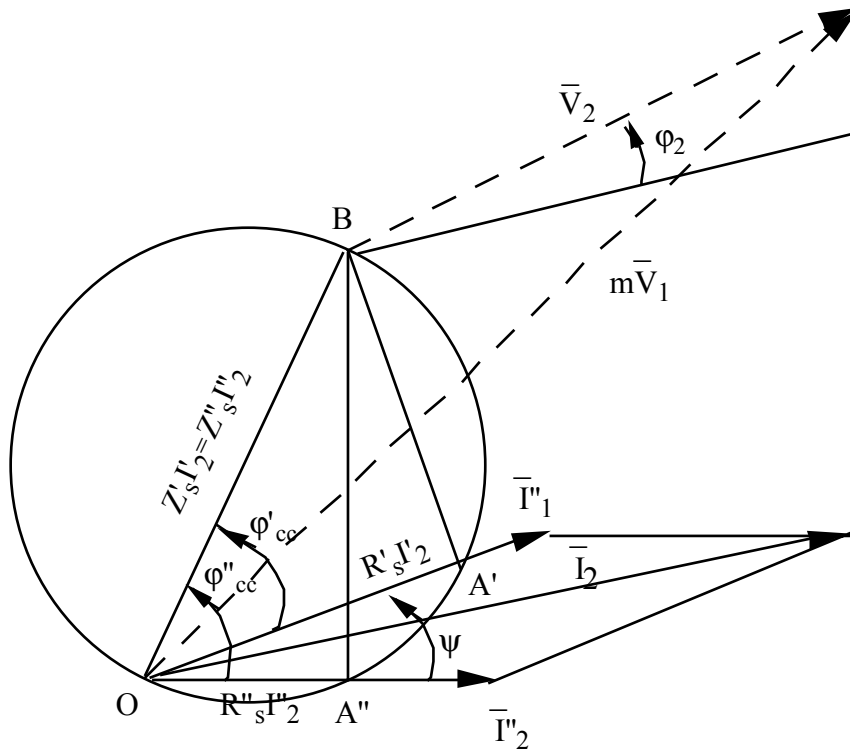


Fig. IV.2 : Diagramme vectoriel.

### IV.2 Schéma électrique monophasé équivalent

Le schéma électrique monophasé équivalent de deux transformateurs montés en parallèle est représenté sur la figure IV.3.

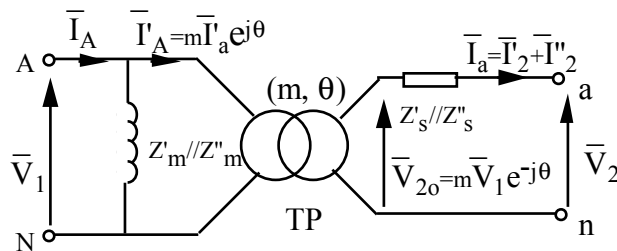


Fig. IV.3 : Schéma monophasé équivalent.

### IV.3 Influence des différents paramètres sur la marche en parallèle des transformateurs

- indice horaire I(θ)
- rapport de transformation m
- $u_{cc}$  : tension de court-circuit  $mV_{1cc} = Z_s I_{2n}$  (celle qui provoque le courant secondaire)

nominal).

$$u_{cc} = \frac{mV_{1cc}}{V_{2n}} \text{ tension de court-circuit ramené au secondaire } (u_{cc}\% = \frac{mV_{1cc}}{V_{2n}} * 100).$$

$$- \varphi_{cc} = \arctg \frac{X_s}{R_s} \text{ (cos}\varphi_{cc} \text{ : facteur de puissance de court-circuit) .}$$

#### IV.3.1 indice horaire

Ne peuvent être couplés en parallèle que les transformateurs de même indice horaire.

Si  $\theta' \neq \theta''$ , un courant de circulation  $I_{20}$  important apparaît dans les secondaires (Fig. IV.3), on

$$a : \bar{I}'_{20} = \frac{m\bar{V}_1(e^{-j\theta'} - e^{-j\theta''})}{Z'_s + Z''_s}$$

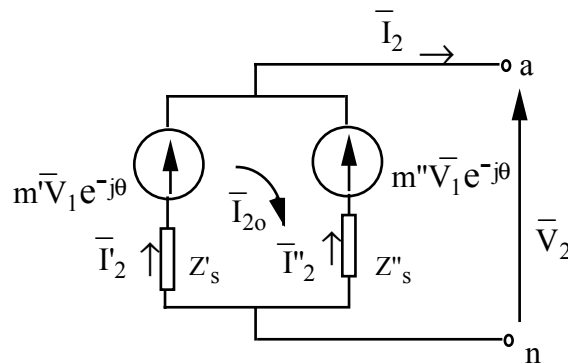


Fig.IV.3 : Schéma équivalent de deux transformateurs couplés en parallèle vu du secondaire.

#### IV.3.2 rapport de transformation

Si  $m' \neq m''$ , on aura un courant de circulation dans le secondaire :

$$\bar{I}_{20} = \bar{I}'_{20} = -\bar{I}''_{20} = \frac{m' - m''}{Z'_s + Z''_s} \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

La tension secondaire à vide est :

$$\bar{V}_{20} = m' \bar{V}_1 e^{-j\theta} - \frac{Z'_s}{Z'_s + Z''_s} (m' - m'') \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

$$\bar{V}_{20} = \frac{m' Z'_s + m'' Z'_s}{Z'_s + Z''_s} \bar{V}_1 e^{-j\theta} = m \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

Les deux transformateurs se comportent donc comme un transformateur de rapport

$$m = \frac{m' Z'_s + m'' Z'_s}{Z'_s + Z''_s} . \text{ L'impédance équivalente vue du secondaire est } Z_s = \frac{Z''_s * Z'_s}{Z'_s + Z''_s}$$

On a aussi :

$$\bar{V}_2 = m' \bar{V}_1 e^{-j\theta} - Z'_s \bar{I}'_2$$

$$\bar{V}_2 = m'' \bar{V}_1 e^{-j\theta} - Z''_s \bar{I}''_2$$

$$\bar{V}_2 = m \bar{V}_1 e^{-j\theta} - Z_s \bar{I}_2$$

$$m' \bar{V}_1 e^{-j\theta} - Z'_s \bar{I}'_2 = m \bar{V}_1 e^{-j\theta} - Z_s \bar{I}_2$$

$$\bar{I}'_2 = \frac{1}{Z'_s} [m' \bar{V}_1 e^{-j\theta} - m \bar{V}_1 e^{-j\theta} + Z_s \bar{I}_2]$$

$$\bar{I}'_2 = \frac{Z_s}{Z'_s} \bar{I}_2 + \frac{m'' - m}{Z'_s} \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

$$\bar{I}''_2 = \frac{Z_s}{Z''_s} \bar{I}_2 + \frac{m'' - m}{Z''_s} \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

Les courants qui circulent dans les secondaires s'ils avaient le même rapport de transformation sont :

$$\bar{I}'_{2m} = \frac{Z_s}{Z'_s} \bar{I}_2 \text{ et } \bar{I}''_{2m} = \frac{Z_s}{Z''_s} \bar{I}_2$$

On a alors :

$$\bar{I}'_2 = \bar{I}'_{2m} + \left[ \frac{m'}{Z'_s} - \frac{m'}{Z''_s} \right] \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

$$\bar{I}'_2 = \bar{I}'_{2m} + \bar{V}_1 e^{-j\theta} \left[ \frac{m'}{Z'_s} - \frac{m'Z''_s + m''Z'_s}{Z'_s(Z'_s + Z''_s)} \right]$$

On trouve :

$$\bar{I}'_2 = \bar{I}'_{2m} + \frac{m' - m''}{(Z'_s + Z''_s)} \bar{V}_1 e^{-j\theta}$$

$$\bar{I}'_2 = \bar{I}'_{2m} + \bar{I}'_{2o}$$

$$\bar{I}''_2 = \bar{I}'_{2m} - \bar{I}'_{2o}$$

### IV.3.3 Facteurs de puissance de court-circuit et tensions de court-circuit

Les transformateurs ont même indice horaire et même rapport de transformation mais  $\phi'_{cc} \neq \phi''_{cc}$  et  $u'_{cc} \neq u''_{cc}$ . En général on admet un écart maximal de 10% entre les tensions de court-circuit.

$$u'_{cc} = \frac{mV_{1cc}}{V_{2n}} \text{ et } u'_{cc}\% = \frac{mV_{1cc}}{V_{2n}} * 100$$

$$Z_s = \frac{mV_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{mV_{1cc}}{I_{2n}} \frac{V_{2n}}{V_{2n}}$$

$$Z'_s = u'_{cc} \frac{V_{2n}}{I'_{2n}} \quad \square \quad u'_{cc} = Z'_s \frac{I'_{2n}}{V_{2n}}$$

$$Z''_s = u''_{cc} \frac{V_{2n}}{I''_{2n}} \quad \square \quad u''_{cc} = Z''_s \frac{I''_{2n}}{V_{2n}}$$

$$Z'_s I'_2 = Z''_s I''_2 \quad \square \quad Z'_s I'_2 V_2 = Z''_s I''_2 V_2 \quad \square \quad Z'_s S'_2 = Z''_s S'_2 \quad \square$$

$$\frac{S'}{S''} = \frac{Z''_s}{Z'_s} = \frac{Z''_s I''_n}{Z'_s I''_n} = \frac{V_{2n} I''_n}{V_{2n} I''_n}$$

On a alors :

$$\frac{S'}{S''} = \frac{u''_{cc}}{u'_{cc}} \frac{S'_n}{S''_n} \quad \square \quad \frac{I'}{I''} = \frac{u''_{cc}}{u'_{cc}} \frac{I''_n}{I''_n}$$

Pour que les puissances débitées par les transformateurs soient dans le rapport des puissances nominales il faut que  $u'_{cc} = u''_{cc}$ .

Si  $u'_{cc} > u''_{cc}$  on a :  $\frac{S'}{S''} < \frac{S'_n}{S''_n}$ .

Lorsque  $S'' = S''_n \square T'' \emptyset S''_n$  donc  $S' < S'_n \square T' \emptyset S' < S'_n$

Si  $S' = S'_n \square S'' > S''_n \square T' \emptyset S'_n$  et  $T'' \emptyset S'' > S''_n$

Les deux transformateurs ne peuvent être simultanément aux conditions de puissances apparentes nominales. Le transformateur qui se charge le plus relativement à sa puissance nominale est celui dont la tension de court-circuit est plus faible.

Si  $u'_{cc} = u''_{cc}$  alors si  $T' \emptyset S'_n \square T'' \emptyset S''_n$ .

Pour que les deux transformateurs puissent être simultanément au fonctionnement nominal, il faut et il suffit que  $u'_{cc} = u''_{cc}$ .

Pour plusieurs transformateurs en parallèle à différentes tensions de court-circuit on a :

$$Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z_3 I_3 = \dots = Z_k I_k = \dots = Z_n I_n$$

$$V_2 Z_k I_k = V_2 Z_{k+1} I_{k+1}$$

$$S_k = S_{k+1} \frac{Z_{k+1}}{Z_k}$$

$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{S_{k+1} Z_{k+1} \frac{1}{Z_k}}{S_{k+1} Z_{k+1}} = \frac{1}{Z_k}$$

$$\sum_k S_k = \sum_k S_{k+1} Z_{k+1} \frac{1}{Z_k} = \frac{1}{S_{k+1} Z_{k+1}} \sum_k S_{k+1} Z_{k+1} \frac{1}{Z_k}$$

$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{1}{Z_k} \quad \square \quad \frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{1}{Z_k}$$

$$\sum_k S_k = Z_k \sum_k \frac{1}{Z_k} = \sum_k S_k = \frac{I_{nk} Z_k}{S_{nk} V_n} * 100 \sum_k \frac{S_{nk}}{\frac{I_{nk} Z_k}{S_{nk} V_n} * 100}$$

$$\frac{S_k}{\sum_k S_k} = \frac{1}{\frac{u_{cc}\%}{S_{nk}} \sum_k \frac{S_{nk}}{u_{cck}\%}} \quad \square \quad S_k = \frac{\sum_k S_k}{k} \frac{S_{nk}}{u_{cck}}$$

$$\sum_k \frac{S_{nk}}{u_{cck}} = \frac{\sum_k S_{nk}}{u_{cck}}$$

En général on a  $\sum S_k > S_t = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ , mais pratiquement les déphasages entre

les courants de charge sont faibles et on pourrait considérer que  $\sum S_k \approx S_t$ , ce qui permet de

déterminer approximativement la répartition de charge dans les transformateurs à partir de la puissance totale débitée par l'ensemble de ces transformateurs couplés en parallèle.

Exemple : Trois transformateurs de puissance nominale  $S_{n1} = S_{n2} = S_{n3} = 100$  kVA et de tension de court-circuit  $u_{cc1} = 3,5\%$ ,  $u_{cc2} = 4\%$  et  $u_{cc3} = 5,5\%$ , débitent dans une installation une puissance totale  $\sum S_k \approx S_t = 300$  kVA.

$$\text{On a : } \sum_k \frac{S_{nk}}{u_{cck}} = \frac{100}{4} + \frac{100}{3,5} + \frac{100}{5,5} = 71,8$$

$$S_1 = \frac{300}{71,8} * \frac{100}{3,5} = 119,5 \text{ kVA}, \quad S_2 = 104,5 \text{ kVA} \text{ et } S_3 = 76 \text{ kVA}.$$

Le transformateur  $T_1$  est surchargé de 19,5%,  $T_2$  est surchargé de 4,5% et  $T_3$  est sous-chargé de 24%.

#### IV.3.4 Influence d'un écart d'argument

$m, \theta, u'_{cc} = u''_{cc}, \varphi_{cc}?$

$$\psi = \text{Arctg} \frac{X'_s}{R'_s} - \text{Arctg} \frac{X''_s}{R''_s}$$

Pour avoir  $I_{n2} = I'_{n2} + I''_{n2}$  il faut que  $\psi = 0$ .

$S_{\max} = S'_n + S''_n$  (puisque  $u'_{cc} = u''_{cc}$  : alors si  $T' \nabla S'_n \square T'' \nabla S''_n$ ).

Si  $\psi \neq 0$ , on a :  $I_2 < I'_2 + I''_2$ .

$I_2 = I'^2_n + I''^2_n + 2 \cos \psi I'_n I''_n$  est maximum si  $u'_{cc} = u''_{cc}$ .

$$S_{\max} = \sqrt{S'^2_n + S''^2_n + 2S'_n S''_n}$$

#### Remarques

- L'égalité des facteurs de puissance de court-circuit pour une charge donnée, correspond au



maximum de rendement. En effet,  $I_2 = I' + I''$  si  $\psi = 0$  et  $\bar{I}_2 = \bar{I}'_1 + \bar{I}''_1$  si  $\psi \neq 0$ , donc  $I'_1 > I'$  et  $I''_1 > I''$ .

Pour une charge donnée  $I_2$  pour avoir les pertes Joule minimum il faut que  $I'$  et  $I''$  soient colinéaires.

- Une utilisation optimale (fonctionnement optimum) en parallèle n'est obtenue que pour des arguments  $\varphi_{cc}$  identiques.

Les rapports  $\frac{X_S}{R_S} = \tan \varphi_{cc}$  varient beaucoup avec la puissance du transformateur ;  $\tan \varphi_{cc} < 1$  pour les petits transformateurs ( $\leq 50$  MVA) et  $\tan \varphi_{cc} > 10$  pour les grands transformateurs ( $> 50$  MVA). Ainsi, on évitera de coupler en parallèle des transformateurs dont le rapport des puissances est supérieure à 3.

---

**EXERCICES**
**I. CIRCUITS ELECTRIQUES EN REGIMES SINUSOIDAL ET NON SINUSOIDAL**
**Exercice 1**

Dans le circuit représenté sur la figure 4,  $e_1$  et  $e_2$  sont deux générateurs de Fém sinusoïdales de même valeur efficace  $E=E_1=E_2=100V$ , mais  $e_2$  est en quadrature arrière sur  $e_1$ .  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux résistances  $R_1 = R_2 = 25 \Omega$ .

Calculer le courant efficace  $I$  dans l'impédance  $Z_c$  constituée par une résistance  $R = 12,5 \Omega$ , une inductance  $L$  telle que  $L\omega = 150 \Omega$  et une capacité  $C$  telle que  $\frac{1}{C\omega} = 200 \Omega$ , montées en série.

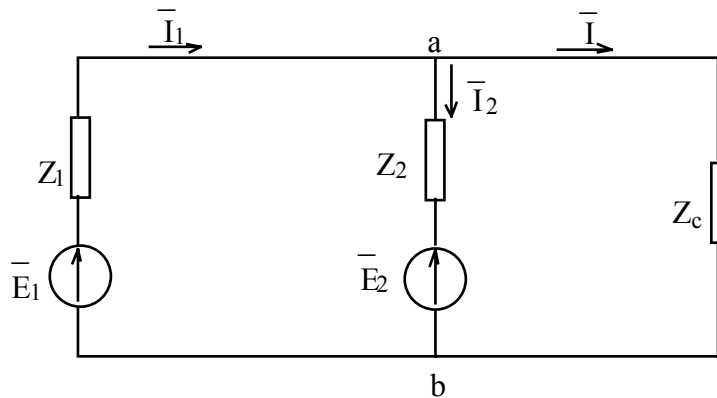


Figure 4

**Solution**

On peut déterminer le courant  $I$  en appliquant le théorème de Thévenin. Pour cela on calcule la d.d.p.  $U_{abo}$  après avoir débranché l'impédance  $Z_c$ . On désigne par  $I_o$  le courant à vide circulant dans

$(\bar{E}_1 - Z_1 - Z_2 - \bar{E}_2)$  et on a :

$$\bar{I}_o = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\bar{U}_{abo} = \bar{E}_1 - Z_1 \bar{I}_o = \bar{E}_1 - Z_1 \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\bar{E}_1 Z_2 + \bar{E}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_{abo}}{Z_c + Z_{ab}} = \frac{\bar{U}_{abo}}{Z_c + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{\bar{E}_1 Z_2 + \bar{E}_2 Z_1}{Z_c(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}$$

avec,  $\bar{E}_1 = 100$  ;  $\bar{E}_2 = -100j$  et  $Z_c = 12,5 + 150j - 200j = 12,5 - 50j$

$$\bar{I} = \frac{100 \times 25 - 100j \times 25}{50(12,5 - 50j) + 25 \times 25} = \frac{2(1 - j)}{1 - 2j} = 1,26 e^{j18,4^\circ}$$

$$I = 1,26 \text{ A et } i = 1,26\sqrt{2} \sin(\omega t + 18,4^\circ)$$

### Exercice 2

Une installation, alimentée par un réseau triphasé 220/380V-50Hz, comporte un montage équilibré constitué par :

- 6 moteurs triphasés  $M_1$  de 3 kW, de rendement  $\eta_1 = 0,85$  et  $\cos\phi = 0,72$  AR.
- 8 moteurs triphasés  $M_2$  de 4,5 kW, de rendement  $\eta_2 = 0,82$  et  $\cos\phi = 0,77$  AR.
- 30 lampes de 100W - 220 V et 36 lampes de 150 W - 220 V.

- 1) Calculer les puissances active, réactive et apparente de l'installation ; en déduire le courant de ligne et le facteur de puissance de l'installation.
- 2) Calculer la valeur de la batterie de condensateur à disposer en triangle pour relever le facteur de puissance de l'installation à 0,85.

### Solution

1) L'installation est schématisé par la figure 5.

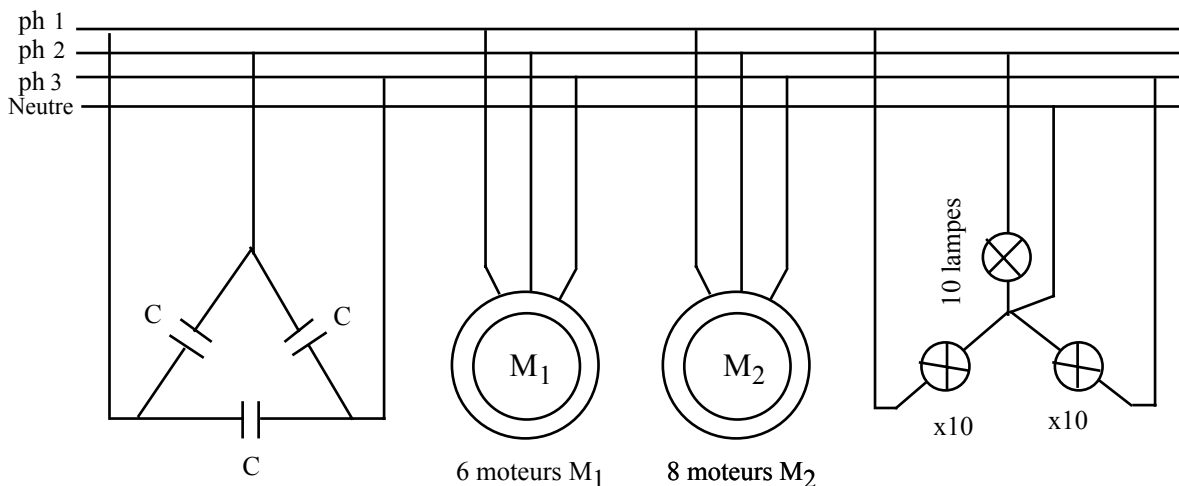


Figure 5

$$\text{- 6 moteurs } M_1 : P_{u1} = 3000 \times 6 = 18000 \text{ W} \quad P_1 = \frac{P_{u1}}{\eta_1} = 21176 \text{ W et } Q_1 = P_1 \operatorname{tg}\phi_1$$

$$Q_1 = 20410 \text{ vars}$$

$$\text{- 8 moteurs } M_2 : P_{u2} = 4500 \times 8 = 36000 \text{ W} \quad P_2 = \frac{P_{u2}}{\eta_2} = 43902 \text{ W et } Q_2 = P_2 \operatorname{tg}\phi_2$$

$$Q_2 = 363788 \text{ vars}$$

$$\text{- 30 lampes : } P_L = 100 \times 30 + 150 \times 36 = 8400 \text{ W}$$

En appliquant le théorème de Boucherot, on a :

$$\text{- Puissance active totale consommée par l'installation : } P_t = \Sigma P = 73478 \text{ W}$$

$$\text{- Puissance réactive consommée par l'installation : } Q_t = \Sigma \bar{Q} = 56788 \text{ vars}$$

- Puissance apparente totale  $S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = 92865 \text{ VA}$

- Courant absorbé :  $I = \frac{S_t}{U\sqrt{3}} = \frac{92865}{\sqrt{3} \cdot 380} = 142 \text{ A}$

- Facteur de puissance de l'installation :  $\cos\varphi = \frac{P_t}{S_t} = \frac{73478}{92865} = 0,79$

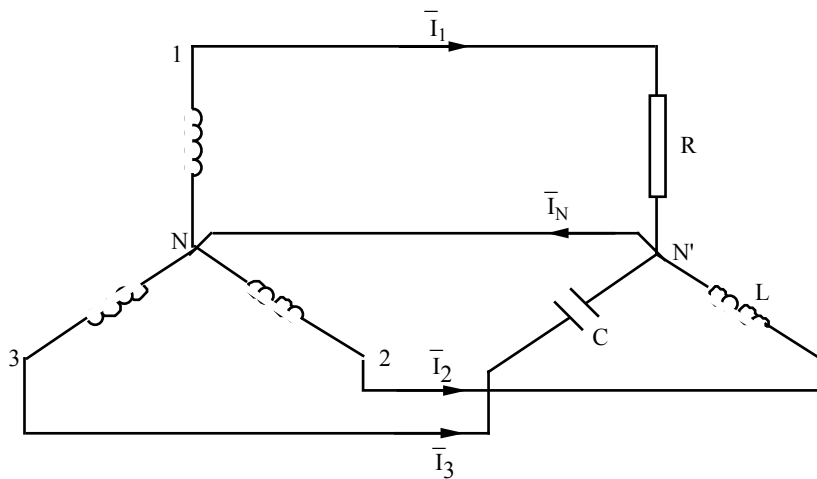
2) Pour relever le facteur de puissance de l'installation de  $\cos\varphi = 0,79$  à  $\cos\varphi' = 0,85$ , on installe des batteries de condensateurs qui fournissent de l'énergie réactive  $Q_c$  au réseau comptée négativement.

$$Q_c = 3CU^2\omega = Q_t - P_t \operatorname{tg}\varphi'$$

$$C = \frac{Q_t - P_t \operatorname{tg}\varphi'}{3U^2\omega} = \frac{56788 - 73478 \cdot 0,62}{3 \cdot 380^2 \cdot 314} = 82,5 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 82,5 \mu\text{F}.$$

### Exercice 3

Dans le circuit représenté par la figure 3, la Fém de chaque phase de l'installation est égale à 127V.



$$\bar{Z}_1 = 6,35 \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = j6,35 \Omega$$

$$\bar{Z}_3 = -j6,35 \Omega$$

Figure 3

- 1) Déterminer le courant circulant dans le conducteur neutre.
- 2) Quelle doit être la valeur de la résistance pour que le courant dans le conducteur neutre soit nul.
- 3) calculer  $I_N$  si  $R=3,66\Omega$  et si l'on intervertit L et C ( $L\omega = \frac{1}{C\omega} = 6,35\Omega$ ).

### Solution

$$1) I_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{127}{6,35} = 20 \text{ A et } \bar{I}_1 = 20 e^{j0}$$

$$I_2 = \frac{127}{6,35} = 20 \text{ A et } \bar{I}_2 = 20 e^{-j(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})}$$

$$I_3 = \frac{127}{6,35} = 20 \text{ A et } \bar{I}_3 = 20 e^{-j(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2})}$$

On peut construire le diagramme de Fresnel, représenté sur la figure 3.1.

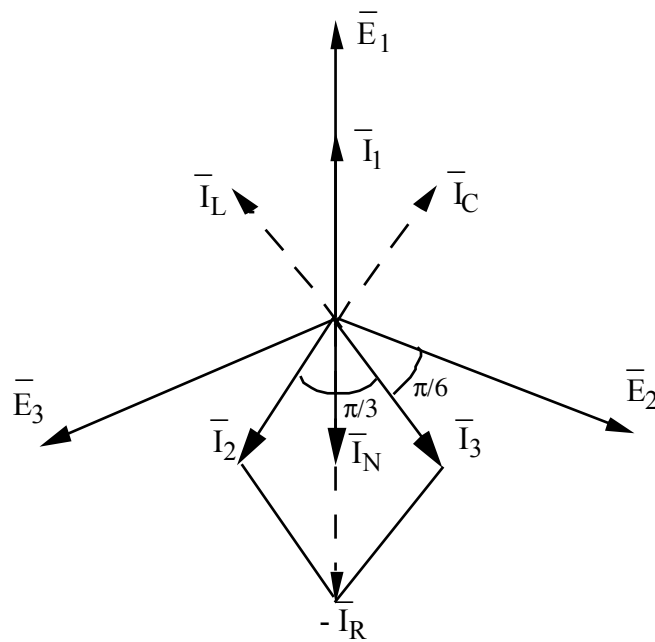


Figure 31

Ce diagramme de Fresnel rend le calcul de  $I_N$  immédiat et on a :

$$I_N = 2 \cdot 20 \cos \frac{\pi}{6} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1) = 14,64 \text{ A}$$

$$\bar{I}_N = 14,64 e^{-j\pi}$$

2) Le courant dans le conducteur neutre  $\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$  étant nul, on a :

$$2 \cdot 20 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{127}{R} \quad \square \quad R = \frac{127}{20\sqrt{3}} = 3,66 \Omega$$

3) Après avoir interverti L et C et on désignant par  $I_L$  et  $I_C$  les courants dans L et C respectivement (voir diagramme), on a :

$$I_N = 2 \cdot 20 \cos \frac{\pi}{6} + I_R = 20\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 40\sqrt{3} = 69,2 \text{ A}$$

#### Exercice 4

Dans le circuit représenté par la figure 4, la Fém de chaque phase de l'alternateur est égale à 220 V,  $Z_{AB} = -19j$ ,  $Z_{BC} = 19j$  et  $Z_{CA} = 19$ . Construire le diagramme de Fresnel et calculer les courants.

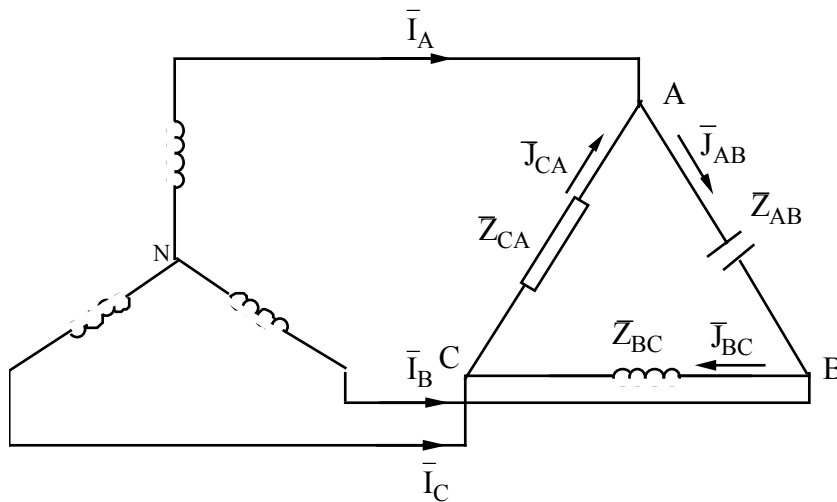


Figure 4

**Solution**

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220\sqrt{3} = 380 \text{ V}$$

$$J_{AB} = J_{BC} = J_{CA} = \frac{380}{19} = 20 \text{ A}$$

On trace le diagramme vectoriel (Fig. 7.1), on a :

$$\bar{I}_A = \bar{J}_{AB} - \bar{J}_{CA} \quad \square \quad I_A = 2J \sin \frac{\pi}{12} = 10,35 \text{ A}$$

$$\bar{I}_B = \bar{J}_{BC} - \bar{J}_{AB} \quad \square \quad I_B = 2J \cos \left(\frac{\pi}{3}\right) = 20 \text{ A}$$

$$\bar{I}_C = \bar{J}_{CA} - \bar{J}_{BC} \quad \square \quad I_C = 2J \sin \frac{\pi}{12} = 10,35 \text{ A}$$

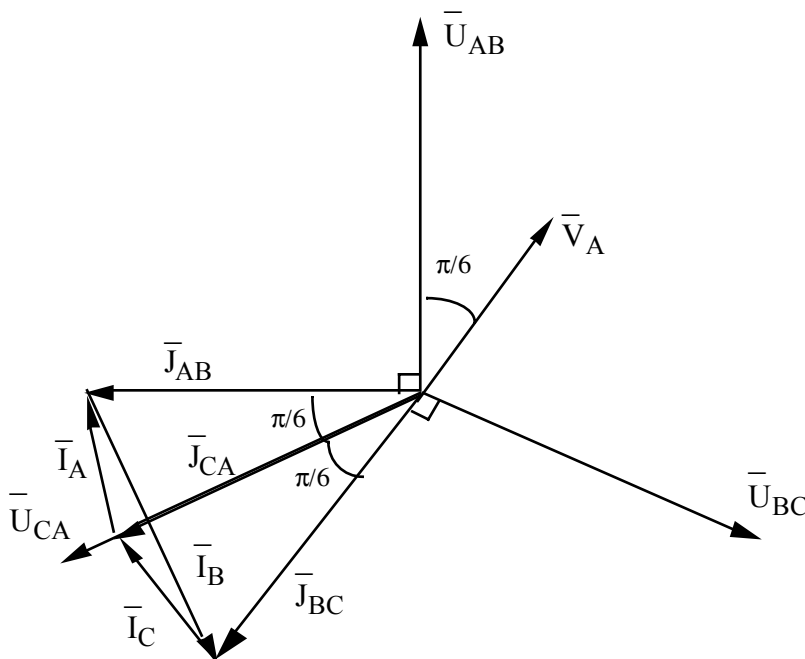


Figure 4.1

En s'appuyant sur le diagramme vectoriel pour déterminer les déphasage, on peut faire le calcul suivant :

$$\bar{I}_A = I_A e^{j\frac{\pi}{12}}$$

$$\bar{J}_{AB} = \frac{\bar{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{380 e^{j0}}{-19j} = 20 e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{J}_{BC} = \frac{\bar{U}_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{380 e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{19j} = 20 e^{-j(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})}$$

$$\bar{J}_{CA} = \frac{\bar{U}_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{380 e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{19} = 20 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_A = \bar{J}_{AB} - \bar{J}_{CA} = 20 e^{+j\frac{\pi}{2}} - 20 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_A = 20 (j + 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} j) \square I_A = 20 (0,5 - 0,366 j) = 10,35 e^{-j15^\circ}$$

$$\bar{I}_C = \bar{J}_{CA} - \bar{J}_{BC} \square I_C = 20 [e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{-j(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})}]$$

$$\bar{I}_C = 20 [0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5j] \square I_C = 20 (0,366 + 0,366j) = 10,35 e^{j45^\circ}$$

$$\bar{I}_B = \bar{J}_{BC} - \bar{J}_{AB} \square \bar{I}_B = 20 [e^{-j210^\circ} - e^{-j90^\circ}] = 20 (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,5j - j) = 20 (-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5j)$$

$$\bar{I}_B = 20 e^{-j150^\circ}$$

### Exercice 5

Un circuit monophasé est alimenté par une tension non sinusoïdale et parcouru par un courant également non sinusoïdal :

$$u = 25,9 \sin(\omega t - 11^\circ 40') + 6 \sin(3\omega t + 53^\circ 50') \text{ et } i = 3 \sin(\omega t - 40^\circ) + 0,9\sqrt{2} \sin(3\omega t + 125^\circ).$$

Calculer la puissance active P et la puissance apparente S.

En substituant au courant et à la tension non sinusoïdaux leurs équivalents sinusoïdaux, trouver l'angle de déphasage entre eux.

### Solution

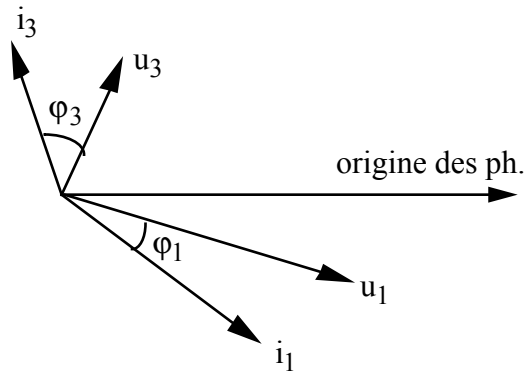


Figure 5

$$U_1 = \frac{25,9}{\sqrt{2}} = 18,3 \text{ V et } U_3 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,12 \text{ A et } I_3 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24 \text{ A}$$

$$\varphi_1 = +28^\circ 20' \text{ et } \varphi_3 = -71^\circ 10'$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 35,5 \text{ W}$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 18,55 \text{ V et } I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 4,76 \text{ A}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{35,5}{18,55 \times 4,76} = 0,83 \quad \varphi = 34^\circ$$

### Exercice 6

La Fém. dans le circuit représenté par la figure 6 est non sinusoïdale :

$$e(t) = 25,9 \sin(\omega t - 11,66^\circ) + 6 \sin(3\omega t + 55,83^\circ).$$

On demande de calculer les valeurs instantanées des courants dans les diverses branches et celle du courant total.

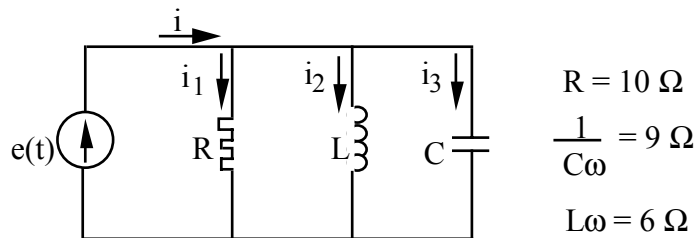


Figure 9

$$R = 10 \Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = 9 \Omega$$

$$L\omega = 6 \Omega$$

### Réponse

$$i_{1(1)} = \frac{E_{m(1)}}{R} \sin(\omega t + \psi_1) = 2,59 \sin(\omega t - 11,66^\circ)$$

$$i_{1(3)} = \frac{E_{m(3)}}{R} \sin(3\omega t + \psi_3) = 0,6 \sin(3\omega t + 55,83^\circ)$$

$$-i_1 = i_{1(1)} + i_{1(3)} = 2,59 \sin(\omega t - 11,66^\circ) + 0,6 \sin(3\omega t + 55,83^\circ)$$

$$i_{2(1)} = \frac{E_{m(1)}}{1/C\omega} \sin(\omega t + \psi_1 + 90^\circ) = 2,87 \sin(\omega t + 78,34^\circ)$$



$$i_{2(3)} = \frac{E_{m(3)}}{1/3C\omega} \sin(\omega t + \psi_3 + 90^\circ) = 2 \sin(3\omega t + 145,83^\circ)$$

$$-i_2 = i_{2(1)} + i_{2(3)} = 2,87 \sin(\omega t + 78,34^\circ) + 2 \sin(3\omega t + 145,83^\circ)$$

$$i_{3(1)} = \frac{E_{m(1)}}{L\omega} \sin(\omega t + \psi_1 - 90^\circ) = 4,32 \sin(\omega t - 101,66^\circ)$$

$$i_{3(3)} = \frac{E_{m(1)}}{3L\omega} \sin(3\omega t + \psi_3 - 90^\circ) = 0,33 \sin(3\omega t - 34,17^\circ)$$

$$-i_3 = 4,32 \sin(\omega t - 101,66^\circ) + 0,33 \sin(3\omega t - 34,17^\circ)$$

$$i_1 = 2,59 e^{-j11,66^\circ} + 0,6 e^{j55,83^\circ} = 2,53 - 0,523j + 0,337 + 0,496j$$

$$i_2 = 2,87 e^{j78,34^\circ} + 2 e^{j145,83^\circ} = 0,58 + 2,810j - 1,638 + 1,123j$$

$$i_3 = 4,32 e^{-j101,66^\circ} + 0,33 e^{-j34,17^\circ} = -0,873 - 4,230j + 0,273 - 0,185j$$

$$-i = i_1 + i_2 + i_3 = 2,23 - 1,943j - 1,023 + 1,434j$$

$$i = 2,95 \sin(\omega t - 41^\circ) + 1,76 \sin(3\omega t + 125,5^\circ)$$

### Exercice 7

Dans le circuit représenté sur la figure 7, on a :

$$e(t) = 100 + 80 \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 50 \sin(5\omega t + 45^\circ) ; R=3 \Omega ; L\omega=3 \Omega ; \frac{1}{C\omega} = 27\Omega.$$

Calculer les valeurs instantanées ainsi que les valeurs efficaces des courants  $i$ ,  $i_1$  et  $i_2$ .

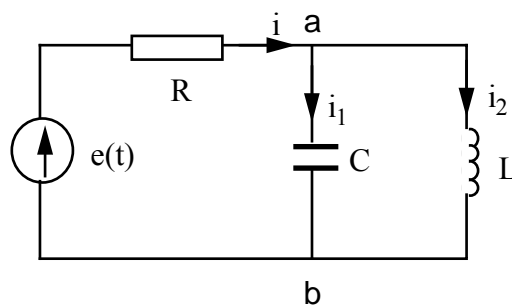


Figure 7

### Réponse

$$Z_{ab(1)} = \frac{jL\omega_1 \left( \frac{1}{jC\omega_1} \right)}{jL\omega_1 - \frac{j}{C\omega_1}} = \frac{3j(-27j)}{3j - 27j} = 3,38j$$

$$Z_{ab(3)} = \frac{9j(-9j)}{9j - 9j} = \text{(il y a résonance pour le troisième harmonique).}$$

$$Z_{ab(5)} = \frac{15j(-5,4j)}{915j - 5,4j} = -8,44j$$

$$Z_{(1)} = R + Z_{ab(1)} = 3 + 3,38j = 4,52 e^{j48,4^\circ}$$

$$Z_{(3)} =$$

$$Z_{(5)} = 3 - 8,44j = 8,96 e^{-j70,4^\circ}$$

$$i = I_0 + i_{(1)} + i_{(3)} + i_{(5)}$$

$$I_0 = \frac{100}{3} = 33,3 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{m(1)} = \frac{\bar{U}_{m(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{80 e^{j30^\circ}}{4,52 e^{j48,4^\circ}} = 17,8 e^{j18,4^\circ}$$

$$\bar{I}_{m(3)} = 0$$

$$\bar{I}_{m(5)} = \frac{50 e^{j45^\circ}}{9 e^{-j70,4^\circ}} = 5,55 e^{j115,4^\circ}$$

$$i = 33,3 + 17,8 \sin(\omega t - 18,4^\circ) + 5,55 \sin(5\omega t + 115,4^\circ)$$

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,8^2}{2} + \frac{5,55^2}{2}} = 35,8 \text{ A}$$

$$\bar{U}_{mab(1)} = Z_{ab(1)} \bar{I}_{m(1)} = 17,8 e^{j18,4^\circ} \cdot 3,38 e^{j90^\circ}$$

$$\bar{U}_{mab(1)} = 60,2 e^{j71,6^\circ} \square u_1(t) = 60,2 \sin(\omega t + 71,6^\circ)$$

$$\bar{U}_{mab(3)} = 60 e^{j20^\circ} \square u_3(t) = 60 \sin(3\omega t + 20^\circ)$$

$$\bar{U}_{mab(5)} = 5,55 e^{j115,4^\circ} \cdot 8,44 e^{-j90^\circ} = 46,8 e^{j25,4^\circ} \square u_5(t) = 46 \sin(5\omega t + 25,4^\circ)$$

$$u_{ab} = 60,2 \sin(\omega t + 71,6^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 46,8 \sin(5\omega t + 25,4^\circ)$$

$$\bar{I}_{m1(1)} = \frac{60,2 e^{j71,6^\circ}}{-27j} = 2,23 e^{j161,6^\circ}$$

$$\bar{I}_{m1(3)} = \frac{60 e^{j20^\circ}}{-9j} = 6,67 e^{j110^\circ}$$

$$\bar{I}_{m1(5)} = \frac{46,8 e^{j25,4^\circ}}{5,4 e^{-j90^\circ}} = 8,67 e^{j115,4^\circ}$$

$$i_1 = 2,23 \sin(\omega t + 161,6^\circ) + 6,67 \sin(3\omega t + 110^\circ) + 8,67 \sin(5\omega t + 115,4^\circ)$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{2,23^2}{2} + \frac{6,67^2}{2} + \frac{8,67^2}{2}} = 7,89 \text{ A}$$

$$I_{20} = 33,3 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{m2(1)} = \frac{60,2 e^{j71,6^\circ}}{3j} = 20 e^{-j18,4^\circ}$$

$$\bar{I}_{m2(3)} = \frac{60 e^{j20^\circ}}{9j} = 6,67 e^{-j70^\circ}$$

$$\bar{I}_{m2(5)} = \frac{46,8 e^{j25,4^\circ}}{152j} = 3,12 e^{-j64,6^\circ}$$

$$i_2 = 33,3 + 20 \sin(\omega t - 18,4^\circ) + 6,67 \sin(3\omega t - 70^\circ) + 3,12 \sin(\omega t - 64,6^\circ)$$

$$I_2 = \sqrt{33,3^2 + \frac{20^2}{2} + \frac{6,67^2}{2} + \frac{3,12^2}{2}} = 36,55 \text{ A}$$

**Exercice 8**

La valeur instantanée de la tension de phase A d'un alternateur triphasé couplé en étoile est :

$$v_A = 127 \sin(\omega t + 10^\circ) + 30 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 20 \sin(11\omega t + 15^\circ).$$

On demande d'écrire la valeur instantanée de la tension de ligne  $u_{AB}$ .

**Réponse**

Sachant que les harmoniques fondamentales forment un système direct et que les 11<sup>ème</sup> forment un système inverse (fig. 11), les troisièmes n'existant pas, on a :

$$u_{AB} = v_A - v_B = 127\sqrt{3} \sin(\omega t + 40^\circ) + 20\sqrt{3} \sin(11\omega t - 15^\circ)$$

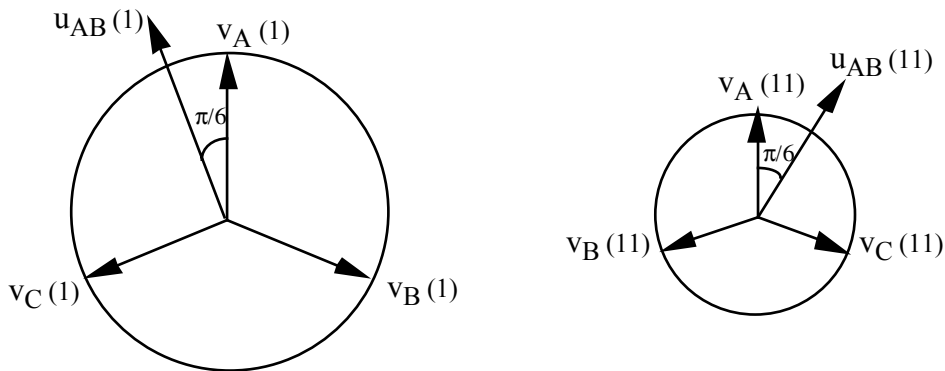


Figure 8

**Exercice 9**

La Fém  $e(t)$  de chaque phase d'un alternateur triphasé varie suivant une loi trapézoïdale d'amplitude  $A_m = 220V$  et de pente  $\frac{A_m}{\alpha}$  ( $\alpha=10^\circ$ ). Cet alternateur alimente un récepteur triphasé équilibré,

comportant par phase une résistance  $R = 6 \Omega$  en série avec un condensateur de réactance  $\frac{1}{C\omega} = 12\Omega$ . Le conducteur neutre a une inductance telle que  $L\omega = 0,5\Omega$ .

En négligeant les harmoniques du courant d'ordres supérieurs au septième, calculer la valeur instantanée du courant dans le conducteur neutre.

On donne la décomposition en série de Fourier de la Fém  $e(t)$  :

$$e(t) = \frac{4A_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right).$$

**Réponse**

En remplaçant les constantes  $A_m$  et  $\alpha$  par leur valeur on aura :

$$e(t) = 274 \sin \omega t = 89,3 \sin 3\omega t + 49,5 \sin 5\omega t + 30,9 \sin 7\omega t$$

$$\bar{E}_{(3)} = Z_{c(3)} \frac{\bar{I}_{o(3)}}{3} + Z_{o(3)} \bar{I}_{o(3)}$$

$$\bar{E}_{(3)} = \left( \frac{Z_{c(3)}}{3} + Z_{o(3)} \right) \bar{I}_{o(3)}$$

$$\bar{I}_{o(3)} = \frac{\bar{E}_{(3)}}{Z_{o(3)} + \frac{Z_{c(3)}}{3}}$$

Avec :  $E_{(3)} = \frac{89,3}{\sqrt{2}} = 63,3 \text{ V}$  ;  $Z_{o(3)} = 1,5j$  et  $Z_{c(3)} = 6 - 4j$

$$\bar{I}_{o(3)} = \frac{63,3}{1,5j + 2 - 1,33j} = 31,5 e^{-j4^\circ 40'}$$

$$i_{o3} = 44,6 \sin(3\omega t - 4^\circ 40')$$

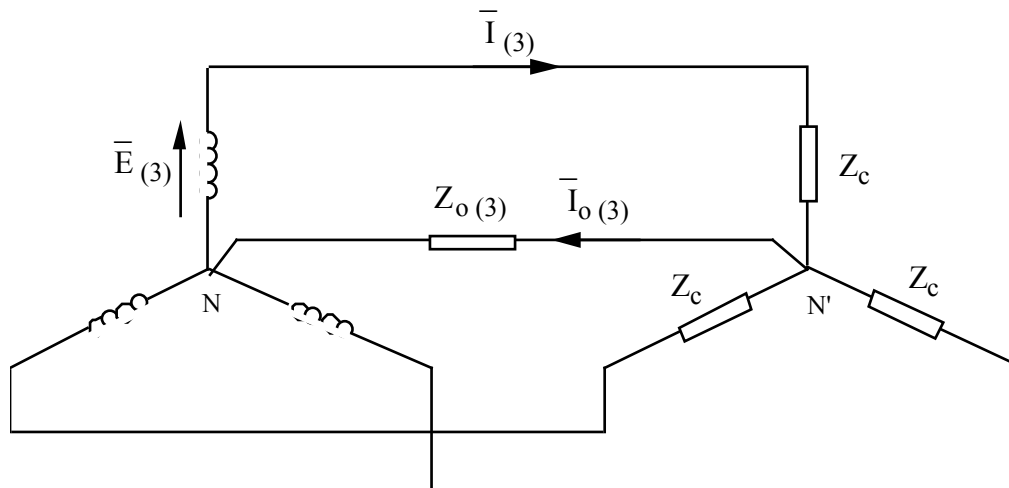


Figure 9

### Exercice 10

Un circuit triphasé est représenté par la figure 13, et alimenté par un système de Fém "équilibré" non sinusoïdal  $e_1 = 170 \sin \omega t + 80 \cos 3\omega t + 34 \cos 9\omega t$  ; on a aussi  $R = 9 \Omega$  et  $L\omega = 2\Omega$ . Calculer les valeurs indiquées par les appareils de mesure, qui sont tous du système électrodynamique.

### Réponse

Les appareils du type électrodynamique mesurent les valeurs efficaces.

$$E_{(1)} = \frac{170}{\sqrt{2}} = 121 \text{ V} ; E_{(3)} = \frac{80}{\sqrt{2}} = 56,5 \text{ V} ; E_{(9)} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 24,2 \text{ V}$$

$$- V_1 = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(9)}^2} = 136 \text{ V}$$

$$V_2 = R_1 I_{(1)}$$

Les harmoniques trois et neuf de courant ne circulent pas dans les conducteurs de lignes puisque il n'y a pas de neutre.

$$I_{(1)} = \frac{E_{(1)}}{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{121}{9,2} = 13,2 \text{ A}$$

$$- V_2 = 9 \cdot 13,2 = 118,5 \text{ V}$$

$$- V_3 = V_2 \sqrt{3} = 118,5 \sqrt{3} = 205 \text{ V}$$

$$- V_4 = L\omega I_{(1)} = 2 \times 13,2 = 26,4 \text{ V}$$

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{\Sigma \bar{E}\bar{Y}}{\Sigma \bar{Y}} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3}{3} = \bar{V}_{(3)} + \bar{V}_{(9)}$$

$$- V_5 = \sqrt{E_3^2 + E_9^2} = 62,3 \text{ V}$$

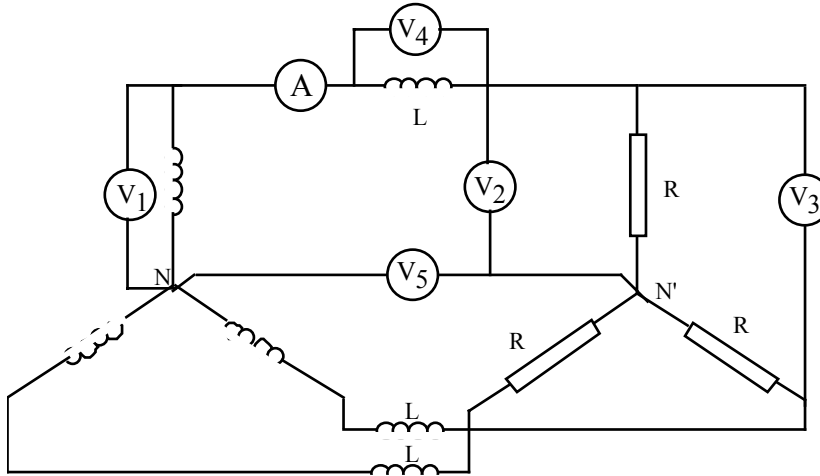


Figure 10

**Exercice 11**

Un circuit électrique triphasé (Fig.14) est alimenté par un système de Fém ( $e_1, e_2, e_3$ ) triphasé "équilibré". On donne :

$$e_1 = 311 \sin\omega t + 104 \sin 3\omega t + 62 \sin 5\omega t + 44,5 \sin 7\omega t + 35 \sin 9\omega t \text{ et } R = 9\Omega, L\omega = 2\Omega.$$

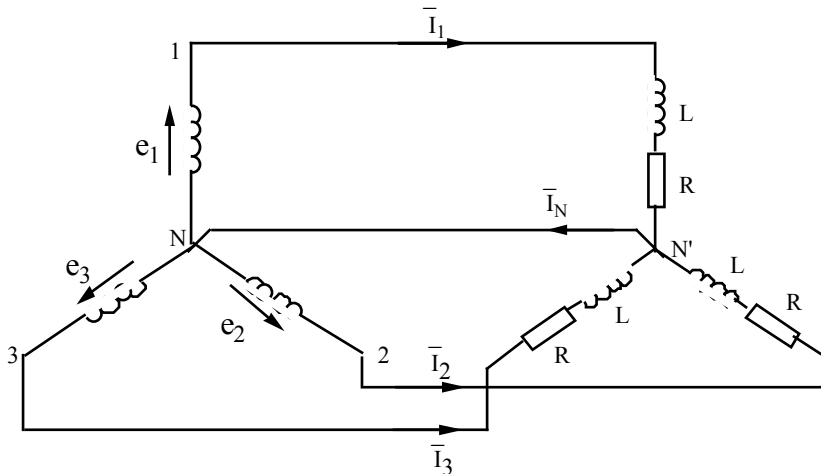


Fig.1 1

- 1) Calculer les valeurs efficaces de la Fém par phase et de la Fém composée.
- 2) Calculer la valeur efficace du courant de phase  $I_1$ .
- 3) Déterminer la valeur efficace du courant circulant dans le conducteur neutre.
- 4) On coupe le conducteur neutre :
  - a - Calculer le courant efficace  $I_1$ .

- b - Calculer la valeur efficace de la tension  $U_{N'N}$  correspondant au déplacement du point neutre.  
 c - Calculer la valeur efficace de la tension aux bornes de la charge  $U_{N'1}$ .

**Solution**

$$1) E_{1(1)} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}$$

$$E_{1(3)} = \frac{104}{\sqrt{2}} = 73,5 \text{ V}$$

$$E_{1(5)} = \frac{62}{\sqrt{2}} = 43,8 \text{ V}$$

$$E_{1(7)} = \frac{44,5}{\sqrt{2}} = 31,5 \text{ V}$$

$$E_{1(9)} = \frac{35}{\sqrt{2}} = 24,7 \text{ V}$$

$$E_1 = \sqrt{E_{1(1)}^2 + E_{1(3)}^2 + E_{1(5)}^2 + E_{1(7)}^2 + E_{1(9)}^2} = 239,4 \text{ V}$$

La Fém. composée :

$$E_{12} = \sqrt{E_{1(1)}^2 + E_{1(5)}^2 + E_{1(7)}^2} \sqrt{3} = 392,3 \text{ V}$$

$$2) Z_{(1)} = \sqrt{9^2 + 2^2} = 9,22 \text{ } \Omega \quad I_{(1)} = \frac{220}{9,22} = 23,86 \text{ A}$$

$$Z_{(3)} = \sqrt{9^2 + (3 \cdot 2)^2} = 10,81 \text{ } \Omega \quad I_{(3)} = \frac{73,5}{10,81} = 6,80 \text{ A}$$

$$Z_{(5)} = \sqrt{9^2 + (5 \cdot 2)^2} = 13,45 \text{ } \Omega \quad I_{(5)} = \frac{43,8}{13,45} = 3,25 \text{ A}$$

$$Z_{(7)} = \sqrt{9^2 + (7 \cdot 2)^2} = 16,64 \text{ } \Omega \quad I_{(7)} = \frac{31,5}{16,64} = 1,89 \text{ A}$$

$$Z_{(9)} = \sqrt{9^2 + (9 \cdot 2)^2} = 20,12 \text{ } \Omega \quad I_{(9)} = \frac{24,7}{20,12} = 1,23 \text{ A}$$

$$I_1 = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2 + I_{(7)}^2 + I_{(9)}^2} = 25,12 \text{ A}$$

$$3) i_N = 3 I_{m(3)} \sin(3\omega t + \varphi_3) + 3 I_{m(9)} \sin(9\omega t + \varphi_9)$$

$$I_N = 3 \sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2} = 20,73 \text{ A}$$

4) En coupant le conducteur neutre, les harmoniques trois ne circulent plus dans les conducteurs de phases.

a) La tension  $u_{N'N}$  ne comporte que des harmoniques trois, d'où :

$$E_{1(1)} = Z_{(1)} I_{1(1)} \quad I_{1(1)} = \frac{E_{1(1)}}{Z_{(1)}} = 23,86 \text{ A}$$

$$I_{1(5)} = \frac{E_{1(5)}}{Z_{(5)}} = 3,25 \text{ A}$$

$$I_{1(7)} = \frac{E_{1(7)}}{Z_{(7)}} = 1,89 \text{ A}$$

$$I_1 = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(5)}^2 + I_{1(7)}^2} = 24,15 \text{ A}$$

$$b) U_{N'N} = \sqrt{E_{1(3)}^2 + E_{1(9)}^2} = 77,54 \text{ V}$$

c) la tension aux bornes de la charge est donnée par :

$$U_{N1} = \sqrt{E_{1(1)}^2 + E_{1(5)}^2 + E_{1(7)}^2} = 226,5 \text{ V}$$

### Exercice 12

Un transformateur triphasé  $Yy_n$  de rapport de transformation  $m = \frac{N_2}{N_1} = 1$ , alimente au secondaire une charge monophasée branchée entre phase et neutre et qui absorbe un courant  $I_{ch}$  (Fig.15).

En négligeant le courant à vide, calculer les courants primaires  $I_A$ ,  $I_B$  et  $I_C$  par la méthode des composantes symétriques.

Examiner le cas où le conducteur neutre est branché dans le primaire.

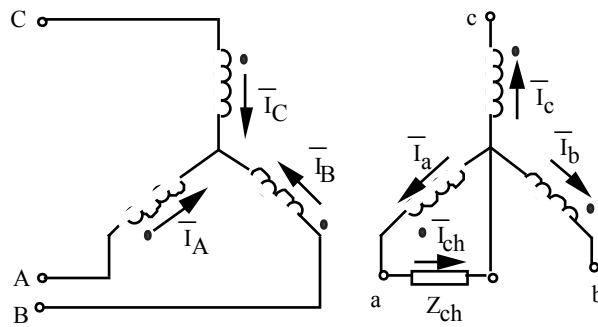


Figure 12

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{Ad} + \bar{I}_{Ai} + \bar{I}_{Ao}$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{Bd} + \bar{I}_{Bi} + \bar{I}_{Bo}$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{Cd} + \bar{I}_{Ci} + \bar{I}_{Co}$$

$$\bar{I}_{ad} = \frac{1}{3} [\bar{I}_a + a \bar{I}_b + a^2 \bar{I}_c] = \frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_{ai} = \frac{1}{3} [\bar{I}_a + a^2 \bar{I}_b + a \bar{I}_c] = \frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_{ao} = \frac{1}{3} [\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c] = \frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

Les composantes directe et inverse existantes aussi bien au primaire et au secondaire doivent satisfaire aux relations suivantes, compte tenu du rapport de transformation  $m = 1$  :

$$\bar{I}_{Ad} = -\bar{I}_{ad} = -\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_{Ai} = -\bar{I}_{ai} = -\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_{Ao} = 0$$

$$\bar{I}_{Bb} = a^2 \bar{I}_{Ad}$$

$$\bar{I}_{Bi} = a \bar{I}_{Ai}$$

$$\bar{I}_{Bo} = 0$$

$$\bar{I}_{Cb} = a \bar{I}_{Ad}$$

$$\bar{I}_{Ci} = a^2 \bar{I}_{Ai}$$

$$\bar{I}_{Co} = 0$$

On en déduit donc :

$$\bar{I}_A = -\frac{1}{3} \bar{I}_{ch} - \frac{1}{3} \bar{I}_{ch} = -\frac{2}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_B = a^2 \bar{I}_{Ad} + a \bar{I}_{Ai} = a^2 \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) + a \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) = \frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_C = a \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) + a^2 \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) = \frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

Les courants  $I_B$  et  $I_C$  circulent dans les sens indiqués sur la figure tandis que le courant  $I_A$  circule dans le sens contraire.

- Si l'on branche le conducteur neutre au primaire, on aura :

$$\bar{I}_{Ao} = -\bar{I}_{ao} = -\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{Ad} + \bar{I}_{Ai} + \bar{I}_{Ao}$$

$$\bar{I}_A = -\frac{1}{3} \bar{I}_{ch} - \frac{1}{3} \bar{I}_{ch} - \frac{1}{3} \bar{I}_{ch} = -\bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_B = a^2 \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) + a \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) + \left(-\frac{1}{3} \bar{I}_{ch}\right) = 0$$

de même, on a  $\bar{I}_B = 0$

Ce résultat est prévisible, avec neutre au primaire la relation des ampères-tours  $N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_B = 0$  est vérifiée :

$$\bar{I}_A = -m \bar{I}_a = -\bar{I}_{ch}$$

$$\bar{I}_B = -m \bar{I}_b = 0$$

$$\bar{I}_C = -m \bar{I}_c = 0$$

Le courant dans le conducteur neutre  $I_N = I_A = I_{ch}$



---

**FORMATEURS****Exercice 1**

Les essais d'une bobine à noyau de fer, alimentée sous une tension de 30V à la fréquence de 50Hz ont donné les résultats suivants :  $I = 7,5\text{A}$ ,  $P = 79\text{W}$ . La bobine comporte 284 spires, sa résistance est de  $0,8\Omega$ , la section du noyau de fer est de  $7,5\text{ cm}^2$ . Dans cette bobine on néglige le flux de fuites.

- 1) Construire le diagramme de cette bobine à partir de son schéma équivalent.
- 2) Déterminer l'induction  $B_M$  dans le circuit magnétique.
- 3) Calculer les pertes dans le fer.

**Exercice 2**

Sur un transformateur, on a fait les mesures suivantes :

- a) en courant continu :  $R_1=0,1\ \Omega$  et  $R_2=0,02\ \Omega$
- b) en courant alternatif et à la fréquence nominale : à vide,  $U_1=150\ \text{V}$  et  $U_2=60\ \text{V}$  ; en court-circuit,  $I_{1cc}=40\ \text{A}$ ,  $I_{2cc}=100\ \text{A}$  et  $P_{1cc}=365\ \text{W}$ .

- 1) Calculer la résistance  $R_s$  de deux façons différentes.
- 2) L'essai à vide est-il utile pour la détermination du rapport de transformation.

**Exercice 3**

Un transformateur monophasé a les caractéristiques suivantes :

Puissance apparente  $S=6\ \text{kVA}$ ,  $R_1=0,009\ \Omega$ ,  $R_2=0,072\ \Omega$ , et  $N_2=82$ .

A vide, on a relevé :  $V_1=50,6\ \text{V}$ ,  $V_2=101,2\ \text{V}$  et  $P_0=150\ \text{W}$  ;

En court-circuit, on a relevé :  $V_{1cc}=6,6\ \text{V}$  pour  $I_{2cc}=60\ \text{A}$ .

- 1) Calculer le rapport de transformation  $m$  et le nombre de spires au secondaire  $N_2$ .
- 2) Déterminer, dans l'hypothèse de Kapp la tension sous laquelle il faut alimenter le primaire pour que le secondaire débite un courant de  $60\ \text{A}$  sous une tension de  $80\ \text{V}$  dans un récepteur de facteur de puissance  $\cos\varphi_2=0,5$  AR.
- 3) Ce récepteur est une bobine de résistance  $R$  et d'inductance  $L$ , calculer  $L$ .
- 4) Déterminer les pertes Joule et le rendement du transformateur dans le cas de la question n°2.

**Exercice 4**

Dans un transformateur la réactance globale de fuites est 4 fois plus grande que la résistance globale du transformateur. Pour quel facteur de puissance la chute de tension aux bornes est-elle nulle.

**Exercice 5**

Un transformateur débite à pleine charge  $100\ \text{kVA}$  avec  $\cos\varphi=0,8$ , fonctionne 23 à vide et une heure en charge, ses pertes magnétiques sont égales à  $1200\ \text{W}$  et ses pertes joule sont de  $2400\ \text{W}$ .

- 
- 1) Pour quelle fraction de la pleine charge le rendement est maximum.
  - 2) Calculer son rendement ordinaire.
  - 3) Calculer son rendement énergétique (pratique) pendant 24H.

**Exercice 6**

On dispose d'un transformateur triphasé de puissance nominale 45 kVA, tension primaire entre 2 phases est 380 V, couplage D ; la tension secondaire entre 2 phases est de 220 V, couplage y.

- 1) Calculer dans ces conditions les courants nominaux par fil de ligne au secondaire et au primaire.
- 2) Quelle tension secondaire aurait - on si on y faisait le couplage d. Quel serait alors le courant nominal par fil secondaire.

**Exercice 7**

Un transformateur triphasé, couplage Yy, S=40 kVA a donné aux essais les résultats suivants:

- à vide :  $U_1=6000$  V ,  $U_{20} = 120$  V.

- en court circuit :  $U_{1cc}= 225$  V,  $I_{2cc}= 192$  A,  $P_{1cc} = 815$  W.

- 1) Calculer la tension secondaire pour la charge nominale avec  $\cos\phi_2=\sqrt{3}/2AR$  et  $U_1=6000$ V.
- 2) Dans l'essai à vide on avait également relevé  $P_{10} = 750$  W. Calculer le rendement du transformateur fonctionnant dans les conditions précédentes.

**Exercice 8**

Un transformateur triphasé, couplage Yd de 25 kVA alimente sous 100 V, 50 Hz un réseau de lampes absorbant 24 kW. On connaît les résistances des enroulements :  $R_1 = 6,25 \Omega$ ,  $R_2 = 0,015 \Omega$ .

- à vide  $U_1= 4400$  V,  $U_2 = 102$  V (entres bornes).

- en court - circuit, le transformateur étant alimenté par la basse tension :  $U_{2cc} = 10$  V et  $I_{1cc} = 3,2$  A. On demande la tension primaire à laquelle il faudra alimenter le transformateur.

**Exercice 9**

Un transformateur triphasé Yy de 500 kVA, 50Hz alimenté à vide sous 15000V, absorbe 2250 W, sa tension secondaire étant 213 V. En court-circuit, sous 430 V, ce transformateur absorbe 5410 W, alors qu'il débite un courant de 1390 A. On demande :

- 1) la chute de tension en pleine charge avec un facteur de puissance au secondaire  $\cos\phi_2=0,8$ .
- 2) le rendement de ce transformateur à ce régime.

**Exercice 10**

Un transformateur de puissance apparente S=3 kVA, 127/220 V par enroulement, Couplage Yy. Son rendement maximum  $\eta_{\max} = 0,96$  correspond à 75% de son courant nominal et à  $\cos\phi=1$ .

- 1) Le transformateur étant alimenté sous sa tension nominale, calculer les pertes dans le fer.
- 2) Le transformateur débite sa pleine charge dans un récepteur triphasé équilibré de facteur de

puissance  $\cos\varphi_2=0,8$  AR. calculer le rendement pour ce régime.

3) La chute de tension du transformateur à pleine charge et à  $\cos\varphi_2=0,8$  AR étant  $\Delta U=16$  V. Quelle est sa chute de tension pour le courant optimum et à  $\cos\varphi_2=0,6$  AR.

4) Quelle est la tension de court-circuit du transformateur pour le courant nominal et pour le courant optimum.

5) Le transformateur alimente un récepteur étoile équilibré avec le conducteur neutre branché comportant par phase une résistance R en série avec une capacité C. On veut que la chute de tension entre bornes du transformateur soit nulle, calculer les valeurs de R et de C.

### Exercice 11

Un transformateur triphasé Yy, de 75 kVA, 50 Hz dont le rapport de transformation nominal (à vide) est 5000/200 V a été soumis à un essai à vide sous 200V. On a relevé une intensité absorbée de 11,2 A et une puissance de 570 W.

1) une réparation du bobinage ayant entraîné, au cours du montage du circuit magnétique la création d'un entrefer de 1 mm sur chaque colonne, quelle sera la nouvelle valeur du courant à vide.

2) On veut pouvoir utiliser ce transformateur sur un réseau dont la tension est 6000 V. Quelle modification devra - t - il subir.

3) Que se passe t - il si l'on fait fonctionner l'appareil à pleine charge sur un réseau à 42 Hz.

A quelle tension faudra - t - il l'alimenter dans ce cas et quelle sera alors sa nouvelle puissance apparente.

Données : Nombre de spires secondaire 45. Section nette du fer dans les colonnes 144 cm<sup>2</sup>. Dans les tôles utilisées, au voisinage de l'induction adoptée, les pertes par courant de Foucault sont à peu près égales à 10% des pertes par hystérésis et celles - ci sont sensiblement proportionnelles au carré de l'induction maximum.

### Exercice 12

Deux transformateurs monophasés T et T' montés en parallèle sur un réseau de 110 V, 50 Hz. Des essais effectués sur chacun des transformateurs ont fournis les résultats suivants :

Pour T :  $U_1 = 110$  V,  $U_{20} = 115$  V,  $U_{1cc} = 7$  V,  $I_{2cc} = 45$  A

$$R_1 = 0,03 \Omega, R_2 = 0,035 \Omega$$

Pour T' :  $U_1 = 110$  V,  $U'_{20} = 114$  V,  $U'_{1cc} = 4,5$  V,  $I_{2cc} = 60$  A

$$R'_1 = 0,02 \Omega, R'_2 = 0,025 \Omega$$

1) Calculer la valeur efficace du courant de circulation à vide.

2) on branche dans le secondaire de l'un des transformateurs une inductance permettant de réaliser le fonctionnement optimum des transformateurs défini par le débit du courant nominal de chacun d'eux ;  $I_{2N} = 45$  A et  $I'_{2N} = 60$  A.

Préciser dans le secondaire de quel transformateur cette inductance est branchée ; justifier ; calculer sa valeur.

---

**Exercice 13**

Deux transformateur monophasés T et T' ont les caractéristiques suivantes :

Pour T : 4600/220 V, 2,2 kVA.

A vide :  $U_1 = 4600$  V,  $U_{20} = 230$  V.

En court-circuit :  $U_{1cc} = 100$  V,  $I_{2cc} = 10$  A et  $P_{1cc} = 40$  W.

Pour T' : 4600/220 V, 4,4 kVA.

A vide :  $U_1 = 4600$  V,  $U_{20} = 230$  V.

En court-circuit :  $U_{1cc} = 400$  V,  $I_{2cc} = 20$  A et  $P_{1cc} = 200$  W.

Les deux transformateurs sont couplés en parallèle, alimentés sous 4600 V, débitent 30 A dans un four électrique (récepteur résistif).

- 1) Déterminer le courant de charge dans chaque transformateur. Que pensez-vous de cette répartition des charges. Déterminer la tension aux bornes du four.
- 2) Pour que chaque transformateur ne dépasse pas son courant nominal, on place en série avec le secondaire de l'un des transformateurs une impédance  $z = r + j\omega$ .
  - a - Préciser dans quel transformateur place-t-on cette impédance, justifier.
  - b - Déterminer la nouvelle répartition des charges.
  - c - Déterminer la tension aux bornes du four.