

# TABLE DE MATIERES

**CHAPITRE 1 : LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....1**

**CHAPITRE 2 : SCHEMAS FONCTIONNELS & THEORIE DES  
GRAPHES.....11**

**CHAPITRE 3 : ETUDE DES SYSTEMES ELEMENTAIRES  
LINEAIRES.....27**

**CHAPITRE 4 : ANALYSE & SYNTHESE DES SYSTEMES  
ASSERVIS LINEAIRES PAR LA METHODE  
TEMPORELLE.....49**

**CHAPITRE 5 : ANALYSE & SYNTHESE DES SYSTEMES  
ASSERVIS LINEAIRES PAR LA METHODE DU LIEU DES  
POLES.....62**

# CHAPITRE 1

## LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

## I. Définition de la transformée de Laplace

Soit  $f(t)$  une fonction réelle, de la variable temps  $(t)$ , définie pour  $t > 0$ ,  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ . La transformée de Laplace  $F(p)$ , image, de  $f(t)$  est définie par:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) . dt \quad (1.1)$$

$p$  étant une variable complexe ( $p = s + jw$ ),  $s$ ,  $w$  sont des variables réelles et  $j^2 = -1$ .

**Notation:** La transformée de Laplace  $F(p)$  de  $f(t)$  est notée :  $F(p) = L[f(t)]$ , Inversement  $f(t) = L^{-1}[F(p)]$ .

La transformée de Laplace inverse  $f(t)$ , originale, de  $F(p)$  est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{s-jw}^{s+jw} e^{pt} F(p) . dp \quad (1.2)$$

## II. Propriétés

### II.1. Linéarité

$$\text{Si } f(t) = a.f_1(t) + b.f_2(t) \quad \hat{U} \quad F(p) = a.F_1(p) + b.F_2(p) \quad (1.3)$$

$a$  et  $b$  sont des constantes arbitraires.

### II.2. Dérivation

Connaissant la transformée de Laplace  $F(p) = L[f(t)]$ , on se propose d'exprimer la transformée de la fonction dérivée  $L[f'(t)]$ .

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0).$$

$$L[f''(t)] = p^2.F(p) - p.f(0) - f'(0)$$

Pour la dérivée  $n^{\text{ième}}$ , on démontre de la même manière que :

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (1.4)$$

### II.3. Intégration

$$L[\int_0^t f(t) dt] = \frac{1}{p} F(p). \quad (1.5)$$

### II.4. Théorème de la valeur initiale

$$\text{Si } p \rightarrow \infty ; e^{-pt} \rightarrow 0 \quad L[f'(t)] \rightarrow 0 \quad pF(p) - f(0) \rightarrow 0,$$

D'où :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (1.6)$$

### II.5. Théorème de la valeur finale

$$\text{Si } p \rightarrow 0 ; e^{-pt} \rightarrow 1 \quad L[f'(t)] \rightarrow \int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)] - f(0)$$

D'où :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (1.7)$$

### II.6. Théorème du retard

$$\text{Soit } L[f(t)] = F(p)$$

$$L[f(t - t)] = e^{-pt} F(p) \quad (1.8)$$

Où  $t > 0$  et  $f(t - t) = 0$  pour  $t < t$

**A retenir:**

Quand une même fonction apparaît avec un retard  $t$ , sa transformée est égale à celle de la précédente multipliée par  $e^{-pt}$ .

**II.7. Translation dans le domaine complexe**

Soit  $L[f(t)] = F(p)$   
 $L[e^{\pm at}.f(t)] = F(p \mp a) \quad (1.9)$

**II.8. Changement d'échelle de temps**

Soit  $L[f(t)] = F(p)$   
 $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{1}{a} p\right) \quad (1.10)$

**II.9. Changement d'échelle de fréquence**

Soit  $L^{-1}[F(p)] = f(t)$   
 $L^{-1}\left[F\left(\frac{p}{a}\right)\right] = a.f(t) \quad (1.11)$

**II.10. Intégrale de convolution : Théorème de Duhamel**

Soient  $L[f_1(t)] = F_1(p)$ ;  $L[f_2(t)] = F_2(p)$ ;  $L[f(t)] = F(p)$

Si,  $F(p) = F_1(p).F_2(p)$  alors  $f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}[F_1(p).F_2(p)]$  est donnée par :

$$f(t) = \int_0^t f_1(t - \tau).f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_2(t - \tau).f_1(\tau) d\tau \quad (1.12)$$

**III. Transformée de Laplace d'une fonction périodique**

La transformée de Laplace d'une fonction périodique  $f(t)$  de période  $T$  étant  $F(p)$ .

Soit  $F_1(p)$  la transformée de la 1<sup>ère</sup> onde. La deuxième onde a un retard  $T$ . La troisième à un retard  $2T$  etc.

$$F(p) = F_1(p) \left( 1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots \right)$$

Pour :  $|e^{-pT}| < 1$   $F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} F_1(p) \quad (1.13)$

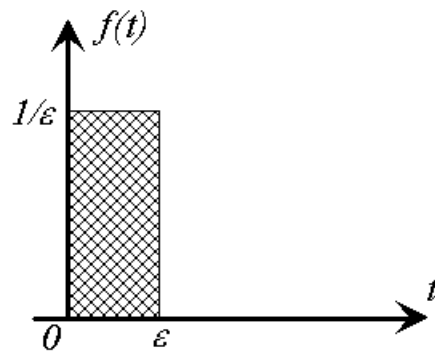
**A retenir:**

La transformée d'une fonction périodique de période  $T$  est égale à la transformée de la première onde divisée par  $1 - e^{-pT}$ .

**IV. Transformées de Laplace des signaux canoniques**

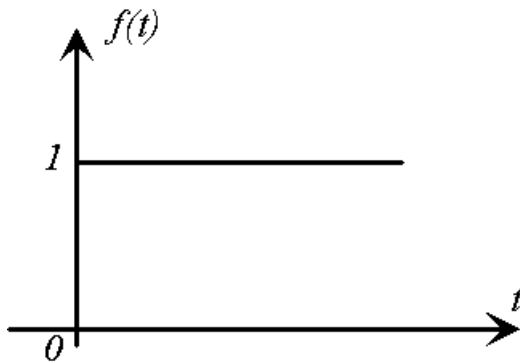
**IV.1. Impulsion de Dirac :**  $f(t) = \delta(t)$   $F(p) = 1$

$$L\delta(t) = pL u(t) = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

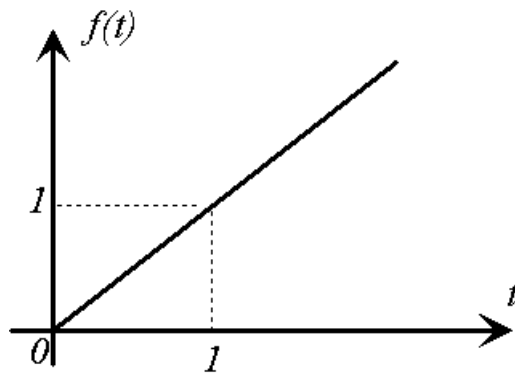


$\varepsilon \ll 0$ : étant un intervalle de temps très petit.

IV.2. Fonction échelon de position unité  $f(t) = 1.u(t) \mathcal{P} F(p) = \frac{1}{p}$



IV.3. Fonction rampe (échelon de vitesse)  $f(t) = t.u(t) \mathcal{P} F(p) = \frac{1}{p^2}$



**Remarques :**

1. **Unicité :** A  $f(t)$  correspond  $F(p)$  unique et inversement.
2.  $L[f(t).g(t)] = F(p).G(p)$
3.  $f(t)$  est dite causale si elle est définie pour  $t > 0$ ,  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

**TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE**

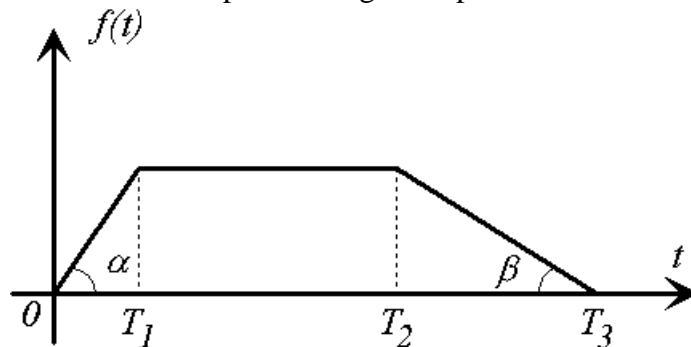
| $f(t)$   | $F(p)$                    |
|--|---------------------------|
| $d(t)$   | 1                         |
| $d(t - t)$   | $e^{-tp}$                 |
| $u(t)$   | $\frac{1}{p}$             |
| $u(t - t)$   | $\frac{1}{p} e^{-tp}$     |
| $t.u(t)$   | $\frac{1}{p^2}$           |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} .u(t)$ ( $n$ : entier positif)   | $\frac{1}{p^n}$           |
| $e^{-at} .u(t)$  | $\frac{1}{p+a}$           |
| $t.e^{-at} .u(t)$  | $\frac{1}{(p+a)^2}$       |
| $\frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}} .u(t)$   | $\frac{1}{1+t.p}$         |
| $\frac{t}{t^2} e^{-\frac{t}{t}} .u(t)$   | $\frac{1}{(1+t.p)^2}$     |
| $\frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}} \frac{\ddot{u}}{\ddot{\theta}}(t)$   | $\frac{1}{p(1+t.p)}$      |
| $t - t + t.e^{-\frac{t}{t}} \frac{\ddot{u}}{\ddot{\theta}}(t)$   | $\frac{1}{p^2(1+t.p)}$    |
| $\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{t}{t} \frac{\ddot{u}}{\ddot{\theta}} - \frac{t}{t} \frac{\ddot{u}}{\ddot{\theta}}(t)$ | $\frac{1}{p(1+t.p)^2}$    |
| $\frac{t^{n-1}}{t^n(n-1)!} e^{-\frac{t}{t}} .u(t)$   | $\frac{1}{(1+t.p)^n}$     |
| $\sin(wt) .u(t)$   | $\frac{w}{p^2 + w^2}$     |
| $\cos(wt) .u(t)$   | $\frac{p}{p^2 + w^2}$     |
| $e^{-at} \sin(wt) .u(t)$   | $\frac{w}{(p+a)^2 + w^2}$ |

|   |  |
|---|--|
| $e^{-at} \cos(wt).u(t)$   | $\frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}$                            |
| $\frac{1}{w_0^2} (1 - \cos(w_0 t)).u(t)$  | $\frac{1}{p(p^2 + w_0^2)}$                             |
| $\frac{w_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-mw_0 t} \cdot \sin(w_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t).u(t)$                              | $\frac{w_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2} \quad (m < 1)$    |
| $\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-mw_0 t} \cdot \sin(w_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t + y).u(t)$<br>avec : $y = \arccos(m)$ | $\frac{w_0^2}{p(p^2 + 2mw_0 p + w_0^2)} \quad (m < 1)$ |
| $e^{-mw_0 t} \cdot \cos(w_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t).u(t)$   | $\frac{p + mw_0}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2} \quad (m < 1)$ |
| $\frac{1}{t_1 - t_2} (e^{-t_1 t} - e^{-t_2 t}).u(t)$  | $\frac{1}{(1 + t_1 p)(1 + t_2 p)}$                     |
| $\frac{1}{t_1 - t_2} (t_1 e^{-t_1 t} - t_2 e^{-t_2 t}).u(t)$  | $\frac{1}{p(1 + t_1 p)(1 + t_2 p)}$                    |
| $e^{-at} f(t)$  | $F(p+a)$   |

**EXERCICES**

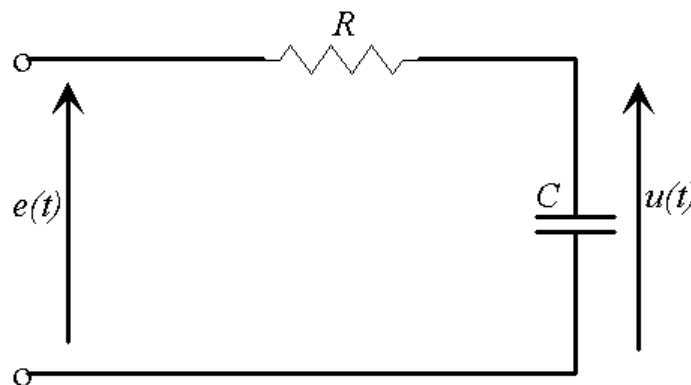
**Exercice N° 1**

Calculer la transformée de Laplace du signal trapézoïdal suivant :



**Exercice N° 2**

Soit le circuit  $RC$  exciter par une  $f.e.m.$  sinusoïdale  $e(t) = E_m \sin wt$



1. Calculer l'expression de  $(p)$ .
2. Déterminer la tension aux bornes de la capacité  $C$  en supposant que la charge initiale de  $C$  est nulle.

**Exercice N° 3**

Connaissant la transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = e^{j\omega t}$ , ( $F(p) = \frac{1}{p - j\omega}$ ), on vous demande de retrouver la transformée de Laplace des fonctions suivantes :  $g(t) = \cos \omega t$  et  $h(t) = \sin \omega t$

Déduire la transformée de Laplace de :  $e^{-at} \cdot \cos \omega t$  et  $e^{-at} \cdot \sin \omega t$ .

**Exercice N° 4**

Soit le système de fonction de transfert  $H(p) = \frac{-e^{-3p}(1 - e^{-3p})}{p}$

Calculer et tracer les réponses de ce système face aux signaux suivants:

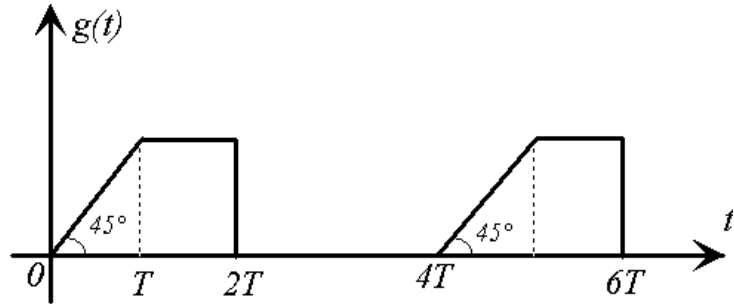
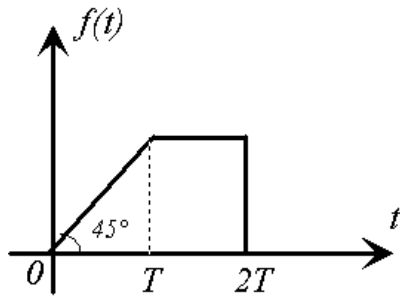
- a. Impulsion de Dirac :  $\delta(t)$
- b. Echelon de position unitaire :  $u(t)$
- c. Rampe unitaire (Echelon de vitesse) :  $t \cdot u(t)$

**Exercice N° 5**

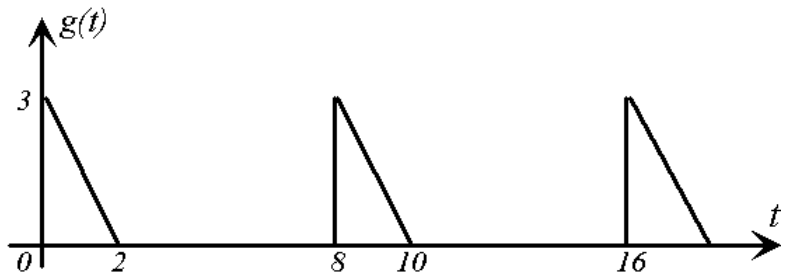
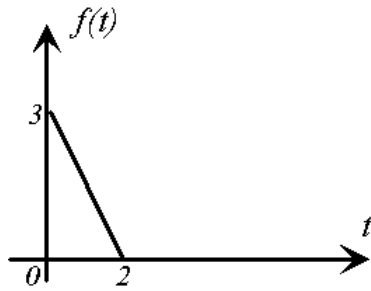


Calculer la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  et en déduire celle de  $g(t)$  dans chacun des cas suivants :

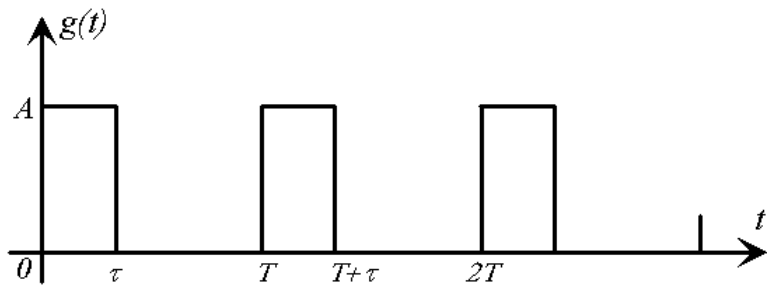
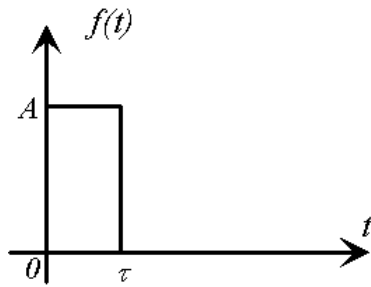
a.



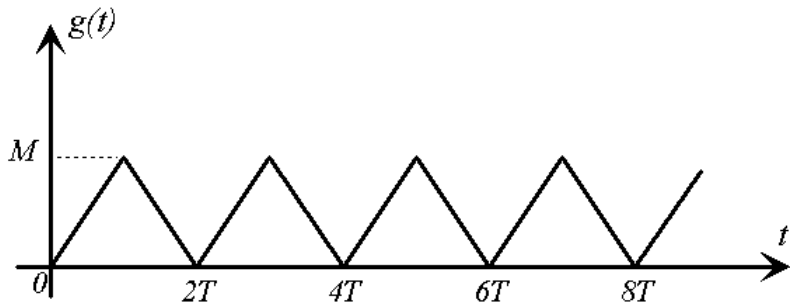
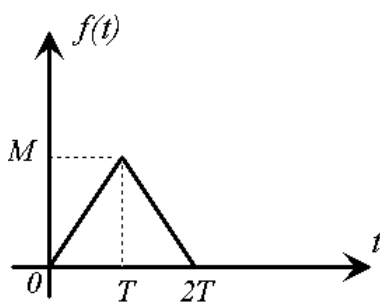
b.



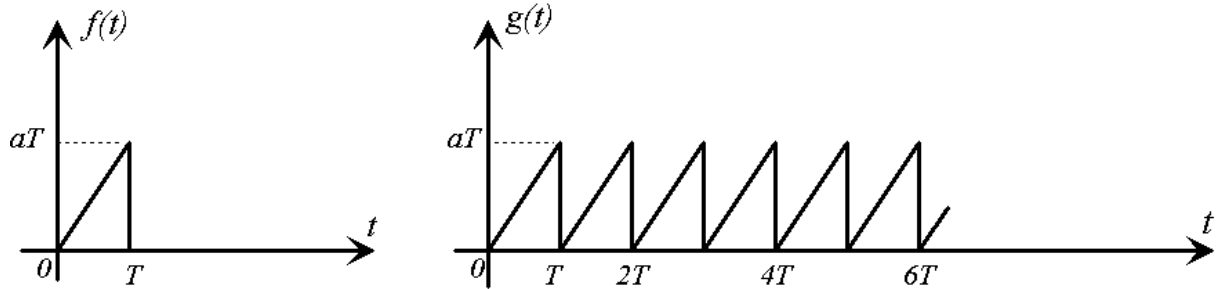
c.



d.



e.



**Exercice N° 6**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + 2y = 8$  avec  $y(0) = 0$
2.  $y'' + 4y' + 3y = 6$  avec  $y(0) = y'(0) = 0$

**Exercice N° 7**

Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1.  $F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}$
2.  $G(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3}$
3.  $H(p) = \frac{p^2 + 2p + 5}{(p + 1)^3}$

**Exercice N° 8**

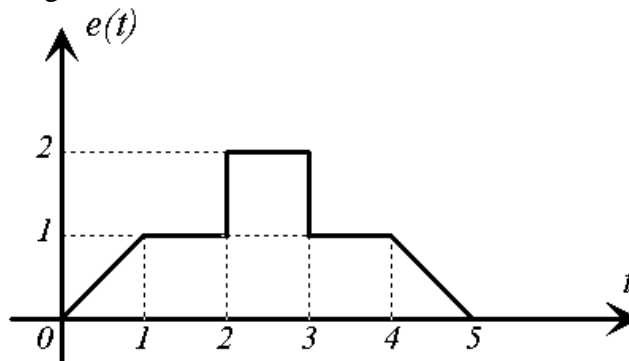
Ecrire la transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = u(t) \quad \text{Avec } y(0) = -1 \text{ et } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2$$

1. Trouver l'expression de  $(p)$  et la décomposer en éléments simples.
2. En déduire la solution  $y(t)$  de l'équation différentielle.

**Exercice N° 9**

On considère le signal suivant :



1. Donner l'expression de  $e(t)$ .
2. Calculer sa transformée de Laplace  $E(p)$ .

**Exercice N° 10**

On considère les signaux décrits par les équations suivantes :

$$* e(t) = 5u(t) + tu(t - 5) - tu(t - 15).$$

$$* v(t) = -tu(t - 6) - 5u(t - 10) + t(t - 16).$$

1. Représenter  $e(t)$  et  $v(t)$
2. Donner l'expression de  $E(p)$  et de  $V(p)$
3. Retrouver graphiquement  $f(t) = e(t) + v(t)$
4. Calculer la transformée de Laplace de  $f(t)$ .

## CHAPITRE 2

# SCHEMAS FONCTIONNELS & THEORIE DES GRAPHES

**I. Schéma fonctionnel**

Un schéma fonctionnel est une représentation graphique abrégée des relations cause à effet entre le signal d'entrée (consigne) et le signal de sortie d'un système physique. D'une manière générale, un schéma fonctionnel est constitué par les 4 éléments suivants :

- \* des blocs caractérisés, soit par une transmittance  $T(p)$ , soit par un gain  $G$  et schématisés par un rectangle;
- \* des comparateurs et/ou des sommateurs représentés par un cercle;
- \* des points de dérivation schématisés par un point (un nœud) et traduisent un prélèvement sans perturbation d'une grandeur de sortie;
- \* des flèches représentant la circulation orientée des signaux.

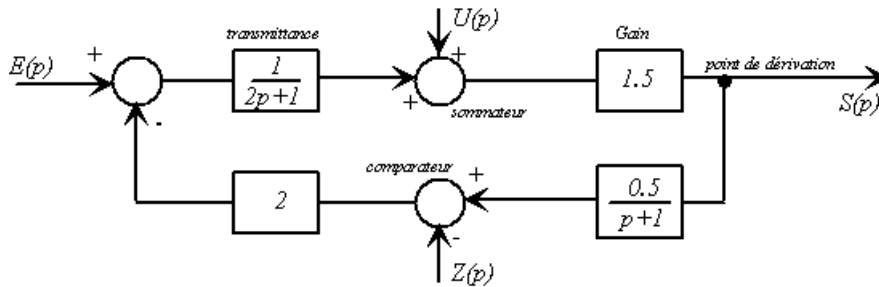


Figure 2.1. Exemple de schéma fonctionnel.

**I.1. Boucle de commande**

Il s'agit de réaliser un système physique appelé système de commande, capable de délivrer au processus réel la commande (politique) optimale. Si le processus réel était parfaitement décrit par le modèle mathématique, on utilise un système de commande qui fonctionnerait en boucle ouverte, c'est-à-dire sans aucun contrôle. Mais cela n'est que idéal. Pour « insensibiliser » le fonctionnement réel par rapport à toutes les imperfections (incertitudes, perturbations), on adopte alors une structure de commande en boucle fermée; cela consiste à modifier la commande en fonction de cette dernière ou de son écart avec l'évolution idéale.

**I.1.1. Schéma fonctionnel d'une boucle de commande**

La figure suivante illustre sous forme de schéma bloc la représentation fonctionnelle d'une commande par l'erreur corrigée d'un processus.

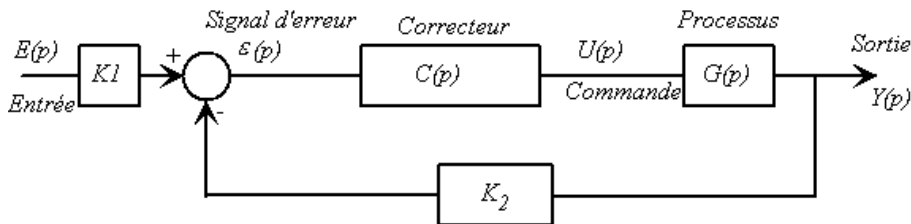


Figure 2.2. Schéma fonctionnel d'une boucle de commande.

- \*  $K_1$  et  $K_2$  : désignent les facteurs de transfert de l'organe d'affichage et de la chaîne de retour.
- \*  $e(t)$  et  $u(t)$  : variables internes.
- \*  $e(t)$ ;  $y(t)$  : variables externes.

**I.1.2. Fonction de transfert en boucle fermée : Formule de Black**

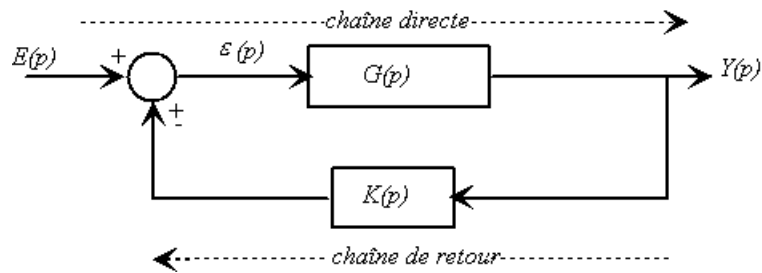


Figure 2.3. Schéma fonctionnel de la boucle fermée.

La fonction de transfert en boucle fermée est notée  $H(p)$ .

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} \quad \text{avec :} \quad \epsilon(p) = G(p) \cdot e(p) \quad \text{et} \quad e(p) = E(p) \pm Y(p) \cdot K(p)$$

$$\text{D } Y(p) = G(p) \cdot [E(p) \pm Y(p) \cdot K(p)]$$

Soit :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 \pm G(p) \cdot K(p)} \quad (2.1)$$

**I.1.3. Fonction de transfert en boucle ouverte**

La fonction de transfert en boucle ouverte, d'une boucle de commande est l'opposé du rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée de la boucle ouverte, la consigne étant considérée nulle.

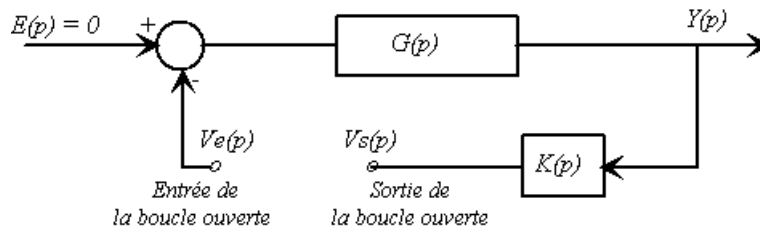


Figure 2.4. Schéma fonctionnel de la boucle ouverte.

$$T(p) = \frac{\dot{e}}{\dot{e}} \frac{V_s(p)}{V_e(p)} \Big|_{E(p)=0} \quad \text{soit} \quad T(p) = G(p) \cdot K(p) \quad (2.2)$$

La transmittance en boucle ouverte n'est autre que le produit des transmittances des chaînes d'action et de réaction.

**I.2. Simplification des schémas fonctionnels**

Simplifier un schéma fonctionnel revient à exprimer la sortie du système en fonction de son entrée ( $S = f(e)$ ) en éliminant les variables intermédiaires.

## Chapitre 2: Schémas fonctionnels & Théorie

### des graphes

|     | Transformation   | Equation                                 | Schéma fonctionnel | Schéma fonctionnel équivalent |
|-----|--|--|--------------------|-------------------------------|
| 1   | Association d'éléments en cascade                          | $= T_1(p).T_2(p).E$                      |                    |                               |
| 2   | Association d'éléments en parallèle                        |  |                    |                               |
| 3   | Retrait d'un élément d'une chaîne d'action                 | $= [T_1(p) \pm T_2(p)].E$                |                    |                               |
| 4   | Elimination d'une boucle de retour                         |  |                    |                               |
| 5   | Retrait d'un élément d'une boucle de retour                | $= \frac{T_1(p)}{1 \mp T_1(p).T_2(p)} E$ |                    |                               |
| 6.a | Redisposition des comparateurs                             |  |                    |                               |
| 6.b | Redisposition des comparateurs                             | $Z = W \pm X \pm Y$                      |                    |                               |
| 7   | déplacement d'un comparateur en amont d'un élément         | $Z = T_1(p)X \pm Y$                      |                    |                               |
| 8   | déplacement d'un comparateur en aval d'un élément          | $Z = T_1(p) [X \pm Y]$                   |                    |                               |
| 9   | déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément | $= T_1(p)E$                              |                    |                               |

Tableau 2.1.a. Simplification des schémas fonctionnels.

| Transformation   | Equation      | Schéma fonctionnel | Schéma fonctionnel équivalent |
|--|---------------|--------------------|-------------------------------|
| 10<br>déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément      | $= T_1(p)E$   |                    |                               |
| 11<br>déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur | $Z = X \pm Y$ |                    |                               |
| 12<br>déplacement d'un point de dérivation en aval d'un comparateur  | $Z = X \pm Y$ |                    |                               |

Tableau 2.1.b. Simplification des schémas fonctionnels.

I.3. Schéma fonctionnel à 2 entrées & 1 sortie

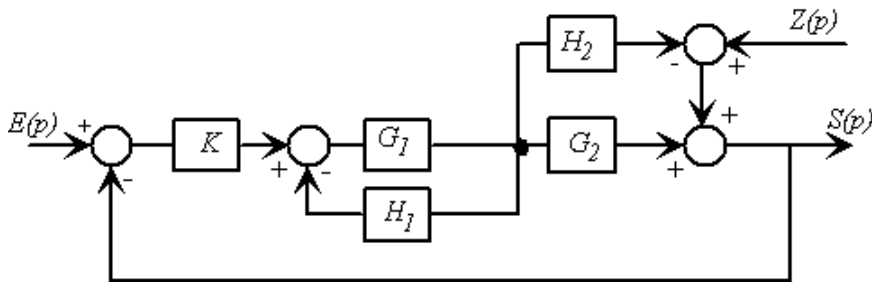


Figure 2.5. Exemple de schéma fonctionnel M.I.S.O.

On applique le théorème de superposition, l'expression de la sortie  $S(p)$  en présence à la fois de l'entrée  $E(p)$  et de la perturbation  $Z(p)$  est donnée par :

$$S(p) = T_1(p)|_{Z(p)=0} \cdot E(p) + T_2(p)|_{E(p)=0} \cdot Z(p) \quad (2.3)$$

Avec :

$$* T_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 K (G_2 - H_2)}{1 + G_1 (G_2 K + H_1 - K H_2)} \quad (\text{Présence de } E(p))$$

$$* T_2(p) = \frac{S(p)}{Z(p)} = \frac{1 + H_1 G_1}{1 + G_1 (G_2 K + H_1 - K H_2)} \quad (\text{Présence de } Z(p))$$

Donc

$$S(p) = \frac{G_1 K (G_2 - H_2) E(p) + (1 + H_1 G_1) Z(p)}{1 + G_1 (G_2 K + H_1 - K H_2)}$$



**II. Graphe de fluence**

**II.1. Définition**

Un graphe de transfert ou graphe de fluence est constitué d'un ensemble de noeuds et de branches. Les noeuds représentent les variables systèmes, ils sont symbolisés par des ronds. D'un noeud peuvent partir plusieurs branches il s'agit alors d'un noeud source. Un noeud au quel arrivent plusieurs branches est appelé puits, dans le cas général le noeud est dit secondaire. Les branches relient les noeuds entre eux et chaque branche est affectée d'un coefficient correspondant à une transmittance.

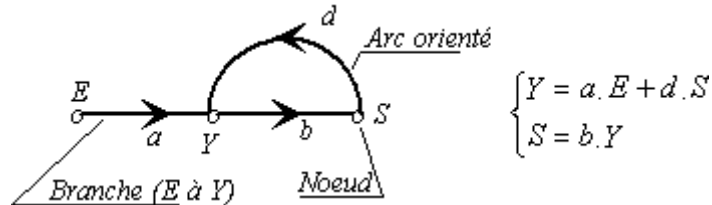


Figure 2.6. Exemple de graphe de fluence.

**II.2. Règle de Mason**

La transmittance d'un graphe d'entrée  $X_e(p)$  et de sortie  $X_s(p)$  est donnée par l'équation suivante :

$$H(p) = \frac{X_s(p)}{X_e(p)} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \cdot D_i}{D} \tag{2.4}$$

\*  $\Delta$  : C'est le déterminant du graphe, il est donné par :

$$D = 1 - \sum_{i=1}^n B_i + \sum_{j^i i=1}^n B_i \cdot B_j - \sum_{j^i k^i i=1}^n B_i \cdot B_j \cdot B_k + \dots \tag{2.5}$$

$\sum_{i=1}^n B_i$  : Transmittance des différents boucles du graphe.

$\sum_{j^i i=1}^n B_i \cdot B_j$  : Produits des transmittances des paires de boucles sans noeuds commun.

$\sum_{j^i k^i i=1}^n B_i \cdot B_j \cdot B_k$  : Produits des transmittances des triplets de boucles sans noeuds commun.

On appelle boucle, un parcours fermé sans répétition (c'est à dire aucun noeud des graphes n'est traversé plus d'une fois durant un parcours).

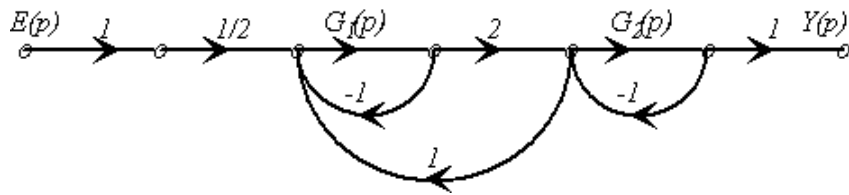
\*  $N$  : C'est un entier qui représente le nombre de parcours direct de l'entrée  $X_e$  à la sortie  $X_s$ . Dans un tel parcours aucun noeud n'est traversé plus d'une fois.

\*  $P_i$  : La transmittance du parcours direct  $N^o i$  obtenue en faisant le produit des transmittance des branches du parcours  $i$ .

\*  $D_i$  : Le déterminant du graphe obtenu en supprimant tous les noeuds traversés par le parcours  $i$ .

**II.3. Exemple**

Un système asservi linéaire est représenté par le graphe de fluence suivant:



En utilisant la règle de Mason, calculons la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ .

\* Les parcours :  $P_1 = G_1(p) \cdot G_2(p)$   $D_1 = 1$

\* Les boucles :  $B_1 = -G_1(p)$ ,  $B_2 = -G_2(p)$ ,  $B_3 = 2G_1(p)$ .

1 seul paire de boucle n'ayant pas de nœuds :  $B_1$  &  $B_2$ .

$$D = 1 - (B_1 + B_2 + B_3) + B_1 B_2$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 - G_1(p) + G_2(p) + G_1(p) \cdot G_2(p)}$$

**EXERCICES**

**Exercice N° 1**

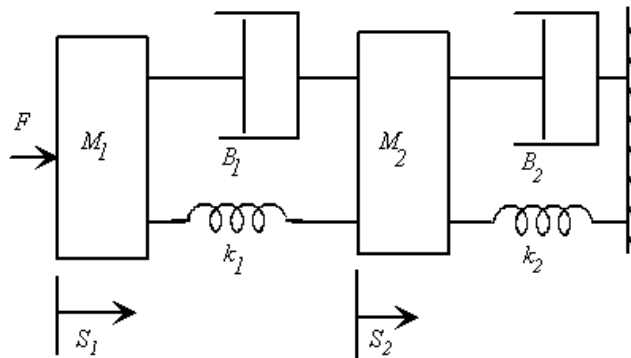
Tracer le schéma fonctionnel et le graphe de fluence du système décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_1 - x_4 \\ \dot{x}_3 = A_1 x_2 - A_3 x_3 \\ \dot{x}_4 = A_4 x_3 - A_2 x_1 \end{cases}$$

En déduire le rapport  $\frac{x_4}{x_1}$ .

**Exercice N° 2**

On considère un système mécanique donné par la figure suivante :

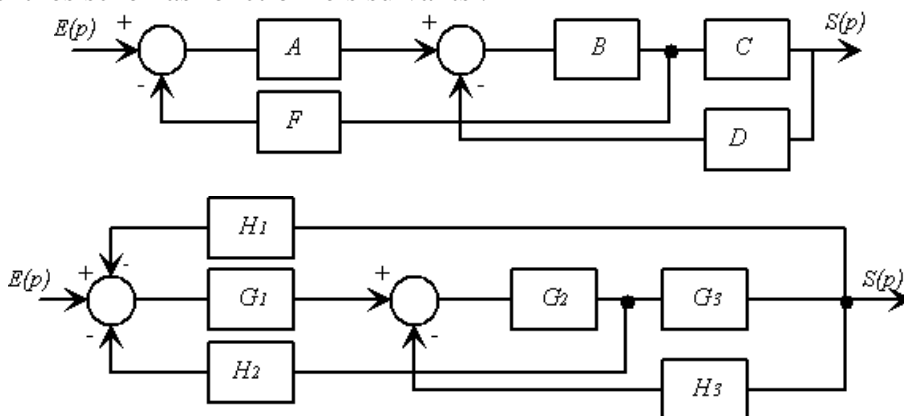


$B_i$ : coefficient de frottement de la tige  $i$  et  $k_i$  : raideur du ressort  $i$

Calculer la fonction de transfert du système :  $H(p) = \frac{S_2(p)}{F(p)}$

**Exercice N° 3**

Soient les schémas fonctionnels suivants :



1. Calculer la fonction de transfert  $T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
2. Tracer le graphe de fluence et retrouver  $T(p)$ .

**Exercice N°4**

Le système qu'on désire étudier est un moteur à courant continu accouplé à une charge mécanique. Son alimentation en énergie électrique se fait par l'induit. Son fonctionnement est décrit par les équations suivantes :

$$u_a = ri + L \frac{di}{dt} + e; \quad C_m = J_m \frac{dW}{dt} + fW + C_r$$

Où :

$u_a$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $C_m$ ,  $W$  &  $J_m$  sont respectivement la tension d'alimentation du moteur, son courant d'induit, sa force contre-électromotrice, le couple moteur, sa vitesse angulaire et l'inertie totale rapportée à l'arbre du moteur ( $J_m = 0.191 \text{ Kg.m}^2$ ).

$L$  étant l'inductance d'induit ( $L = 14 \text{ mH}$ ),  $r$ : Résistance de l'induit ( $r = 1.14\Omega$ )

$f$ : Le coefficient de frottement visqueux ( $f = 0.011$ ).

$C_r$ : Couple résistant équivalent ramené sur l'arbre du moteur.

Les extraits du catalogue du constructeur des moteurs permettent d'écrire les relations suivantes :

$$E = K_e W \quad ; \quad C_m = K_m i$$

avec :  $K_m$ : Coefficient du couple moteur ( $K_m = 1.55$ ).

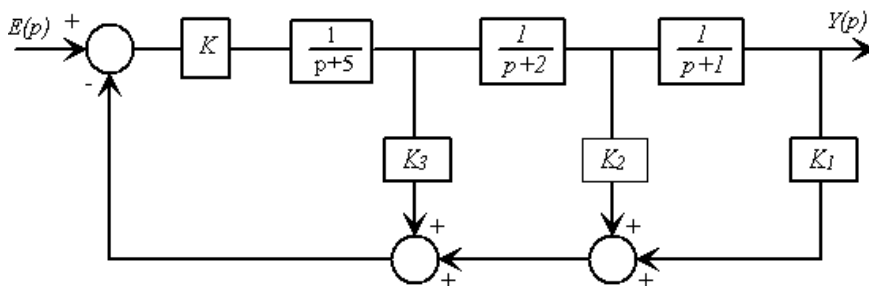
$K_e$ : Coefficient de la force contre-électromotrice du moteur ( $K_e = 1.55$ ).

La tension d'induit du moteur est donnée par un hacheur supposé parfait et de gain égal à 26. La vitesse de rotation est mesurée par une dynamo tachymétrique de coefficient de transfert  $I = 0.06$ .

1. Etablir le modèle du moteur hacheur (donner le schéma fonctionnel).
2. Calculer la fonction de transfert du système.

**Exercice N° 5**

On considère le schéma fonctionnel suivant :

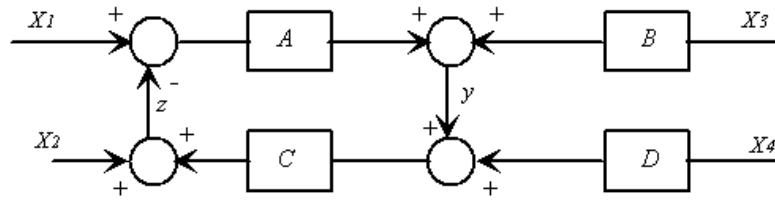


Calculer  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  &  $K_3$  pour que la fonction de transfert en boucle fermée soit :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{40}{(p+1)(p^2+6p+10)}$$

**Exercice N° 6**

Soit le schéma fonctionnel suivant :

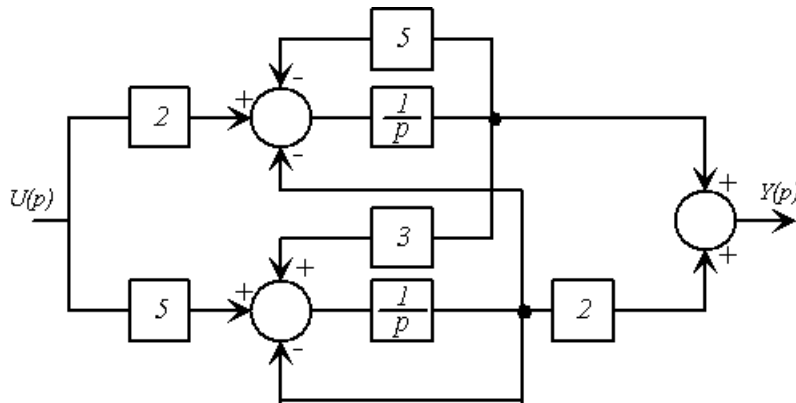


Trouver les expressions suivantes :

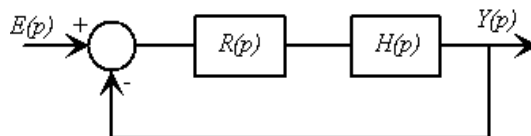
1.  $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
2.  $z = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$

**Exercice N° 7**

On donne le schéma fonctionnel d'un système continu suivant :



1. Donner la représentation par graphe de fluence de ce système.
2. En utilisant la règle de Mason, calculer la fonction de transfert du système  $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ .
3. On réalise l'asservissement suivant :

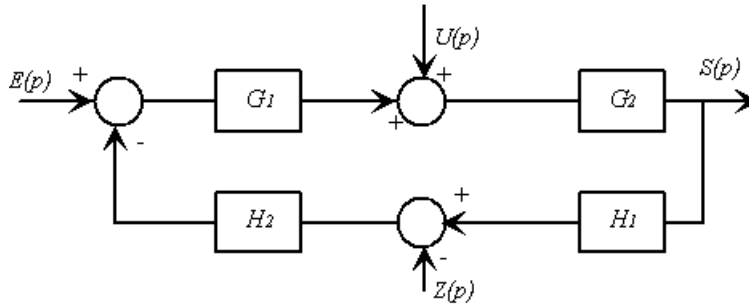


Que doit-on choisir comme régulateur  $R(p)$  afin que la fonction de transfert du système

bouclé  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{p+3}$ .

**Exercice N° 8**

Déterminer la sortie  $S(p)$  du système suivant :



**Exercice N°9**

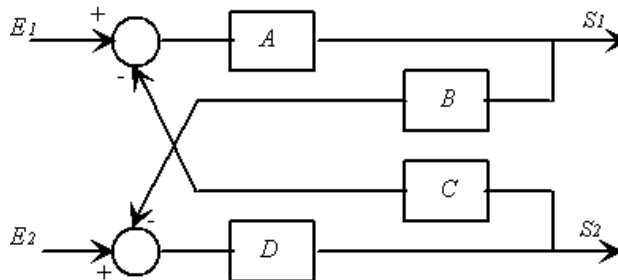
Un système d'entrée  $E$  et de sortie  $S$  est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = E - x_5 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 \\ \dot{x}_3 = a_2 x_2 + b_1 x_1 - c_1 x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_3 \\ \dot{x}_5 = c_2 x_3 + c_3 S \\ \dot{S} = a_4 x_4 + b_2 x_2 \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} a_1; a_2; a_3; a_4 \\ b_1; b_2 \\ c_1; c_2; c_3 \end{cases} \text{ sont des constantes}$$

1. Tracer le graphe de fluence et le schéma fonctionnel du système.
2. Calculer le rapport  $\frac{S(p)}{E(p)}$  en utilisant la règle de Mason.

**Exercice N°10**

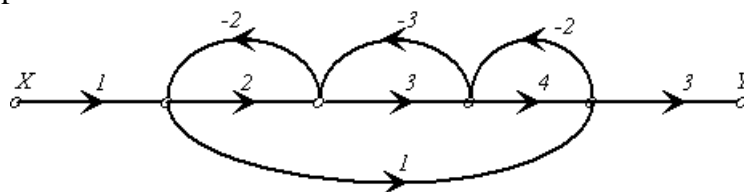
Soit le schéma fonctionnel suivant :



Déterminer les sorties  $S_1 = f(E_1, E_2)$  et  $S_2 = g(E_1, E_2)$ .

**Exercice N°11**

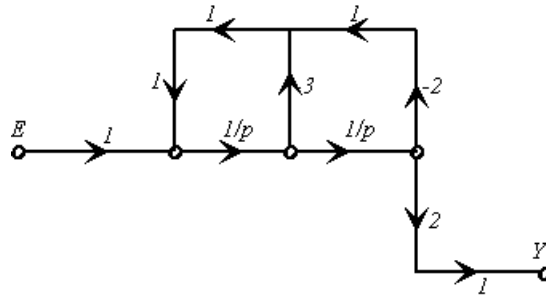
Soit le graphe de fluence



Calculer le rapport  $\frac{Y}{X}$ .

**Exercice N° 12**

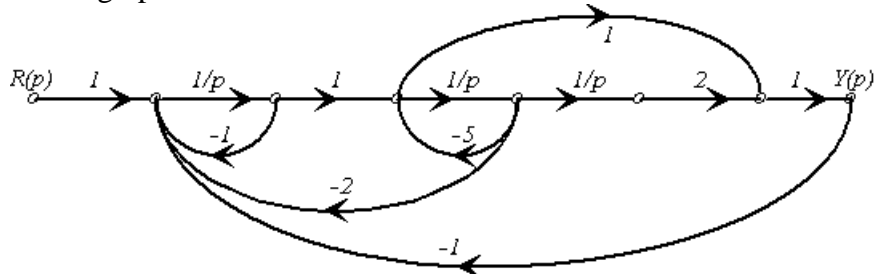
On considère un système asservi décrit par le graphe de transfert suivant :



1. Calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ .
2. Tracer le schéma fonctionnel du système et retrouver la fonction de transfert.

**Exercice N° 13**

On donne le graphe de fluence suivant :



Calculer la fonction de transfert du système en utilisant la règle de Mason.

**Exercice N° 14**

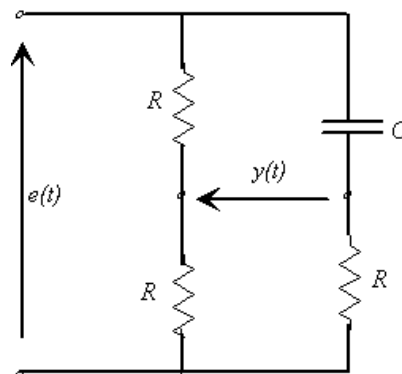
Soit le système régi les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u_1 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_2 \end{cases}$$

1. Etablir le graphe de fluence correspondant.
2. Calculer les rapports  $\frac{x_1}{u_1}$ ,  $\frac{x_1}{u_2}$ ,  $\frac{x_2}{u_1}$ ,  $\frac{x_2}{u_2}$

**Exercice N° 15**

On considère le circuit suivant :



1. Chercher la fonction de transfert de ce circuit  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ .

2. Donner la représentation par graphe de fluence et retrouver  $H(p)$ .

**Exercice N° 16**

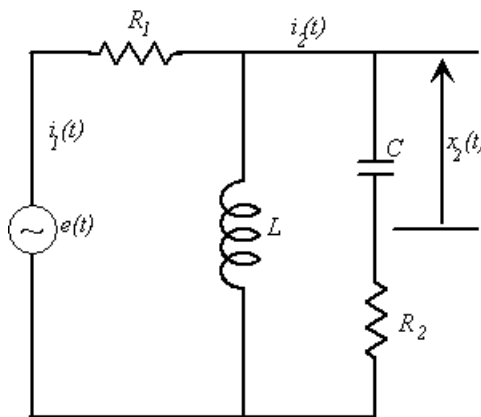
Soit le système d'entrée  $x$  et de sortie  $y$ , décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = x - H_3 y; & y_2 = G_1 y_1 - H_2 y_6; & y_3 = G_2 y_2 \\ y_4 = G_3 y_3 - H_4 y_5; & y_5 = G_4 y_4 - H_1 y; & y_6 = G_5 y_5 + G_7 y_3 \\ y = G_6 y_6 + G_8 y_5 \end{cases}$$

En utilisant la formule de Mason, calculer le rapport  $\frac{Y}{X}$ .

**Exercice N° 17**

On donne le circuit suivant :

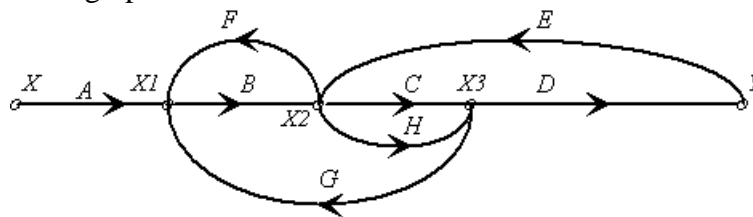


La sortie étant  $y(t) = x_2(t)$ .

1. Calculer la fonction de transfert du système.
2. Tracer le graphe de transfert correspondant et retrouver la fonction de transfert.

**Exercice N° 18**

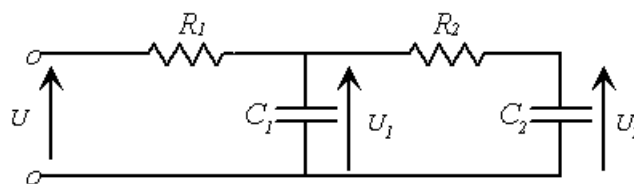
On considère le graphe de transfert suivant :



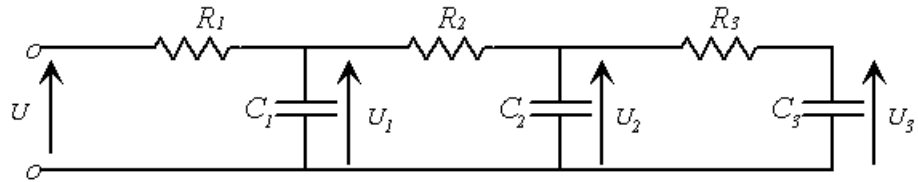
1. Ecrire les équations du système décrit par le graphe ci-dessus.
2. En utilisant la règle de Mason, calculer le rapport  $\frac{Y}{X}$ .

**Exercice N° 19**

On donne les circuits RC suivants :



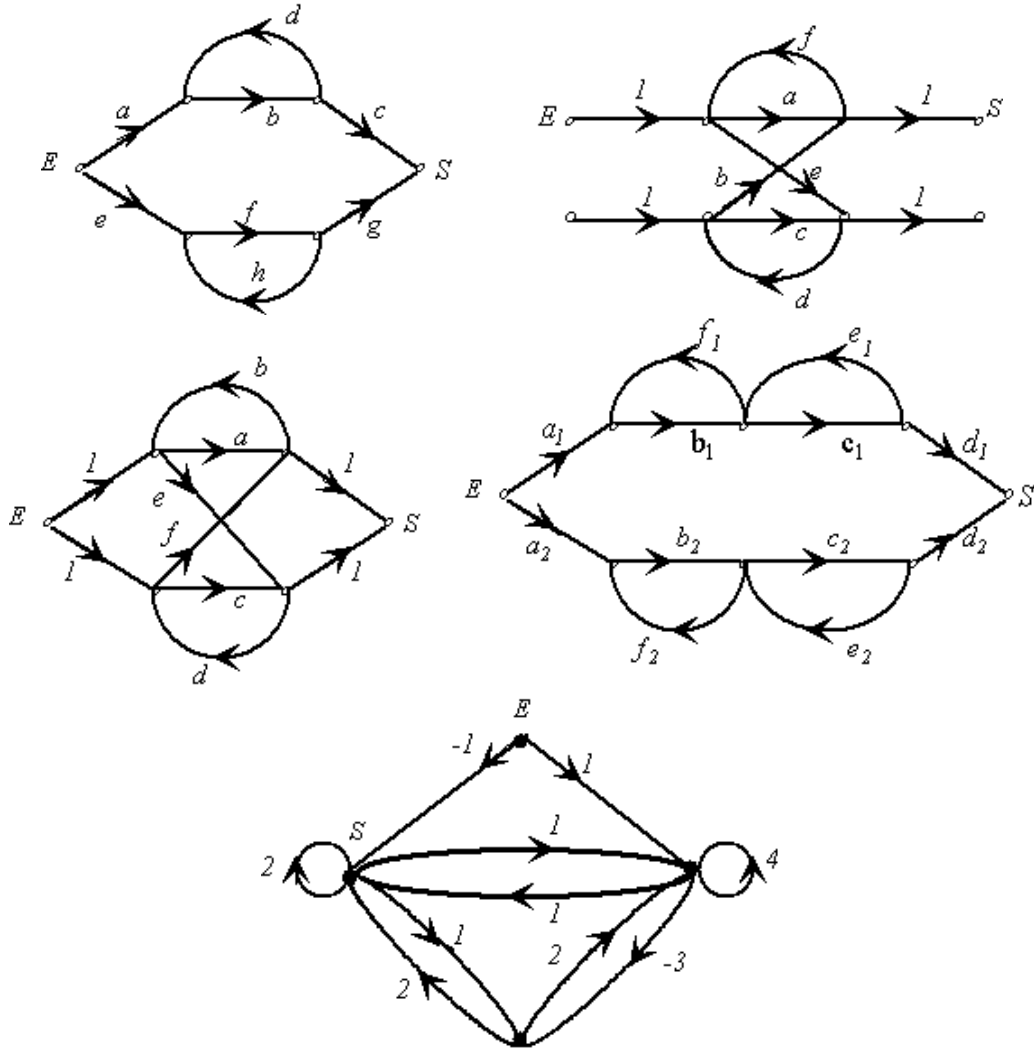




1. Tracer le schéma fonctionnel correspondant; en déduire le gain en tension.
2. Retrouver ce gain en utilisant le graphe de fluence.

**Exercice N° 20**

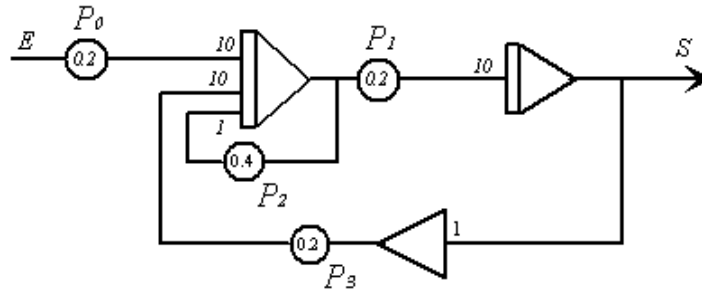
On considère les graphes de fluence suivants :



1. Calculer pour chacun des graphes les boucles  $B_i$ , le déterminant  $D$ , les parcours  $P_i$  et les cofacteurs  $D_k$
2. En déduire la fonction de transfert de chaque graphe.

**Exercice N° 21**

On donne le schéma de simulation de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  sur le calculateur analogique.

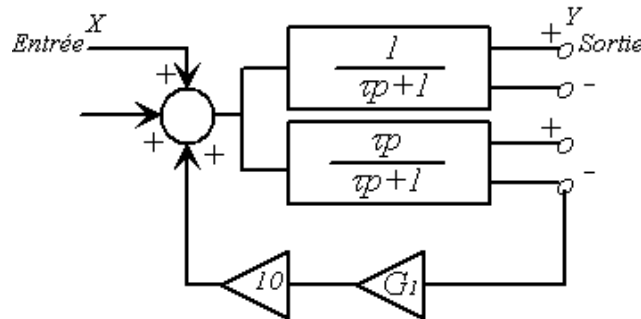


$P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont des potentiomètres.

1. Tracer le schéma fonctionnel; en déduire  $H(p)$ .
2. Tracer le graphe de fluence; en déduire  $H(p)$ .

**Exercice N° 22**

Sur la maquette « SAMOURAI », pour obtenir une constante de temps  $T > 10s$ , on utilise le montage suivant:

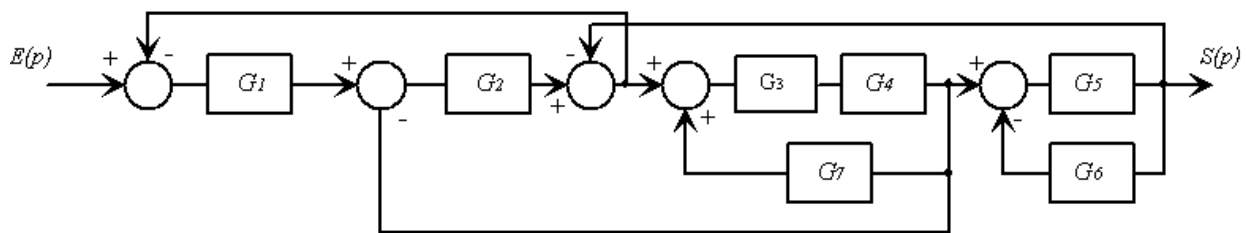


$0 \leq t \leq 10s$  et  $0 \leq G_1 \leq 1$ .

1. Tracer le graphe de fluence.
2. Etablir la relation  $G_1 = f(t, T)$

**Exercice N° 23**

On donne le schéma fonctionnel suivant :

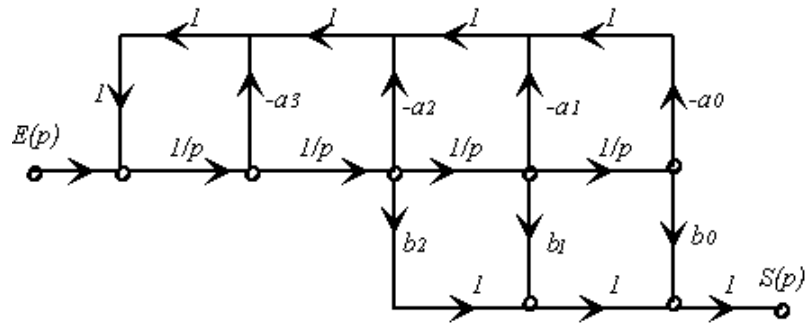


1. Donner la représentation en graphe de fluence et appliquer la règle de Mason pour calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .
2. On donne  $G_1 = B$ ,  $G_2 = \frac{1}{p+1}$ ,  $G_3 = \frac{1}{10p+1}$ ,  $G_4 = 1$ ,  $G_5 = \frac{3}{p}$ ,  $G_6 = G_7 = 0$

Représenter le nouveau schéma fonctionnel obtenu. Le simplifier et en déduire la nouvelle expression de  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .

**Exercice N° 24**

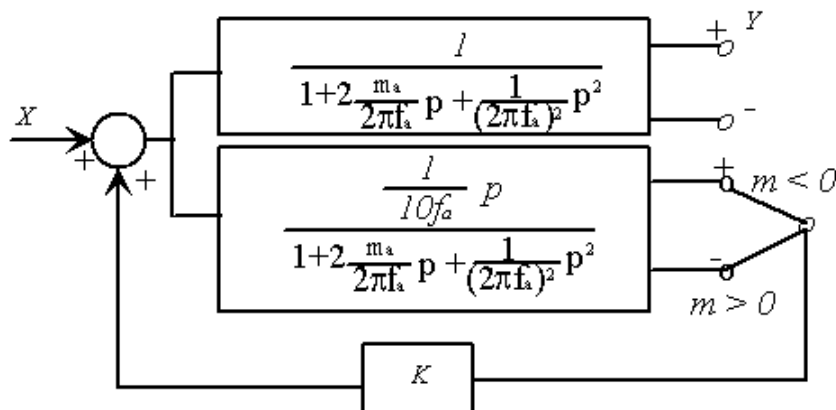
On donne le graphe de transfert suivant :



1. Calculer  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  en utilisant la règle de Mason.
2. Le graphe précédent permet de représenter une fonction de transfert quelconque.  
Soit  $H(p) = \frac{p+3}{p^3+5p^2+2p+7}$ . Tracer son graphe de fluence.

**Exercice N° 25**

Sur la maquette «SAMOURAI», pour obtenir un coefficient d'amortissement  $m < 0$  ou  $m > 1$ , on utilise le montage suivant :



$f_a$  : la fréquence affichée par un potentiomètre.

$m_a$  : le coefficient d'amortissement affiché par un potentiomètre;

$K$  : le gain

1. Tracer le graphe de fluence.
2. Etablir la relation  $K = f(m, m_a)$ ; en déduire la valeur de  $K$  pour :  
 $m = 4.14$  et  $m = -0.314$ .  
Il est à signaler que  $m_a = 1$  pour  $m > 0$  et  $m_a = 0$  pour  $m < 0$ .

## CHAPITRE 3

# ETUDE DES SYSTEMES ELEMENTAIRES LINEAIRES

**Système de 1<sup>ère</sup> ordre :**

A/définition :

On appelle un système linéaire un système de 1<sup>ère</sup> ordre si la relation entre sa sortie et son entrée est décrite par l'équation différentielle :

$$S(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

$\tau > 0$  : constante de temps

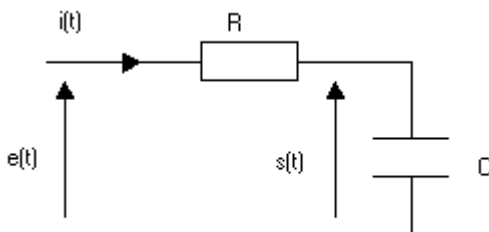
K : gain statique

d'où la transmittance H(p) :  $S(p) + \tau p S(p) = K E(p)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Exemple des systèmes de 1<sup>ère</sup> ordre :

Circuit RC



$$e(t) = Ri(t) + s(t) \quad \text{or on a} \quad i(t) = C (ds(t)/dt)$$

$$\Rightarrow e(t) = RC (ds(t)/dt) + s(t)$$

$$E(p) = RCp S(p) + S(p) \Rightarrow$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Avec  $K=1$  et  $\tau = RC$

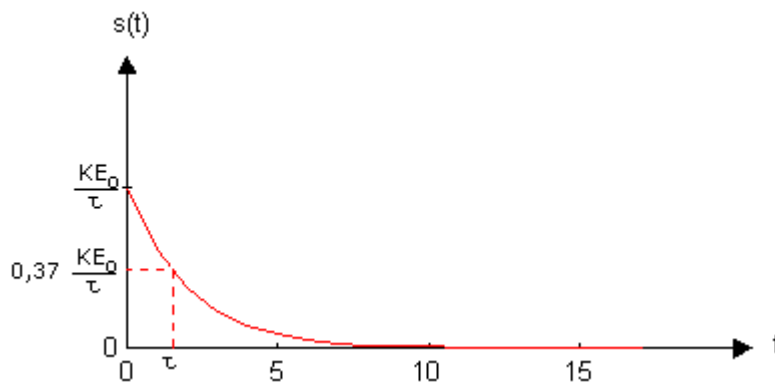
B/ Réponses aux signaux canoniques :

- Réponse impulsionnelle :

$$e(t) = E_0 \delta(t) \Rightarrow E(p) = E_0$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{1 + \tau p}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{KE_0}{\tau} \exp(-t / \tau)$$



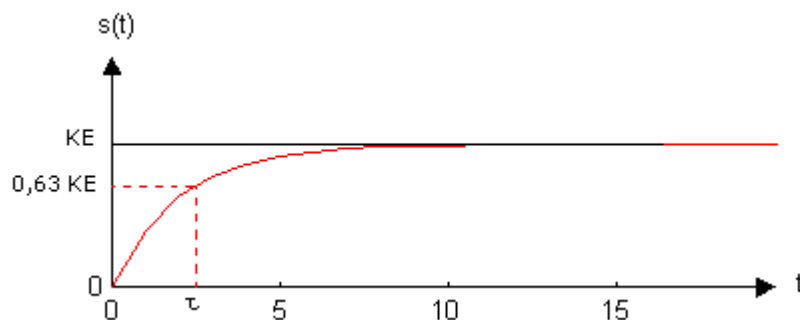
- Réponse indicielle :

$$e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = E_0/p$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE}{p(1 + \tau p)}$$

$$\Rightarrow s(t) = KE \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

- Réponse harmonique (fréquentielle):



$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \exp(j\varphi)$$

avec  $\varphi = -\text{Arctg}(\tau\omega)$

- Lieu de Nyquist:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{K\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2} = X + jY$$

$$X = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \Rightarrow 1 + \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} \Rightarrow \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1$$

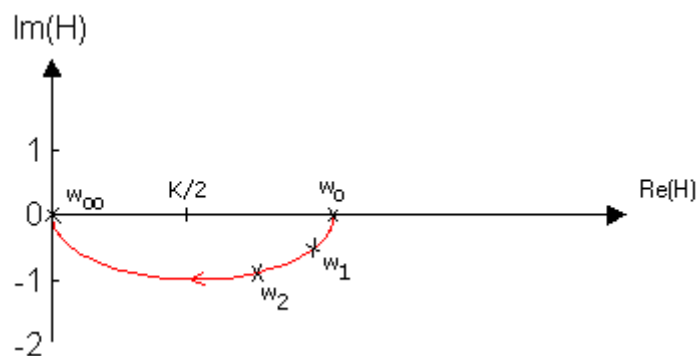
$$Y = - \frac{K\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow Y = - \frac{K\omega\tau}{K/X} = -\tau\omega X$$

$$\Rightarrow Y^2 = \omega^2 X^2 \tau^2 = (K/X - 1) X^2 = KX - X^2$$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 - KX = 0 \Rightarrow (X - K/2)^2 + Y^2 - K^2/4 = 0$$

$$\Rightarrow (X - K/2)^2 + Y^2 = (K/2)^2 \quad \text{cercle de centre } (K/2, 0) \text{ et de rayon } K/2$$



- Lieu de Bode :

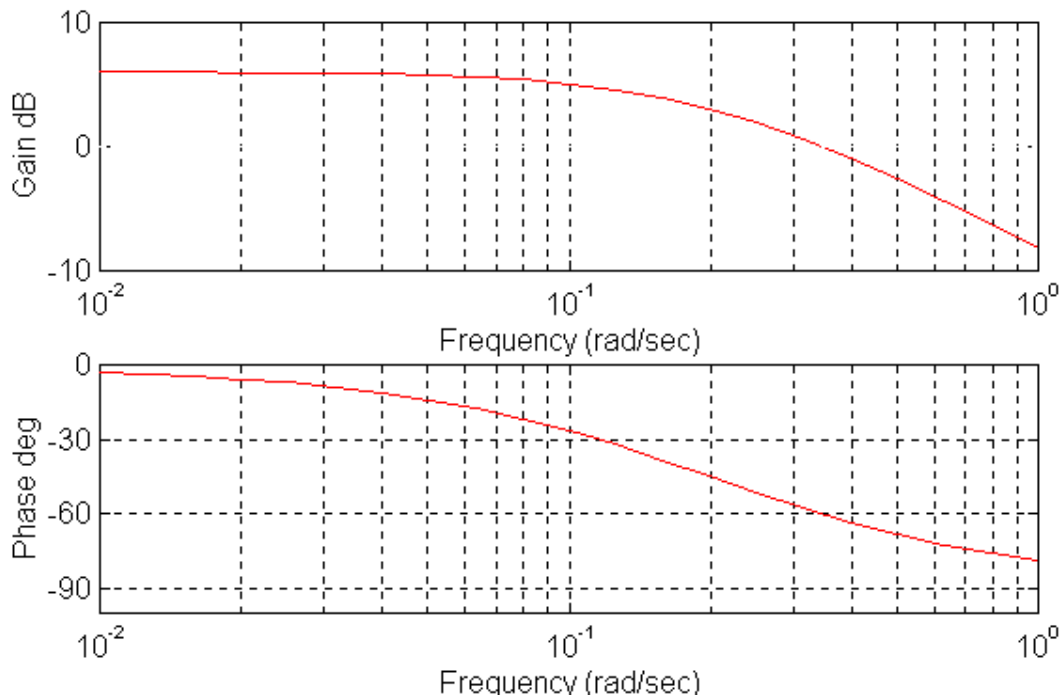
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}} \exp(j\varphi)$$

avec  $\varphi = -\text{Arctg}(\tau\omega)$

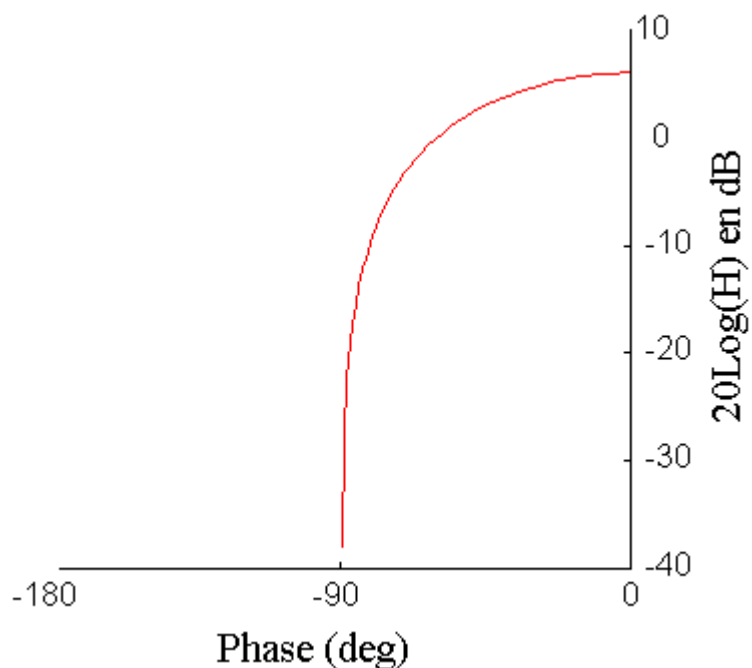
$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}$$

$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 10\text{Log}(1 + \tau^2\omega^2)$$

$$\text{Arg}(H) = -\text{Arg}(1 + j\tau\omega)$$



- Lieu de Black:





**Système de 1<sup>er</sup> ordre généralisé :**

A/ Définition :

Ce sont des systèmes linéaires régis par une équation différentielle de type suivant:

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = K[e(t) + \tau' \frac{de(t)}{dt}]$$

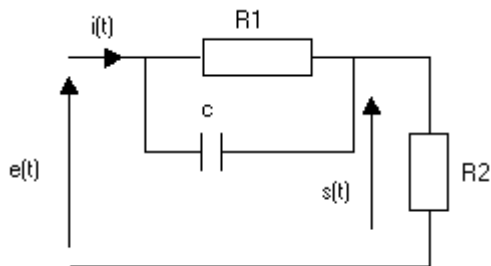
$$\Rightarrow S(p) + \tau p S(p) = K E(p) + K \tau' p E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$$

Si on note  $\tau' = \lambda \tau$

$$\Rightarrow H(p) = K \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$$

EXEMPLE:



$$S(p) = \frac{R_2}{R_1/Cp} \cdot E(p) \cdot \frac{R_2 + 1/Cp}{R_1 + 1/Cp}$$

$$\Rightarrow H(p) = S(p)/E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{R_2 (R_1 + 1/Cp)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)/Cp} = \frac{R_2(1 + R_1 Cp)}{(R_1 + R_2)(1 + R_1 R_2 Cp / (R_1 + R_2))}$$

$$\Rightarrow K = R_2 / (R_1 + R_2) ; \tau = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) ; \tau' = R_1 C ; \lambda = (R_1 + R_2) / R_2$$

**B/ Réponses aux signaux canoniques:**

• Réponse indicielle:

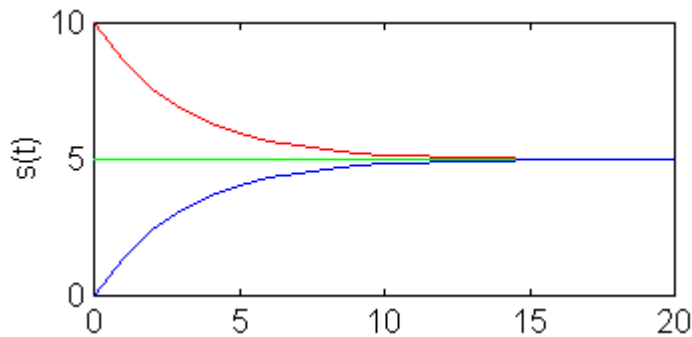
$e(t)=E_0 u(t); E(p)=E_0/p$

$$S(p)= KE_0 \frac{(1+ \tau\lambda p)}{(1+ \tau p)p} = \frac{KE_0}{(1+ \tau p)p} + \frac{KE_0\tau\lambda p}{(1+ \tau p)p}$$

$$S(p)= \frac{KE_0}{(1+ \tau p)p} + \frac{KE_0\lambda}{(p+1/ \tau)}$$

$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1-\exp(-t/\tau))+KE_0\lambda \exp(-t/\tau)$

$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1+(\lambda-1) \exp (-t/\tau))$



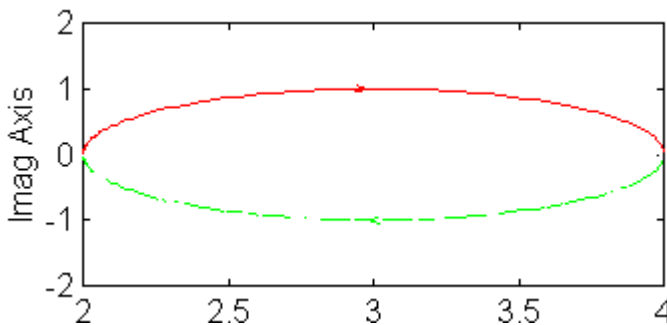
• Réponses harmonique:

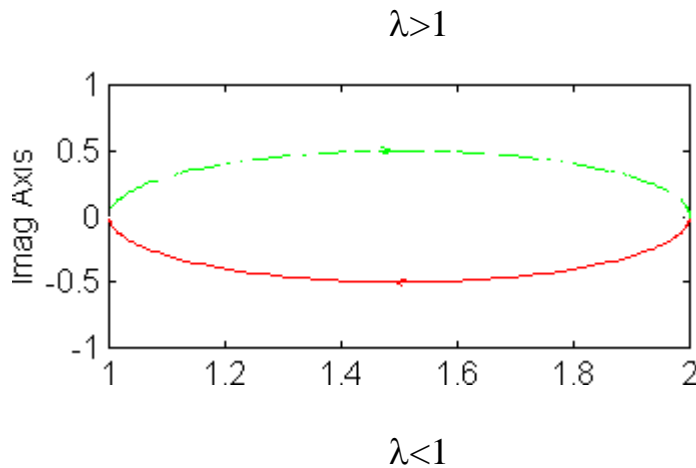
$$H(jw) = K \frac{1+jw\lambda\tau}{1+jw\tau} = x+jy$$

$\Rightarrow y^2 +(x-K(\lambda+1)/2)^2 = (K(\lambda-1)/2)^2$

C'est l'équation d'une cercle de centre  $(K(\lambda+1)/2 ,0)$  et de rayon  $K(\lambda-1)/2$

• **Lieu de Nyquist :**





• **Lieu de Bode :**

$$H(j\omega) = K \frac{1}{1 + j\lambda\tau\omega}$$

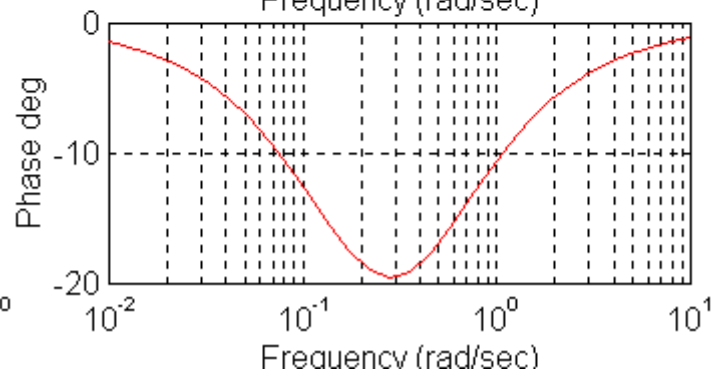
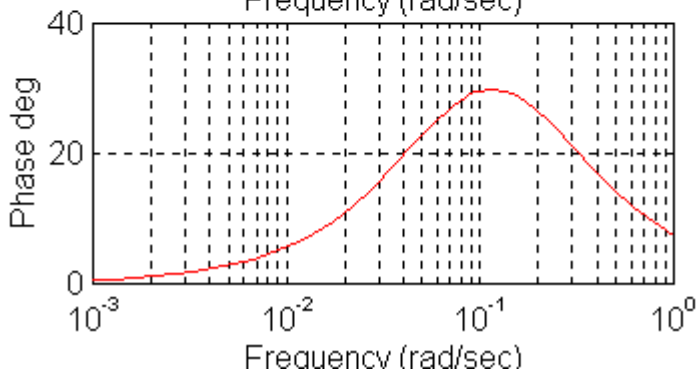
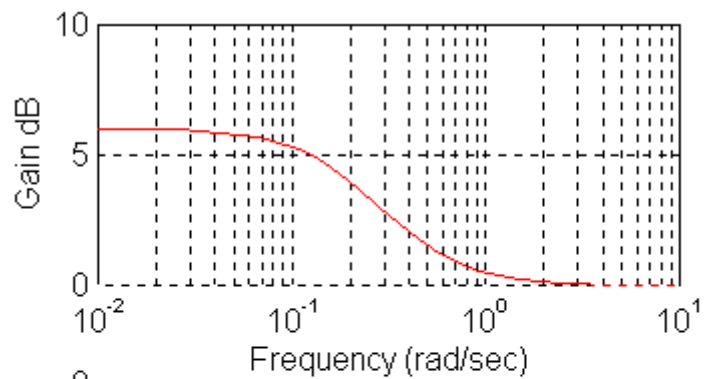
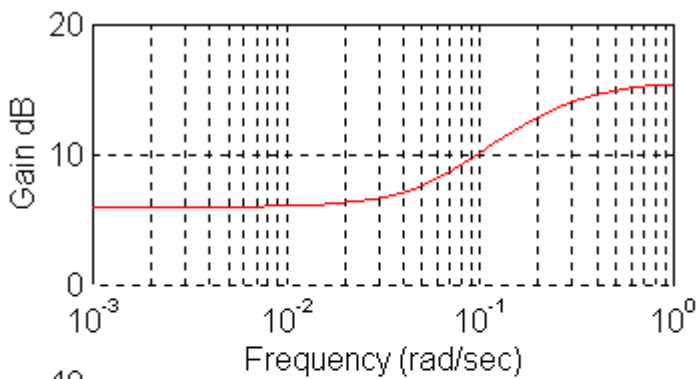
on pose

$$H_1 = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

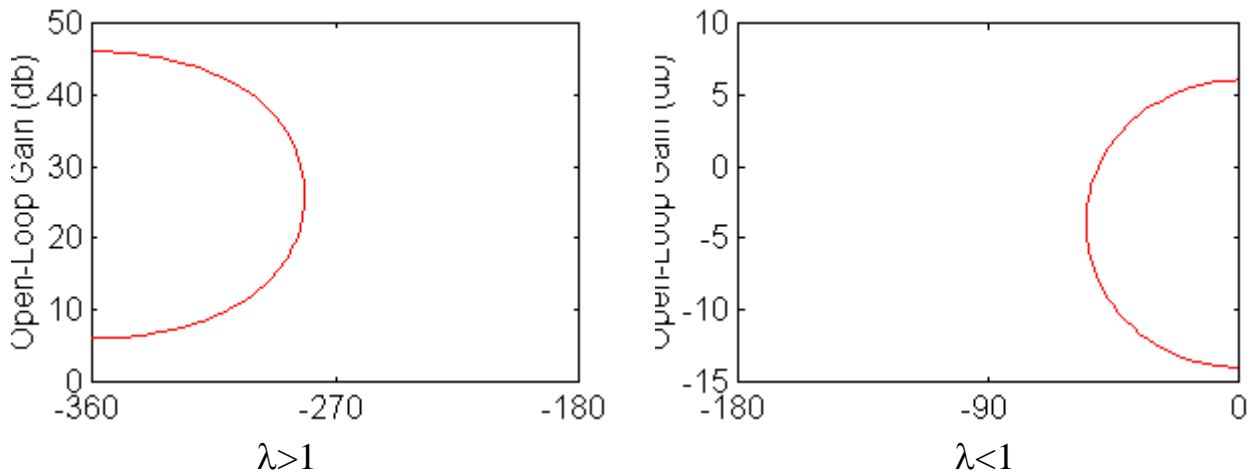
$$H_2 = (1 + j\lambda\tau\omega)$$

$$\Rightarrow 20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(H_1) + 20\text{Log}(H_2) + 20\text{Log}(K)$$

$$\text{Arg}(H) = \text{Arg}(H_1) + \text{Arg}(H_2)$$



• **Lieu de Black :**



**Système du second ordre:**

**3.1 Définition :**

Un système est dit second ordre s'il est régi par une équation différentiel de la forme:

$$d^2s/dt^2 + 2mw_0 ds/dt + w_0^2 s(t) = Kw_0^2 e(t)$$

Avec

- K= s∞/e ∞: gain statique
- m : coefficient d'amortissement
- w<sub>0</sub>: pulsation propre non amortie

D'où sa transmittance H(p) :

$$p^2 S(p) + 2mw_0 p S(p) + w_0^2 S(p) = Kw_0^2 E(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$$

**3.2 Calcul des racines de l'équation caractéristique :**

$$p^2 + 2mw_0 p + w_0^2 = 0$$

$$\Delta' = m^2 w_0^2 - w_0^2 = w_0^2 (m^2 - 1) \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = w_0(m^2 - 1)^{1/2}$$

$$a/ m > 1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow p_1 = -m w_0 + w_0(m^2 - 1)^{1/2}$$

$$p_2 = -m w_0 - w_0(m^2 - 1)^{1/2}$$

$$b/ m = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j w_0$$

$$c/ m = 1 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = -w_0$$

$$d/ 0 < m < 1 \Rightarrow p_1 = -m w_0 + j w_0(m^2 - 1)^{1/2}$$

$$p_2 = -m w_0 - j w_0(m^2 - 1)^{1/2}$$

**3.3 Réponse indicielle :**

$$E(p) = E_0/p$$

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2} \frac{E_0}{p}$$

soit  $p_1$  et  $p_2$  les racines de  $p^2 + 2mw_0p + w_0^2$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C}{p}$$

$$\text{avec } A = \frac{Kw_0^2 E_0}{(p_1-p_2)p_1} ; B = \frac{Kw_0^2 E_0}{(p_2-p_1)p_2} ; C = \frac{Kw_0^2 E_0}{p_1 p_2}$$

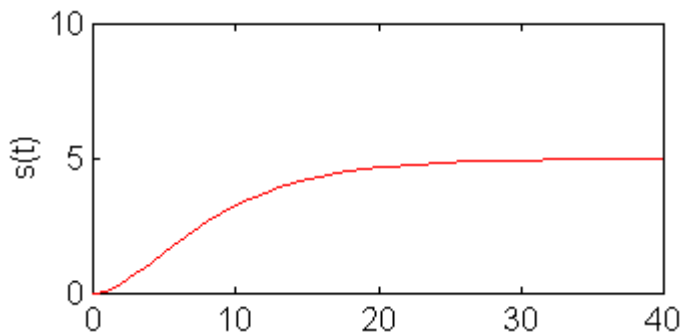
$$\Rightarrow s(t) = (A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t) + C) u(t)$$

$$a/ m > 1 \quad \begin{aligned} p_1 &= -mw_0 + w_0((m^2-1)^{1/2}) \\ p_2 &= -mw_0 - w_0((m^2-1)^{1/2}) \end{aligned}$$

$$p_1 p_2 = w_0^2$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right) u(t)$$

$$\text{avec } \tau_1 = -1/p_2 ; \tau_2 = -1/p_1 ; \tau_2 > \tau_1$$



réponse hyperamortie

$$b/ m = 0 \quad p_{1,2} = \pm jw_0$$

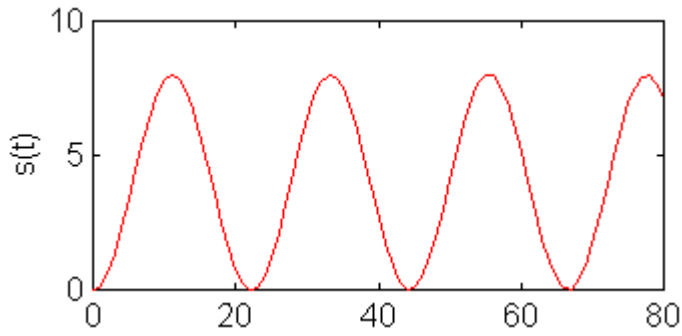
$$p_1 p_2 = w_0^2$$

$$s(t) = KE_0 (1 + (p_2/p_1 - p_2) \exp(p_1 t) + (p_1/p_2 - p_1) \exp(p_2 t)) u(t)$$

$$\text{avec } (p_2/p_1 - p_2) = (p_1/p_2 - p_1) = -1/2$$

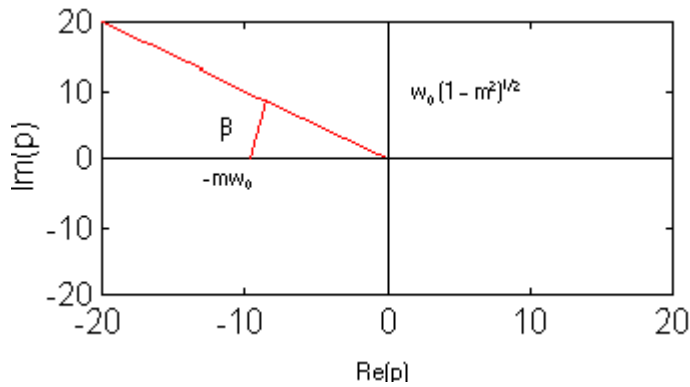
$$s(t) = KE_0 (1 - (\exp(jw_0 t) + \exp(-jw_0 t))/2) u(t)$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 - \cos(w_0 t)) u(t)$$



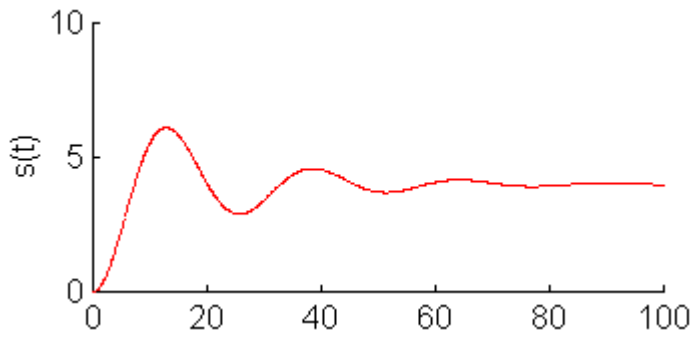
Système oscillant

c/  $0 < m < 1$



$$\cos\beta = m ; \sin\beta = (1-m^2)^{1/2} ; \text{tg}\beta = (1-m^2)^{1/2} / m$$

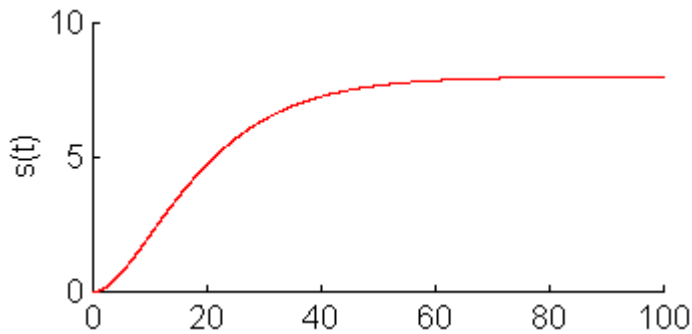
$$\Rightarrow s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\exp(-mw_0 t)}{(1-m^2)^{1/2}} \sin(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta) \right) u(t)$$



système oscillant amortie

$$d/m = 1 \quad p_1 = p_2 = -w_0$$

$$\Rightarrow s(t) = KE_0 (1 - (1 + t/\tau) \exp(-t/\tau)) u(t) \quad \text{avec } 1/\tau = w_0$$



### 3.4 Paramètres d'un système de 2ème ordre :

#### a/ Dépassement : D

$$D\% = 100 \frac{S_{\max} - S_{\infty}}{S_{\infty}}$$

$$\Rightarrow D\% = 100 \exp\left(-\frac{m\Pi}{(1-m^2)^{1/2}}\right)$$

#### b/ Temps de pic : $t_p$

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{\exp(-mw_0 t)}{(1-m^2)^{1/2}} \sin(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta)\right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = KE_0 \left(mw_0 \frac{\exp(-mw_0 t)}{(1-m^2)^{1/2}} - \sin(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta)\right)$$

$$- KE_0 \left(\frac{\exp(-mw_0 t)}{(1-m^2)^{1/2}}\right) w_0 (1-m^2)^{1/2} \cos(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(w_0 (1-m^2)^{1/2} t + \beta) = (1-m^2)^{1/2} / m = \tan \beta \Rightarrow w_0 (1-m^2)^{1/2} t = k\Pi$$

$$\Rightarrow t = k\Pi / w_0 (1-m^2)^{1/2} \quad \text{avec } (k = 1, 2, 3, \dots)$$

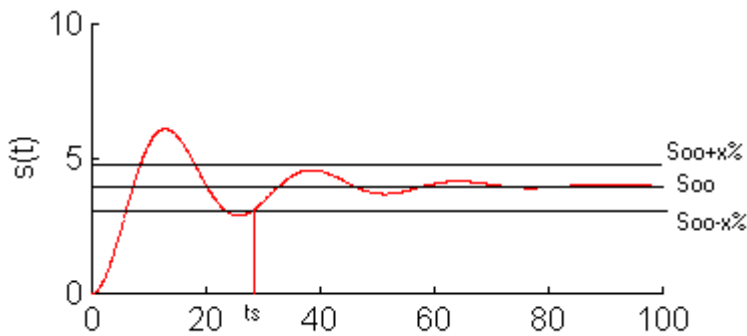
$$\text{temps de 1}^{\text{ère}} \text{ pic} \quad t_p = \frac{\Pi}{w_0 (1-m^2)^{1/2}}$$

#### c/ Temps de stabilisation : $t_s$

- $t_s$  pour un système de 2<sup>ème</sup> ordre : déterminer graphiquement

$t_s$  à  $\pm 5\%$        $t_s \approx 3/mw_0$

$t_s$  à  $\pm 2\%$        $t_s \approx 4/mw_0$



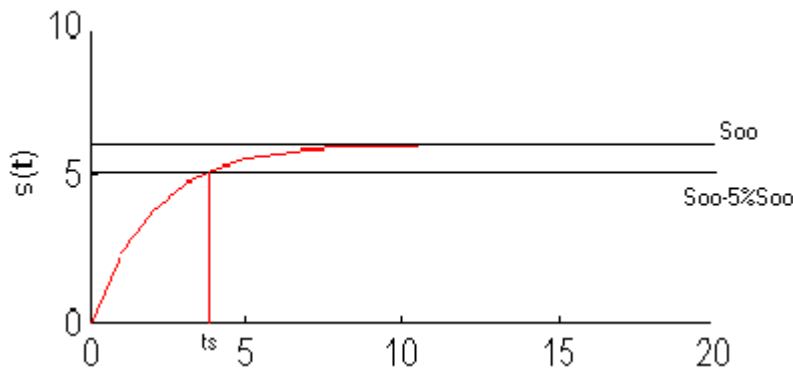
- $t_s$  pour un système de 1<sup>ère</sup> ordre: déterminer analytiquement ou graphiquement

$s(t) = KE ( 1 - \exp(-t/\tau) )$

$t_s$  à 5%  $\Rightarrow 0,95KE = KE ( 1 - \exp(-t_s/\tau) )$

$\Rightarrow \exp(-t_s/\tau) = 0,05$

$\Rightarrow t_s = 3\tau$



**d/ Influence des paramètres sur les réponses indicielles :**

- variation de  $K \Rightarrow$  variation de  $S_\infty$

- variation de  $m \Rightarrow$  variation de  $D, t_p, t_s$

- variation de  $w_0 \Rightarrow$  variation de  $t_p, t_s$

3.5 Réponse harmonique des systèmes de 2ème ordre :

a/  $m=1$

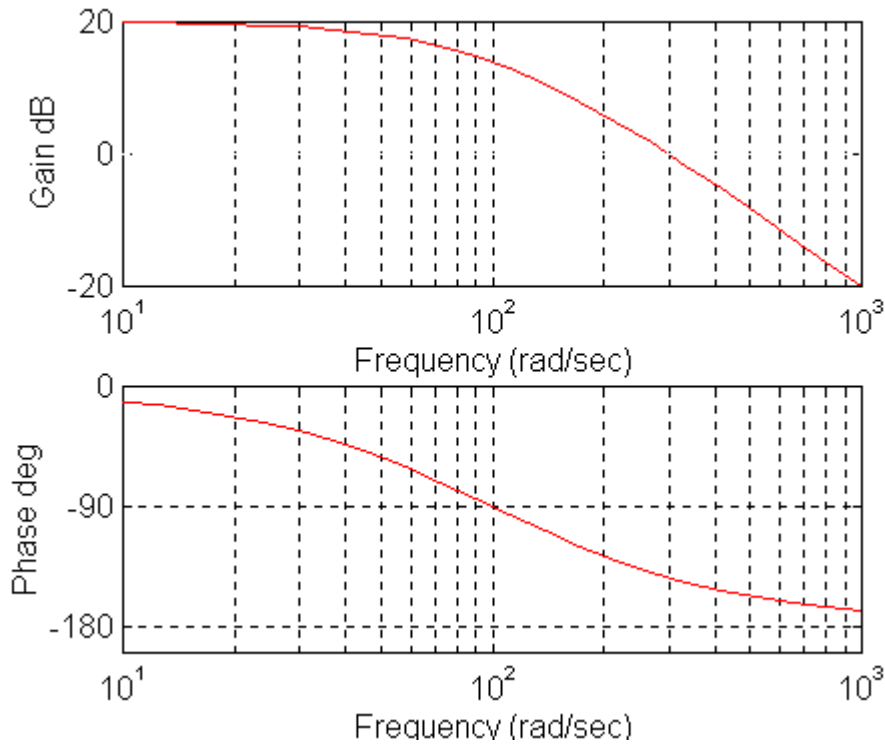
$$H(jw) = \frac{K}{(1 + j\tau_1 w)(1 + j\tau_2 w)}$$



**Lieu de Bode**

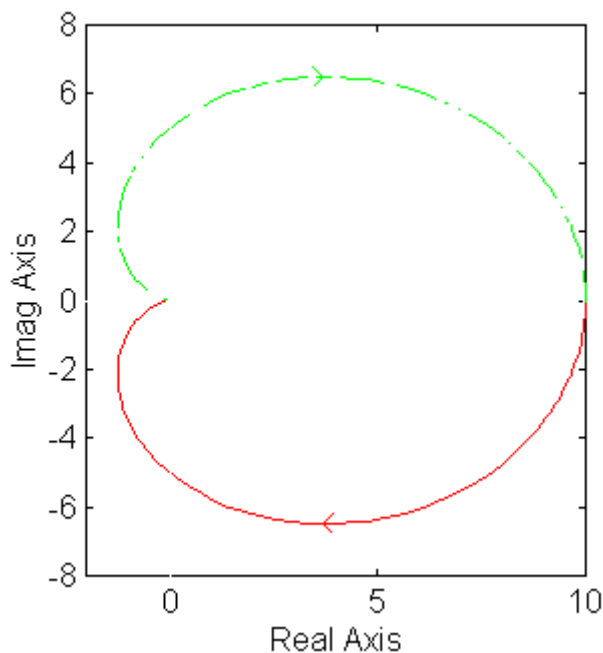
$$20\text{Log}(H) = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}(1 + j\tau_1^2\omega^2) - 20\text{Log}(1 + j\tau_2^2\omega^2)$$

$$\text{Arg}(H) = -\text{Arg}(1 + j\tau_1\omega) - \text{Arg}(1 + j\tau_2\omega)$$

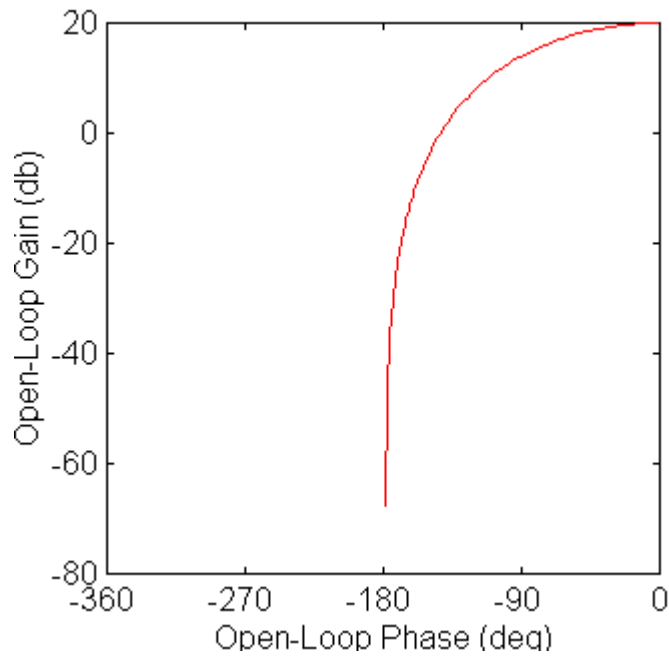


**Lieu de Nyquist**

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau_1\omega + j\tau_2\omega - \tau_1\tau_2\omega^2} = \frac{K(1 - \tau_1\tau_2\omega^2)}{1 + (j\omega(\tau_1 + \tau_2) - \tau_1\tau_2\omega^2)}$$



**Lieu de Black**



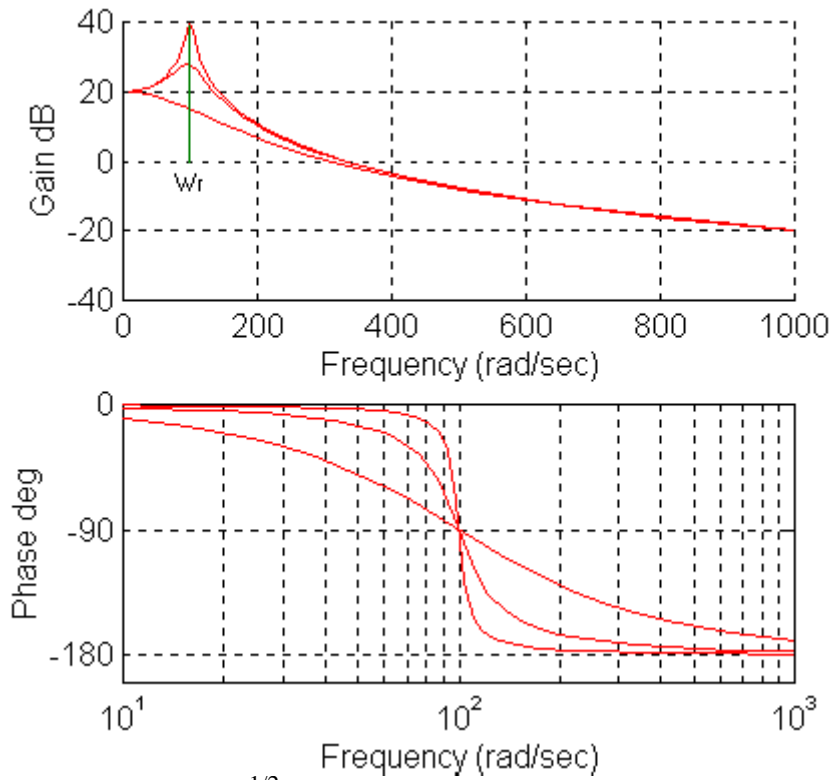
b/  $0 < m < 1$

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm j\omega_0(1 - m^2)^{1/2}$$

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jm\omega\omega_0} \Rightarrow |H| = \frac{K\omega_0^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega^2\omega_0^2)^{1/2}}$$

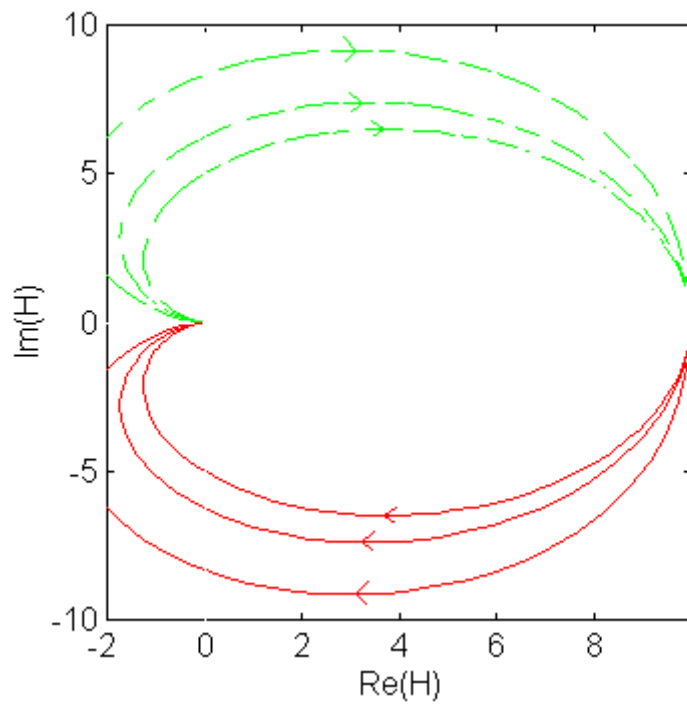
$$\begin{aligned} \omega \longrightarrow 0 &\Rightarrow |H| \longrightarrow K \\ \omega \longrightarrow \infty &\Rightarrow |H| \longrightarrow K\omega_0^2/\omega^2 \end{aligned}$$

**Lieu de Bode**

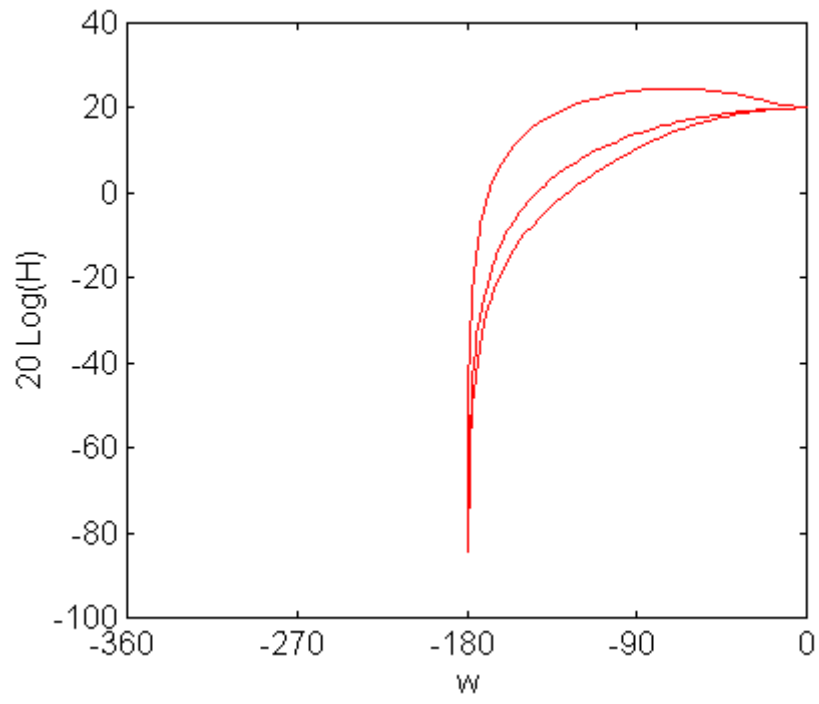


$$w_r = w_0 (1-2m^2)^{1/2}$$

**Lieu de Nyquist**



**Lieu de Black**



## EXERCICES

### Exercice N°1

Un processus est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$40s''(t) + 14s'(t) + 3s(t) = e(t)$$

$e(t)$ , étant l'entrée et  $s(t)$  la sortie du système.

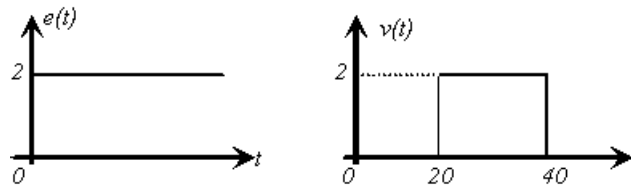
1. Calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  du système.
2. Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ .
3. En déduire le temps de stabilisation à  $\pm 5\%$ , le temps de pic et de dépassement  $D\%$ .

Dans la suite, on suppose que le processus est décrit par une équation plus complexe.

$$40s''(t) + 14s'(t) + s(t) = e(t) + v(t) + 10v'(t)$$

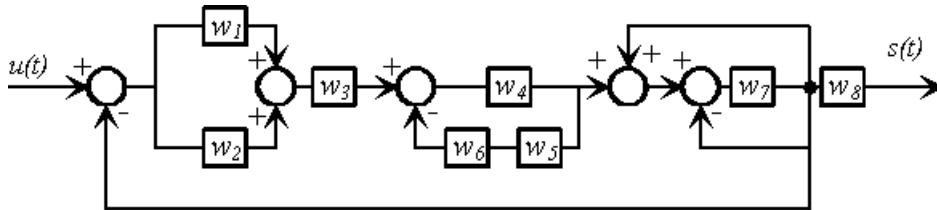
Avec  $v(t)$ , une grandeur perturbatrice.

4. Faire le schéma fonctionnel relatif à l'équation.
5. Calculer la fonction de transfert relative à la perturbation.
6. Calculer et représenter la réponse  $s(t)$  à une perturbation en échelon unitaire  $v(t) = u(t)$ .
7. En déduire la réponse du système à des entrées  $e(t)$  et  $v(t)$  indiquées sur la figure suivante.



### Exercice N°2

On donne le schéma fonctionnel suivant :



I. Soit  $w_1 = w_6 = w_8 = 1$ ;  $w_2 = 0$ ;  $w_3 = 25$ ;  $w_4 = w_7 =$  ;  $w_5 = 2$ .

1. Déterminer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la fréquence propre du système de fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .
2. Calculer et représenter la réponse indicielle unitaire du système.
3. En déduire le dépassement  $D\%$ , le temps de pic et le temps de stabilisation à  $\pm 5\%$ .

II. Soit

$$w_1 = w_6 = 1; w_2 = -d.p, w_3 = 25; w_4 = w_7 = ; w_5 = 2; w_8 = \frac{1}{1+d.p}$$

1. Déterminer le paramètre  $d$  pour avoir un coefficient d'amortissement égal à 0.5
2. En déduire le dépassement  $D\%$  et le temps de pic.

3. On donne  $d = 0.32$ , Donner l'allure de la réponse  $s(t)$  à l'entrée suivante:

$$e(t) = -2u(t-10) + 4u(t-30) - (t-50)u(t-50)$$

**Exercice N° 3**

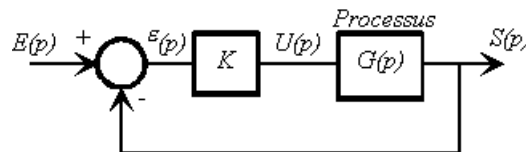
Soit un système de fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{p+b}{p+a}$  avec  $a \neq b$

1. Mettre la fonction sous la forme suivante :  $H(p) = K \cdot \frac{1+l.t.p}{1+t.p}$ . Exprimer  $K$ ,  $l$  et  $t$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Si  $a = 0.5$ , quelles sont les valeurs de  $b$  pour lesquelles le système est à retard de phase.
3. Si  $b = 1$ , quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles le système est à avance de phase.
4. Pour  $b = 1$  et  $a = 0.5$ , tracer la réponse indicielle unitaire de ce système.
5. Donner l'expression de  $y(t)$  et tracer son allure si  $e(t) = u(t-1) - u(t-3)$  et  $a = 2b$ .

**Exercice N°4**

Un processus physique est modélisé par une fonction de transfert de premier ordre :  $G(p) = \frac{G_0}{1+t.p}$  avec  $t = 1s$  et  $G_0 = 1$

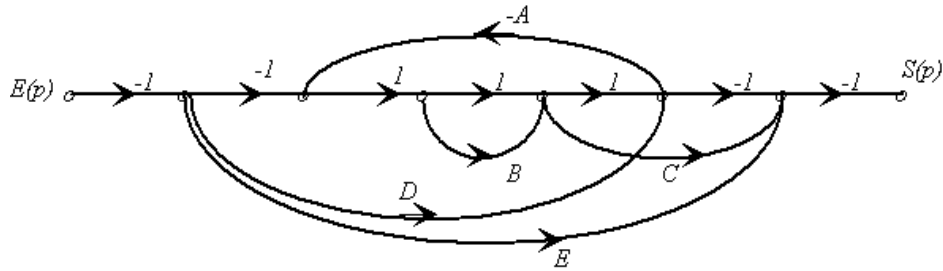
Ce processus est inséré dans une boucle d'asservissement comme le montre la figure suivante :



1. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  et la mettre sous la forme suivante :  $H(p) = \frac{H_0}{1+t_{BF}p}$ . Exprimer  $H_0$  et  $t_{BF}$  en fonction de  $t$ ,  $G_0$  et  $K$ .
2. Calculer les valeurs de la constante de temps en boucle fermée  $t_{BF}$  et du gain statique  $H_0$  pour  $K = 10$ .
3. Etablir l'expression de la grandeur de commande  $u(p)$  en fonction de  $E(p)$ ,  $t$ ,  $G_0$  et  $K$ .
4. On applique à l'entrée un échelon d'amplitude unité:  $E = 1V$  et on règle le correcteur avec  $K = 10$ .
  - a. Calculer les valeurs de la sortie  $s(+\infty)$  et de la commande  $u(+\infty)$ .
  - b. A l'aide du théorème de la valeur initiale, calculer  $u(0^+)$ .
  - c. Déterminer l'expression de  $s(t)$  et la représenter graphiquement, en déduire le temps de stabilisation à 5%.
  - d. Déterminer l'expression de  $u(t)$  et la représenter graphiquement.

**Exercice N°5**

On donne le graphe de fluence suivant :



**Partie 1**

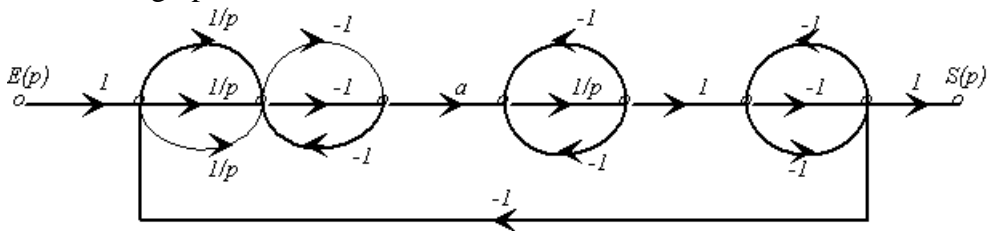
- Déterminer les boucles et les parcours.
- Calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  en appliquant la formule de Mason.
- Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  du système à une entrée  $e(t) = -t.u(t)$  si  $A = B = 1 = C = D = 1$  et  $E = \frac{1}{1 + 2p}$ .
- Trouver le temps de stabilisation à 5%.

**Partie 2**

- Tracer le schéma fonctionnel correspondant au graphe de fluence ci-dessus.
- A partir du schéma fonctionnel, trouver la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  sachant que  $A = 1, B = -1, C = D = 0$  et  $E = \frac{1}{1 + 2p}$ .
- Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  du système à une entrée  $e(t) = 0.5(1 - e^{-0.5t})u(t)$ .
- Trouver le temps de stabilisation à  $\pm 5\%$ , le temps de montée, le temps de pic et de dépassement  $D\%$ .
- Si on considère que cette réponse est la réponse indicielle unitaire d'un système du second ordre, déterminer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie.

**Exercice N°6**

On donne le graphe de fluence suivant :



**Partie 1**  $a = \frac{1}{3}$

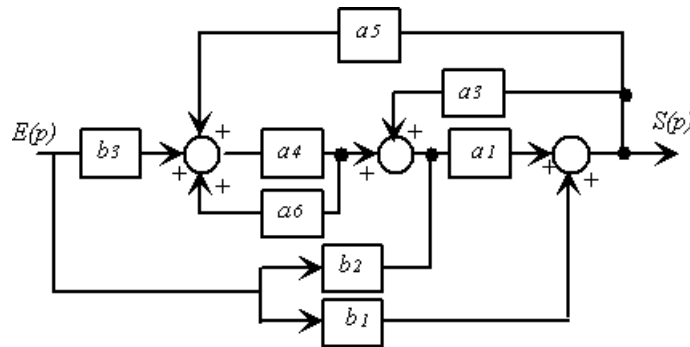
- Calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  en appliquant la formule de Mason.
- Déterminer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie de ce système.
- Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ .
- En déduire le temps de stabilisation à  $\pm 5\%$ , le temps de pic et de dépassement  $D\%$ .

**Partie 2**  $a = \frac{1}{12}$

1. A partir du graphe tracer le schéma fonctionnel.
2. A partir de ce schéma fonctionnel, trouver la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .
3. Déterminer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie.
4. Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  du système à une impulsion de Dirac.
5. Trouver la valeur maximale de  $s(t)$ .

**Exercice N°7**

On considère le schéma fonctionnel suivant :



1. Simplifier le schéma fonctionnel et calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .
2. Si  $b_1 = 0$ .
  - 2.1. Calculer la nouvelle expression de la fonction de transfert.
  - 2.2. Vérifier à l'aide du résultat précédent.

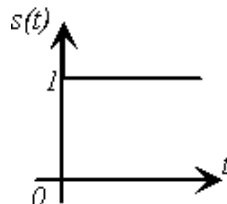
Dans la suite de l'exercice on considérera :

$$b_2 = R(p); b_3 = 1; a_1 = a_4 = \frac{1}{p}; a_3 = a_5 = a_6 = -1; b_1 = 0.$$

3.  $R(p) = 0$ , calculer et représenter la réponse indicielle unitaire du système. En déduire le temps de stabilisation à 5%.
4.  $R(p) = K$ , Donner l'expression de la réponse indicielle unitaire du système et la représenter dans les cas suivants :  $K = 1$ ,  $K = -2$  &  $K = 2$ .

Déduire pour chacun de ces cas la valeur du temps de stabilisation à 5%.

5. Un choix convenable de  $R(p)$  a conduit à la réponse indicielle unitaire suivante:

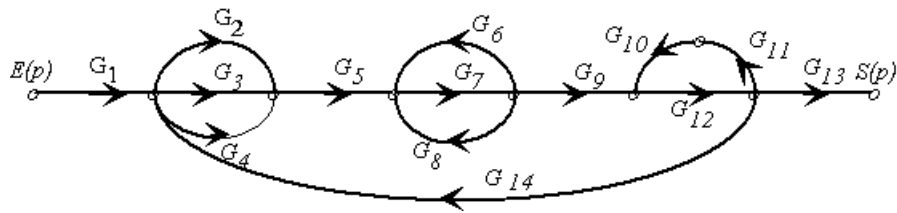


Trouver  $R(p)$

**Exercice N°8**

On donne le graphe de fluence suivant :





1. Calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  en appliquant la formule de Mason.

2. On prend dans toute la suite :

$$G_1 = \frac{1}{a}, G_2 = G_9 = b, G_3 = G_7 = G_8 = G_{12} = \frac{1}{p}, G_4 = G_6 = -\frac{1}{p}, G_5 = \frac{1}{b},$$

$$G_{10} = G_{13} = a, G_{11} = G_{14} = -1$$

Calculer de nouveau la fonction de transfert en fonction de  $a$  et  $b$ .

3. Déterminer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie de ce système.
4. Si  $a = b = 1$ , trouver la valeur de  $m$  et  $w_n$ .
5. Calculer et tracer la réponse  $s(t)$  à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ .
6. En déduire le temps de stabilisation à  $\pm 5\%$ , le temps de pic et de dépassement  $D\%$ .
7. Déterminer  $a$  et  $b$  si la réponse impulsionnelle unitaire est de la forme  $s(t) = (C_0 e^{-t} + C_1 e^{-4t})u(t)$ . En déduire les valeurs de  $C_0$  et  $C_1$ .

### Exercice N°9

On veut déterminer, à partir d'un essai expérimental, la fonction de transfert d'un système mécanique dont on sait qu'il peut être modélisé par un second ordre.

Un essai statique a fait correspondre à une variation de l'entrée (force) de  $5N$  une variation de la sortie (déplacement) de  $10cm$ . Ensuite, une variation en échelon de l'entrée de la forme  $e(t) = a[1 - u(t)]$  a permis d'enregistrer le régime dynamique de la sortie ; nous avons relevé dans la réponse, un premier dépassement de  $25\%$  et une pseudo période des oscillations d'environ  $7s$ .

1. Donner l'expression de la fonction de transfert de ce système de second ordre.
2. Quel est le temps du premier maximum, le temps de montée, les temps de réponse à  $5\%$  & à  $2\%$  de la réponse indicielle.

## **CHAPITRE 4**

# **ANALYSE & SYNTHÈSE DES SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE TEMPORELLE**

## I. Introduction

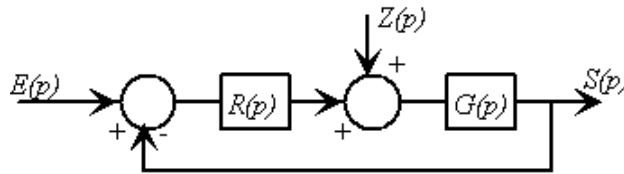


Figure 5.1. Schéma fonctionnel de l'asservissement.

$E(p)$  : Grandeur d'entrée ou de consigne.

$Z(p)$  : Grandeur perturbatrice.

$S(p)$  : Grandeur de sortie.

**Objectif de l'asservissement :** stabilité, rapidité et la précision du système en question.

## II. Stabilité

### II.1. Définition

Un système abandonné à lui-même peut se trouver dans un état d'équilibre caractérisé par la constance de la sortie dans le temps. Si on excite ce système par un signal d'entrée infiniment petit durant un temps bref, le système s'écarte de son état d'équilibre. Trois cas peuvent se produire :

\* Le système oscille autour de son état initial pendant un intervalle de temps limité et finit par s'immobiliser de nouveau dans son état d'équilibre initial. On dit que cet état d'équilibre est asymptotiquement stable.

\* Le système atteint un autre état d'équilibre et demeure dans cet état tant qu'il ne reçoit pas d'excitation. Il s'agit alors, d'un état d'équilibre stable.

\* Le système s'éloigne le plus loin possible de son état initial sans s'immobiliser. On qualifie cet état d'équilibre d'instable.

### II.2. Condition de stabilité

Un système linéaire est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert ont leur partie réelle négative. Dans le plan complexe, la zone dite stable est constituée du demi plan situé à gauche de l'axe des imaginaires purs comme le montre la figure suivante :

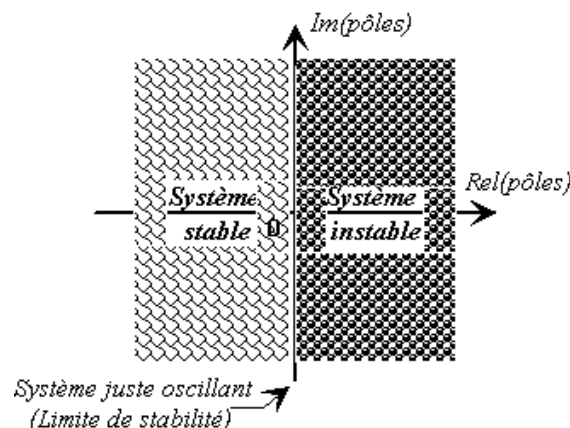
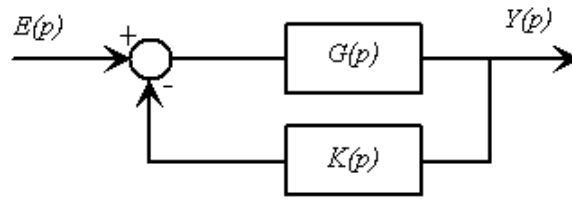


Figure 5.2. La stabilité dans le plan complexe.

Soit le système asservi suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte est :  $T(p) = G(p).K(p)$  (5.1)

La fonction de transfert en boucle fermée est :  $H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$  (5.2)

Ce système est stable si tous les pôles de  $H(p)$  ont leur partie réelle négative. Ces pôles sont les racines de l'équation  $1 + T(p) = 0$  appelée encore l'équation caractéristique du système.

En écrivant  $G(p)$  et  $K(p)$  sous la forme de rapports de polynômes :

$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad K(p) = \frac{C(p)}{D(p)} \quad (5.3)$$

L'équation caractéristique prend la forme :

$$A(p).D(p) + B(p).C(p) = 0 \quad (5.4)$$

Ou encore,

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0; \quad a_n \neq 0 \quad (5.5)$$

**II.2.1. Critère de Routh**

Le critère de Routh permet de ce prononcer sur la stabilité d'un système sans avoir à déterminer les zéros de son équation caractéristique.

On construit le tableau de Routh de la manière suivante :

|      |           |           |           |     |     |
|------|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| Rang |           |           |           |     |     |
| n    | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | ... | ... |
| n-1  | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | ... |     |
| n-2  | $b_0$     | $b_1$     | ...       |     |     |
| n-3  | $c_0$     | ...       |           |     |     |
| .    | .         |           |           |     |     |
| .    | .         |           |           |     |     |
| 0    | $z_0$     |           |           |     |     |

Tableau 5.1. Table de Routh

Où :

$$b_0 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; \quad b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; \dots$$

$$c_0 = \frac{b_0 a_{n-3} - a_{n-1} b_1}{b_0}; \quad \dots \quad (5.6)$$

etc.

**II.2.2. Enoncé du critère**

Les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle strictement négative, si et seulement si :

*Condition 1* : tous les coefficients du polynôme caractéristique sont tous strictement de même signe :  $a_i > 0$ .

## Chapitre 4: Analyse & synthèse des systèmes asservis linéaires par la méthode temporelle

*Condition 2* : les  $(n+1)$  termes de la première colonne du tableau de Routh sont strictement de même signe.

### II.2.3. Exemple

Soit,

$$E.C. \quad 1 + T(p) = p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 16p + 12 = 0$$

*Condition 1: Vérifiée* (tous les coefficients du polynôme caractéristique sont tous strictement de même signe: '1, 4, 7, 16, 12').

### Tableau de Routh

|      |   |    |    |
|------|---|----|----|
| Rang |   |    |    |
| 4    | 1 | 7  | 12 |
| 3    | 4 | 16 | 0  |
| 2    | 3 | 12 | 0  |
| 1    | 0 | 0  |    |
| 0    |   |    |    |

\* La quatrième ligne du tableau étant nulle  $\mathbf{P}$  l'équation caractéristique admet des racines imaginaires pures solution du polynôme auxiliaire. (Système marginalement stable).

\* Polynôme auxiliaire :  $3p^2 + 12 = 0$

\* Les autres racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative.

### Remarque :

Le nombre de changement de signe de la première colonne est égale aux nombres des racines de  $1 + T(p) = 0$  à partie réelle positive.

### III. Rapidité (*critère de Naslin*)

Un système est dit rapide s'il se stabilise en un temps jugé satisfaisant.

#### III.1. Système de second ordre : Rappel

$$H(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{k w_n^2}{p^2 + 2m w_n p + w_n^2} \quad (5.7)$$

En identifiant, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie sont liés aux coefficients du polynôme par les relations suivantes :

$$4m^2 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \quad w_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad (5.8)$$

La courbe  $T_s w_n = f(m)$  est donnée par la figure suivante :

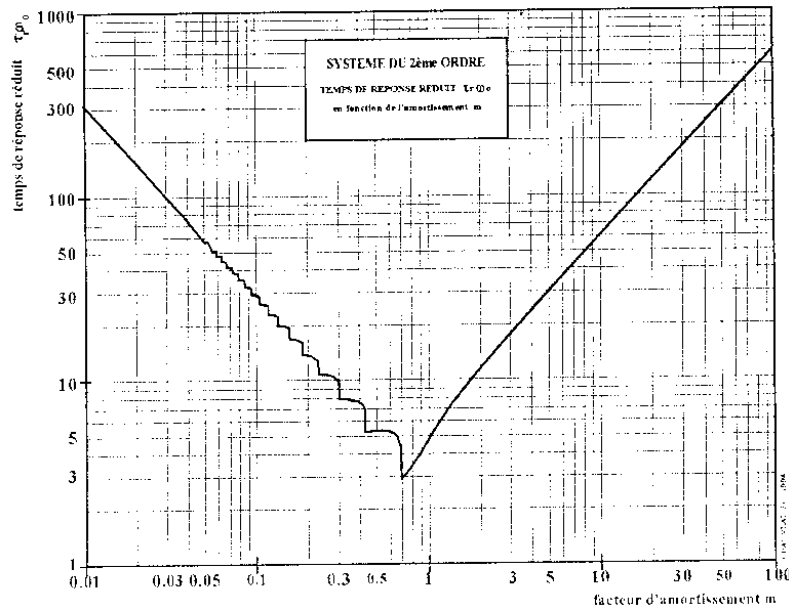


Figure 5.4. Allure  $T_s w_n = f(m)$

$T_s$  étant le temps de stabilisation (ou temps de réponse) à 5%.

D'après la figure 5.4 et pour  $w_n$  fixée,  $T_s$  à 5% passe par un minimum pour  $m = 0.7$ , le dépassement est alors de 4%.

### III.2. Critère de Naslin

*Hypothèse* : Négliger l'influence du numérateur (Transmittance à numérateur constant) « pas de zéro ».

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } a_i > 0 \quad (5.9)$$

Les rapports caractéristiques :

$$a_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} ; a_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \dots a_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n-1 \quad (5.10)$$

Le critère algébrique d'amortissement consiste à imposer aux rapports caractéristiques d'être  $a_0$ .

La réponse indicielle du système présente un dépassement plus grand d'autant que  $a_0$  est plus petit. Le dépassement est lié à  $a_0$  par la formule empirique suivante :

$$\log(D\%) = 4.8 - 2a_0 \quad (5.11)$$

Alors que le temps de pic est donné par :

$$T_p = 2.2 \cdot \frac{a_1}{a_0} \quad (5.12)$$

### Résumé :

Critère algébrique d'amortissement : imposer à tous les  $a_i$  d'être  $a_0$

### III.3. Exemple

$$H(p) = \frac{1}{8p^3 + 21p^2 + 10.5p + 1 + K}$$

Calculer  $K$  pour avoir  $D\%$  et  $6\%$ .

\* Les rapports caractéristiques

$$a_1 = \frac{(10.5)^2}{21(1+K)} ; a_2 = \frac{21^2}{8.10.5}$$

\*  $D\%$  et  $6\%$   $\Rightarrow \log(6) = 4.8 - 2a_0 \Rightarrow a_0 = 2$

\* Critère de Naslin :  $a_1$  Erreur ! Source du renvoi introuvable.

$$- a_1 = \frac{(10.5)^2}{21(1+K)} \cdot 2 \Rightarrow K \approx 1.625$$

$$- a_2 = \frac{21^2}{8.10.5} = 5.25 \cdot 2$$

Pour avoir un  $D\%$  et  $6\%$ , il faut que  $K \approx 1.625$

#### IV. Précision

La précision d'un système est définie à partir de l'erreur «  $e$  » entre la grandeur de consigne «  $E$  » et la grandeur de sortie «  $y$  ».

##### IV.1. Définition

Un système est précis si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances. L'écart  $e(t) = E(t) - y(t)$  peut être décomposé en un écart transitoire  $e_T(t)$  et un écart permanent  $e_p(t)$  vers lequel tend  $e(t)$  quand  $t$  vers l'infini.

Un système asservi possède une bonne précision statique si son écart permanent est suffisamment petit dans un certain sens. Il possède une bonne précision dynamique si son écart transitoire est bien amorti et converge assez rapidement vers zéro.

##### IV.2. Etude de l'erreur en régime statique

$$e_{\text{stat}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1+T(p)} \quad (5.13)$$

L'erreur statique est fonction à la fois du système (fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$ ) et de la forme du signal d'entrée.

$$T(p) = \frac{K_a}{p^a} \cdot T_0(p) = \frac{K_a}{p^a} \cdot \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad (5.14)$$

$a$  : le nombre d'intégrateur pur dans  $T(p)$  « La classe du système ».

| Signal d'entrée \ Classe du système $\alpha$                                | 0                   | 1                 | 2                 | 3 |
|---|---------------------|-------------------|-------------------|---|
| <b>Impulsion</b> $e(t) = E_0 \delta(t)$                                     | 0                   | 0                 | 0                 | 0 |
| <b>Echelon de position</b> $e(t) = E_0 u(t)$                                | $\frac{E_0}{1+K_0}$ | 0                 | 0                 | 0 |
| <b>Echelon de vitesse (Rampe)</b> $e(t) = E_0 \cdot t \cdot u(t)$           | $\infty$            | $\frac{E_0}{K_1}$ | 0                 | 0 |
| <b>Echelon d'accélération</b> $e(t) = \frac{1}{2} E_0 \cdot t^2 \cdot u(t)$ | $\infty$            | $\infty$          | $\frac{E_0}{K_2}$ | 0 |

Tableau 5.2. Tableau des valeurs de l'erreur statique en fonction de la classe du système

**Remarques:**

1. La précision augmente avec la classe du système.
2. Erreur statique de position ( $e(t) = E_0 u(t)$ )
3. Erreur statique de vitesse (erreur de traînage) :  $e(t) = E_0 \cdot t \cdot u(t)$
4. L'augmentation de la classe du système peut détériorer la stabilité, c'est pour cela que la précision et la stabilité peuvent être deux notions contradictoires.



## EXERCICES

### Exercice N°1

Déterminer dans chaque cas si l'ensemble des racines des équations caractéristiques des différents systèmes représente un système stable, instable ou juste oscillant:

a.  $p_1 = -1, p_2 = -3;$

b.  $p_1 = -2, p_2 = 2;$

c.  $p_1 = -1 + j, p_2 = -1 - j;$

d.  $p_1 = 2j, p_2 = -2j;$

e.  $p_1 = -3, p_2 = 3j, p_3 = -3j;$

f.  $p_1 = -4, p_2 = -5, p_3 = 1;$

g.  $p_1 = 2j, p_2 = -2j, p_3 = 2;$

h.  $p_1 = -3 + 2j, p_2 = -3 - 2j, p_3 = 2j, p_4 = -2j;$

i.  $p_1 = j, p_2 = -j, p_3 = -1, p_4 = 1;$

### Exercice N°2

Un système ayant les pôles  $p_1 = -1$  &  $p_2 = -5$  et les zéros  $z_1 = 1$  &  $z_2 = -2$  est-il stable.

### Exercice N°3

Pour chacun des polynômes caractéristiques ci-dessous, déterminer si le système qu'il représente est stable ou non?

a.  $2p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 10p + 20;$

b.  $p^3 + 7p^2 + 7p + 46;$

c.  $p^5 + 6p^4 + 10p^2 + 5p + 24;$

d.  $p^3 - 2p^2 + 4p + 6;$

e.  $p^4 + 8p^3 + 24p^2 + 32p + 16;$

f.  $p^6 + 4p^4 + 8p^2 + 16;$

### Exercice N°4

Combien de racines à partie réelle positive les polynômes caractéristiques suivants ont-ils?

a.  $p^3 + p^2 - p + 1;$

b.  $p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1;$

c.  $p^3 + p^2 - 2;$

d.  $p^4 - p^2 - 2p + 2;$

e.  $p^3 + p^2 + p + 6;$

**Exercice N°5**

Pour quelles valeurs de  $k$ , les racines du polynôme ci-dessous sont a partie réelle négative?

$$p^3 + (4 + k)p^2 + 6p + 12$$

**Exercice N°6**

Pour quelles valeurs positives de  $k$ , les racines du polynôme ci-dessous sont a partie réelle nulle?

$$p^4 + 8p^3 + 24p^2 + 32p + k$$

Quelles sont ces racines ?

**Exercice N°7**

L'équation caractéristique d'un système est donnée par :

$$p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p + k = 0$$

Quelles conditions doit-on imposer au paramètre  $k$  pour que le système soit stable.

**Exercice N°8**

Construire la table de Routh et déterminer le nombre de racines a partie réelle positive d'un système caractérisé par l'équation suivante :

$$2p^3 + 4p^2 + 4p + 12 = 0$$

**Exercice N°9**

Considérons un système caractérisé par l'équation suivante :

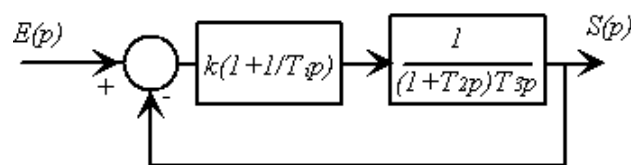
$$p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + k = 0$$

1. Pour quelles valeurs de  $k$  le système est stable?
2. Pour quelles valeurs de  $k$  le système devient juste oscillant ?
3. Ecrire l'équation auxiliaire et déterminer ses racines.

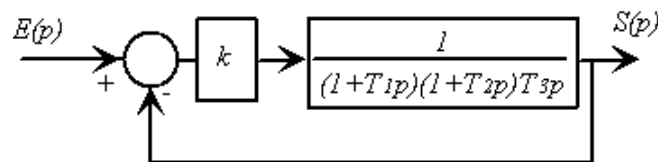
**Exercice N°10**

Pour quelles valeurs des paramètres du régulateur, les systèmes suivants sont stables :

1.



2.



**Exercice N°11**

Soit l'équation caractéristique suivante :

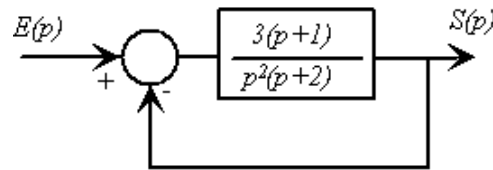
$$p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0$$

Trouver les racines imaginaires purs de cette équation. Le système caractérisé par cette équation est-il stable?

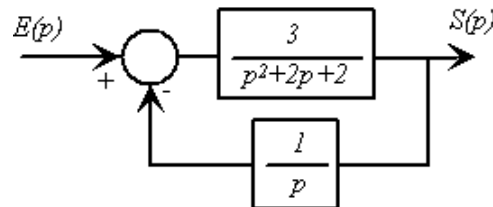
**Exercice N°12**

Quelle est la classe des systèmes définis par les schémas suivants :

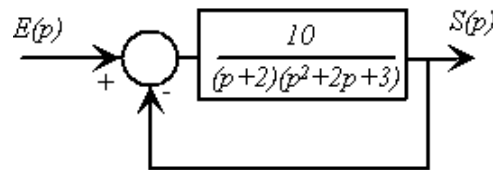
1.



2.

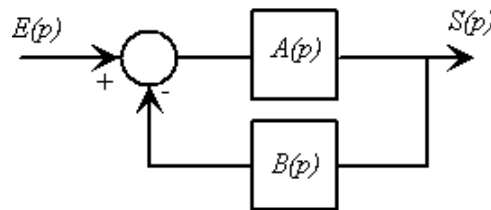


3.



**Exercice N°13**

Classer les systèmes suivants selon leur classe



1.  $A(p) = \frac{1}{p}$  &  $B(p) = 1$

2.  $A(p) = \frac{5}{p(p+3)}$  &  $B(p) = \frac{p+1}{p+2}$

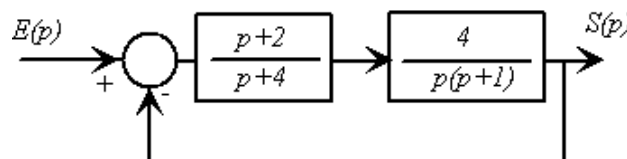
3.  $A(p) = \frac{2}{p^2+2p+5}$  &  $B(p) = p+5$

4.  $A(p) = \frac{24}{(2p+1)(4p+1)}$  &  $B(p) = \frac{4}{4p(3p+1)}$

5.  $A(p) = \frac{4}{p(p+3)}$  &  $B(p) = \frac{1}{p}$

**Exercice N°14**

Considérons un système décrit par le schéma fonctionnel suivant :



Trouver l'erreur en régime permanent dans les cas suivants :

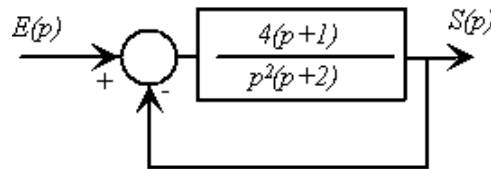
1.  $e(t) = u(t)$ ;

**Chapitre 4:** Analyse & synthèse des systèmes asservis linéaires par la méthode temporelle

2.  $e(t) = t.u(t)$ ;
3.  $e(t) = t^2.u(t)$ .

**Exercice N°15**

Etant donnée le système, à retour unitaire, stable, de classe 2 suivant :

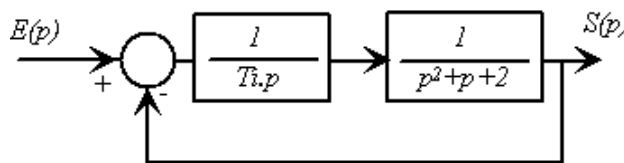


Trouver l'erreur en régime permanent dans les cas où l'entrée est donnée par :

$$E(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}$$

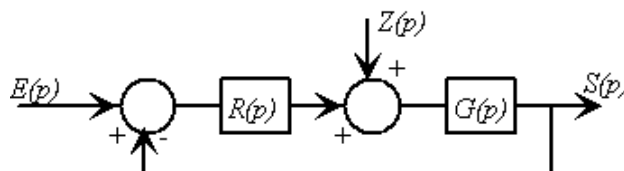
**Exercice N°16**

Quelle est la valeur de  $T_i$  qui garantit une erreur statique de vitesse unitaire de 3% pour le système suivant :



**Exercice N°17**

Considérons le système décrit par le schéma fonctionnel suivant :



$$R(p) = k \quad \& \quad G(p) = \frac{1}{p(Tp + 1)}$$

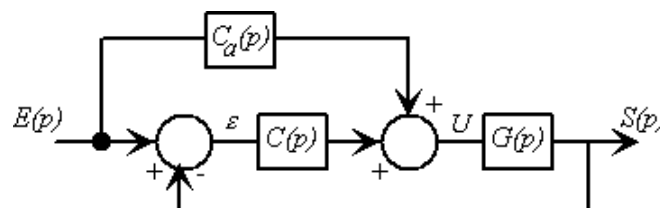
1. Trouver la valeur de  $k$  pour garantir  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0.01$  pour

$$Z(p) = \frac{1}{p} \quad \& \quad E(p) = 0.$$

2. Pour cette valeur de  $k$ , chercher l'erreur statique pour  $Z(p) = 0$  &  $E(p) = \frac{10}{p^2}$ .

**Exercice N°18**

Soit l'asservissement représenté par la figure suivante :

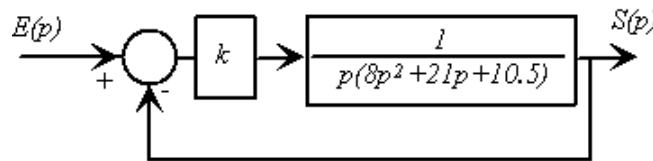


**Chapitre 4: Analyse & synthèse des systèmes asservis linéaires par la méthode temporelle**

1. Avec  $C_a(p) = 0$ , établir les expressions des fonctions de transfert suivantes :  $\frac{S(p)}{E(p)}$ ,  $\frac{e(p)}{E(p)}$  &  $\frac{U(p)}{E(p)}$ .
2. Avec  $C_a(p) \neq 0$ , établir les nouvelles expressions des fonctions de transfert ci-dessus.
3. En déduire la condition d'invariance, c'est-à-dire la relation entre  $C_a(p)$  &  $G(p)$  pour que  $e = 0$ , quelle que soit l'entrée. Que remarque-t-on sur la réalisation physique de  $C_a(p)$ , la stabilité du système.
4. Soit  $G(p) = \frac{1}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$ ;  $C(p) = k$  &  $C_a(p) = d_1p + d_2p^2$ 
  - 4.1. Si  $d_2 = 0$ , déterminer  $d_1$  tel que, pour une entrée en rampe, l'erreur soit nulle. Que devient alors  $\frac{S(p)}{E(p)}$ .
  - 4.2. Déterminer  $d_1$  et  $d_2$  tels que, pour une entrée de type parabolique, l'erreur soit nulle. Que devient alors  $\frac{S(p)}{E(p)}$ .

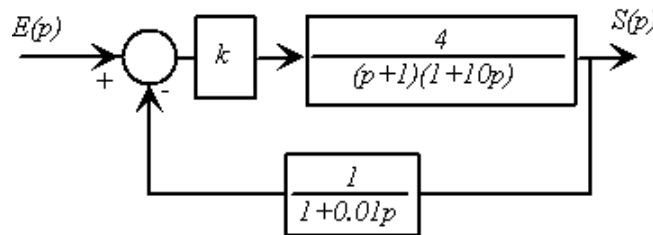
**Exercice N°19**

En utilisant le critère de Naslin, trouver la valeur de  $k$  pour que le système décrit par le schéma fonctionnel ci-dessous présente un dépassement  $D = 20\%$ .



**Exercice N°20**

Calculer la valeur de  $k$  permettant au système suivant de présenter un dépassement  $D = 6\%$ .



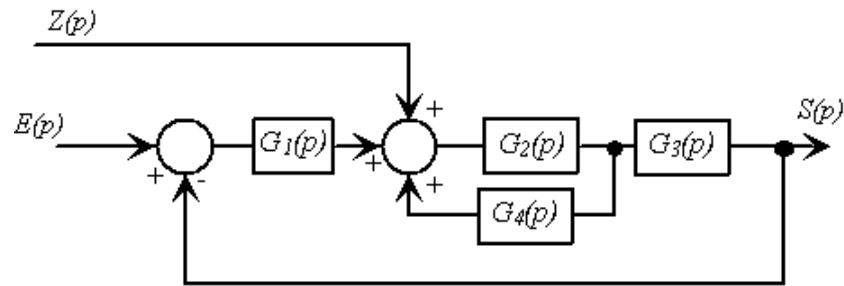
**Exercice N°21**

Trouver le dépassement et le temps de pic pour le système suivant :

$$H(p) = \frac{0.25}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 0.25}$$

**Exercice N°22**

Soit le schéma fonctionnel du système asservi linéaire représenté ci-dessous :



1. On suppose  $Z(p) = 0$  &  $G_1(p) = \frac{1}{T_i p}$ ;  $G_2(p) = \frac{1}{p}$ ;  $G_3(p) = \frac{1}{p+1}$ ;  $G_4(p) = -1$ ;

1.1. En utilisant le critère de Routh, donner les valeurs de  $T_i$  pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

1.2. Trouver les valeurs des pôles qui donnent un système juste oscillant (oscillant pur).

2. On suppose  $E(p) = 0$  &  $G_1(p) = 0$ ;  $G_2(p) = \frac{1}{T_p}$ ;  $G_3(p) = 1$ ;  $G_4(p) = -1$ ;

2.1. Quelle est la valeur numérique de l'erreur statique du système pour  $z(t) = -5t.u(t)$  et  $T = 3.14s$ .

2.2. Quelle sera l'erreur statique si l'entrée est donnée par :

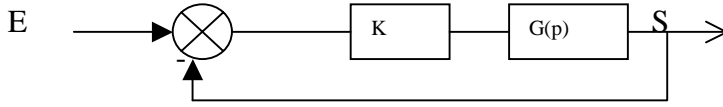
$$z(t) = u(t) - 2u(t - 5) + (t - 10)u(t - 10) \text{ et } T = 1s.$$

## **CHAPITRE 5**

# **ANALYSE & SYNTHÈSE DES SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DU LIEU DES PÔLES**

**□ Introduction :**

Variation du lieu des pôles en fonction du gain.



$$F.T.B.O : KG(p) = \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + a_{m-2}p^{m-2} + \dots + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0} ; m < n$$

$$= K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

Le système est stable si les pôles de  $\frac{KG(p)}{1 + KG(p)}$  sont à parties réelles négatives

Les pôles sont les racines de  $1 + KG(p) = 0$  : **E.C**

$$1 + KG(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + K \frac{N(p)}{D(p)} = 0$$

Soit  $D(p) + KN(p) = 0$

En générale, la position des racines change quand K varie. le géométrique des racines tracés dans le plan P en fonction de K s'appelle lieu des racines.

Si  $K = 0$  les racines de l'E.C sont les pôles de G le lieu des racines part toujours d'un pôle de la fonction en B.O.

→ Si  $K \rightarrow \infty$  les racines tendent vers les zéros de G ( p ) .

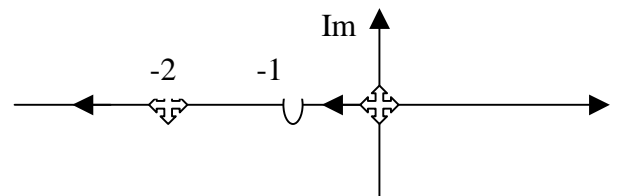
**Règle1 :** si K varie de 0 à l'∞ les lieux de pôles en BF partent des pôles en B.O pour aboutir aux zéros en B.O ou l'∞.

**Exemple 1 :**

$$G(p) = \frac{K(p+1)}{p(p+2)} ; \quad H(p) = \frac{G}{1+G}$$

E.C  $\Rightarrow 1+G = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K(p+1)}{p(p+2)} = 0 \Rightarrow p(p+2) + K(p+1) = 0$

Soit  $p^2 + p(k+2) + K = 0$   
 $P_1 = -0.5 \cdot (2+K) + (1+K^2/4)^{1/2}$   
 $P_2 = -0.5 \cdot (2+K) - (1+K^2/4)^{1/2}$



**Règle2 :** Les parties des lieux des pôles appartenant à l'axe réel se trouvent à gauche d'un nombre impair des pôles et des zéros pour  $k > 0$  :  $k < 0$  c'est l'inverse.



## Chapitre 5: Analyse & Synthèse des systèmes asservis linéaires par la méthode du lieu des pôles

**Remarque :** pour  $K < 0$  les parties des lieux des pôles appartiennent à l'axe réel se trouvent à droite d'un nombre impair des pôles et des zéros.

**Règle 3 :** Le lieu des pôles est symétrique par rapport à l'axe réel .

**Règle 4 :** Le lieu des pôles possède  $n$  branches avec  $(n - m)$  directions asymptotiques .  
 $n$  : nombres des pôles .  
 $m$  : nombres des zéros .

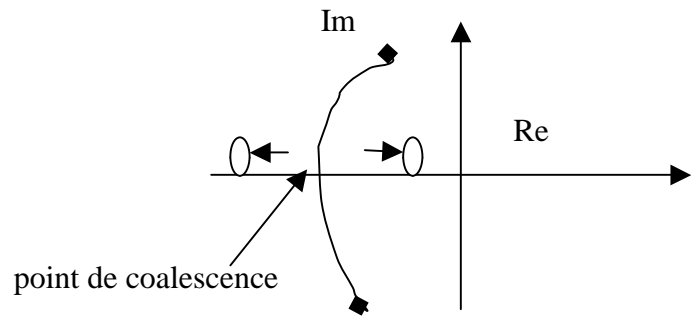
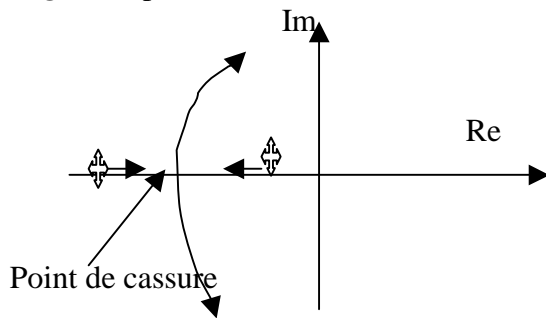
**Règle 5 :** Les directions asymptotiques sont données par la relation :

$$\theta = (2\lambda + 1) \Pi / (n - m) ; \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

**Remarque :** Les asymptotes concourent en un point de l'axe réel d'abscisses  $X_c$

$$X_c = \left( \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^m Z_i \right) / (n - m)$$

**Règle 6 :** points de branchement



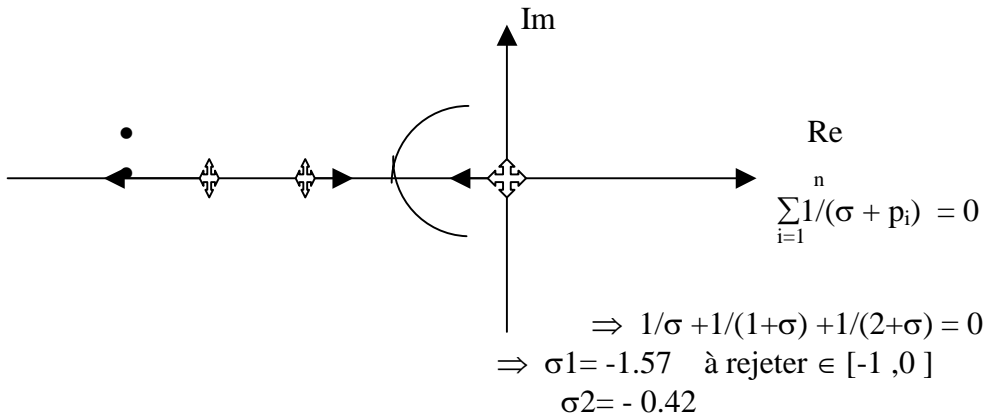
Les abscisses des points de cassures et de coalescence vérifient la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma + P_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma + Z_i} \quad -P_i \text{ et } -Z_i \text{ sont les pôles et les zéros}$$

Les points de branchement peuvent être aussi obtenues en résolvant l'équation suivante :  
 $dG/dp = 0$

**EXEMPLE d'application :**

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$



**Règle7 :** condition sur les modules et les arguments .

$$G(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots\dots\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots\dots\dots(p-p_n)}$$

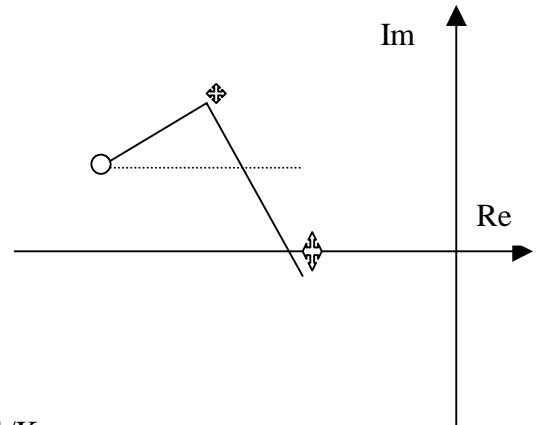
$$p-p_1 \longrightarrow \vec{P_1M} [P_1M ; \psi_1]$$

$$p-z_1 \longrightarrow \vec{Z_1M} [Z_1M ; \phi_1]$$

$$\|G\| = \frac{Z_1M \cdot Z_2M \cdot \dots\dots\dots Z_mM}{P_1M \cdot P_2M \cdot \dots\dots\dots P_nM} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots\dots\dots d_m}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots\dots\dots \rho_n} = 1/K$$

$$1 + K G(p) = 0 \quad G(p) = -1/K$$

soit  $\|G\|=1/K$ .       $\text{Arg}G = (2\lambda+1)\pi$



**Relation entre les arguments :**       $\text{Arg} G = \sum_{i=1}^m \text{Arg} (p- z_i) - \sum_{i=1}^n \text{Arg} (p-p_i)$

$$\text{Arg} G = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \psi_i = (2\lambda+1)\pi$$

Si on n'a pas des zéros on peut écrire selon la condition sur le module :  
 $(1/\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3) = 1/K$

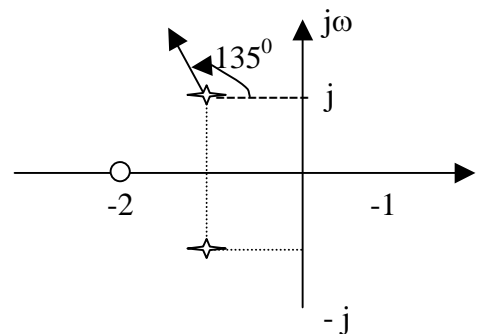
**Règle8 :                      ANGLES DE DEPART ET D'ARRIVEE**

**L'angle de départ** du lieu des racines d'un pôle complexe est donné par la relation suivante :  
 $\theta_D = 180^0 + \text{Arg} G'$   
 où  $\text{Arg} G'$  est la phase de  $G$  calculée au pôle complexe sans tenir compte de la contribution de ce pôle particulier .

**Exemple :**      Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G(s) = \frac{K ( s + 2 )}{( s + 1 + j)( s + 1 - j )} , \quad K > 0$$

$\sigma$



L'angle de départ du lieu des racines au pôle complexe  $S = -1 + j$  se calcule comme suit l'angle de  $G$  en  $S = -1 + j$ , sans tenir compte de la contribution du pôle  $S = -1+j$  est  $(-45^\circ)$ .

D'où l'angle de départ est :  $\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

**L'angle d'arrivée** du lieu des racines en un zéros complexe est donné par la relation suivante :

$$\theta_A = 180^\circ - \text{Arg } G''$$

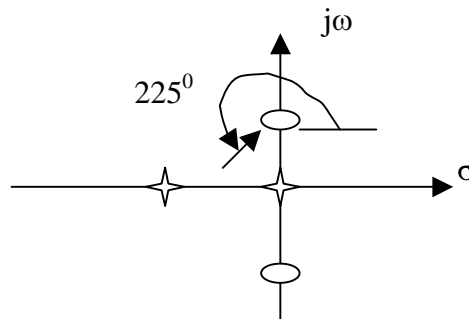
où  $\text{Arg } G''$  est la phase de  $G$  calculée au zéros complexe, sans tenir compte de l'effet de zéro

**Exemple :**

$$G(s) = \frac{k(s + j)(s - j)}{s(s + 1)} \quad , k > 0$$

L'angle d'arrivée du lieu des racines au zéros complexe  $S = j$  est :

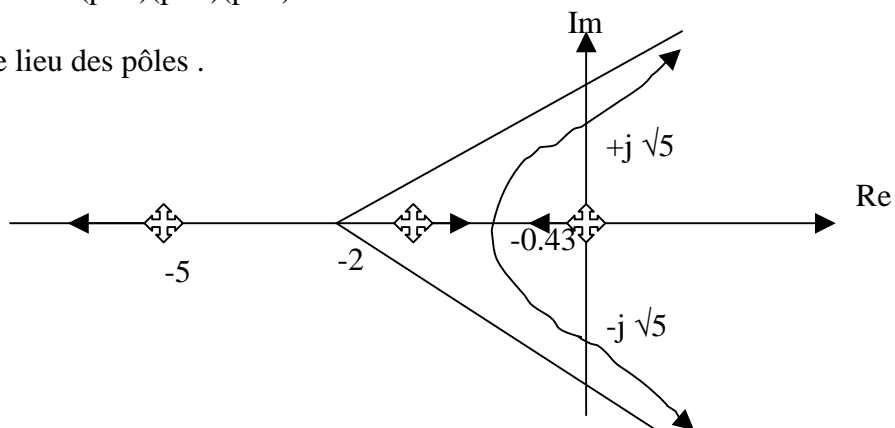
$$\theta_A = 180^\circ - (-45^\circ) = 225^\circ$$



**Exemple :**

soit  $G(p) = \frac{K}{P(p+1)(p+2)(p+5)}$

Tracer le lieu des pôles .



3 branches

3 directions asymptotiques

$$X_c = -6/3 = -2 ;$$

$$\theta_1 = \pi / 3 ; \theta_2 = \pi ; \theta_3 = 5\pi / 3$$

E.C :  $1 + KG(p) = 0$

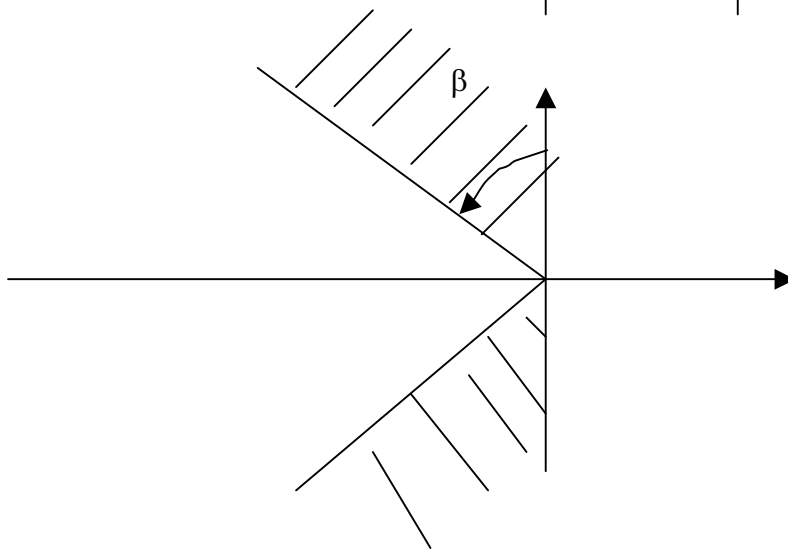
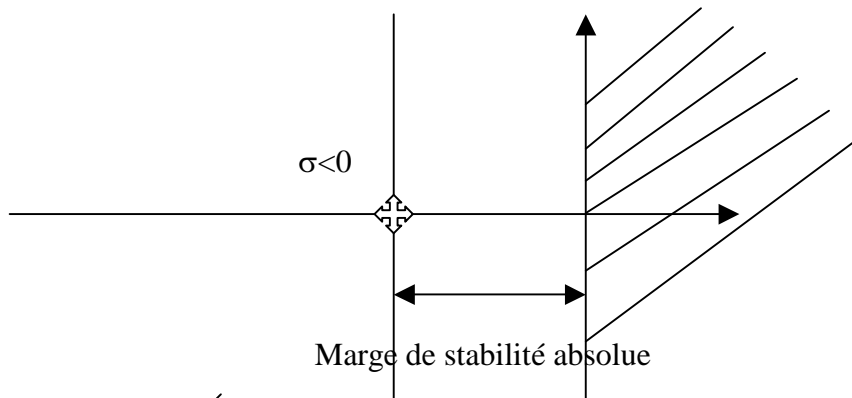
$\Rightarrow p^3 + 6p^2 + 5p + K = 0$

**par ROUTH :**

|       |              |   |                     |            |
|-------|--------------|---|---------------------|------------|
| $p^3$ | 1            | 5 |                     |            |
| $p^2$ | 6            | K | $K < 30$ et $K > 0$ | $K_c = 30$ |
| $p^1$ | $(30 - K)/6$ | 0 |                     |            |
| $p^0$ | K            |   |                     |            |

Polynôme auxiliaire :  $6p^2 + K = 0 \longrightarrow 6p^2 + 30 = 0 \longrightarrow P = \pm j(5)^{1/2}$

□ **Marge de stabilité absolue et relative :**

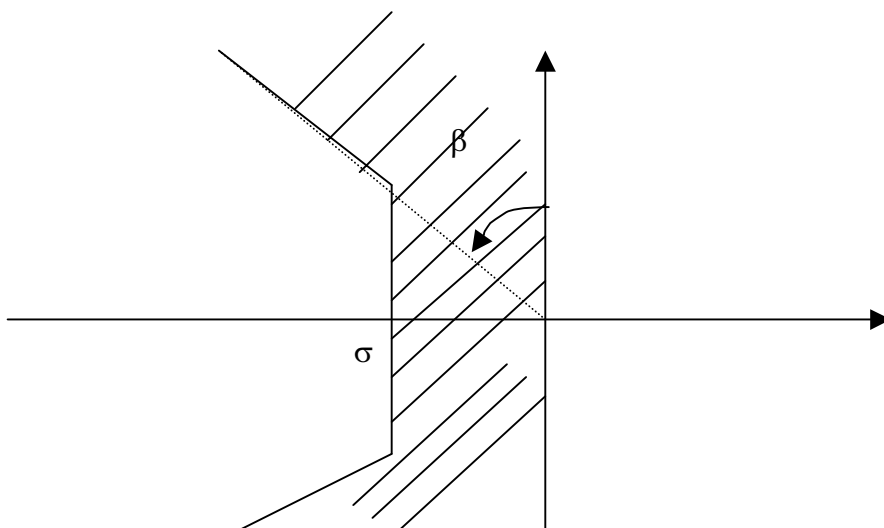


$$\sin(\beta) = m$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = 1$$

$$\beta = 0 \Rightarrow m = 0$$

Marge de stabilité relative



Marge de stabilité relative et absolue.

## EXERCICES

### Exercice N° 1

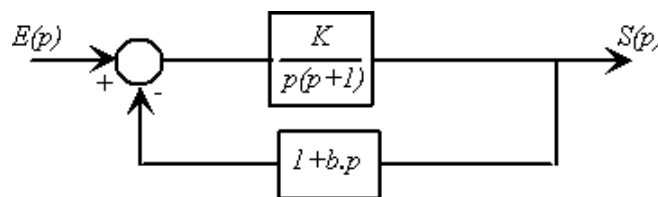
Soit un système asservi à retour unitaire avec transmittance en boucle ouverte de la forme :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+a)(p+b)}$$

1. Tracer le lieu des racines tel que  $a = 1$ ,  $b = 5$  &  $K \gg 0$ .
2. Tracer le lieu des racines pour  $a \gg 0$ ,  $b = 3.75$  &  $K = 4$ .

### Exercice N° 2

Soit le système asservi suivant :



1. Déterminer  $K$  &  $b$  de telle sorte que les pôles du système bouclé soient  $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ .
2. Tracer le lieu des racines.

### Exercice N° 3

Soit un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = \frac{K}{p^2(p+2)}$$

1. Tracer le lieu des racines.
2. Montrer que le système est instable pour les valeurs positives de  $K$ .
3. Ce système peut être stabilisé en additionnant un zéro sur l'axe réel négatif pour modifier  $G(p)$  en  $G_1(p) = \frac{K(p+a)}{p^2(p+2)}$ .
4. Pour assurer la stabilité du système, trouver les limites de variation de  $a$ .

### Exercice N° 4

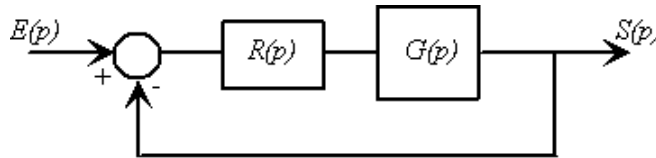
Soit la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire

$$G(p) = \frac{K(p+3)}{p^2(p^2+2p+2)(p+5)(p+6)}$$

1. Tracer le lieu des racines pour  $K > 0$ .
2. Trouver la valeur de  $K$  pour que le coefficient d'amortissement du système en boucle fermée soit égal à  $0.4$  ( $m = 0.4$ ).

**Exercice N° 5**

Soit le système suivant :

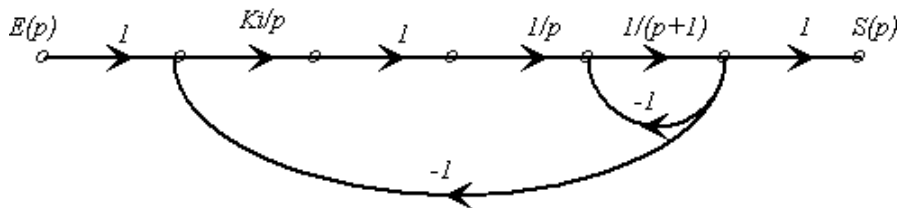


$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$$

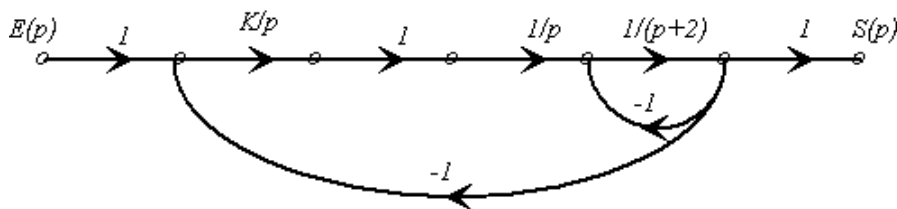
1.  $R(p) = 1$  ; calculer l'amortissement  $m$ , le temps de pic et le dépassement du système en boucle fermée.
2. On considère  $R(p) = \frac{K}{p}$ 
  - a. Tracer le lieu des racines du système avec précision. Calculer le gain critique ; en déduire les pôles imaginaires purs.
  - b. Déterminer  $K$  pour avoir une marge de stabilité absolue  $s = -1$ .
  - c. Déterminer la valeur de  $K$  garantissant un amortissement en boucle fermée  $m = 0.7$ .

**Exercice N° 6**

Soit un système asservi décrit par le graphe de fluence suivant :



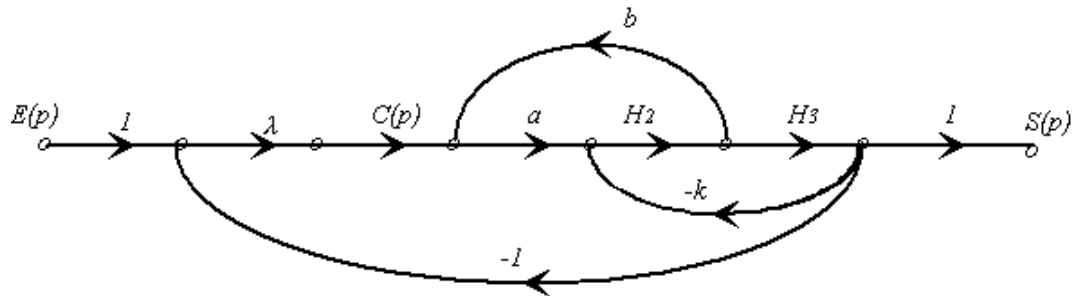
1. Déterminer la valeur de  $K_i$  donnant un système juste oscillant ; déduire les pôles imaginaires purs.
2. Déterminer la valeur de  $K_i$  assurant au système un dépassement  $D \leq 20\%$  et calculer le temps de pic.
3. On suppose maintenant que le système est décrit par le graphe suivant :



Tracer avec précision le lieu des racines du système.

**Exercice N° 7**

Soit un système asservi décrit par le graphe de fluence suivant :



Pour  $b = 0$ ,  $a = 1$ ,  $C(p) = \frac{K}{p + 10}$ ,  $l = 0.1$ ,  $k = 2$ ,  $H_2 = \frac{1}{0.7 + 0.1p}$  &  $H_3 = \frac{1}{2p}$ .

1. En utilisant la règle de Mason, Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte du système puis celle en boucle fermée.
2. Tracer le lieu des racines du système.
3. Etudier en fonction des valeurs de  $K$  la stabilité et la nature de la réponse du système.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

[1] Maurice Rivoire & Jean-Louis Ferrier ; Asservissement régulation, commande analogique, Cours d'automatique, Edition EYROLLES, deuxième tirage 1992.

[2] J. Maingnenand; Systèmes asservis continus, Cours d'automatique, Edition MASSON, 1972.

[3] J. Maingnenand; Correction d'un système asservi-linéaire- calcul analogique, Cours d'automatique, Edition MASSON, 1974.

[4] Moncef GOSSA ; Notes de cours ESSTT 1995