CHAPITRE VI

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I désigne un intervalle de IR, non vide et non réduit à un point.

I - Généralités.

1) Définition :

- On appelle équation différentielle d'ordre $n \in$ IN*, une relation de la forme :
  (E) : $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ entre la variable réelle x, la fonction $y = y(x)$ et ses dérivées successives $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.
- On appelle solution sur un intervalle I de (E) toute fonction $y = y(x)$ vérifiant l'équation (E) sur I.
- Le graphe de la fonction $y = y(x)$ solution de (E) est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle.
- Résoudre ou intégrer, une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des solutions appelé " solution générale de (E) ".

2) Exemple :

$y' + y - 2x = 0$ est une équation différentielle du 1er ordre.
$y'' - y = x$ est une équation différentielle du 2ème ordre.
$y^{(4)} + 2x = 0$ est une équation différentielle du 4ème ordre.

II- Equations différentielles du 1er ordre.

II-1- Classification.

Une équation différentielle du 1er ordre est une relation de la forme $y' = f(x,y)$.

1) Equation à variables séparables :

- On appelle équation à variables séparables une équation différentielle de la forme :

$$g(y).y' = f(x) \quad \text{ou} \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

En utilisant la notation différentielle en écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ alors l'équation à variables séparables s'écrit : $g(y)dy = f(x)dx$.

Par exemple : $y' = (2x+3x^2)(y+1)$ est une équation à variables séparables.

2) Equation homogène :

On appelle équation différentielle homogène, une équation différentielle de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Par exemple : $y' = 1 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$ est une équation homogène.

3) Equation linéaire :

* On appelle équation différentielle linéaire, une équation différentielle de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad \text{où a et b sont des fonctions données.}$$

Lorsque $b = 0$, l'équation : $y' + a(x)y = 0$ est dite équation sans second membre.

* Par exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$ est une équation différentielle linéaire.

Remarque :
Une équation différentielle de la forme : $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ se ramène à l'équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ avec $a(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$; $b(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$ sur un intervalle sur lequel α ne s'annule pas.

II-2- Résolution.
Pour simplifier la rédaction, la détermination de l'intervalle I sur lequel est définie une solution de l'équation différentielle proposée est laissé au soin du lecteur. D'autre part, toutes les fonctions intervenantes dans les différentes équations sont bien entendu continues sur I.

1) Résolution d'une équation à variables séparables :

a) Proposition :
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $g(y)y' = f(x)$ est donné par l'ensemble des solutions en y de l'équation $G(y) = F(x) + C$; où G et F sont respectivement des primitives de g et f et $C\in$ IR.

b) Remarque :
Pour résoudre $g(y)y' = f(x)$ ou $g(y)dy = f(x)dx$ on intègre les deux membres pour déterminer $G(y) = \int g(y)dy$; $F(x) = \int f(x)dx$
Puis, lorsqu'il est possible, on "tire" y en fonction de x sous une forme explicite.(ne pas oublier la constante).

c) Exemples :

Exemple1 : (E_1) : $y' = (2x+3x^2)(y+1)$
On a : $y = -1$ est une solution de (E_1).
(E_1) s'écrit : $\frac{dy}{y+1} = (2x+3x^2)dx$.
Comme $\int \frac{dy}{y+1} = \text{Log}|y+1| + C_1$; $\int (2x+3x^2)dx = x^2+x^3+C_2$
Alors on a $|y+1| = C\ e^{x^2+x^3}$; $C > 0$
Et par suite, la solution générale de (E_1) est:
$$y = \lambda e^{x^2+x^3} - 1 \ ;\ \lambda \in \text{IR}.$$

Exemple 2 : (E_2) : $y'e^x + \sqrt{1+y^2}\ \text{ch}x = 0$.
(E_2) s'écrit : $\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{2}(1+e^{-2x})$
ou $\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{2}(1+e^{-2x})\,dx$
on obtient alors $\text{Argsh}y = \frac{e^{-2x} - 2x}{4} + C$
d'où $y = \text{sh}\left(\frac{e^{-2x} - 2x}{4} + C\right)$; $C\in$ IR.

Exemple3 :

On peut aussi donner seulement une forme implicite des solutions sous une forme $\psi(x,y) = 0$

(E_3) : $x + yy' = 0$

(E_3) s'écrit : $- xdx = ydy$

soit $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$.

2) Résolution d'une équation homogène :

a) Proposition :

Pour résoudre une équation homogène : $y' = f(\frac{y}{x})$

On pose $y = tx$, on obtient une équation à variables séparables en x et t que l'on résoud.(voir I-2-1).

b) Remarque :

t est une nouvelle fonction inconnue. La notation $y = tx$ ou $t = \frac{y}{x}$ désigne en fait la fonction t définie par $y(x) = t(x).x$ ou $t(x) = \frac{y(x)}{x}$.

On a alors $y' = t'x+t$ qu'on écrit aussi $dy = x\,dt + t\,dx$.

Ainsi l'équation (E) : $y' = f(\frac{y}{x})$

S'écrit alors : $t'x = f(t) - t$

ou $x\,dt = (f(t) - t)dx$ (*)

Pour $f(t) - t \neq 0$, on obtient l'équation à variables séparables

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

on déduit alors x en fonction de t :

$$\mathrm{Log}|x| = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$$

Puis on détermine y par $y = tx$.

On obtient ainsi une représentation paramétrique des solutions. On peut alors par la suite déterminer une forme explicite de y en fonction de x.

Notons enfin que si t_0 est un réel tel que $f(t_0) - t_0 = 0$, alors la fonction constante $t = t0$ est solution de (*) et par suite la fonction $y = t_0x$ est une solution de (E) dite solution singulière.

c) Exemples :

Exemple 1 : (E_1) : $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$

En posant $y = tx$, l'équation (E_1) devient :

$x\,dt = (1- t^2)dx$

Comme $1- t^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 1$

Alors les solutions singulières de (E_1) sont : $y = -x$ et $y = x$.

En séparant les variables (E_1) devient : $(1- t^2 \neq 0)$

$$\frac{dt}{1 - t^2} = \frac{dx}{x}$$

soit $\frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \text{Log}|x| + C$; $C\in$ IR

d'où $t = \frac{kx^2-1}{kx^2+1}$; $k\in$ IR *.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est donnée par la solution générale $y = \frac{kx^2-1}{kx^2+1}x$; $k \neq 0$

et par les solutions singulières $y = x$ et $y = -x$.

<u>Exemple 2</u> : (E_2) : $xy'(2y-x) = y^2$

(E_2) s'écrit : $y' = \frac{y^2}{x(2y-x)}$ ou $y' = \frac{(y/x)^2}{2(y/x)-1}$

En posant $y = tx$, l'équation (E_2) devient :

$$xdt = \left(\frac{t^2}{2t-1} - t\right)dx$$

Les solutions singulières sont : $y = 0$ et $y = x$.

Pour $t\neq 0$ et $t\neq 1$, on obtient :

$$\frac{2t-1}{t-t^2}dt = \frac{dx}{x}$$

Soit $\text{Log}|x| = -\text{Log}|t^2-t| + C$; $C\in$ IR

Et par suite $\begin{cases} x = \frac{\lambda}{t^2-t} & ; \lambda \neq 0 \\ y = \frac{\lambda}{t-1} \end{cases}$

3) <u>Résolution d'une équation linéaire</u> :

Considérons une équation différentielle linéaire du 1er ordre

(E) : $y' + a(x)y = b(x)$

où a et b sont des fonctions continues sur I.

On note (E_0) l'équation $y' + a(x)y = 0$, appelée équation sans second membre (ou équation homogène) associée à (E).

L'équation (E) est alors dite : équation avec second membre.

a) <u>Résolution de l'équation sans second membre</u> :

<u>Proposition</u> :

La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) : $y' + a(x)y = 0$

est $y_s = \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda\in$ IR et A est une primitive quelconque de a sur I.

<u>Preuve</u> :

Comme a est continue sur I, alors a admet des primitives sur I, désignons par A une primitive de a sur I, $A(x) = \int a(x)dx$.

Considérons la fonction z définie par :

$\forall x\in I$; $z(x) = e^{A(x)} y(x)$.

Comme $y(x) = e^{-A(x)} z(x)$

$y'(x) = -a(x) e^{-A(x)} z(x) + e^{-A(x)} z'(x)$

Alors :

y solution de (E_0) signifie : $\forall x\in I$, $e^{-A(x)} z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow z' = 0$

$\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ ; \ \forall x \in I \ ; \ z(x) = \lambda$
$\Leftrightarrow \ y(x) = \lambda\, e^{-A(x)} \ ; \lambda \in \mathbb{R}.$

Remarque :
Si a est une fonction constante, $a(x) = \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit alors que l'équation (E_0) est à coefficients constants, la solution générale de $y' + \alpha y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y_s = \lambda\, e^{-\alpha(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple :
Soit (E_0) : $y' + 2xy = 0$
La solution générale de (E_0) est $y_s = \lambda\ e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque :
On peut présenter la résolution de l'équation sans second membre suivante (avec quelques abus d'écriture).
(E_0) $y' + a(x)\, y = 0$
$y = 0$ est une solution de (E_0).
Pour $y \neq 0$, (E_0) s'écrit : $\dfrac{y'}{y} = -a(x)$ ou $\dfrac{dy}{y} = -a(x)dx$
Alors $\operatorname{Log}|y| = -\int a(x)dx + C$ ou $|y| = e^C . e^{-\int a(x)dx}$.
Soit $A(x) = \int a(x)dx$, alors
$$y = \lambda\, e^{-A(x)}, \lambda \neq 0$$
En ajoutant la solution $y = 0$, on retrouve que la solution générale de (E_0) est :
$$y_s = \lambda\, e^{-A(x)} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple :
(E_0) : $x^3 y' + (2+x)y = 0$
Pour $x \neq 0$; (E_0) s'écrit : $y' + \dfrac{2+x}{x^3} y = 0$ une primitive de $x \mapsto a(x) = \dfrac{2+x}{x^3}$ est A définie par $A(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ alors la solution générale de (E_0) est : $y = \lambda\, e^{\frac{1+x}{x^2}}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) <u>Résolution de l'équation avec second membre</u>.
Proposition :
La solution générale de l'équation (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) : $y' + a(x)y = 0$ et d'une solution particulière de (E).
On écrit : $y = y_s + y_p$
où y désigne la solution générale de (E)
y_s désigne la solution générale de (E_0)
y_p désigne une solution particulière de (E).

Preuve :
y_p est une solution particulière de (E) signifie que
$$y'_p + a(x)y_p = b(x)$$
Posons $y = y_p + Y$ alors $y' = y'_p + Y'$

$$y' + a(x)y = b(x) \Leftrightarrow (y'_p + Y') + a(x)(y_p + Y) = b(x)$$
$$\Leftrightarrow Y' + a(x)Y = 0$$

Exemple 1 :

(E) : $y' + 2xy = 5x$

La solution générale de (E_0) : $y' + 2xy = 0$ est donnée par :

$y_s = \lambda e^{-x^2}$; $\lambda \in$ IR.

Remarquons que $y_p = \frac{5}{2}$ est une solution particulière de E

Donc la solution générale de (E) est :

$y = \lambda e^{-x^2} + \frac{5}{2}$; $\lambda \in$ IR.

Exemple 2 :

(E) : $y' + y = 2e^x$

La solution générale de (E_0) : $y' + y = 0$ est $y_s = \lambda e^{-x^2}$; $\lambda \in$ IR.

Une solution particulière (évidente) de (E) est $y_p = e^x$.

Donc la solution générale de (E) est :

$y = \lambda e^{-x} + e^x$; $\lambda \in$ IR.

b) Recherche d'une solution particulière :

Méthode de la variation de la constante :

Pour déterminer une solution particulière de l'équation (E) : $y' + a(x)y = b(x)$, on détermine la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.

Soit y_0 une solution non nulle de (E_0). On cherche alors une solution y_p de (E) sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)y_0(x)$ (λ est une nouvelle fonction inconnue dérivable sur I).

On a alors :

$y_p(x)$ solution de (E) signifie $y'_p + a(x)y_p = b(x)$

Comme $y'_p(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y'_0(x)$

On obtient $\lambda'y_0 + \lambda y'_0 + a(x)\lambda y_0 = b(x)$

Or $y'_0 + ay_0 = 0$

Donc $\lambda'y_0 = b$ soit $\lambda'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)}$

On déduit alors $\lambda(x)$ à l'aide d'un calcul de primitive puis $y_p(x) = \lambda(x)y_0(x)$.

Exemples :

1) Reprenons l'exemple1 précédent:

(E) : $y' + 2xy = 5x$

Comme la solution générale de l'équation (E_0) : $y' + 2xy = 0$ est $y_s = \lambda e^{-x^2}$

Alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = \lambda(x)e^{-x^2}$

y_p solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\lambda'(x) = 5x\, e^{x^2}$

d'où $\lambda(x) = \frac{5}{2} e^{x^2}$ et par suite $y_p = \frac{5}{2}$.

2) Considérons l'équation (E) : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

La solution générale de l'équation sans second membre

(E_0) : $y' - \frac{y}{x} = 0$ est $y_s = kx$; $k \in$ IR.

$y_p = k(x).x$

y_p solution de (E) $\Leftrightarrow$ $k'(x) = x$ d'où $k(x) = \frac{1}{2}x^2$ et par suite $y_p = \frac{1}{2}x^3$

Donc la solution générale de (E) est : $y = kx + \frac{1}{2}x^3 = (k+\frac{1}{2}x^2)x;\ k\in$ IR.

4) <u>Application</u> : Equation de Bernouilli

a) <u>Définition</u> :

On appelle équation de Bernouilli, toute équation différentielle de la forme :

(E) $y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$; $\alpha\in$ IR \{0,1}.

<u>b) Résolution</u> :

On effectue le changement de fonction inconnue $u = y^{1-\alpha}$

alors $u' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$

D'autre part, en divisant l'équation (E) par y^{α} on obtient

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$$

soit $\frac{1}{1-\alpha}u' + a(x)u + b(x) = 0$

et enfin $u' + (1-\alpha)a(x)u = (\alpha -1)b(x)$ qui est une équation linéaire en u.

c) <u>Exemple</u> :

Soit l'équation (E) : $xy' + y - xy^3 = 0$

Sur un intervalle I ne contenant pas 0, (E) s'écrit :

$$y' + \frac{1}{x}y - y^3 = 0$$

Posons $u = \frac{1}{y^2}$ alors $u' = -\frac{2y'}{y^3}$

Alors (E) $\Leftrightarrow$ $u' - \frac{2}{x}u = -2$ (e)

La solution générale de l'équation sans second membre de (e) est $u_s = \lambda x^2$

Une solution particulière de (e) est $u_p = 2x$

Alors la solution générale de (e) est :

$$u = \lambda x^2 + 2x \ ;\ \lambda\in \text{IR}.$$

On déduit alors la solution générale de l'équation (E) :

$$y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x+\lambda x^2}} \ ;\ \varepsilon\in \{-1,1\} \ ;\ \lambda\in \text{IR}.$$

(Le domaine de définition de y dépend de λ).

III- Equations différentielles du $2^{ème}$ ordre linéaires à coefficients constants

III-1- Généralités.

1) Définition :

Soit a,b et c trois réels tel que $a \neq 0$ et h une fonction de IR dans IR. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, une équation de la forme :

(E) : $ay'' + by' + cy = h(x)$

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est appelée l'équation sans second membre associée à E.

2) Exemple :

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

III-2- Résolution de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$

Considérons l'équation (1) : $ay'' + by' + cy = 0$ où $a\in IR^*$, $b\in IR$, $c\in IR$.

On désigne par S l'ensemble des solutions de l'équation (1) c-à-d l'ensemble des fonctions deux fois plus dérivables sur IR qui vérifient $\forall x\in IR$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.

Théorème :

L'ensemble S des solutions de l'équation (1) :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel F(IR, IR) des fonctions de IR dans IR .

Remarque :

Dans la suite, "avec un abus d'écriture", on notera $y_H(x)$ la solution générale de l'équation (1)

Théorème :

La solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$; (1) $a\in IR^*$, $b\in IR$, $c\in IR$ s'exprime à l'aide des racines de l'équation (*) : $ar^2 + br + c = 0$: appelée équation caractéristique de l'équation différentielle.

1) Si $b^2- 4ac > 0$: l'équation caractéristique (*) admet alors deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors on a : $y_H(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$; où $A\in IR$ et $B\in IR$.

2) Si $b^2- 4ac = 0$: L'équation caractéristique (*) admet alors une racine double r alors on a :

$$y_H(x) = (Ax+B)e^{rx} \text{ ; où } A\in IR \text{ et } B\in IR.$$

3) Si $b^2- 4ac < 0$: l'équation caractéristique (*) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha+i\beta$ et $r_2 = \alpha-i\beta$ alors on a :

$$y_H(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x} \text{ ; où } A\in IR \text{ et } B\in IR.$$

Exemple :

1) Soit l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, ces racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ d'où la solution générale est : $y_H(x) = Ae^x + Be^{2x}$, $A\in IR$; $B\in IR$.

2) Soit l'équation : $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double $r = 1$ d'où la solution générale est : $y_H(x) = (Ax + B)e^x$, où $A \in$ IR ; $B \in$ IR.

3) Soit l'équation $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$, ces racines sont : $r_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

D'où la solution générale est : $y_H(x) = \left(A\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \right) e^{-\frac{1}{2}x}$; où $(A,B) \in$ IR ^{2}.

Remarque :
L'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ admet une unique solution $y(x)$ qui satisfait $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$ (appelées les conditions initiales).
Par exemple, l'équation $y'' + 4y' + 4y = 0$ admet une unique solution qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, c'est la solution $y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$ où A et B vérifient :

$$\begin{cases} B = 1 \\ \text{et} \\ A - 2B = 1 \end{cases} \text{, d'où } y(x) = (3x+1)e^{-2x}.$$

III-3- <u>Résolution de l'équation</u> : ay''+by'+cy = h(x).

On considère les équations :
(2) : $ay'' + by' + cy = h(x)$ où $a \in$ IR * , $b \in$ IR, $c \in$ IR.
(1) : $ay'' + by' + cy = 0$.

<u>Théorème</u> :
La solution générale $y(x)$ de l'équation (2) est la somme de la solution générale $y_H(x)$ de l'équation (1) et d'une solution particulière $y_0(x)$ de (2) :

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x).$$

<u>Exemple</u> :
Soit l'équation : $y'' - 3y' + 2y = x$.
La solution de l'équation homogène est : $y_H(x) = Ae^x + Be^{2x}$; $(A,B) \in$ IR ^{2}.
En remarquant que $y_0(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ est une solution particulière de l'équation complète $y'' - 3y' + 2y = x$.
Alors la solution générale de l'équation $y'' - 3y' + 2y = x$ est :

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \text{ ; } (A,B) \in \text{IR}^2.$$

<u>Recherche d'une solution particulière</u> :
<u>Proposition 1</u> : Si le second membre de (2) est un polynôme P de degré n alors on cherche une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation (2) de la forme d'un polynôme Q de degré :

n	si	$c \neq 0$
n+1	si	$c = 0$ et $b \neq 0$
n+2	si	$c = 0$ et $b = 0$.

Proposition 2 : Si le second membre de (2) est de la forme $h(x) = P(x)e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n et $s \in IR$. On cherche une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation (2) sous la forme : $y_0(x) = Q(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme de degré :

i) n si s n'est pas racine de l'équation caractéristique.
ii) n+1 si s est racine simple de l'équation caractéristique.
iii) n+2 si s est racine double de l'équation caractéristique.

Proposition 3 : Si le second membre de l'équation (2) est de la forme $h(x) = A \cos\omega x + B \sin\omega x$, où A , B et ω sont des réels.

1) Si $i\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique on cherche une solution particulière $y_0(x)$ de la forme $y_0(x) = \lambda \cos\omega x + \mu \sin\omega x$.
2) Si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière $y_0(x)$ sous la forme : $y_0(x) = x(\alpha \cos\omega x + \beta \sin\omega x)$

Où λ, μ, α et β sont des constantes à déterminer.

Proposition 4 : Si le second membre est de la forme $h(x) = h_1(x)+h_2(x)+\ldots+h_n(x)$, on cherche une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation (2) sous la forme :
$y_0(x) = y_1(x)+y_2(x)+\ldots+y_n(x)$ où $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.
$y_i(x)$ est une solution particulière de l'équation $ay''+by'+cy = h_i(x)$.

Exemple :
1) Soit l'équation : $y''-3y'+2y = x^2 + xe^x$. (E_0)
La solution générale de l'équation homogène $y''-3y'+2y = 0$ est $y_H(x) = Ae^x + Be^{2x}$.
Déterminons une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation complète (E_0) sous la forme $y_0(x) = y_1(x) + y_2(x)$ (d'après prop.4)
où $y_1(x)$ est une solution particulière de : $y'' - 3y' + 2y = x^2$
et $y_2(x)$ est une solution particulière de : $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.
Pour l'équation : $y'' - 3y' + 2y = x^2$ (E_1), on cherche une solution particulière $y_1(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, (voir prop.1). Posons alors : $y_1(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$
D'où, $y'_1(x) = 2\alpha x + \beta$
$y''_1(x) = 2\alpha$.
et $y_1(x)$ solution de (E_1) alors on a :
$$2\alpha - 3(2\alpha x+\beta) + 2(\alpha x^2+\beta x+\gamma) = x^2 \ ; \ \forall x \in IR$$
D'où α, β et γ sont les solution de système :
$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta - 6\alpha = 0 \\ 2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{3}{2} \\ \gamma = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$
et enfin $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}$.
Pour l'équation $y'' - 3y' + 2y = xe^x$; (E_2) , d'après la proposition 2 comme 1 est racine de l'équation caractéristique : $r^2-3r+2 = 0$, alors on cherche une solution particulière $y_2(x)$ de (E_2) Sous la forme $y_2(x) = Q(x)\, e^x$ où Q est un polynôme de degré 2. Posons alors :
$$y_2(x) = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$$

et par un calcul analogue à celui exposé plus haut on trouve $y_2(x) = (-\frac{x^2}{2} - x)e^x$.

D'où une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation (E_0) et

$$y_0(x) = y_1(x) + y_2(x) = (-\frac{x^2}{2} - x)e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

et la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - (\frac{x^2}{2} + x)e^x \text{ ; où } A \in \text{IR}$$

2) Soit l'équation : $y'' + y = \frac{1}{2}\cos x \quad (E_0)$

- La solution générale de l'équation sans second membre $y'' + y = 0$ est

$$y_H(x) = A\cos x + B\sin x \text{ ; où } A \in \text{IR}, B \in \text{IR}$$

puisque l'équation cartésienne est $r^2 + 1 = 0$ et ses racines sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.
D'après la proposition 3, comme i est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière $y_1(x)$ sous la forme $y_1(x) = x(\alpha\cos x + \beta\sin x)$.

On a alors $y'_1(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + x(-\alpha\sin x + \beta\cos x)$

$$y''_1(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x - \alpha\sin x + \beta\cos x + x(-\alpha\cos x - \beta\sin x)$$

D'où

$$y''_1(x) + y_1(x) = \frac{1}{2}\cos x \quad \text{entraîne que ,}$$

$$\frac{1}{2}\cos x = -2\alpha\sin x + 2\beta\cos x \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où $y_1(x) = \frac{1}{4}x\sin x$.

- La solution générale de (E_0) est alors :

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{4}x\sin x; \; A \in \text{IR}, B \in \text{IR} .$$

* **<u>Proposition 5</u>** : (méthode de la variation de la constante).

Considérons l'équation : (E_0) : $ay'' + by' + cy = h(x)$, $a \neq 0$.
Soit $y_H(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ la solution générale de l'équation homogène $ay'' + by' + c = 0$.
On cherche alors une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation (E_0) sous la forme :
$y_0(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ où u et v sont deux fonctions dérivables vérifiant en plus la relation $u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \quad (1)$

On a alors : $y'_0(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y'_1(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y'_2(x)$

$$= u(x)y'_1(x) + v(x)y'_2(x) \quad \text{d'après (1)}$$

* $y''_0(x) = u(x)y''_1(x) + u'(x)y'_1(x) + v(x)y''_2(x) + v'(x)y'_2(x)$

L'équation (E_0) s'écrit alors :

$u(x)[ay''_1(x)+by'_1(x)+cy_1(x)]+au'(x)y'_1(x)+v(x)[ay''_2(x)+by'_2(x)+cy_2(x)]+av'(x)y'_2(x) = h(x)$

Comme $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions de l'équation homogène on a alors :

$$u'(x)y'_1(x) + v'(x)y'_2(x) = \frac{h(x)}{a} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) permettent de calculer u'(x) et v'(x) puis par intégration de calculer u(x) et v(x) et de déterminer $y_0(x)$.

Exemple :

Soit l'équation $y'' + y = tgx$

L'équation caractéristique est $r^2+1 = 0$, la solution générale de l'équation homogène est alors

$$y_H(x) = A \cos x + B \sin x, \text{ où } A\in IR, B\in IR.$$

Cherchons une solution particulière $y_1(x)$ par la méthode précédente.

On pose $y_1(x) = u(x) \cos x + v(x) \sin x$

Alors u et v vérifient le système

$$\begin{cases} u'(x)\cos x + v'(x)\sin x = 0 \\ -u'(x)\sin x + v'(x)\cos x = tgx \end{cases}$$

d'où $u'(x) = -\sin x \, tgx$

et

$$v'(x) = \sin x$$

Ainsi $u(x)$ est une primitive de $-\sin x \, tgx$

Or $- \sin x \, tgx = - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = - \dfrac{1}{\cos x} + \cos x$

d'où $u(x) = \sin x - \mathrm{Log}\left|tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right|$ et $v(x) = -\cos x$

et par suite $y_1(x) = - \cos x \, \mathrm{Log}\left|tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right|$

et la solution générale de l'équation proposée est :

$$y(x) = A \cos x + B \sin x - \cos x \, \mathrm{Log}\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| \text{ avec } A\in IR \text{ et } B\in IR.$$

Exercices

Exercice 1 :
Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $y' = 2ye^{-x}$; 2) $(x^2-x)y' = y^2+y$.
3) $x = e^{x+y'}$; 4) $(x^2+y^2)y' = -xy$.
5) $(x+x^2)y' + (1+x)y = 1$; 6) $y' + 2y = x^2 - x + 3$.
7) $y' \cos^2 x - y = e^{tgx}$; 8) $y' - 2xy + 2xy^2 = 0$.
9) $y' + 2y = 4y^3$.

Exercice 2 :
On considère l'équation (E) : $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$.
1) Vérifier que (E) admet une solution constante qui l'on déterminera.
2) En posant $z = y+1$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation de Bernouilli (E_1).
3) Résoudre (E_1), puis en déduire la solution générale de (E).

Exercice 3 :
Résoudre :
1) a) $y''-3y'+2y = 0$; b) $y''-2y'+y = 0$; c) $y''+y'+y = 0$.
2) a) $16y''-16y'+3y = 8x-16$; b) $y''-3y'+2y = (x^2+1)ex$.
3) $4y''- y = e^{-x}$.
4) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.
5) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

BIBLIOGRAPHIE

AUTEUR	TITRE	ÉDITEUR
• LELONG-FERRAND J. & ARNAUDIES J.M	ALGÈBRE Tome1	Dunod
• ABDELJAOUAD J. & BLANC J.	ALGÈBRE	CNP
• DONEDDU A.	ALGÈBRE Tome 2	Vuibert
• MONIER J.M	ALGÈBRE Tome1	Dunod
• GUININ D. & JOPPIN B.	ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE	Bréal
• RIVAUD J.	ALGÈBRE LINÉAIRE	Vuibert
• CAHEN J.P & TOUIBI C.	POLYNÔMES ET ALGÈBRE LINÉAIRE	ATSM
• GATTI M.	ALGÈBRE	OMEGA
• GATTI M.	ANALYSE I	OMEGA
• MONIER J.M	ANALYSE Tome1	Dunod
• GUININ D. & JOPPIN B.	ANALYSE	Bréal
• OUDOT X.	ANALYSE	Hachette
• ARIBAUD F & VAUTHIER J.	MATHÉMATIQUES	Eksa