Transformations de Fourier et de Laplace Applications

Résumé du cours de Mathématiques

Licence de Physique 2000 – 2001

lphy-fourier-laplace.tex (2000nov20)

Les parties intitulées *Complément(s) ...* sont donnée à titre de culture générale. Elles ne sont pas au programme de l'examen.

1 Transformation de Fourier

1.1 Notations, Définitions

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit deux fonctions, la *transformée de Fourier (directe)* $\mathcal{F}(f)$, de la fonction f, définie par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx\,, \tag{1.1}$$

et la *transformée de Fourier inverse* $\mathcal{F}^{\dagger}(f)$ de la fonction f, définie par la formule

$$\mathcal{F}^{\dagger}(f)(\xi) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx\,, \tag{1.2}$$

quand ces formules ont un sens. Ces fonctions sont liées par la formule

$$\mathcal{F}^{\dagger}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi) = \overline{\mathcal{F}(\overline{f})}(\xi)\,.$$

Notation. On notera également $\int_{\mathbb{R}}$ pour $\int_{-\infty}^{\infty}$.

Remarques 1.1.

1) Les appellations de transformée de Fourier *directe* et de transformée de Fourier *inverse* seront justifiées ultérieurement.

2) Différentes définitions de la transformée de Fourier (et de la transformée de Fourier inverse) ont cours dans la littérature. On y trouve en particulier les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx$$

pour la transformée de Fourier directe $\mathcal{F}(f)$. Les différences de notation portent, on le voit, sur des choix de normalisation (voir les choix de [4, 6] et du logiciel de calcul `Maple`).

3) On peut donner un sens aux formules (1.1) et (1.2) dans différents cadres. Les cadres les plus naturels sont le cadre des fonctions intégrables au sens de Lebesgue et celui des distributions tempérées (voir [2]).

Nous adopterons ici un point de vue élémentaire.

Notation. Nous désignerons par $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, continues en dehors de ces points, et absolûment intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est à dire dont l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge (en $-\infty$, en $+\infty$, à droite et à gauche des points où la fonction f n'est pas définie).

Exemples 1.2. La fonction $x \to \sin x/\sqrt{|x|}(1+x^2)$ est dans $\mathcal{L}^1$, mais la fonction $x \to (\sin x/x)\mathbb{1}_{[0,\infty]}$ n'est pas dans $\mathcal{L}^1$.

1.2 Exemples de transformées de Fourier

Exercice 1.3. Montrer que

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]})(\xi) = 2(2\pi)^{-1/2}\exp\big(-i(a+b)\xi/2\big)\,\frac{\sin\big((b-a)\xi/2\big)}{\xi}\,,$$

en convenant d'étendre la fonction qui apparaît dans le membre de droite par continuité en 0. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]})$ est continue, qu'elle tend vers 0 à l'infini (mais elle n'est pas dans $\mathcal{L}^1$).

Vérifier l'égalité

$$\mathcal{F}^\dagger(\mathbb{1}_{[a,b]}) = \overline{\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]})}\,.$$

$\triangleleft$

Notation. Notons Y la *fonction de Heaviside*, définie par

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0,\infty[\,, \\ 0, & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\,, \end{cases}$$

c'est à dire par $Y = \mathbb{1}_{[0,\infty[}$.

Exercice 1.4. Soit $\alpha > 0$. Établir les formules

$$\mathcal{F}(Y(x)e^{-\alpha x})(\xi) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\alpha + i\xi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\dagger(Y(x)e^{-\alpha x})(\xi) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\alpha - i\xi}.$$

Montrer que ces fonctions sont continues et tendent vers 0 à l'infini, mais qu'elles ne sont pas dans $\mathcal{L}^1$. $\triangleleft$

Exercice 1.5. Soit $\alpha > 0$. Établir les formules

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})(\xi) = \mathcal{F}^\dagger(e^{-\alpha|x|})(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}.$$

Montrer que ces fonctions sont continues et qu'elles sont dans $\mathcal{L}^1$. $\triangleleft$

Remarque 1.6. Les deux exercices précédents font apparaître un trait important de la transformation de Fourier : plus la fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît vite à l'infini (à comparer avec les propriétés de décroissance des coefficients de Fourier d'une fonction périodique).

Exemple 1.7. Soit $\alpha > 0$. Nous admettrons les formules

$$\mathcal{F}(\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2})(\xi) = \mathcal{F}^\dagger(\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2})(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\alpha|\xi|}\,,$$

que l'on peut établir soit en utilisant la méthode des résidus avec un contour dans le demi-plan supérieur pour $\xi < 0$ et un argument de parité, soit en appliquant la Proposition 1.3.

Note. Cet exemple montre en particulier que l'on a $\mathcal{F}^\dagger\big(\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})\big) = e^{-\alpha|x|}$ (comparer avec la Proposition 1.3).

Exemple 1.8. Soit $a > 0$. La transformée de Fourier de la fonction $x \to e^{-ax^2}$ est donnée par la formule

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \mathcal{F}^\dagger(e^{-ax^2})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\xi^2/4a}\,.$$

Idée de la démonstration. La formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$$

étant supposée connue, on peut soit utiliser la méthode des résidus, soit démontrer que la fonction $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on peut intégrer à vue (voir la démonstration de la formule de Jacobi – Poisson dans le cours sur les séries de Fourier. ∎

Exercice 1.9. En utilisant l'exemple précédent, vérifier l'égalité $\mathcal{F}^\dagger\big(\mathcal{F}(e^{-ax^2})\big) = e^{-ax^2}$ (avec la normalisation que nous utilisons dans ce cours). $\triangleleft$

1.3 Deux espaces de fonctions

Notations.

1. Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *à décroissance rapide*, et nous écrirons $f \in \mathcal{S}$, si elle est indéfiniment dérivable et si, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{k,n}$ telle que $|x^k f^{(n)}(x)| \le C_{k,n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que la fonction f et toutes ses dérivées décroissent plus vite, à l'infini, que n'importe quelle puissance négative de $|x|$.

2. Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une *fonction test*, et nous écrirons $f \in \mathcal{D}$, si elle est indéfiniment dérivable et s'il existe un intervalle $[a, b]$ tel que f soit identiquement nulle dans $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ (pour les fontions test, on dit aussi indéfiniment dérivable, à support compact).

Exemples 1.10.

1) La fonction $x \to e^{-x^2}$ est dans $\mathcal{S}$.

2) La fonction f définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp(1/(x^2-1)), & \text{si} \quad x \in]-1,1[\,, \\ 0, \quad \text{si} \quad x \notin]-1,1[\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

est dans $\mathcal{D}$.

Remarque. Toute fonction de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{S}$ et toute fonction de $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{L}^1$, c'est à dire que l'on a les inclusions $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$. Ces inclusions sont strictes. Les deux espaces de fonctions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ sont très importants dans l'étude de la transformation de Fourier et dans la théorie des distributions (voir [2]).

1.4 Propriétés fondamentales de la transformation de Fourier

Proposition 1.1. *La transformation de Fourier* $f \to \mathcal{F}(f)$ *est définie sur l'espace* $\mathcal{L}^1$. *Elle possède les propriétés suivantes :*

(1) Linéarité

$$\forall\, f, g \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}\,, \quad \mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)\,;$$

(2) Parité

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(x \to f(-x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi) = \mathcal{F}^\dagger(f)(\xi)\,;$$

(3) Conjugaison

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(\overline{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-\xi)\,;$$

(4) Translation

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(x \to f(x-a))(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)\,;$$

(5) Modulation

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(x \to e^{i\alpha x} f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - \alpha)\,;$$

(6) Changement d'échelle

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1\,, \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^\bullet\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(x \to f(b\,x))(\xi) = \frac{1}{|b|}\,\mathcal{F}(f)(\xi/b)\,;$$

(7) Continuité et comportement à l'infini

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1, \quad \mathcal{F}(f) \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \textit{ et on a}$$

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0\,;$$

(8) Dérivation

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1, \textit{ continûment dérivable et telle que } f' \in \mathcal{L}^1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \textit{ on a la relation}$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\,\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)\,;$$

(9) Multiplication par x

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1,\ \textit{telle que } x \to x\, f(x) \in \mathcal{L}^1,\ \textit{ et } \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ \textit{ on a la relation}$$

$$\mathcal{F}(x \to x\, f(x))(\xi) = i\, \mathcal{F}'(f)(\xi)\,.$$

Remarques 1.11.

1) Les propriétés (1) à (6) sont immédiates et faciles à retrouver. Les propriétés (7) à (9) sont en particulier satisfaites pour les fonctions à décroissance rapide. La propriété (8) se démontre par intégration par parties ; la propriété (9) par dérivation sous le signe $\int$, ce qui nécessite d'appliquer un théorème.

2) Les propriétés (8) et (9) sont très importantes. Elles permettent, dans certains cas, de transformer des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) linéaires en équations algébriques.

3) La transformation de Fourier inverse, $f \to \mathcal{F}^\dagger(f)$ possède des propriétés analogues (utiliser le fait que $\mathcal{F}^\dagger(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$).

Corollaire 1.2. *La transformation de Fourier $f \to \mathcal{F}(f)$ envoie le sous-espace $\mathcal{S}$ de $\mathcal{L}^1$ dans lui-même : la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide est également une fonction à décroissance rapide.*

Remarque. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$ est dans $\mathcal{S}$, mais elle n'est pas dans $\mathcal{D}$ (voir Exercice 3.2).

1.5 Inversion de la transformation de Fourier

De même que nous nous sommes posés la question de savoir si la série de Fourier $SF(f)$ détermine la fonction f de manière unique, nous nous posons la question de savoir si la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ détermine la fonction f de manière unique. La proposition suivante répond à cette interrogation ; mieux, elle fournit une formule d'inversion.

Proposition 1.3. *Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1$, telle que sa transformée de Fourier soit également dans $\mathcal{L}^1$. Alors,*

$$\mathcal{F}^\dagger\big(\mathcal{F}(f)\big) = f\,.$$

De plus, la transformation de Fourier $f \to \mathcal{F}(f)$ est une bijection de l'espace $\mathcal{S}$ sur lui-même et la bijection réciproque est donnée par la transformation $f \to \mathcal{F}^\dagger(f)$ (ce qui justifie l'appellation de transformation de Fourier inverse *donnée à $\mathcal{F}^\dagger$).*

Idée de la démonstration . On écrit $\mathcal{F}^\dagger\big(\mathcal{F}(f)\big)$ et on cherche à calculer cette fonction en intervertissant les intégrales. Pour ce faire, on introduit une gaussienne comme fonction auxiliaire et on utilise l'Exemple 1.8 (voir [2] page 68 pour un énoncé et une démonstration dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue). ∎

1.6 Calculs de transformées de Fourier

La *méthode des résidus* est très utilisée pour le calcul des transformées de Fourier. Ne disposant pas de cet outil, nous utiliserons les propriétés de la transformation de Fourier pour nous ramener aux transformées de Fourier classiques qui se trouvent dans les tables ou qui sont connues des logiciels de calcul formel tels `Maple` ou `Mathematica`.

2 Convolution des fonctions

2.1 Définition, propriétés

On voit apparaître, dans la démonstration de la Proposition 1.3, une fonction du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \tag{2.4}$$

où $f, g \in \mathcal{S}$.

Notation. La formule ci-dessus a un sens pour des fonctions plus générales que les fonctions à décroissance rapide. Nous noterons $f \star g$ la fonction définie par la formule (2.4), quand cette formule a un sens, et nous dirons que $f \star g$ est la *convolée* de la fonction f avec la fonction g.

Proposition 2.1. *Soient $f, g \in \mathcal{S}$.*

1. *Pour $f, g \in \mathcal{S}$, l'intégrale de la formule (2.4) existe et les fonctions $f \star g$ et $g \star f$ sont donc bien définies ;*
2. *On a les formules $f \star g = g \star f$ et $D^n(f \star g) = (D^n f) \star g$, pour tout entier n, où D désigne l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$;*
3. *Les fonctions $f \star g$ et $g \star f$ sont dans $\mathcal{S}$;*
4. *La transformée de Fourier de la fonction $f \star g$ est donnée par la formule, $\mathcal{F}(f \star g) = (2\pi)^{1/2}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$;*
5. *La transformée de Fourier de la fonction fg est donnée par la formule, $\mathcal{F}(f\,g) = (2\pi)^{-1/2}\,\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.*

Remarques 2.1.

1) Les propriétés ci-dessus se généralisent à des fonctions plus générales que les fonctions à décroissance rapide (voir [1]).

2) Les propriétés (4) et (5) sont particulièrement importante pour la résolution des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

2.2 Complément : Application à l'approximation des fonctions

On reprend la fonction $\rho \in \mathcal{D}$ définie par la formule (1.3) de la Section 1.1. Cette fonction est positive ou nulle, paire, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est strictement positive. Définissons la famille de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}$ par la formule

$$\varphi_n(x) = n\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx\Big)^{-1} \rho(nx). \tag{2.5}$$

Lemme 2.2. *Les fonctions φ_n définies par la formule (2.5) ont les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n \in \mathcal{D}$ et $\varphi_n = 0$ dans $\mathbb{R} \setminus [-1/n\ ,\ 1/n]$;*
2. *Pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n \geq 0$;*

3. *Pour tout* $n \geq 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, dx = 1$ *;*

4. *Pour tout* $n \geq 1$, $\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi) = \mathcal{F}(\varphi_1)(\xi/n)$ *; en particulier, pour tout* ξ, $\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi)$ *tend vers* $(2\pi)^{-1/2}$ *quand* n *tend vers l'infini.*

Proposition 2.3. *Soit* f *une fonction continue par morceaux et soit* φ_n *la suite de fonctions définie par la formule (2.5). Alors, les fonctions* $f \star \varphi_n$ *existent, elles sont indéfiniment dérivables et on a*

$$\lim_{n\to\infty} f \star \varphi_n(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et la convergence est uniforme sur tout intervalle* $[a, b]$ *qui ne contient pas de point de discontinuité de* f*.*

Remarques 2.2.

1) La proposition précédente reste valide dans un cadre plus général (voir [2]).

2) Une suite de fonctions vérifiant les propriétés énoncées dans le lemme ci-dessus s'appelle une *suite de Dirac*. Ces suites jouent un rôle important en analyse pour approcher des fonctions ou des distributions par des fonctions indéfiniment dérivables.

3 Compléments sur la transformation de Fourier

3.1 Le théorème de Plancherel

Proposition 3.1. (Théorème de Plancherel) *Étant données deux fonctions* $f, g \in \mathcal{S}$*, on a les formules,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)}(\xi)\, d\xi,$$

et, en particulier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2\, d\xi.$$

Remarques 3.1.

1) La proposition ci-dessus montre que la transformation de Fourier est une isométrie de l'espace $\mathcal{S}$ sur lui-même quand on munit cet espace du produit hermitien $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \ni (f, g) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\, dx$. On peut montrer que cette isométrie se prolonge en une isométrie de l'espace des fonctions de carré sommable (au sens de Lebesgue) dans lui même (voir [4]). La formule de Plancherel est l'analogue de la formule de Bessel – Parseval pour les séries de Fourier.

2) Le bon cadre pour le théorème suivant est l'espace des fonctions de carré sommable au sens de Lebesgue (voir [2], page 179 ou [4], page 111 ff).

3.2 Le principe d'incertitude de Heisenberg

On a vu que la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x) = e^{-ax^2}$ est la fonction $F_a(\xi) = (2a)^{-1}e^{-\xi^2/4a}$. Quand a est très grand, la fonction f_a est très concentrée autour de 0, mais la fonction F_a s'étale par contre largement autour de 0. L'Assertion 5 du Lemme 2.2 traduit un comportement analogue : les fonctions φ_n sont de plus en plus concentrées au voisinage de 0 alors que les fonctions $\mathcal{F}(\varphi_n)$ tendent vers $(2\pi)^{-1/2}$.

Exercice 3.2. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}$ s'étend en une fonction entière de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$ (c'est à dire en une fonction analytique sur le plan complexe tout entier). En déduire que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}$ ne peut pas être dans $\mathcal{D}$ (mais elle est dans $\mathcal{S}$) [*Cette question utilise la théorie des fonctions analytiques*].

Proposition 3.2. (Principe d'incertitude de Heisenberg) *Soit $f \in \mathcal{S}$ et soit g sa transformée de Fourier. On suppose également que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = 1$; la fonction g a la même propriété. On pose*

$$m_f = \int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\, dx, \quad V_f = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_f)^2|f(x)|^2\, dx, \quad \sigma_f = \sqrt{V_f}$$

et de même pour la fonction g.
Alors,

$$\sigma_f\, \sigma_g \geq 1/2$$

et l'égalité a lieu si et seulement si la fonction f est une gaussienne, c'est à dire de la forme $Ce^{-\alpha(x-a)^2}$, pour certaines constantes $C, a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Remarque 3.3. La proposition précédente (que nous avons énoncée dans le cas des fonctions de $\mathcal{S}$ pour simplifier) donne une version quantitative et générale des phénomènes de non-concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier que nous avons observés ci-dessus pour les gaussiennes. Elle admet une interprétation physique en mécanique quantique.

4 Applications de la transformation de Fourier

4.1 Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

On se propose de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur dans une barre infinie, c'est à dire de trouver une fonction $u : [0, \infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$u_t(t, x) = Ku_{xx}(t, x), \quad \text{pour } \ t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

où $K > 0$ est une constante physique donnée, et qui satisfait à la condition initiale

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{pour } \ x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.7}$$

où f est une fonction donnée.

Supposant que les fonctions f et $u(t, \cdot)$ sont dans $\mathcal{S}$ pour chaque t fixé, on introduit leurs transformées de Fourier par rapport à la variable x,

$$U(t, \xi) := \mathcal{F}\big(u(t, \cdot)\big)(\xi), \quad F(\xi) := \mathcal{F}(f)(\xi)\,.$$

Il résulte des propriétés de la transformation de Fourier des fonctions à décroissance rapide, que l'on doit alors avoir

$$U(t,\xi) = F(\xi)e^{-Kt\xi^2}. \tag{4.8}$$

Notation. Posons

$$V(t,x) = (2t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}.$$

On peut écrire l'équation (4.8) comme l'égalité

$$U(t,\xi) = F(\xi)\mathcal{F}(V(Kt,\cdot))(\xi)\,.$$

Appliquant la transformation de Fourier inverse et tenant compte des propriétés de la transformation de Fourier dans l'espace $\mathcal{S}$ on déduit de l'égalité précédente la formule

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1/2}V(Kt,\cdot)\star f(x)\,,$$

c'est à dire,

$$u(t,x) = (4K\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4Kt}f(y)\,dy\,. \tag{4.9}$$

La fonction $u(t,x)$ définie par la formule (4.9) est *notre candidate* à être la solution cherchée. Reste à montrer qu'elle répond bien à la question posée.

Remarque. Soit $P(t,x)$ la fonction

$$P(t,x) = (4\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}.$$

On a donc, $u(t,x) = P(Kt,\cdot)\star f(x)$. Cette formule est à comparer à la formule qui exprime la solution de l'équation de la chaleur avec condition périodique au moyen de la solution fondamentale $p(t,x)$ (la ressemblance entre $p(t,x)$ et $P(t,x)$ n'est pas fortuite).

Théorème 4.1. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, bornée. Alors la formule (4.9) définit une fonction u indéfiniment dérivable par rapport aux deux variables t,x, pour $(t,x)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}$. Cette fonction u vérifie l'équation de la chaleur (4.6) et satisfait à la condition initiale (4.7) au sens suivant*

$$\lim_{t\to 0_+} u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Remarque. On retrouve ici encore le caractère régularisant de l'équation de la chaleur (à comparer à l'assertion analogue obtenue dans le cas de l'équation de la chaleur avec condition périodique).

Note. On peut étendre la méthode développée ci-dessus pour étudier le problème suivant (modélisation de la propagation de la chaleur dans une barre semi-infinie, problème aux limites et condition initiale).

On cherche une solution $u(t,x) : [0,\infty[\times[0,\infty[\to\mathbb{R}$ de l'équation de la chaleur

$$u_t(t,x) = Ku_{xx}(t,x), \quad (t,x)\in]0,\infty[\times]0,\infty[, \tag{4.10}$$

où K est une constante physique donnée. On demande en outre à la fonction u de vérifier la condition aux limites (en $x = 0$)

$$u(t, 0) = 0\,, \tag{4.11}$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = f(x), \tag{4.12}$$

où f est une donné initiale fixée.

4.2 Équations différentielles à coefficients constants

4.2.1 Principe général

On cherche une fonction f, p-fois continûment dérivable, solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$f^{(p)}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(x) = h(x)\,, \tag{4.13}$$

où les a_k sont des nombres complexes donnés et où h est une fonction continue donnée.

On associe à l'équation différentielle (4.13) le polynôme $P(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.

Lemme 4.2. *Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre k du polynôme P (cela signifie que l'on peut écrire $P(X) = (X - r)^k Q(X)$, avec $Q(r) \neq 0$). Alors les fonctions*

$$e^{rx},\ xe^{rx}, \ldots,\ x^{k-1}e^{rx}\,,$$

sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène

$$f^{(p)}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(x) = 0.$$

La théorème de Cauchy – Lipschitz pour les équations différentielles linéaires (voir par exemple [3]) montre que l'équation (4.13), où la donnée h est une fonction continue, admet une unique solution f caractérisée par la donnée des p valeurs $f(x_0), \ldots, f^{(p-1)}(x_0)$ en un point x_0 fixé à l'avance (on donne à ce p-uplet le nom de *donnée de Cauchy* au point x_0).

Il arrive que l'on soit conduit à résoudre l'équation (4.13) sous d'autres conditions que les données de Cauchy, par exemple en imposant à la solution f d'être de classe $\mathcal{L}^1$. La transformation de Fourier permet de traiter ce problème, au moins dans certains cas. On peut par exemple énoncer le résultat suivant (voir [2], page 77) :

Proposition 4.3. *On suppose que le polynôme P associé à l'équation différentielle (4.13) n'a aucune racine imaginaire pure. On se donne h une fonction continue. On suppose que h et sa transformée de Fourier H sont dans $\mathcal{L}^1$. On suppose également que la transformée de Fourier de la fonction $\xi \to H(\xi)/P(i\xi)$ est dans $\mathcal{L}^1$. Alors, l'équation différentielle (4.13) admet une et une seule solution f, p-fois continûment dérivable et de classe $\mathcal{L}^1$.*

Idée de la démonstration. L'unicité résulte du lemme précédent et du fait que les fonctions $x^k e^{rx}$ ne sont jamais dans $\mathcal{L}^1$. Pour l'existence, on cherche à exhiber une solution. Appliquant la transformation de Fourier aux deux membres de l'équation (4.13) et utilisant l'assertion (8) de la Proposition 1.1, il vient

$$P(i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(h)(\xi)\,.$$

On cherche donc la fonction inconnue f comme la transformée de Fourier inverse de la fonction $\mathcal{F}(h)(\xi)P(i\xi)^{-1}$ (ce qui est possible parce que le polynôme P n'a pas de racine imaginaire pure et que $\mathcal{F}(h)$ est dans $\mathcal{L}^1$). Les autres hypothèses faites montrent que f est bien p-fois continûment dérivable. Elle est dans $\mathcal{L}^1$ à cause de l'hypothèse faite sur $H(\xi)/P(i\xi)$. ∎

Notation. Supposons qu'il existe une fonction $\mathcal{L}^1$ dont la transformée de Fourier soit $\mathcal{F}(A)(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\,P(i\xi)^{-1}$. La solution f trouvée ci-dessus s'écrit aussi

$$f = A \star h\,.$$

La fonction A, quand elle existe, s'appelle la *réponse impulsionnelle* de l'équation différentielle (4.13). Nous renvoyons à voir [6] pour plus de détails sur ce sujet.

4.2.2 Applications

Le filtre RC

Ce filtre RC est régi par l'équation différentielle

$$RCf'(t) + f(t) = h(t)$$

qui se traduit par l'équation

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (iRC\xi + 1)^{-1}\,\mathcal{F}(h)(\xi).$$

La réponse impulsionnelle est donnée par

$$A(t) = \frac{1}{RC}\,Y(t)\,e^{-t/RC}\,.$$

On vérifie facilement que la fonction

$$f(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)/RC}\,h(s)\,ds$$

est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus lorsque h est continue bornée. La solution générale de cette équation s'écrit alors

$$f(t) + \alpha\,e^{-t/RC}\,.$$

Ceci montre en particulier que, pour h continue bornée, la fonction f est la seule solution bornée de l'équation différentielle.

Le filtre RLC

Ce filtre est régi par l'équation différentielle

$$LCf'' + RCf' + f = h$$

qui se traduit par l'équation

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (-LC\xi^2 + iRC\xi + 1)^{-1}\, \mathcal{F}(h)(\xi).$$

Il faut examiner trois cas suivant le signe du discriminant 4LC - R^2C^2 du polynôme du second degré $P(X)$. Dans le cas où ce discriminant est négatif, on trouve comme réponse impulsionnelle la fonction

$$A(t) = \frac{2}{C\omega}\, Y(t)\, e^{-\alpha t}\, \sin(\beta t)$$

où les constantes α, β, ω sont données par

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{\omega}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}.$$

Une solution particulière de l'équation différentielle donnée par la convolution

$$f(t) = \frac{2}{C\omega} \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\, \sin \beta(t-s)\, h(s)\, ds.$$

On peut donner des expressions dans les deux autres cas (discriminant nul, discriminant positif), voir [6] pour plus de détails.

Exercice 4.1. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = e^{-|x|}$$

qui est deux fois continûment dérivable et de classe $\mathcal{L}^1$.

5 Transformation de Laplace

5.1 Définition, propriétés

5.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle. On définit la *transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ de la fonction f par la formule suivante,

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \tag{5.14}$$

pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, quand l'intégrale du second membre est absolûment convergente, c'est à dire quand l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xt} |f(t)|\, dt$$

converge.

Remarques.

1. On dit qu'une fonction f est à croissance au plus exponentielle, d'ordre inférieur ou égal à a, en $+\infty$ s'il existe des constantes $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ (dépendant de f) telles que $|f(t)| \leq Ce^{at}$, pour tout $t \geq 0$ (à noter que a êut être négatif).

2. La transformation de Laplace ne fait intervenir que les valeurs $f(t)$ de la fonction pour $t \geq 0$. Les fonctions f et Yf (où Y est la fonction de Heaviside) ont, par définition, mêmes transformées de Laplace ; deux fonctions f et g qui sont égales sur $\mathbb{R}_+$ ont aussi, par définition, même transformée de Laplace.

3. La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ de la fonction f peut également s'exprimer au moyen de la transformatée de Fourier. Plus précisément, on a la formule

$$\mathcal{L}(f)(z) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\big(t \to e^{-xt}f(t)\big)(y),$$

si $z = x + iy$. Ceci étant, on étudie la transformation de Laplace pour elle-même car elle s'applique à une classe de fonctions plus large que celle à laquelle s'applique la transformation de Fourier.

5.1.2 Premières propriétés

Proposition 5.1. *Soit f une fonction continue par morceaux et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-at}|f(t)|\,dt$$

converge. Alors

1. *Pour tout $x \geq a$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}|f(t)|\,dt$ converge ;*
2. *Il existe un nombre $-\infty \leq a_0 \leq a$ (appelé* abscisse de convergence *de la transformée de Laplace de la fonction f) tel que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-xt}|f(t)|\,dt$$

converge pour $x > a_0$ et diverge pour $x < a_0$;

3. *La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ de la fonction f existe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > a_0\}$.*

Exemples 5.1.

1) Pour la fonction $f(t) = e^{-t^2}$, l'abscisse de convergence est $a_0 = -\infty$ et la transformée de Laplace de f existe pour tout $z \in \mathbb{C}$;

2) Pour la fonction $f(t) = e^{t^2}$, l'abscisse de convergence est $a_0 = +\infty$. La fonction f n'admet pas de transformée de Laplace ;

3) Pour une fonction bornée, ou bien pour une fonction de classe $\mathcal{L}^1$, l'abscisse de convergence est négative ou nulle ;

4) Pour une fonction à croissance au plus exponentielle d'ordre a en $+\infty$ l'abscisse de convergence est inférieure ou égale à a.

5) On peut définir, comme nous l'avons fait pour la racine carrée, des déterminations de la fonction logarithme complexe, c'est à dire trouver des inverses locales de la fonction $z \to e^z$. La détermination principale de la fonction logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, notée $\ln(z)$, est définie par

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)\,,$$

où $\ln(|z|)$ est le logarithme usuel du nombre positif $|z|$ et où l'argument de z est choisi dans $]-\pi, \pi[$. Il suffit d'écrire $w = \ln(z) \quad \leftrightarrow \quad z = e^w$.

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) > -1$, la fonction

$$f_\alpha(t) = Y(t)t^\alpha.$$

La transformée de Laplace $F_\alpha(z) = \mathcal{L}(f_\alpha)(z)$ de la fonction f_α a pour abscisse de convergence 0. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}.$$

La fonction $F_\alpha(z)$ est définie pour $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0$. Si $\ln(z)$ désigne la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on pose $z^{\alpha+1} = e^{(\alpha+1)\ln z}$. On a alors,

$$F_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}},$$

pour $\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) > -1$ et $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0$.

Remarque 5.2. Dans le langage du calcul opérationnel, la fonction f à laquelle on applique la transformation de Laplace s'appelle *l'original* et sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle *l'image*. On note alors $f \supset F$.

Proposition 5.2. *La transformation de Laplace possède les propriétés :*

1. (Linéarité) *Soit f_1 (*resp. f_2*) une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f_1)$ (*resp. $\mathcal{L}(f_2)$*) admet pour abscisse de convergence a_1 (*resp. a_2*). Alors, pour tous λ_1, λ_2 dans $\mathbb{C}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence $a \leq \max\{a_1, a_2\}$ et*

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(z) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1)(z) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2)(z) \ ;$$

2. (Changement d'échelle) *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a. Alors, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \to f(\alpha t)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence le nombre αa et*

$$\mathcal{L}\big(t \to f(\alpha t)\big)(z) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(\frac{z}{\alpha}) \ ;$$

3. (Modulation) *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $t \to e^{\alpha t} f(t)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence $a + \mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)$ et*

$$\mathcal{L}\big(t \to e^{\alpha t} f(t)\big)(z) = \mathcal{L}(f)(z - \alpha) \ ;$$

4. (Translation) *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a. Pour tout $b > 0$, la fonction $t \to Y(t-b)f(t-b)$ admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence a et on a*

$$\mathcal{L}\big(t \to Y(t-b)f(t-b)\big)(z) = e^{-bz}\mathcal{L}(f)(z) \ ;$$

5. (Comportement à l'infini) *Soit $F(z)$ la transformée de Laplace de la fonction f, d'abscisse de convergence a. Alors*

$$\lim_{x \to \infty, y \in \mathbb{R}} F(x + iy) = 0.$$

5.2 Autres propriétés de la transformation de Laplace

5.2.1 Analyticité

Théorème 5.3. *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ admet pour abscisse de convergence a. Alors la fonction $\mathcal{L}(f)$ est analytique dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > a\}$ et ses dérivées successives sont données par les formules*

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(z) = \mathcal{L}\big(t \to (-t)^n f(t)\big)(z),$$

c'est à dire par les transformées de Laplace des fonctions $t \to (-t)^n f(t)$ qui ont même abscisse de convergence a.

5.2.2 Transformation de Laplace et dérivation

Proposition 5.4. *Soit f une fonction continûment dérivable, dont la transformée de Laplace admet pour abscisse de convergence le nombre a. Si de plus, pour $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > a$, la fonction $t \to e^{-zt} f(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$, alors la fonction f' admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence a et on a la relation*

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0+).$$

5.2.3 Transformation de Laplace et convolution

Proposition 5.5. *Soient f et g deux fonctions dont les transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ ont des abscisses de convergence respectives a et b. Soit $h = (Yf) \star (Yg)$, où Y est la fonction de Heaviside. Alors h admet une transformée de Laplace d'abscisse de convergence inférieure ou égale à $\max\{a, b\}$ et on a la formule*

$$\mathcal{L}\big((Yf) \star (Yg)\big)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z).$$

5.3 Inversion de la transformation de Laplace

Théorème 5.6. *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ admet le nombre a pour abscisse de convergence. On suppose de plus que la fonction $y \to F(x + iy)$ est de classe $\mathcal{L}^1$ pour tout $x > a$. Alors la fonction Yf est donnée par la formule*

$$Y(t)f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A(x)} F(z)e^{zt}\, dz$$

où $A(x)$ désigne la droite d'abscisse $x > a$, c'est à dire

$$Y(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + iy)e^{t(x+iy)}\, dy.$$

Remarques 5.3.

1) Le théorème d'inversion qui précède est donné à titre d'information. Dans la pratique, nous utiliserons uniquement le fait que la transformation de Laplace est injective. Cela résulte de l'expression de la transformée de Laplace en terme de transformatée de Fourier. Par exemple, deux fonctions $\mathcal{L}^1$ qui ont même transformée de Laplace sont égales sur $\mathbb{R}_+$, sauf peut-être en leurs points de discontinuité.

2) Dans les applications, on utilise souvent la transformation de Laplace car elle permet de transformer dérivation en multiplication par z et produit de convolution en produit usuel.

On cherche donc à transformer une expression analytique qui fait intervenir une fonction inconnue f, par exemple une équation différentielle, en une expression algébrique qui fait intervenir sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$. Si on arrive à déterminer la fonction F (l'image dans le langage du calcul opérationnel), on déterminera la fonction cherchée f (l'original dans le langage du calcul opérationnel) en utilisant la propriété d'injectivité de la transformation de Laplace et une table de transformées de Laplace classiques. Les propriétés de la transformation de Laplace établissent un dictionnaire

$$\textit{original} \quad \longleftrightarrow \quad \textit{image}$$

qui permet de faire la traduction entre les deux points de vue *original, image.* De nombreuses tables sont disponibles dans la littérature (voir par exemple [8]). On peut également utiliser des logiciels de calcul formel.

Pour plus de détails sur le *calcul opérationnel* (on dit aussi *calcul symbolique*), nous renvoyons à [2, 9]. Nous nous contenterons de développer un exemple.

6 Application de la transformation de Laplace

Équations différentielles à coefficients constants

La transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre p, à coefficients constants, comme l'équation (4.13) de la Section 4, voir les Travaux Dirigés.

Équation de Bessel

Nous examinons maintenant une équation différentielle un peu plus compliquée, l'équation de Bessel

$$x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0\,. \tag{6.15}$$

On cherche une fonction f solution de l'équation différentielle (6.15) sur $\mathbb{R}$, qui soit deux fois dérivable, bornée et telle que $f(0) = 1$ (noter que l'équation différentielle est singulière en 0 car le coefficient de y'' s'annule en 0).

Préliminaires.

On détermine la transformée de Laplace de la fonction $Y(t)t^{-1/2}e^{\pm it}$ en écrivant

$$\mathcal{L}(Y(t)t^{-1/2}e^{\pm it})(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\frac{e^{\pm it}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-(z\mp i)u^2}\,du\,.$$

Cette transformée de Laplace existe et est analytique dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0\}$. Quand $z = x \pm i$, avec $x > 0$, elle vaut $\sqrt{\pi/x}$, d'où l'on déduit, *par prolongement analytique*, que l'on a

$$\mathcal{L}(Y(t)t^{-1/2}e^{\pm it})(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z \mp i}}$$

pour $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0$, où l'on a pris la détermination principale de la racine carrée.

Application de la transformation de Laplace.

On applique maintenant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation

$$x\, f''(x) + f'(x) + x\, f(x) = 0$$

où f est la fonction cherchée (on rappelle qu'elle est supposée deux fois dérivable et telle que $f(0) = 1$, d'où il suit que $f'(0) = 0$). Si $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$, les propriétés de la transformation de Laplace donnent

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f)(z) = F(z)\,,\\
&\mathcal{L}(xf(x))(z) = -F'(z)\,,\\
&\mathcal{L}(f')(z) = zF(z) - 1\,,\\
&\mathcal{L}(f'')(z) = z\mathcal{L}(f')(z) = z^2F(z) - z\,,\\
&\mathcal{L}(xf''(x))(z) = -2zF'(z) + 1 - z^2F'(z)\,,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire l'équation satisfaite par la transformée de Laplace F,

$$(1 + z^2)\, F'(z) + z\, F(z) = 0\,.$$

On obtient alors $F(z) = C(1 + z^2)^{-1/2}$, où C est une constante à déterminer et où la racine carrée est la détermination principale (on a toujours $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0$). Il résulte du fait que $\mathcal{L}(f')(x)$ tend vers 0 quand x (réel) tend vers l'infini, que la constante C vaut 1.

Écrivant la fonction F comme $F(z) = (z - i)^{-1/2}\, (z + i)^{-1/2}$, on déduit des propriétés de la transformation de Laplace que l'on a

$$Y(t)f(t) = g_+ \star g_-(t)$$

où $g_\pm$ est la fonction

$$g_\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Y(t) \frac{e^{\pm it}}{\sqrt{t}}.$$

On trouve alors

$$Y(t)f(t) = \frac{Y(t)}{\pi} \int_0^t e^{i(t-2u)} u^{-1/2} (t - u)^{-1/2}\, du$$

puis

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(ut)}{(1 - u^2)^{1/2}}\, du$$

après changements de variable.

On constate que la fonction f ainsi trouvée est paire, indéfiniment dérivable, bornée et qu'elle vérifie l'équation différentielle (6.15), ce qui justifie nos calculs a posteriori.

Exercice 6.1. Montrer, soit en utilisant la formule ci-dessus, soit en recherchant directement une solution de l'équation de Bessel sous forme de la somme d'une série entière, que la fonction f est développable en série entière, de rayon de convergence infini. Cette fonction, notée usuellement J_0, est une des fonctions classiques dites *fonctions de Bessel.*

7 Résultats d'intégration

L'une des difficultés de ce chapitre réside dans le fait qu'une bonne compréhension de l'étude des transformations de Fourier et de Laplace demande des notions de base de la théorie de l'intégration. Nous réunissons dans cette partie les résultats les plus importants. Ils sont énoncés dans le cadre qui nous intéresse ici (fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, continues par morceaux) et sous des hypothèses plus restrictives que nécessaire (voir [1, 5] pour des énoncés dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue).

Rappel. Rappelons que $\mathcal{L}^1$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, continues par morceaux en dehors de ces points, et absolûment intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est à dire dont l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge, en $-\infty$, en $+\infty$, à droite et à gauche des points où la fonction f n'est pas définie.

Théorème 7.1. *[*Convergence dominée*] Soit f_n une suite de fonctions $\mathcal{L}^1$. On suppose qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $f_n(x)$ tende vers $f(x)$ sauf peut-être en un nombre fini de points. On suppose également qu'il existe une fonction positive g telle que $g \in \mathcal{L}^1$ et $|f_n| \leq g$ pour tout n. Alors, $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Théorème 7.2. *[*Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre*] Soit $f(t,x)$ une fonction continue de la variable $(t,x) \in]a,b[\times\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction positive $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $|f(t,\cdot)| \leq g$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors, la fonction $t \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\,dx$ est continue sur $]a,b[$.*

Théorème 7.3. *[*Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre*] Soit $f(t,x)$ une fonction de la variable $(t,x) \in]a,b[\times\mathbb{R}$, telle que $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ pour tout t. On suppose que f admet une dérivée partielle f'_t par rapport à la première variable et que $f'_t(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ pour tout t. On suppose de plus qu'il existe une fonction positive $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $|f'_t(t,\cdot)| \leq g$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors, la fonction $t \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\,dx$ est dérivable sur $]a,b[$ et sa dérivée est donnée par $t \to \int_{-\infty}^{\infty} f'_t(t,x)\,dx$.*

Remarque. Ce théorème s'étend au cas des fonctions $f(z,x)$ où z est une variable complexe et où la dérivation est prise au sens complexe (analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre).

Théorème 7.4. *[*Permutation de deux intégrales*] Soit $f(t,x)$ une fonction telle que $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de t On suppose que la fonction $x \to \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,x)|\,dt$ est dans $\mathcal{L}^1$. Alors, les deux intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\,dx\big)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\,dx\big)\,dt$ sont absolûment convergentes et elles sont égales.*

Théorème 7.5. *[*Permutation d'une série et d'une intégrale*] Soit f_n une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$. On suppose que la série de terme général $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n|\,dx$ converge. On suppose également que la série de terme général $f_n(x)$ convergente absolûment vers une fonction $f \in \mathcal{L}^1$. Alors, $\int_{-\infty}^{\infty} |f|\,dx = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n|\,dx$.*

Références

[1] Benoist-Gueutal, Pierrette – Courbage, Maurice. — *Mathématiques pour la physique,* Tome 1*, Intégrale de Lebesgue, Fonctions analytiques, Espaces normés*, Eyrolles, Paris 1992

[2] Benoist-Gueutal, Pierrette – Courbage, Maurice. — *Mathématiques pour la physique,* Tome 2*, Séries de Fourier, Transformation de Fourier et de Laplace, Distributions*, Eyrolles, Paris 1994

[3] Lelong-Ferrand, Jacqueline – Arnaudiès, Jean-Marie. — *Cours de Mathématiques,* Tome 2*, Analyse*, Dunod Université, Paris 1977

[4] Bony, Jean-Michel. — *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Presses de l'École Polytechnique, Palaiseau 1996

[5] Dieudonné, Jean. — Éléments d'analyse, tome 2, Gauthier-Villars 1968

[6] Gasquet, Claude – Witomski, Patrick. — *Analyse de Fourier et applications, filtrage, calcul numérique, ondelettes*, Masson, Paris 1995

[7] Hervé, Michel. — *Transformation de Fourier et distributions*, Presses Universitaires de France, Paris 1986

[8] Magnus, Wilhelm – Oberhettinger, Fritz – Soni, Raj Pal. — *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer, Berlin Heidelberg New York 1966

[9] Schwartz, Laurent. — Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris 1965

Pierre Bérard

Institut Fourier
UMR 5582 UJF – CNRS

Pierre.Berard@ujf-grenoble.fr

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/notes_cours.html