Daniel BOICHU
Vincent ROBIN

MT12 – Mathématiques pour l'ingénieur

Mise en forme du polycopié en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par Liza Lecarme et Marc Nguyen

Table des matières

Préliminaires

> Je me rappelais la confidence de ce chef m'avouant que s'il entendait, ce qui s'appelle *entendre*, tous les sons de son orchestre, il deviendrait fou. Heureusement, il n'entendait que la ligne générale dans laquelle chaque instrument trouvait sa hauteur exacte. De même ne prêtais-je l'oreille à la couleur d'un timbre qu'après m'être assuré qu'il s'intégrait dans l'ensemble.
>
> Michel Del Castillo, *la Tunique d'infamie.* (1997)

La géométrie élémentaire, mais aussi l'analyse fonctionnelle, sont d'excellents apprentissages du raisonnement. En théorie tout le monde s'accorde à dire combien il est crucial pour un citoyen de savoir raisonner. C'est la voie obligée pour participer à une société démocratique. En pratique, c'est une autre histoire, faire l'opinion est devenue une spécialité des « communicants ». Mais ces communicants ont besoin d'une matière meuble, ce n'est pas celle des hommes formés au raisonnement et à l'autonomie de penser. Le débat et la polémique oiseuse autour du sujet de mathématique du Bac S 2003 est à méditer à l'aune de ce qui précède : mathématique formatrice ou mathématique creuse ?

Histoire à suivre ...

Didon, encore appelée Elissa, est une princesse de Tyr. Elle prend la fuite quand Pygmalion, son frère, tue Sicharbas son mari. C'est la légende. La légende dit aussi que Pygmalion fabriqua une statue, celle-ci s'anima et il l'épousa ; d'où le sens de l'expression « Je suis ton Pygmalion ». Didon se réfugie dans une région côtière d'Afrique du Nord. Lors de son arrivée, le roi local nommé Jarbas déclare que la princesse peut acheter autant de terres qu'elle peut en entourer avec une peau de bœuf. On pouvait naturellement penser que la surface à acquérir serait en proportion de la longueur de son périmètre. Les « petites mains » de Didon se mettent à l'ouvrage pour découper une peau de bœuf en fins lambeaux qu'elles placent bout à bout. Jarbas décide que le domaine accordé longera la Méditerranée. L'histoire ne dit pas comment la corde de bœuf est disposée, mais Didon crée Carthage en ces lieux. On est alors en 900 avant J-C. Quelques années plus tard, Didon s'éprend de Enée. Elle se suicide ensuite.

Dans l'histoire extravagante précédente se trouve la racine du *problème isopérimétrique* qu'on peut formuler ainsi :

- Étant donné un bout de ficelle de longueur L, quelle forme doit-on lui donner pour entourer la plus grande surface ?

Ou bien (forme faible)

- Étant donné deux polygones réguliers de même longueur respectivement à m et n cotés. Quel est celui qui enserre la plus grande surface ?

Ce problème a une longue histoire, des péripéties. La solution est le cercle. « Fastoche » pourrait-on dire. Pourtant les démonstrations données au fil des années ont été d'abord fausses puis incomplètes.

Avec des techniques présentées dans ce cours, on apportera au problème isopérimétrique une réponse merveilleusement simple fondée sur une idée d'un grand bonhomme de la science des deux derniers siècles : Joseph Fourier.

Bien entendu ce cours a aussi un autre objectif tout aussi modeste : mettre en place, réveiller les mathématiques utiles à l'ingénieur par la mise en oeuvre de certaines techniques mais aussi par la tenue de raisonnements quelquefois difficiles.

Les "mathématiques pour l'ingénieur" présentées dans ce cours s'appuient sur l'**intégrale**, ou plutôt les intégrales, comme on le verra au chapitre 1. La notion d'intégrale est en travail depuis des siècles, on peut cependant simplifier cette histoire en ne retenant que quelques contributions phares. Parmi celles-ci, nous insistons sur celle d'Henri Lebesgue (1875-1941) qui présenta, en 1901, sa vision de l'intégrale.

L'intégrale de Lebesgue, par Lebesgue en personne

Fac-similé de la note que Henri Lebesgue a proposé à l'académie des sciences en 1901.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. – *Sur une généralisation de l'intégrale définie.*

Note de M. **H. Lebesgue**, présentée par M. Picard.

« Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives [1]. »

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante

$$y(x)(a \leq x \leq b) \tag{1}$$

on divise l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i, m_{i+1}, et réciproquement si y varie entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire de se donner les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M. Darboux. Voyons la seconde.

Soit la fonction y comprise entre m et M. Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p \tag{2}$$

$y = m$, quand x fait partie d'un ensemble E_0 ; $m_{i-1} < y \leq m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i.

Nous définirons plus loin les mesures λ_0, λ_i de ces ensembles. Considérons l'une ou l'autre des deux sommes

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i; m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i \tag{3}$$

si, quand l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite intégrable.

Considérons un ensemble de points de (a, b) ; on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles I_k ; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces

[1] Ces deux conditions imposées *a priori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit mesurable si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b) [2] . Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable ; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

Il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurables. On trouve que : *si une fonction limitée supérieurement en valeur absolue est telle que, quels que soient A et B, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $A < y \leq B$ est mesurable, elle est intégrable* par le procédé indiqué. Une telle fonction sera dite *sommable.* L'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. De sorte que, *si une fonction intégrable au sens de Riemann est sommable, l'intégrale est la même avec les deux définitions.* Or, *toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable*, car l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, et l'on peut démontrer que si, en faisant abstraction d'un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Cette propriété permet de former immédiatement des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant sommables. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nulle ; une fonction qui ne diffère de $f(x)$ qu'aux points d'un *ensemble de mesure nulle partout dense* et qui en ces points est égale à $f(x) + \varphi(x)$ est sommable sans être intégrable au sens de Riemann. *Exemple* : La fonction égale à 0 si x irrationnel, égale à 1 si x rationnel. Le procédé de formation qui précède montre que l'ensemble des fonctions sommables a une puissance supérieure au continu. Voici deux propriétés des fonctions de cet ensemble.

1. *Si f et φ sont sommables, $f + \varphi$ et $f\varphi$ le sont* et l'intégrale de $f + \varphi$ est la somme des intégrales de f et de φ.
2. *Si une suite de fonctions sommables a une limite, c'est une fonction sommable.*

L'ensemble des fonctions sommables contient évidemment $y = k$ et $y = x$; donc, d'après 1., il contient tous les polynômes et comme, (d'après 2), il contient toutes ses limites, il contient donc toutes les fonctions continues, toutes les limites de fonctions continues, c'est-à-dire les fonctions de première classe (voir Baire, *Annali di Matematica*, 1899), il contient toutes celles de seconde classe, etc.

En particulier, *toute fonction dérivée, limitée supérieurement en valeur absolue*, étant de première classe, *est sommable* et l'on peut démontrer que *son intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure, est une de ses fonctions primitives.*

Voici maintenant une application géométrique : si $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont limitées supérieurement, la courbe

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t) \tag{4}$$

a pour longueur l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Si $\varphi = \psi = 0$, on a la variation totale de la fonction f à variation limitée. Dans le cas où f', φ', ψ' n'existent pas, on peut obtenir un théorème presque identique en remplaçant les dérivées par les nombres dérivés de Dini.

(fin de la note de Lebesgue)

[2]Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesures nulles convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

Chapitre 1

L'intégrale utile du scientifique

1.1 Premier niveau de la théorie de l'intégration : intégrale de Riemann

1.1.1 Définition de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$; une subdivision de $[a,b]$. Soit g une fonction en escalier sur cette subdivision, valant λ_i sur $]a_i, a_{i+1}[$ $(i = 0, \dots, n-1)$. On n'impose pas de conditions sur les valeurs de g aux points de subdivision. On pose :

$$I(g) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i \tag{1.1}$$

C'est l'intégrale de g sur $[a,b]$.

1.1.2 Définition de l'intégrale des fonctions bornées sur des intervalles bornés

Pour f fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et bornée on dit que cette fonction est *intégrable* (au sens de Riemann) si

$$\sup\{I(g) : \text{ g en escalier sur [a,b]}, g \leq f\} = \inf\{I(g) : \text{ g en escalier sur [a,b]}, g \geq f\} \tag{1.2}$$

Exemples : Les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ $(\in \mathcal{C}^0_{morceaux}[a,b])$, les fonctions monotones sur $[a,b]$ et les fonctions réglées sur $[a,b]$ sont intégrables. L'indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ n'est pas Riemann-intégrable.

Le réel défini en (1.2) est appelé intégrale de f sur $[a,b]$ et noté $\int_a^b f(x)dx$. Pour une fonction f à valeurs complexes, dès que $Re(f)$ et $Im(f)$ sont Riemann intégrables on définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f(x))dx + i\int_a^b Im(f(x))dx \tag{1.3}$$

1.1.3 Approximation de l'intégrale par des sommes de Riemann

D'une manière générale, si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{1.4}$$

où $x_0 = a$, x_1, ..., $x_n = b$ est une subdivision de [a,b] et ξ_i choisi dans $[x_{i-1}, x_i[$, tend vers $\int_a^b f(x)dx$ quand le pas de la subdivision $(= sup(x_i - x_{i-1}))$ tend vers 0.

1.2 Deuxième niveau de la théorie de l'intégration : intégrale de Lebesgue

1.2.1 Vers la définition

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ d'image $f([a, b])$ incluse dans $\mathbb{R}$.

- L'idée de *l'intégrale de Riemann* est de subdiviser l'ensemble de départ $[a, b]$ et de considérer des combinaisons linéaires d'indicatrices d'intervalles associés à ces subdivisions. Voir la figure 1.1.
- L'idée de *l'intégrale de Lebesgue* est de subdiviser l'ensemble d'arrivée $f([a, b])$ et de considérer des combinaisons d'indicatrices d'ensembles images réciproques par f d'intervalles liés aux subdivisions. C'est un point de vue « statistique ». Voir la figure 1.2 et relire la note originale de Lebesgue page 6.

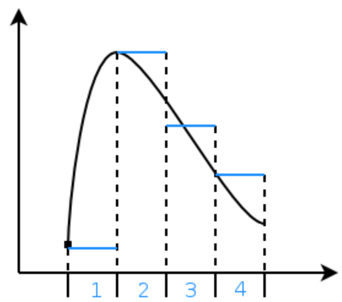

FIG. 1.1 – « A la Riemann »

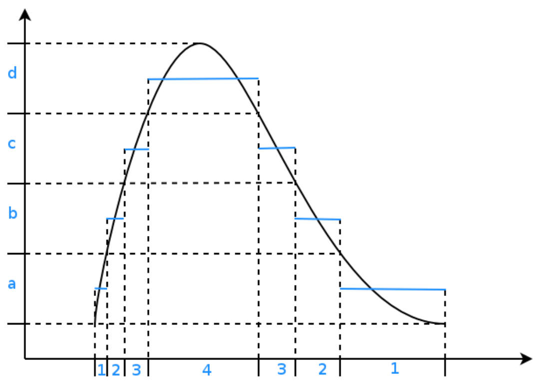

FIG. 1.2 – « A la Lebesgue »

La **différence fondamentale entre les points de vue de Riemann et de Lebesgue** ne se voit pas sur les figures précédentes : on verra bientôt que pour les fonctions continues considérées sur un intervalle compact, les deux définitions de l'intégrale donnent le même résultat ! MAIS dans le cas général, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction quelconque peut ne pas être une réunion finie d'intervalle (contarirement à ce que laisse penser la figure 1.2) ! ! Comment définir ces ensembles, comment les mesurer (*i.e.* leur attribuer une longueur) ?
Repérer dans la note originale de Lebesgue (page 6 et suivante) le passage où il traite ce problème.

Tribu des boréliens[1], ou la famille des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$
On part de $\mathbb{R}$ dont on sait mesurer les intervalles par leur longueur. Précisément $m[a, b] = m[a, b[= m]a, b[= b - a$. On désire étendre cette mesure à des parties de $\mathbb{R}$ plus générales. On admet qu'on peut construire une plus petite famille de parties de $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles et telle que :

[1]Ainsi nommés en hommage à Emile Borel. Voir la référence à Borel que fait Lebesgue dans sa note à l'académie des sciences.

(i) la famille contient $\varnothing$;
(ii) la famille est stable par passage au complémentaire ;
(iii) la famille est stable par réunion dénombrable.

Cette famille s'appelle la *tribu des boréliens* de $\mathbb{R}$ et est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou plus simplement $\mathcal{B}$. A cause de la propriété (iii), on dit aussi σ-algèbre à la place de "tribu". La tribu des boréliens est bien plus grande que l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$: vérifier qu'elle contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et aussi tous les fermés.

En pratique toutes les fonctions sont mesurables.
La tribu des boréliens est si grande qu'on pourrait penser que l'image réciproque d'un intervalle par une fonction f est un borélien. Ce n'est pas toujours le cas. Les fonctions pour lesquelles c'est le cas s'appellent les fonctions mesurables. Toutes les fonctions continues sont mesurables (dire pourquoi) et toutes les sommes, produits, quotients, limites, ..., de fonctions mesurables sont mesurables, si bien qu'il est très difficile de construire une fonction non mesurable. **Dans ce cours, toutes les fonctions rencontrées seront supposées mesurables, et ne reviendra plus sur cette notion**.

La mesure de Lebesgue
Il s'agit maintenant de "mesurer" les boréliens. Pour un intervalle, sa mesure sera par définition la longueur de l'intervalle. Pour un borélien qui est réunion disjointe finie ou infinie *dénombrable* d'intervalles, la mesure sera la somme des longueurs des intervalles le constituant. Plus généralement, on impose que si $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sont des boréliens disjoints deux à deux,

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{1}^{\infty} m(B_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}). \tag{1.5}$$

On admet que ces propriété permet de mesurer tous les boréliens. La mesure m ainsi définie est appelée *mesure de Lebesgue* de $\mathbb{R}$, elle va nous permettre de mettre en place une intégrale du même nom qui va étendre à une classe plus étendue de fonctions l'intégrale de Riemann précédemment définie.

Intégrale de Lebesgue des fonctions simples

Définition 1 (fonction simple) *Une* fonction simple *est une combinaison linéaire finie d'indicatrices de boréliens disjoints deux à deux :*

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{B_i} \qquad (\varsigma_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ \ldots,\ n), B_i \in \mathbb{B} \tag{1.6}$$

L'intégrale (de Lebesgue) d'une telle fonction est alors

$$I(g) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(B_i) \tag{1.7}$$

Intégrale de Lebesgue des fonctions positives

Définition 2 *L'intégrale (de Lebesgue) d'une fonction f positive est* par définition *:*

$$\int_{\mathbb{R}} f \ = \ sup\{I(g) \mid g \ simple \ et \ g \leq f\}. \tag{1.8}$$

Si $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, on dit que f est **sommable** *(c'est la terminologie originale de Lebesgue), ou* **Lebesgue-intégrable***.*

L' intégrale de Lebesgue peut être finie ou infinie. Par exemple : $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0$ (la fonction nulle est sommable) ; $\int_{\mathbb{R}} 1 = \infty$ (la fonction constante 1 n'est pas sommable).

Pour faire référence à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus se note aussi $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ ou aussi $\int_{\mathbb{R}} f(x)dm_x$ ou aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Proposition 3 (Propriété fondamentale) *Une fonction positive f (et mesurable) définie sur $\mathbb{R}$ est limite simple (ou ponctuelle) d'une suite croissante f_n de fonctions simples.*

On prend par exemple :

$$f_n = \left(\sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} \right) + n\mathbb{1}_{\{f \geq n\}} \tag{1.9}$$

On admettra que $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n}$ (les f_n étant définies en (1.9) ci-dessus).

1.2.2 L'exemple lumineux : la fonction de Dirichlet

La fonction de Dirichlet est l'indicatrice des rationnels de $[0,1]$. On la note f_D.

$$\begin{array}{rcl} f_D : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_D(x) = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \tag{1.10}$$

Cette fonction est prise comme exemple par Lebesgue lui-même (re-lire sa note page 6). Etudions en détail l'intégrabilité de f_D au sens de Riemann, puis au sens de Lebesgue.

Intégration au sens de Riemann

Sur $[0,1]$, une fonction en escalier minorante φ est nécessairement négative ou nulle, une fonction en escalier majorante ψ est nécessairement supérieure ou égale à 1. Par conséquent $I(\psi) \geq 1 > 0 \geq I(\varphi)$. Il en résulte que la fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Intégration au sens de Lebesgue

La fonction de Dirichlet est une fonction simple qui s'écrit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Comme $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est dénombrable, et comme chaque point est de mesure de Lebesgue nulle ; il en résulte que cet ensemble est de mesure nulle. Par conséquent l'intégrale (de Lebesgue) de f_D est nulle.

Ainsi pour la fonction de Dirichlet, l'intégrale de Riemann est dépourvue de sens alors que l'intégrale de Lebesgue est nulle.

1.2.3 L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Pour l'instant, on a défini l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions positives uniquement, cette intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$ peut être finie ou infinie.

Une fonction f à valeur réelles quelconque peut toujours s'écrire comme différence de 2 fonctions positives.

On pose $f^+ = \sup(f,0) \geq 0$ et $f^- = \sup(-f,0) \geq 0$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f & = & f^+ - f^- \\ |f| & = & f^+ + f^- \end{array} \right. . \tag{1.11}$$

On a aussi $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$.

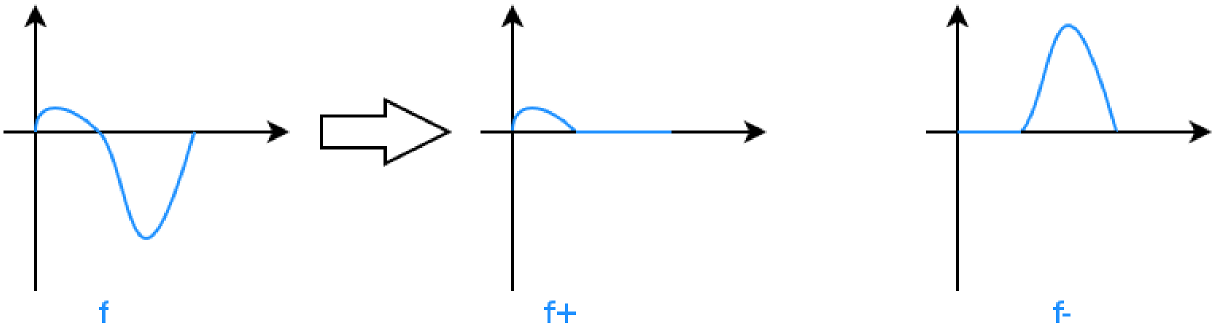

FIG. 1.3 – $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$

Comme f^+ et f^- sont positives, elles admettent des intégrales de Lebesgue, mais celles-ci peuvent être infinies, auquel cas $\int f^+ - \int f^-$ n'a pas de sens. D'où la définition suivante :

Définition 4 *Si une fonction f est telle que $\displaystyle\int |f| < \infty$, alors on dit que f est* **sommable** *(ou* **Lebesgue-intégrable***), et son intégrale (de Lebesgue) est, par définition,*

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^-. \tag{1.12}$$

Ainsi, f sommable si et seulement si $|f|$ est sommable. Les fonctions positives admettent toujours une intégrale de Lebesgue (qui peut être infini ...) ; ce n'est pas le cas des fonctions de signes quelconques (changeant).

Si f est à valeurs complexes

On décompose en partie réelle et imaginaire : $f = Re(f) + iIm(f)$. On suppose encore la condition restrictive $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$. L'intégrale précédente a bien un sens car le module de f est une fonction positive. Comme $|Re(f)| \leq |f|$ et $|Im(f)| \leq |f|$, d'après l'hypothèse $|Re(f)|$ et $|Im(f)|$ ont des intégrales finies. Par conséquent on peut poser :

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} Re(f) + i \int_{\mathbb{R}} Im(f). \tag{1.13}$$

En résumé :

1. Une fonction positive sur $\mathbb{R}$ admet toujours une intégrale (de Lebesgue) sur $\mathbb{R}$ finie ou infinie.
2. Une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes vérifiant $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$, qu'on dira *par définition* sommable sur $\mathbb{R}$, admet une intégrale (de Lebesgue) sur $\mathbb{R}$ qui est un élément de $\mathbb{C}$.

1.2.4 Intégrale sur une partie mesurable de $\mathbb{R}$

Si f est une fonction définie sur une partie (borélienne) E de $\mathbb{R}$. On pose $\displaystyle\int_E f = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E f$, ce qui donne un sens à l'intégrale de f sur E.

1.2.5 L'intégrale sur $\mathbb{R}^n$

Pour intégrer des fonctions simples sur $\mathbb{R}$, il a fallu prendre la longueur de parties de $\mathbb{R}$ autres que les intervalles. On a alors introduit la classe des boréliens de $\mathbb{R}$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et une mesure sur cette classe (généralisant la longueur des intervalles) appellée *mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ notée selon l'humeur m_1, dm_1, $dm_1(x)$, ou dx. On va procéder de manière analogue sur $\mathbb{R}^n$ tel que $n = 1,\ 2,\ \ldots$ En général,

$n = 1,\ 2,$ ou 3, le cas échéant 4 dans le cas de l'espace temps. On appelle *pavé* de $\mathbb{R}^n$ une partie de la forme $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. L'hypervolume ou *volume* tout simplement de ce pavé est :

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ \cdots\ (b_n - a_n) \tag{1.14}$$

On admet qu'il existe une tribu de $\mathbb{R}^n$ engendrée par les pavés appelée tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et une mesure définie sur elle, notée m_n (ou dm_n ou $dx_1\ \ldots dx_n$), qui généralise le volume des pavés. La théorie de l'intégrale se déroule ensuite identique en tous points à celle de la dimension $n = 1$. On écrira par exemple pour le cas $n = 2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f dm_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dm_2(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \tag{1.15}$$

Pour $n = 3$, on pourra faire figurer trois signes $\int$ successifs. Si E est un borélien de $\mathbb{R}^n$ on définira :

$$\int_E f dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_E f dm_n \tag{1.16}$$

1.2.6 L'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré

On peut encore étendre la notion d'intégrale de Lebesgue à des espaces qui ne sont plus mesurés par une mesure de Lebesgue. Cette extension s'applique immédiatement aux probabilités.

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω (famille de parties de Ω vérifiant 1., 2., 3. dans la section 1.2.1). Soit μ une *mesure* sur Ω c'est-à-dire par définition une fonction définie sur $\mathcal{F}$ à valeurs positives ou infinie et *σ-additive* (si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ collection dénombrable de parties de $\mathcal{F}$ deux à deux disjointes alors

$$\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right) = \sum_0^\infty \mu(A_n)).$$

La construction de l'intégrale (de Lebesgue selon la mesure μ) se fait alors comme précédemment et on la définit pour une *fonction f sommable* sur Ω. On la note :

$$\int_\Omega f d\mu \text{ ou } \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) \tag{1.17}$$

1.2.7 Exemples (très instructifs)

Exemple 1 : mesure de probabilité

Si la mesure μ est de masse 1 ($\mu(\Omega) = 1$) cette mesure est appelée *probabilité* et souvent notée P. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega f(\omega) dP_\omega$ si elle existe s'appelle *espérance* de f.

Exemple 2 : mesure de comptage

$\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{\text{parties de } \mathbb{N}\}$, $\mu(\{n\}) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$
Alors

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_0^\infty f(n). \tag{1.18}$$

(« Une série s'interprète comme une intégrale »)

Exemple 3 : mesure de Dirac

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on pose, pour tout $A \in \mathbb{B}$, et $a \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{si } 0 \notin A \end{cases} \tag{1.19}$$

On notera δ si $a = 0$. Cette probabilité est aussi appelée *mesure de Dirac*. On a $\int_{\mathbb{R}} f d\delta = f(0)$.

ATTENTION : *$d\delta$ n'est pas* une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, en effet $\delta([0,1]) = 1$ mais $\delta([1,2]) = 0$.

Exercice d'application immédiate

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F} =$ parties de $\mathbb{Z}$, $\mu\{n\} = 1$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Comment s'exprime $\int_{\mathbb{Z}} f d\mu$?

1.2.8 Ensemble négligeable

On sait qu'une fonction continue positive sur un intervalle $[a,b]$ et d'intégrale nulle est alors constamment nulle sur $[a,b]$. Dans notre nouveau cadre on a :

Théorème 5 *Soit $f \geq 0$, d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, alors $f = 0$ (pp).*

Par exemple $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} dx = 0$, et on sait aussi que $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc de mesure nulle. Mais, aussi l'ensemble de Cantor (inclus dans $[0,1]$) n'est pas dénombrable et de mesure (de Lebesgue) nulle. Ainsi, affirmer qu'un ensemble E est de mesure nulle (on dit aussi, et c'est une ***définition***, que l'ensemble est ***négligeable***) dans $[0,1]$ par exemple, c'est remarquer que E a une certaine maigreur. Pour autant, il peut être plus étoffé que « les rationnels de $[0,1]$ ». Du point de vue du nombre des éléments (la cardinalité) l'ensemble de Cantor est aussi étoffé que $[0,1]$, pour autant il est de mesure nulle alors que $[0,1]$ est de mesure 1 !

1.3 Consistance entre les intégrales

On a déjà observé avec la fonction de Dirichlet qu'une fonction non intégrable au sens de Riemann pouvait être sommable (au sens de Lebesgue). En fait, on a :

Théorème 6 *Si une fonction f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ alors f est sommable (Lebesgue) et les deux intégrales coïncident.*

La réciproque est fausse. Par ailleurs, la Riemann-intégrabilité admet la caractérisation suivante :

Théorème 7 *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$, alors f est Riemann intégrable $\Longleftrightarrow$ f continue presque partout.*

On rappelle qu'une propriété est vraie presque partout (notée p.p ou p.s en probabilité) si elle est vraie en dehors d'un certain ensemble de mesure nulle. On retrouve avec le théorème 7 le fait que la fonction de Dirichlet n'est pas Riemann intégrable puisqu'elle n'est jamais continue.

Remarque 8 Ce qui précède justifie l'habitude de ne pas distinguer par les symboles utilisés intégrales de Riemann et de Lebesgue. En outre, dès maintenant pour fixer les idées, on peut aussi remarquer que les fonctions admettant une intégrale impropre absolument convergente sont aussi sommables au sens de Lebesgue et les deux intégrales sont égales. Des bizarreries apparaîtront dans le cadre de la semi-convergence.

1.4 Troisième niveau de la théorie de l'intégration : l'intégrale impropre

1.4.1 Exemple de base

Soit $\alpha > 0$, on cherche à donner un sens à l'expression $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Pour cela on considère $\displaystyle\int_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $A > 1$, cette intégrale est clairement définie car $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est une fonction continue sur $[1, A]$. Sachant que :

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \left| \begin{array}{cccc} \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A & = & \dfrac{A^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ [\ln x]_1^A & = & \ln A & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{array} \right. , \tag{1.20}$$

l'intégrale précédente a une limite quand $A \to \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Cette limite est notée $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, on dit qu'on a affaire à une *intégrale généralisée convergente* ou encore *intégrale impropre*.

1.4.2 Remarque de terminologie

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est appelée « impropre » par opposition à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha}$ servant à la définir. Cette dernière est en effet « propre », autrement dit c'est une intégrale de Riemann habituelle (et donc aussi une intégrale de Lebesgue).
L'intégrale impropre est une limite d'intégrales (de Riemann souvent). Par ailleurs, une intégrale (Riemann ou Lebesgue) est aussi une limite (remarquer les sup dans les définitions d'intégrale).

1.4.3 Plus généralement

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ (b fini ou infini) on dit que *l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ existe* et est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ si $\int_a^c f(x)dx$ admet une limite quand $c \to b^-$. Cette limite est justement l'intégrale impropre en question.

Théorème 9 *Si $\displaystyle\int_a^b |f| < \infty$ alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ existe et c'est aussi l'intégrale de Lebesgue de f.*

Remarque 10 On dit encore que pour les intégrales impropres, l'absolue convergence implique la convergence.

On écrit aussi avec la convention ACV pour Absolument ConVergente et CV pour ConVergente :

$$ACV \implies CV \tag{1.21}$$

On est invité à rapprocher cette propriété de celle, bien connue, des séries numériques à savoir ($\sum_0^\infty |a_n|$ CV $\implies$ $\sum_0^\infty a_n$ CV).

1.4.4 Deux exemples incontournables

Exemple 1

Les deux intégrales impropres suivantes sont aussi des intégrales de Lebesgue car les fonctions intégrées sont positives et on a :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ CV ssi } \alpha > 1 \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ CV ssi } \alpha < 1 \tag{1.22}$$

Exemple 2

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente (en fait $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$), mais $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \infty$. Ainsi la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas sommable sur $[0, +\infty[$, mais elle y admet une intégrale impropre (qui n'est pas une intégrale de Lebesgue). On dit que l'intégrale est semi-convergente (SCV) sur $[0, +\infty[$.

1.4.5 Remarque

Il y a beaucoup d'autres prolongements de l'intégrale : intégrale convergente en valeur principale ($vp \int f$), intégrale de Denjoy, Carleman... On reviendra plus tard sur la convergence en valeur principale.

1.5 Espaces fonctionnels classiques

1.5.1 Notations

On introduit ici des espaces et des notations commodes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (on pourrait aussi bien prendre à la place de I un domaine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

- L'espace des *fonctions sommables* sur I *muni de la mesure de Lebesgue*,

$$L^1(I, m_1) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} \quad : \quad \int_I |f| < \infty \right\},$$

  qu'on note simplement $L^1(I)$.
- L'espace des fonctions de carré sommable ou encore espace des fonctions d'énergie finie sur I :

$$L^2(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} \quad : \quad \int_I |f|^2 < \infty \right\}.$$

- L'espace des fonctions bornées sur I :

$$L^\infty(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} \quad : \quad sup_I |f| < \infty \}.$$

On doit remarquer que $\|f\|_1 = \int_I |f|$, $\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty = sup_I |f|$, sont des normes sur $L^1(I)$, $L^2(I)$, $L^\infty(I)$ respectivement. La norme « L^2 » dite encore « de l'énergie » est déduite d'un produit scalaire à savoir : $\int_I f(x)\overline{g}(x)dx$.

Signalons quelques relations d'inclusion entre espaces fonctionnels :

- $\mathcal{C}\ [a,b] \subset\ L^1([a,b])$. En effet une fonction continue sur un *segment* $[a,b]$ est Riemann intégrable et par suite sommable sur $[a,b]$.
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+) \not\subset L^1(\mathbb{R}^+)$. *Exemple* : $f(x) = \frac{1}{1+x}$
- $\mathcal{C}(]0,1]) \not\subset L^1(]0,1])$. *Exemple* : $f(x) = \frac{1}{x}$
- Si I est un intervalle *borné* (pas nécessairement fermé) on a $L^\infty(I) \subset L^2(I) \subset L^1(I)$.

1.5.2 Mesure de comptage

On part maintenant de $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage μ. Une fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est alors une suite u réelle ou complexe et l'intégrale relativement à μ est $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} ud\mu = \sum_{u=0}^{\infty} u_n$. On introduit :

$$l^1(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \sum_0^{\infty} |u_n| < \infty\right\} \tag{1.23}$$

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \sum_0^{\infty} |u_n|^2 < \infty\right\} \tag{1.24}$$

$$l^{\infty}(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \sup |u_n| < \infty\} \tag{1.25}$$

On a de même sur ces espaces « discrets » les normes :

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \sum_0^{\infty} |u_n| \\
\|u\| &= \sqrt{\sum |u_n|^2} \\
\|u\|_{\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|
\end{aligned}$$

Nota : $\|u\|$ est la norme de l'énergie, qui est un prolongement naturel de la norme euclidienne.
Avec notre théorie de l'intégrale, on retrouve très facilement les résultats classiques sur les séries.

Par exemple

$$\int_{\mathbb{N}} |u|\, d\mu < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} ud\mu \text{ existe} \tag{1.26}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_0^{\infty} |u_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ existe} \tag{1.27}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\sum |u_n| \text{ CV } \Rightarrow \sum u_n \text{ CV }\right) \tag{1.28}$$

1.6 Exemples (variés)

1.6.1 Exemple 1

$$\iint \ldots \int_B \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^{\alpha}}, \quad B \text{ boule unité de } \mathbb{R}^n \tag{1.29}$$

Cette intégrale généralisée converge ssi $\alpha < n$.
Démontrer ce résultat pour $n = 3$.

1.6.2 Exemple 2

$$\iint_{\text{carré fermé}} dxdy = \iint_{\text{carré ouvert}} dxdy \tag{1.30}$$

En effet, la frontière du carré est de mesure de Lebesgue nulle sur $\mathbb{R}^2$ (aire nulle).

1.6.3 Exemple 3

$$\frac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^+) \tag{1.31}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\
&\geq \sum \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |\sin x|\right). \sum \frac{1}{n+1} = \infty
\end{aligned} \tag{1.32}$$

1.6.4 Exemple 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} dx$?

On pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$. Comme à l'infini, on a $\dfrac{\sin x}{x} \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$, on peut faire apparaître et disparaître $\frac{\sin x}{x}$ dans $f(x)$. Ainsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + g(x)$ avec $g(x) = \sin x(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{x})$. Mais $|g(x)| \leq \frac{A}{x^2}$ sur un voisinage de l'infini. En définitive, comme $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}$ SCV et $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)$ ACV, on déduit que $\int_0^{\infty} f$ SCV.

1.6.5 Exemple 5

$\displaystyle\int_{]0,1]} \ln x dx$ est ACV donc sommable sur $]0,1]$. En effet comme $\sqrt{x}\ln x$ est bornée sur $]0,1]$, il vient $|\ln x| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(]0,1])$.

1.7 Théorèmes d'interversion

Il s'agit de pouvoir décider facilement si $\displaystyle\int \lim f_n = \lim \int f_n$?

Bien sûr il faut s'assurer de l'existence des deux membres, mais cela ne suffit pas comme le montre **l'exemple de La bosse glissante**.

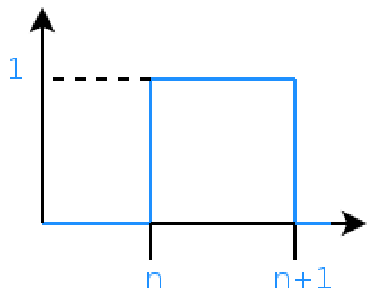

FIG. 1.4 – Graphe de $f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n)$

Soit $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n)$ avec n entier, $x \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que f_n converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle notée 0. Par suite : $\int_{\mathbb{R}} \lim f_u = 0 \neq 1 = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n$. Les deux théorèmes qui suivent donnent des conditions simples d'utilisation, entraînant $\displaystyle\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

1.7.1 Théorème de convergence monotone (Levi 1906)

Théorème 11 *Soit (E, μ) un espace mesuré et (f_n), $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ une suite de fonctions positives sur E vérifiant :*

1. *La suite est croissante $f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \ldots$*
2. *La suite converge presque partout vers une fonction f*

Alors :

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu \tag{1.33}$$

Remarque : La quantité (1.33) peut être finie ou infinie, autrement dit les fonctions f_n, f considérées ne sont pas supposées sommables sur E.

Exemple

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(x) \frac{1}{1+x^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.34}$$

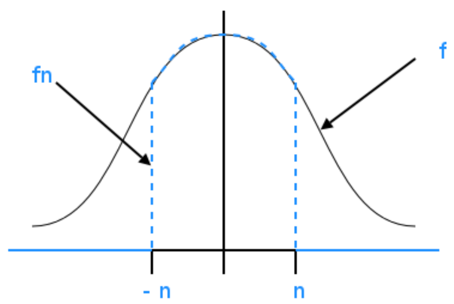

FIG. 1.5 – Graphe de f et de $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}(x) f$

Chaque fonction f_n est positive et admet donc une intégrale de Lebesgue. Comme f_n est bornée sur son support borné, continue, c'est aussi une intégrale de Riemann. $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan n$. La suite converge simplement vers la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Il résulte $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \to \infty} 2 \arctan n = \pi$. On retrouve le fait que f est sommable sur $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$) ; que son intégrale (de Lebesgue) qui est aussi une intégrale généralisée convergente vaut π.

1.7.2 Théorème de convergence dominée (Lebesgue)

Théorème 12 (convergence dominée de Lebesgue) *Soit (E, μ) un espace mesuré et (f_n) $n = 0, 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{C}$ vérifiant :*
(i) **(convergence ponctuelle)** *(f_n) converge presque partout vers une fonction f ;*
(ii) **(domination)** *Il existe $g \in L^1(E, \mu)$ telle que $\forall n = 0, 1, \ldots$ $|f_n| \leq g$ (p.p) .*
Alors chaque f_n $(n = 0, 1, \ldots)$ et f sont sommables sur E, en outre

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu. \tag{1.35}$$

Exemple 1

La bosse glissante et ses translatées entières ne peuvent être collectivement dominées, c'est pourquoi le théorème d'interversion ne s'applique pas.

Exemple 2

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.36}$$

On a $|f_n| \leq \frac{1}{1+x^2} = g$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Mais aussi (f_n) converge ponctuellement vers la fonction $f = \left\| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$

Par le théorème de convergence dominée on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2x^2} dx = 0 \tag{1.37}$$

Exemple 3

Limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$?

Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. On a toujours $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$. Par suite $|f_n(x)| \leq g(x) = e^x e^{-2x} = e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. D'autre part f_n converge simplement vers e^{-x}. La limite cherchée est $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$.

Contre exemple 4

On considère la *bosse piquante* la plus simple $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. (Terminez vous-même, cela ne vous fera pas de mal !)

1.8 Intégrale dépendant d'un paramètre

Il s'agit de donner des conditions aussi simples que possible pour manipuler

$$F(t) = \int_\Omega f(t,x) d\mu_x \tag{1.38}$$

La fonction du type (1.38) s'appelle *intégrale dépendant d'un paramètre* : ce genre de fonction intervient dans tous les domaines de la science y compris dans les domaines les plus appliqués. On part d'une fonction de deux variables (t et x) définie sur $J \times \Omega$ où J est une partie de $\mathbb{R}$ au voisinage d'un point t_0 fixé, (J sera un intervalle ouvert contenant t_0) et Ω sera un espace mesuré avec une mesure notée μ. Pour ne pas se compliquer la vie (inutilement ?) on pourra remplacer Ω par un intervalle et μ par la mesure de Lebesgue dx sur cet intervalle.

1.8.1 Théorème (continuité de F)

Théorème 13 *Supposons que :*

(i) **(continuité)** *Pour μ presque tout x, la fonction partielle $f(\cdot, x)$ est continue en t ;*

(ii) **(domination)** *Il existe $g(x) \in L^1(\Omega, d\mu)$ tel que pour tout $t \in J$, $|f(t,x)| \leq g(x)$.*

Alors F est continue en t_0.

Exemple 1 : transformée de Laplace

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$, la transformée de Laplace de u est :

$$\mathcal{L}(u)(p) = \int_0^\infty e^{-px} u(x) dx \tag{1.39}$$

$\mathcal{L}(u)$ est continue sur $[0, +\infty[$ d'après le théorème précédent.

Exemple 2 : fonction Γ d'Euler

La fonction Γ (gamma) est continue sur $]0, +\infty[$, voir TD.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \tag{1.40}$$

1.8.2 Théorème (de dérivation sous le signe somme)

Théorème 14 *On suppose que pour chaque $t \in J$, $f(t, \cdot)$ est sommable sur Ω et que :*
(i) **(dérivation)** *pour μ presque tout x, $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, x)$ existe pour chaque $t \in J$*
(ii) **(domination)** *il existe $g(x) \in L^1(\Omega, \mu)$ tel que*

$$\forall t \in J; \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x). \tag{1.41}$$

Alors F dérivable sur J et pour chaque $t \in J$,

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu_x. \tag{1.42}$$

Commentaires

1. On rappelle qu'une propriété est vraie μ presque tout x (μ pp) si cette propriété est vraie pour *tout* x en dehors d'un ensemble de mesure nulle (inclus bien-sûr dans Ω).
2. Il y a de nombreuses variantes du théorème précédent qu'on est amené à rencontrer au fil des lectures en physique, statistique, traitement du signal, mathématique... Comparez-les au théorème précédent pour affiner votre compréhension.

Exemple travaillé

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$?

- On pose $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$.
- D'après le théorème de continuité, F est continue sur $]0, +\infty[$. Avec un effort supplémentaire, on démontre que F est continue en 0, également (difficile).
- Par le théorème de dérivation, pour $t > 0$ on a $F'(t) = -\int_0^{\infty} (\sin x) e^{-tx} dx = \frac{-1}{1+t^2}$ (la dernière égalité suit d'un petit calcul à faire absolument !).
- Il résulte que $F(t) = -\arctan t + C$.
- En reprenant l'expression intégrale de $F(t)$ on observe que « $F(\infty)$ »$= 0$ et par suite $C = +\frac{\pi}{2}$.
- Quand $t \to 0^+$, en se souvenant de la continuité de F en 0, il vient $F(0) = \arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- En conclusion on a :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}} \tag{1.43}$$

Contre exemple à travailler

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx \,?$$

Par le théorème de continuité, F est continue sur $\mathbb{R}$. Observer que le théorème de dérivation ne peut s'appliquer (dire pourquoi). On verra que $F(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ (c'est une transformée de Fourier classique), ainsi en dehors de 0 on a affaire à une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$. Cette propriété s'observe donc très mal avec la présentation intégrale ci dessus !

1.8.3 Importance de ces théorèmes

On utilise beaucoup les théorèmes précédents à propos des transformées classiques :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)p &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad \text{(Laplace)} \\
F(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\imath\xi t}dt \qquad \text{(Fourier)} \\
\mathcal{S}(f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}dt \qquad \text{(Stieltjes)}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

La base des distributions

« Une théorie est belle quand les résultats s'enclenchent les uns dans les autres dans la simplicité et qu'on a le sentiment de la nouveauté.
Réduire les problèmes issus de la physique à un problème de mathématiques pures, ça ne va pas. Il faut l'éviter autant que possible.
On doit pouvoir introduire de nouvelles méthodes même si elles ne sont pas comprises ; par exemple travailler mécaniquement sur des séries divergentes. Pourquoi ne pas dériver une demi-fois si ça nous arrange ! »

Ces affirmations un peu sentencieuses ont toutes à voir avec la théorie des distributions. Le propos du chapitre est d'exposer les rudiments de cette théorie.

2.1 Introduction heuristique

Avant Joseph Fourier et son mémoire sur l'équation de la chaleur (1807), une fonction est une correspondance entre nombres issue d'une formule explicite ; c'est ensuite que l'on trouve la définition que chacun connaît. Plus récemment, physiciens et ingénieurs ont travaillé avec une fonction δ nulle partout sauf en 0 (où elle vaut $+\infty$) de telle sorte que $\int \delta dx = 1$. Bien évidemment, une telle fonction ne peut exister car même avec $\delta(0) = +\infty$ on a malgré tout $\int \delta dx = 0$, il est donc impossible d'avoir $\int \delta dx = 1$. Ainsi, une nouvelle interprétation de δ est possible comme répartition de masse sur $\mathbb{R}$ avec toute la masse concentrée en 0. On aboutit à la notion de mesure qui s'interprétera aussi comme cas particulier de distribution. On passe maintenant à « l'action mathématique ».

2.2 Fonction comme fonctionnelle

2.2.1 Introduction

Pour obtenir la valeur d'une fonction f en un point x_0, on peut faire agir f sur des indicatrices, par exemple considérer la quantité $\displaystyle\int f \mathbb{1}_{]x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0+\frac{\varepsilon}{2}[}$ qui vaut à peu près $\varepsilon f(x_0)$ (si f est assez régulière sur un voisinage de x_0). Mais les indicatrices ne sont pas régulières (présence de coins) et ne permettent pas des intégrations par parties. On va donc choisir pour fonctions test des « versions arrondies » des indicatrices précédentes.

2.2.2 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou la classe des fonctions test sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables ($\mathcal{C}^\infty$) à support borné dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, son *support* est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq 0\}$. Il est noté *supp* f. Par exemple : *supp* $\mathbb{1}_{[0,1]} =$ *supp* $\mathbb{1}_{]0,1[} = [0,1]$.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cet espace n'est pas réduit à la fonction nulle. Construisons par exemple une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support $[-1,1]$. On part de la fonction $u(t)$ égale à $e^{\frac{-1}{t}}$ pour $t > 0$ et nulle ailleurs. On montre par récurrence que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on pose alors $\Psi(x) = u(1-x^2)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et de support $\left\{1-x^2 \geq 0\right\}$ soit encore $\{|x| \leq 1\} = [-1,1]$.

Exercice

Soit $[a,b]$ un segment réel, construire une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ayant pour support $[a,b]$. Idée : réaliser des translations, dilatations, sur la fonction Ψ ci-dessus.

Théorème 15 *Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*
Si pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\displaystyle\int f\varphi = \int g\varphi$ alors $f = g$ (pp).

Ce théorème dit que pour définir une fonction sur $\mathbb{R}$, on peut la préciser en donnant ses images $f(x)$ des points de $\mathbb{R}$ ou aussi bien par ses actions $\int f\varphi$ sur les fonctions test sur $\mathbb{R}$.

On a également besoin d'une « topologie » de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{D}$ en abrégé) ; en fait on se contente de définir la convergence dans $\mathcal{D}$.

Définition 16 *On dit qu'une suite φ_n d'éléments de $\mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ et on note $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si :*

1. *Les supports des φ_n et φ sont dans un* même *segment de* $\mathbb{R}$
2. *Il y a convergence uniforme de φ_n vers φ, de φ_n' vers φ', ..., de $\varphi_n^{(k)}$ vers $\varphi^{(k)}$, ...*

En formalisant ce qui précède on a :

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \varphi \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \exists S \text{ segment réel tel que } supp\ \varphi \subset S;\ supp\ \varphi_n \subset S,\ \forall n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup\limits_{x\in S} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

A l'aide de cette manière de converger (un peu spéciale !) dans $\mathcal{D}$, on pourra définir continuité, etc... pour les distributions que l'on va définir maintenant. On remarquera enfin que ce qui précède se généralise aisément à l'espace des fonctions test sur $\mathbb{R}^n$ (: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) ou sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (: $\mathcal{D}(\Omega)$).

2.3 Définition d'une distribution

2.3.1 Définition

Une *distribution* T sur $\mathbb{R}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto\ < T, \varphi > \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si T est à valeurs réelles on dit que la *distribution est réelle.*

Remarque

Une application linéaire d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V dans $\mathbb{C}$ s'appelle une *forme linéaire.* Ainsi T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ (en abrégé $\mathcal{D}'$). De manière analogue, $\mathcal{D}'(\Omega)$ sera l'ensemble des distributions sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Tous ces ensembles sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On note aussi $< T, \varphi >$ l'image de $\varphi \in \mathcal{D}$ par la distribution T.

Exemple 1 : Distribution de Dirac

δ, distribution de Dirac, est définie par

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto < \delta, \varphi >= \varphi(0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Exemple 2 : Distributions régulières

Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$; l'action $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f\varphi$ définit une distribution sur Ω notée T_f.

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto < T_f, \varphi >= \int_\Omega f\varphi \end{aligned} \tag{2.4}$$

On a vu que $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$ pp sur Ω. Une distribution représentée par une fonction s'appelle une distribution *régulière*. Ainsi δ n'est pas une distribution régulière.

2.4 Dérivée d'une distribution

Définition 17 *Soit T une distribution sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}$), la dérivée de T au sens des distribution, notée T', est définie par*

$$\begin{aligned} T' : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto < T', \varphi >= - < T, \varphi' > \end{aligned} \tag{2.5}$$

Remarques

- On vérifie qu'effectivement la formule (2.5) définit bien une distribution.
- Plus généralement, la dérivée $k^{\text{ième}}$ est définie par :
  $< T^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < T, \varphi^{(k)} >$.
- Pour une distribution sur $\mathbb{R}^n$, on définit de manière analogue une dérivée partielle.

Exemples

1. $(T_Y)' = \delta$ (On note souvent et on dit $Y' = \delta$ au sens des distributions)
2. Si f est $\mathcal{C}^1$ alors $(T_f)' = T_{f'}$
3. **(formule des sauts)** Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par exemple avec une unique discontinuité en x_0 de saut σ, on a $(T_f)' = f' + \sigma\delta_{x_0}$ (dans cette formule, f' est la dérivée usuelle définie partout sauf en x_0, en outre $\sigma = f(x_0^+) - f(x_0^-)$).

Exercice

$$(\ln|x|)' = vp\frac{1}{x} \tag{2.6}$$

On aura vérifié auparavant que $\ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et on rappelle que $vp\frac{1}{x}$ est la distribution définie par :

$$< vp\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.7}$$

2.5 Multiplication fT quand f est $\mathcal{C}^\infty$

Définition 18 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et T une distribution sur Ω. La distribution fT est définie par*

$$\begin{array}{rcl} fT : \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & < fT, \varphi > = < T, f\varphi > \end{array} \tag{2.8}$$

On vérifiera que (2.8) définit bien une distribution. Il est à noter que $f\varphi$ reste une fonction test car f est $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple :

$$f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0} \text{ (échantillonnage)} \tag{2.9}$$

2.6 Support d'une distribution

On dira que deux distributions $\mathbb{R}$ sont égales sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad < T_1, \varphi > = < T_2, \varphi > \tag{2.10}$$

Exemple : 2δ et δ coïncident sur $\mathbb{R}^*$.

Il est maintenant possible de définir le support d'une distribution T comme le plus *petit ensemble fermé* F tel que $T = 0$ sur le complémentaire de F (on aura remarqué que le complémentaire d'un fermé est un ouvert).

$$\mathit{supp}\ \delta = \{0\} \tag{2.11}$$

Théorème 19 *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$, alors supp $T = 0$ ssi T est une combinaison linéaire finie de Dirac et de ses dérivées.*

2.7 Convergence d'une suite T_n de distributions

Définition 20 (convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou convergence faible) *Une suite T_n de distributions sur Ω converge faiblement vers T si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \qquad < T_n, \varphi > \xrightarrow[n \to +\infty]{} < T, \varphi > \tag{2.12}$$

On note $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} T$.

Remarquer le parallèle entre la convergence faible d'une suite T_n et la convergence simple (ou ponctuelle) d'une suite de fonctions.

Exemples

1. $\frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\mathcal{D}'} \delta$

2. Suite régularisante : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que *supp* $f = [-1, 1]$, f est $\mathcal{C}^\infty$, $0 \leq f \leq 1$. On pose $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Alors $f_\varepsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\mathcal{D}'} \delta$ (voir TD).

2.8 Primitive d'une distribution sur $\mathbb{R}$

On remarque d'abord que deux primitives d'une même distribution diffèrent d'une constante (on démontre que $T' = 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $T = \text{cte}$)

En revanche, une fonction sur $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de primitive, sauf si on raisonne p.p. Montrer par exemple que $\mathbb{1}_{\{0\}}$ est une fonction qui ne peut avoir de primitive sur $\mathbb{R}$. On a quand même :

Théorème 21 *Une distribution sur $\mathbb{R}$ admet toujours une primitive (unique à une distribution constante additive près).*

La procédure de passage à la primitive est toujours une procédure de régularisation.

Démonstration

Faisons l'analyse de la question. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ et on appelle S une primitive de T. On a nécessairement d'une part $< S', \varphi >=< T, \varphi >$ et d'autre part $< S', \varphi >= - < S, \varphi' >$. Par conséquent, S est obligatoirement définie sur les fonctions test qui sont des dérivées de fonction test. Autrement dit, dès que $\varphi \in \mathcal{D}$ a une primitive dans $\mathcal{D}$ notée Ψ, on a :

$$< S, \varphi >= - < T, \Psi > \tag{2.13}$$

Bien entendu, S n'est pas définie partout sur $\mathcal{D}$ à l'aide de (2.13). Pour terminer on procède de la manière suivante :

1. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ a une intégrale nulle (à savoir $\int \varphi = 0$), alors $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ est une primitive de φ appartenant à $\mathcal{D}$.
   Bien entendu il ne peut y avoir qu'une seule primitive dans $\mathcal{D}$, pourquoi ?
2. On choisit une fonction test φ_0 telle que $\int \varphi_0 = 1$ (observer que φ_0 existe bien). Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\varphi = \underbrace{\varphi - \left(\int \varphi\right) \varphi_0}_{\psi} + \left(\int \varphi\right) \varphi_0 \tag{2.14}$$

On remarque que ψ est une fonction test d'intégrale nulle. D'après le point 1, cette fonction admet une primitive $\Psi_1 \in \mathcal{D}$, qui est

$$\Psi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(t) - \left(\int \varphi\right) \varphi_0(t)\right] dt. \tag{2.15}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} < S, \varphi > &= < S, \psi > + \left(\int \varphi\right) < S, \varphi_0 > \quad \text{(par linéarité de} S\text{)} \\ &= - < T, \Psi_1 > + < \underbrace{< S, \varphi_0 >}_{\text{distribution cte}}, \varphi > \end{aligned} \tag{2.16}$$

On remarque que (2.16) définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$ et que $S' = T$. En effet,

$$< S', \varphi >= - < S, \varphi' >=< T, \varphi >, \tag{2.17}$$

puisque $\int \varphi' = 0$ et $\int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)dt = \varphi(x)$.

2.9 Exemples de distributions

2.9.1 Distribution sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) portée par une courbe γ orientée

On suppose la courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une distribution δ_γ (Dirac porté par la courbe γ) par

$$\begin{aligned} \delta_\gamma : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto < \delta_\gamma, \varphi >= \int_\gamma \varphi \end{aligned} \tag{2.18}$$

où $\int_\gamma \varphi$ est une intégrale curviligne (souvenir de MT22 pour les étudiants issus de TC) qui se calcule avec un paramétrage de γ. Par exemple, si

$$\begin{array}{rcl} g:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & g(t) \end{array} \tag{2.19}$$

est un paramétrage de γ, alors

$$\int_\gamma \varphi = \int_0^1 \varphi(g(t))|g'(t)|dt. \tag{2.20}$$

Plus généralement, si ρ est une fonction régulière définie sur la courbe γ, on considérera

$$< \rho\delta_\gamma, \varphi >= \int_\gamma \rho\varphi. \tag{2.21}$$

2.9.2 Distribution portée par une surface

De la même manière, à propos de distribution portée par une surface Σ régulière (de $\mathbb{R}^3$), on introduit la distribution δ_Σ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \delta_\Sigma : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & < \delta_\Sigma, \varphi >= \int\int_\Sigma \varphi \end{array} \tag{2.22}$$

où $\int\int_\Sigma \varphi$ est une intégrale surfacique (chercher par vous-même la formule de calcul à l'aide d'un paramétrage de Σ).

Chapitre 3

Fourier périodique

3.1 Heuristique

Au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle, on connaît l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

u est la température dans une barre rectiligne au point d'abscisse x à la date t. Les scientifiques de l'époque, aussi bien physiciens qu'ingénieurs ou mathématiciens désirent « écrire »les solutions de (3.1) soumise à des conditions initiales ou aux limites variées.

En ces temps-là, pourtant historiquement denses, la distinction entre physicien avec un grand P, ingénieur technologue avec un grand T, mathématicien avec un grand M n'a pas encore exercé de ravages.

Le problème précédent se ramène à exprimer une fonction f de période 2π à l'aide de fonctions connues par analogie avec l'écriture

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{3.2}$$

Fourier, occupé à assécher les marais de la Dombes, près de Grenoble, a par ailleurs l'idée que $\sin x$, $\cos x$ et leurs lignes harmoniques suffisent. Dans la présentation actuelle il prétendrait que f est une combinaison linéaire infinie des « fonctions de base » e^{inx} quand $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
Autrement dit,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}. \tag{3.3}$$

Si n_0 est un entier relatif fixé, en multipliant les deux membres de l'équation précédente par e^{-in_0x} et en intégrant entre 0 et 2π, il vient (après avoir utilisé $\int\sum = \sum\int$) :

$$c_{n_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-in_0x}dx \qquad \text{avec } n_0 \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

Ainsi, en suivant Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds\right)e^{inx}. \tag{3.5}$$

Les matheux se sont inquiétés des sommes infinies, des convergences utilisées. Les praticiens ont transformé les sommes infinies en sommes finies et, malgré cela, ont obtenu des résultats remarquables dans de nombreux domaines. Cette effervescence scientifique n'est pas retombée à l'aube du 21$^{\text{ème}}$ siècle ! Elle a pris alors un tour nouveau avec la théorie des ondelettes (et la pratique en traitement du signal).

3.2 La clef

Soit E un espace euclidien ($\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire) pourvu d'une base $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ orthonormée.

Un vecteur $\overrightarrow{v}$ s'analyse par ses coordonnées :

$$x_i = < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_i} > \quad \text{avec } i = 1, \ldots,\ n; \tag{3.6}$$

et se synthétise par :

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}. \tag{3.7}$$

Comme moyen mnémotechnique, penser encore et toujours à l'espace familier $\mathbb{R}^3$. En outre,

$$\|\overrightarrow{v}\|^2 = \sum x_i^2 \quad \text{(Pythagore ou aussi bien Parseval).} \tag{3.8}$$

L'astuce, dans ce qui va suivre, est de transposer l'analyse synthèse à un contexte d'espace fonctionnel de dimension infinie, à savoir l'espace des fonctions 2π-périodiques « légèrement » contraint pour pouvoir définir un produit scalaire.

3.3 Rappel jusqu'à Banach et Hilbert

3.3.1 Espace métrique (X, d)

X est un ensemble ; d est une application de $X \times X \to \mathbb{R}^+$ appelée distance vérifiant les 3 axiomes :

1. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

Dans un tel espace, on peut introduire des boules (ouvertes ou fermées), voisinages, limite, continuité, etc ... Par exemple, la suite $x_n (n = 0, 1, \ldots)$ converge vers x si $d(x, x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Exemple 1 : ensemble à 2 éléments

Pour $X = \{a, b\}$

$$\begin{cases} d(a, a) &= d(b, b) = 0 \\ d(a, b) &= d(b, a) = 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Alors (X, d) est un espace métrique.

Exemple 2 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{llll} X = & \mathbb{R} & d(x, y) = |x - y| & \text{(valeur absolue)} \\ X = & \mathbb{C} & d(x, y) = |x - y| & \text{(module)} \end{array}$$

3.3.2 Espace vectoriel normé (E, $\|\quad\|$)

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une norme $\|\quad\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\begin{array}{lrcll} N1 : & \|\lambda \overrightarrow{v}\| & = & |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{v}\| & \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\ ; \overrightarrow{v} \in E \\ N2 : & \|\overrightarrow{v}\| & = & 0 & \text{ssi } \overrightarrow{v} = 0 \\ N3 : & \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| & \leq & \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| & \text{(inégalité triangulaire)} \end{array} \tag{3.10}$$

Il y a une distance naturellement associée par :

$$d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \tag{3.11}$$

De cette manière, un espace vectoriel normé est de manière induite un espace métrique. Par exemple, $\overrightarrow{v}_n$ tend vers $\overrightarrow{v}$ (dans E) quand n tend vers l'infini si $\|\overrightarrow{v_n} - v\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exemples

- $L^1(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|\,dx$;
- $L^1[0,T]$, muni de la norme $\|f\| = \int_0^T |f|\,dx$;
- $l^1(\mathbb{Z})$, ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty$, est normé par $\|x\|_{l^1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|$;
- de même $l^1(\mathbb{N})$, ... (continuez vous-même) ;
- $l^\infty(\mathbb{N})$, ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées, est normé par $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;
- $L^\infty(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions (essentiellement) bornées sur $\mathbb{R}$, est normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;
- Si $\mathcal{E}$ est l'espace affine (espace des points) associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ (qui est normé), on a alors une distance sur $\mathcal{E}$ par :

$$d(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| \qquad \forall M_1, M_2 \in \mathcal{E} \tag{3.12}$$

(*Ravivez vos souvenirs de terminale*).

Exercice

Soit E un e.v. On pose $d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ et $d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ dans E. Montrer que d est une distance sur E qui ne peut être déduite d'une norme.

3.3.3 Espace de Banach

Un e.v. normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet est appelé *espace de Banach*. Dans ces espaces, on sait évaluer des tailles, mais on ne sait pas introduire l'orthogonalité, les angles ...

On rappelle qu'un espace E est complet si chaque suite de Cauchy est convergente dans E.

3.3.4 Produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e.v. E

Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ notée $(\cdot\,|\,\cdot)$ qui doit vérifier :
– linéarité par rapport à la première variable ;
– symétrie (hermitienne si E est un $\mathbb{C}$ e.v.) (resp $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = \overline{(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u})}$) ;
– positivité $(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}) \geq 0$;
– non dégénérescence $(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{v} = 0$.

Dans le cas d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ on déduit facilement la linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable. Dans le cas du produit scalaire sur $\mathbb{C}$, la symétrie hermitienne permet de déduire l'antilinéarité (et non pas la linéarité) par rapport à la seconde variable, à savoir $(\overrightarrow{u}|\lambda\overrightarrow{v}) = \bar{\lambda}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$.

Définition 22 *Un e.v. H (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni d'un produit scalaire complet, s'appelle un* espace de Hilbert.

On aura remarqué que le produit scalaire induit immédiatement une norme par $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u})}$. Ainsi, un espace de Hilbert est un espace de Banach.

Attention, la réciproque est fausse :

Théorème 23 (Jordan, Von Neumann) *Une norme se déduit d'un produit scalaire ssi la loi du parallélogramme est vérifiée.*

Loi du parallélogramme ou identité de la médiane :

$$2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2) = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \tag{3.13}$$

Ainsi, $L^1(\mathbb{R})$ (ou $l^1(\mathbb{N})$) est un Banach qui ne peut être Hilbert. Les espaces L^2 et l^2 sont des espaces « énergétiques » qui sont toujours des espaces de Hilbert : ainsi, $L^2(\mathbb{R})$ espace des « signaux d'énergie finie » muni de $(f \,|\, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\bar{g}$; ainsi $L^2([0,T[)$ espace des « signaux de puissance finie » muni de $(f \,|\, g) = \int_0^T f\bar{g}$.

3.4 Représentation de Fourier dans $L^2([0,T[)$

3.4.1 On revient sur quelques définitions

$L^2([0,T])\,(T>0)$ est le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs complexes de carré sommable : $f \in L^2[0,T] \iff \int_0^T |f|^2 < \infty$.
Si on se limite aux fonctions à valeurs réelles, on a alors un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On a ainsi deux espaces notés $L^2_{\mathbb{C}}([0,T])$ et $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. On supprime la distinction faite par l'indice $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. On remarque également qu'il n'y a pas de différence entre $L^2[0,T]$ et $L^2[0,T[$ puisque par rapport à l'intégration selon la mesure de Lebesgue, le fait de rajouter un point à l'ensemble de départ (passer de $[0,T[$ à $[0,T]$) ne change rien.

Le fait essentiel est que l'espace $H = L^2([0,T])$ est un espace de Hilbert. On va donc faire de la géométrie dans cet espace de fonctions un peu compliqué, comme si on était dans l'espace euclidien usuel qui nous entoure.

Le produit scalaire est

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f\bar{g}\,dx, \tag{3.14}$$

et la norme qui s'en déduit est

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

On dit aussi que f est orthogonal à g (ou $f \perp g$) si $(f|g) = 0$. Un sous espace fermé H_1 de H admet alors un supplémentaire orthogonal noté $H_1^\perp$ qui est aussi un sous espace fermé. Ainsi, $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. En outre, tout $f \in H$ admet une projection orthogonale sur H_1. C'est l'unique vecteur (ou fonction) g de H_1 tel que $f = g + (f-g)$ avec $(f-g) \perp g$.

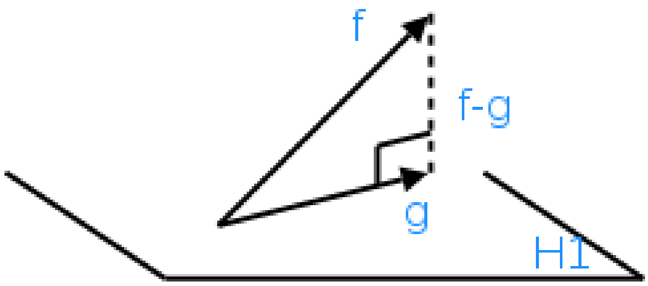

FIG. 3.1 – Projeté orthogonal

Pour terminer (sans être exhaustif), l'espace H admet des bases orthonormées, et chaque base orthonormée admet une quantité dénombrable de vecteurs.

3.4.2 Fondamental

Théorème 24 *La famille des* $e_n = e^{in\frac{2\pi}{T}x}$*, pour* $n \in \mathbb{Z}$*, est une base orthonormée de* $L^2([0,T])$*.*

Exercice : Calculer les produits scalaires $(e_n|e_m)$.

Pour $f \in L^2([0,T])$, la coordonnée de f selon le $n^{\text{ième}}$ vecteur de base ($n \in \mathbb{Z}$) s'appelle le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier et on note :

$$c_n(f) = (f|e_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{e_n(x)}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx. \tag{3.16}$$

La synthèse de f donne

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \qquad (\text{dans } L^2), \tag{3.17}$$

ce qui signifie, de manière moins condensée,

$$\lim_{N,M\to\infty} \|f - \sum_{-N}^{M} c_n(f)e_n\| = 0. \tag{3.18}$$

On a aussi :

Proposition 25 (Parseval)

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \tag{3.19}$$

Cette égalité prolonge celle de Pythagore et affirme une « conservation » de l'énergie.

On vient de réaliser la représentation par série de Fourier d'une fonction périodique d'énergie finie. Cette méthode est la conséquence, presque simpliste, du fait que l'espace $L^2[0,T]$ est un espace de Hilbert. Malheureusement, toutes les fonctions ne sont pas dans ce cas ; d'autre part, nous ne savons rien jusqu'à présent sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier.

3.5 Fourier dans $L^1([0,T])$

On remarque déjà que :

$$L^2[0,T] \subsetneq L^1[0,T] \tag{3.20}$$

Par exemple, si f est 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0,2\pi]$, $f(0) = 0$, alors $f \in L^1[0,2\pi]$ mais $f \notin L^2[0,2\pi]$.

Dans $L^1[0,T]$, on peut encore définir les coefficients de Fourier complexes. Si $f \in L^1[0,T]$ on pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx. \tag{3.21}$$

$c_n(f)$ existe bien car l'intégrale lui servant de définition est absolument sommable, donc sommable.

On peut aussi définir les coefficients de Fourier trigonométriques :

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_0 & = & \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx & (\text{valeur moyenne de } f) \\ a_n & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,dx & \text{pour } n>0 \\ b_n & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\,dx & \end{array}\right. \tag{3.22}$$

La série de Fourier complexe de f est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}, \tag{3.23}$$

dont la représentation trigonométrique s'écrit

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]. \tag{3.24}$$

Les liens entre les différents coefficients sont (avec $n > 0$) :

$$\begin{cases} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \tag{3.25}$$

La relation entre la fonction f et sa série de Fourier n'est pas simple dans ce cas. On a seulement :

Théorème 26 (Riemann Lebesgue) *Soit $f \in L^1[0,T]$, on a $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.*

Il y a ainsi une atténuation des coefficients pour les « grandes fréquences ». C'est une conséquence (petite) du principe de portée générale : « Plus la fonction f est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent rapidement vers 0 à l'infini. »

3.6 Une condition suffisante de convergence ponctuelle de la série de Fourier

Théorème 27 (Jordan Dirichlet) *On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,T]$, alors pour chaque $x_0 \in]0,T[$, la série de Fourier de f en x_0 converge vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. En particulier si f est continue en x_0, la série converge vers $f(x_0)$.*

Remarques

- Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors f est sommable sur [0, T] ($f \in L^1$). De plus, $f \in L^\infty$.
- En un point x_0 où f n'est pas continue, la condition imposée signifie que f admet une limite à gauche (respectivement à droite) notée $f(x_0^-)$ (respectivement $f(x_0^+)$) et que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ admet une limite notée $f'(x_0^+)$ quand $h \to 0^+$, de même $\frac{f(x_0+h)-f(x_0^-)}{h}$ admet une limite notée $f'(x_0^-)$ quand $h \to 0^-$.

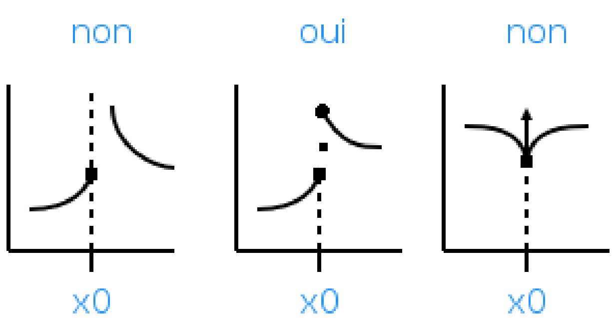

FIG. 3.2 – f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Commentaires Si la fonction est $\mathcal{C}^1$, alors la convergence de la série de Fourier est uniforme vers f (cette convergence entraîne bien sûr la convergence ponctuelle).

Preuve Comme f est $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties pour obtenir $c_n(f') = in\frac{2\pi}{T}c_n(f)$. On a :

$$|c_n(f)| = |\frac{1}{in\frac{2\pi}{T}}c_n(f')| \leq \frac{1}{2}(\frac{T^2}{4\pi^2 n^2} + |c_n(f')|^2) \tag{3.26}$$

Les deux termes du membre de droite sont associés à des séries convergentes (f' est continue donc $\in L^2[0,T]$ et par suite $\sum |c_n(f')|^2 < \infty$). Ainsi, la série de terme général $|c_n(f)|$ est convergente, par conséquent la série de Fourier est normalement convergente et par suite, uniformément convergente. D'après Dirichlet, la convergence a lieu vers f.
C.Q.F.D.

Le phénomène de Gibbs Ce phénomène concerne le comportement des sommes partielles de la série de Fourier associée à une fonction présentant une discontinuité de première espèce.

$$S_N(f(x)) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{\frac{2\pi}{T}inx} \tag{3.27}$$

Quand N grandit, le graphe de $S_N(f)$ présente un dépassement constant près de la discontinuité de la fonction originale.

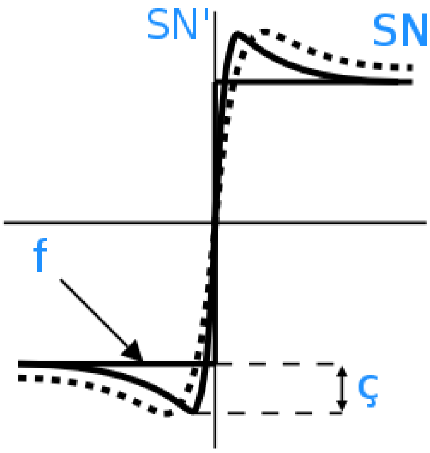

FIG. 3.3 – Phénomène de Gibbs pour un créneau

Un exemple : La dent de scie. Soit une fonction f, 2π-périodique, et telle que

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \qquad f(x) = \frac{\pi - x}{2}. \tag{3.28}$$

Sa série de Fourier est $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (faire le calcul).

La convergence a lieu vers $f(x)$ sauf aux points de discontinuité $k\pi$ où la série de Fourier est nulle (voir la figure 3.4), ce qui est conforme au théorème de Dirichlet.

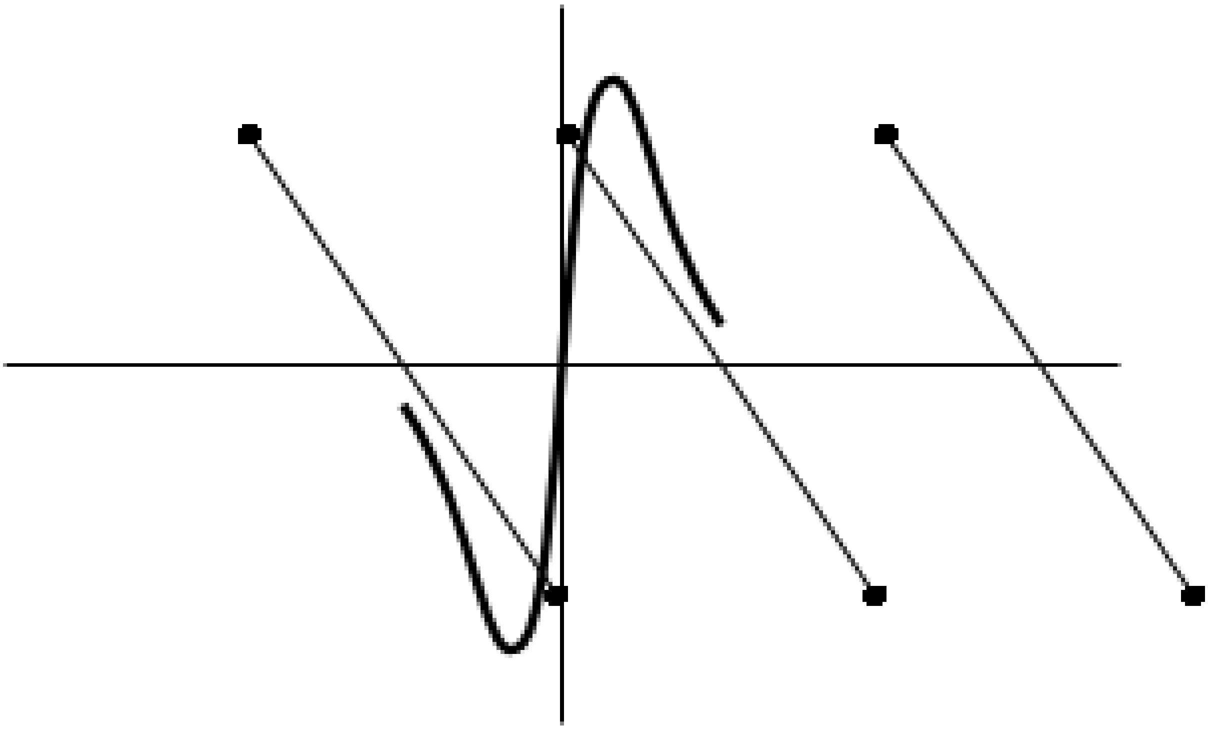

FIG. 3.4 – Phénomène de Gibbs pour une dent de scie

3.7 Le miracle des distributions périodiques

On appelle $\tau_a f$ la translation par a ($a \in \mathbb{R}$) de la fonction définie par

$$\tau_a f(x) = f(x-a). \tag{3.29}$$

On remarque que pour $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\int \tau_a f(x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\tau_{-a}\varphi(x)\,dx. \tag{3.30}$$

Ceci justifie ce qui suit : soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, la distribution $\tau_a T$, translatée par a de T, est définie par

$$\begin{array}{rcl} \tau_a T : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & < \tau_a T, \varphi > = < T, \tau_{-a}\varphi > \end{array} \tag{3.31}$$

On dit que la distribution est périodique de période a si $\tau_a T = T$. Bien entendu, si f est une fonction de période a (localement intégrable sur $\mathbb{R}$) alors la distribution régulière définie par f est aussi périodique de période a.

Dans le cadre des distributions, l'analyse et la synthèse de Fourier d'une distribution périodique s'accomplit dans une grande simplicité. Il nous faut quelque préalable sur les suites.

Une suite de complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est **à croissance lente** s'il existe $p \in \mathbb{N}_*$ et $A > 0$ tel que pour tout n vérifiant $|n| > n_0$ on a :

$$|c_n| \leq A|n|^p \tag{3.32}$$

Autrement dit, la croissance à l'infini de la suite est au plus de type polynomial.

Exemples

- $c_n = \ln|n|$, une fraction rationnelle en n, un polynôme en n) sont à croissance lente.
- $c_n = e^n$, n'est pas à croissance lente.

Théorème 28 (de représentation d'une distribution périodique) *Une distribution T sur $\mathbb{R}$ périodique de période $a > 0$ s'écrit de manière unique :*

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{a}x}. \tag{3.33}$$

La somme précédente est la limite des sommes partielles $\sum_{-N}^{M}$ (avec $N, M > 0$) au sens de la convergence dans $\mathcal{D}'$. En outre, la suite (c_n) est à croissance lente.

Commentaires

1. Brièvement, une distribution périodique est égale à sa série de Fourier.
2. On peut montrer qu'une suite à croissance lente est toujours la suite des coefficients de Fourier d'une certaine distribution périodique.

Exemple du peigne de Dirac Soit $a > 0$. Le peigne de « pas a » est la distribution

$$Ш_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na} \tag{3.34}$$

On vérifie facilement que ce peigne est bien une distribution. La a-périodicité est immédiate. En effet,

$$\tau_a \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{an} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{a(n+1)}, \tag{3.35}$$

et on fait le changement d'indice de sommation $m = n + 1$. Calculons de manière « mécanique » le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier (dire ce qui ne va pas dans ce calcul) :

$$c_n = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sum \delta_{an} = \frac{1}{a} \left\langle \sum \delta_{an}, 1_{]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[} \right\rangle = \frac{1}{a} \left\langle \delta, 1_{]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[} \right\rangle = \frac{1}{a}. \tag{3.36}$$

Par conséquent, la série de Fourier est $\frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{a}x}$ qui est aussi $Ш_a$.

Remarques

1. Si f est $\mathcal{C}^\infty$ on a $f(x)Ш_a = \sum f(na)\delta_{na}$, c'est la raison pour laquelle le peigne de Dirac s'utilise souvent (en traitement du signal, par exemple) comme opérateur d'échantillonnage.
2. Le fait de « restreindre » une distribution périodique à une période est plus délicat que dans le cas des fonctions. Par exemple, le peigne de Dirac standard (pas 2π) restreint à $]0, 2\pi[$ donne la distribution nulle sur $]0, 2\pi[$ qui ne contient évidemment pas toute l'information sur le peigne. Avec une fonction 2π-périodique f ordinaire, sa restriction à $]0, 2\pi[$ caractérise complètement f (comme fonction définie p.p.).
3. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $< Ш_a, \tau_x\varphi >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na - x)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et a-périodique. On peut donc aussi considérer le peigne de Dirac comme un outil pour transformer une fonction en fonction périodique (« périodisation »). En fait, on utilise plutôt la convolution par $Ш_a$, et on verra au chapitre suivant que

$$Ш_a * \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x - na). \tag{3.37}$$

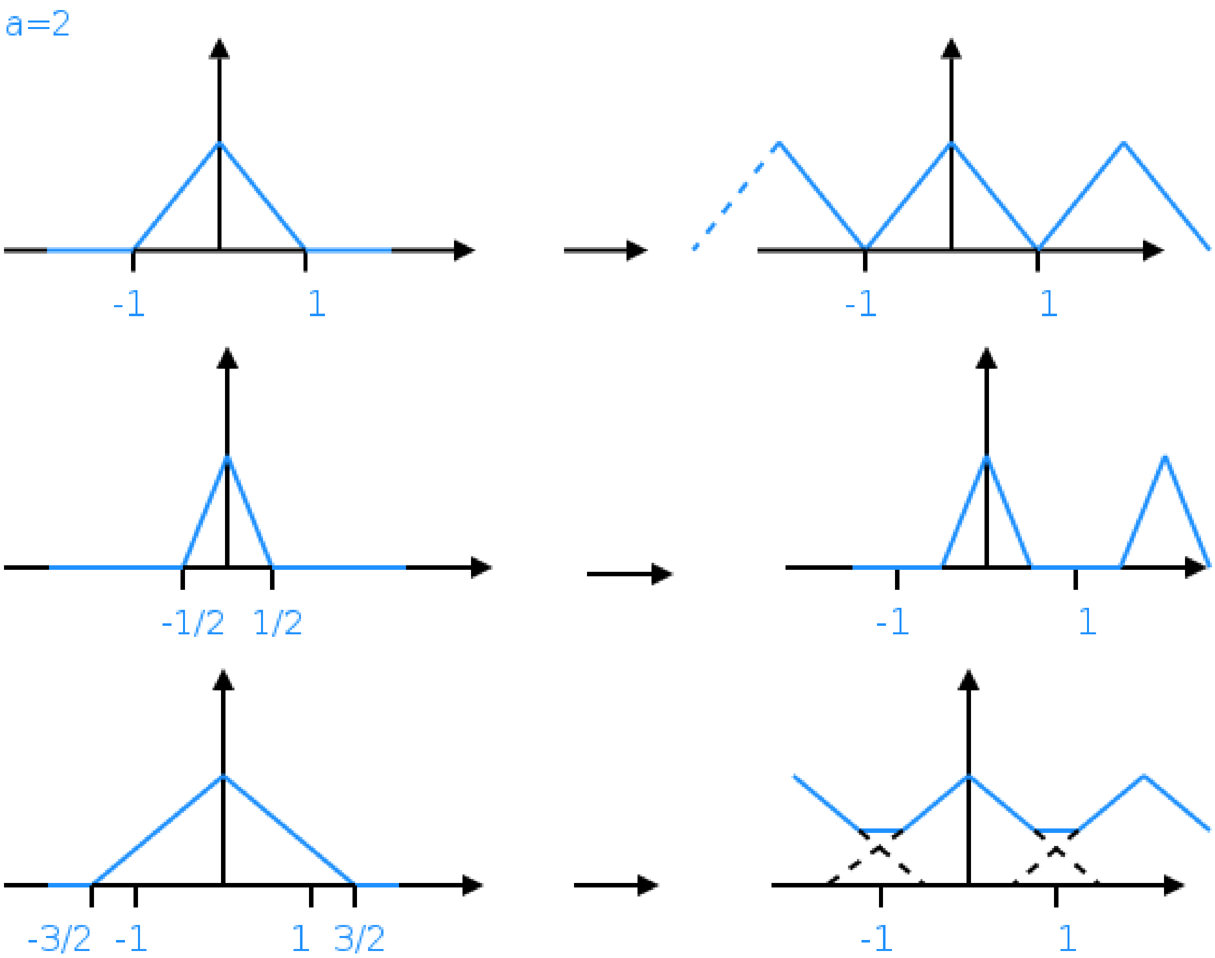

FIG. 3.5 – Périodisation (φ à gauche et $\sqcup\!\sqcup_a * \varphi$ à droite)

Chapitre 4

La convolution

Cette opération est introduite car :

1. Elle régularise les fonctions (lissage), par exemple, successivement en convoluant de manière répétitive l'indicatrice $\mathbb{1}_{[0,1]}$ on obtient l'évolution suivante :

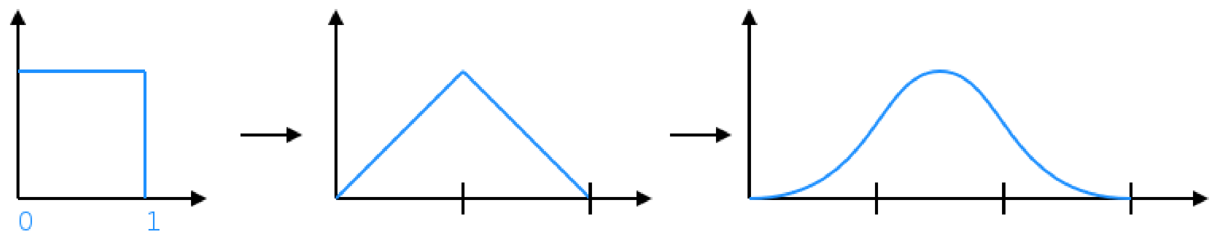

FIG. 4.1 – Lissage : $\mathbb{1}_{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$

   On observera l'amélioration de la régularité des graphes. *(Exercice : rédiger votre observation).*
2. Elle « filtre ». En effet, un système entrée-sortie invariant dans le temps et linéaire agit par convolution.
3. La somme indépendante de deux variables aléatoires donne naissance à une loi convoluée des lois initiales.

Toute médaille a son revers. La convolution est naturelle sous divers aspects, en revanche sa définition est compliquée. Dans la suite, on étudie la convolution dans les fonctions, les fonctions périodiques, les suites, les distributions (adaptées).

4.1 Convolution dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Tout ce qui suit se généralise immédiatement aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, les intégrales mises en jeu sont alors des intégrales multiples.

Définition 29 *Soient f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\,ds. \tag{4.1}$$

Cette convolution a les propriétés usuelles d'un produit (commutativité, associativité, distributivité) si toutes les intégrales rencontrées existent.
L'intégrale précédente n'a pas toujours un sens, par exemple si $f = 1$ et $g = 1$, on a en revanche :

– $L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. De plus, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

– $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. De plus, si f et $g \in L^2(\mathbb{R})$, $f * g$ est continue et tend vers 0 à l'∞.

Preuve On va montrer par exemple que deux fonctions f, g sommables sur $\mathbb{R}$ ont leur produit de convolution sommable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire : $\int |f * g| < \infty$. On a :

$$\int |f * g|(x)\, dx = \int \left| \int f(x-t)g(t)\, dt \right| dx \leq \iint |f(x-t)|\,|g(t)|\, dt dx. \tag{4.2}$$

On intègre maintenant d'abord en x, et on fait le changement de variable $x - t = u$. L'inégalité précédente se poursuit par :

$$\leq \int |g(t)| \left\{ \int |f(x-t)|\, dx \right\} dt = \int |g(t)| \left\{ \int |f(u)|\, du \right\} dt = \int |f| \cdot \int |g| < \infty \tag{4.3}$$

4.1.1 Convolution, dérivation et translation

Théorème 30 *On a :*
(i) Si f est dérivable, on a $f * g$ dérivable et $\boxed{D(f * g) = (Df) * g}$ *;*
(ii) Si τ_a est la translation par a, on a $\boxed{\tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g = f * \tau_a g}$.

Commentaires importants
– Si f et g sont dérivables, la dérivée de $f * g$ est indifféremment $f' * g$ ou $f * g'$.
– Si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors $f * g$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour une démonstration de ce qui précède, on revient aux définitions et on fait « trotter la plume ».

Exercice

$$\begin{array}{rll} \text{A-t-on :} & e^{ax}(f * g) & = (e^{ax} f) * g \\ \text{ou bien :} & e^{ax}(f * g) & = (e^{ax} f) * (e^{ax} g)? \end{array}$$

4.2 Convolution dans les fonctions périodiques

Soient f, g des fonctions T-périodiques ($T > 0$) sur $\mathbb{R}$, on observera que le produit de convolution défini par l'équation (4.1) n'a pas de sens (tester $\sin * \sin$). On utilise la définition suivante :

$$f * g(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-s)g(s)\, ds \qquad \text{(convolution périodique)} \tag{4.4}$$

On vérifie facilement que $f * g$ est aussi T-périodique.

Exemples

1. $f * 1 =$ moyenne de f
2. $e^{ix} * e^{ix} = e^{ix} \qquad (T = 2\pi)$

La convolution « se marie » très bien avec les séries de Fourier. En effet :

Proposition 31 *f, g sont deux fonctions T-périodiques. On note $c_n(f)$ le $n^{ième}$ coefficient de Fourier complexe ($n \in \mathbb{Z}$). Alors :*

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g) \tag{4.5}$$

$$c_n(fg) = \sum_k c_{n-k}(f)c_k(g) \tag{4.6}$$

Faisons une démonstration « formelle » de la deuxième égalité. On suppose que $T = 2\pi$.

$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}\right) g(t)e^{-int}\,dt \\ &= \sum_k c_k(f)\frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi g(t)e^{-i(n-k)t}\,dt \\ &= \sum_k c_k(f)c_{n-k}(g) \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3 Convolution dans les suites

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des suites indexées par $\mathbb{Z}$, autrement dit des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on définit la suite $u * v = ((u*v)_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$(u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{n-k}v_k \tag{4.8}$$

On démontre que $\ell^1 * \ell^1 \subset \ell^1$, $\ell^2 * \ell^2 \subset c_0 =$ suites bornées tendant vers 0 à l'infini.
Si la suite valant 1 en 0 et 0 partout ailleurs s'appelle δ, on a :

$$u * \delta = u. \tag{4.9}$$

Si τ_{n_0} est la translation de $n_0 \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\tau_{n_0}(u*v) = (\tau_{n_0}u)*v = u*(\tau_{n_0}v). \tag{4.10}$$

Quand les suites démarrent à 0, autrement dit si elles sont indexées par $\mathbb{N}$, alors le produit de convolution démarre aussi à 0 et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u*v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k. \tag{4.11}$$

Application aux probabilités discrètes Soit X une variable aléatoire entière de Bernouilli (le premier i de Bernouilli est facultatif) qui vaut 1 (succès) avec la probabilité p et 0 (échec) avec la probabilité $1-p$. On lui associe une « distribution »[1] de probabilités sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{Prob}(X=0) = 1-p \\ p_1 &= \text{Prob}(X=1) = p \\ p_2 &= p_3 = \cdots = 0 \end{aligned}$$

La somme Y de deux variables aléatoires X_1, X_2 de Bernouilli et indépendantes a pour « distribution » de probabilités sur $\mathbb{N}$ la convoluée $(p_n)*(p_n)$ que l'on obtient par le petit calcul (de CM1) suivant :

rang 2	rang 1	rang 0
 $*$	p p	$1-p$ $1-p$
 p^2	$p(1-p)$ $p(1-p)$	$(1-p)^2$ $\bullet$
$p^2 = Prob(Y=2)$	$2p(1-p) = Prob(Y=1)$	$(1-p)^2 = Prob(Y=0)$

On observe ainsi que la loi suivie par la somme Y est une loi binomiale $B(2,p)$. Ainsi, $Y \sim B(2,p)$.

[1] Attention : il ne s'agit pas, ici, d'une distribution au sens du chapitre 2 !!!

4.4 Convolution entre une distribution et une fonction

On part d'une distribution T ($\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$) et d'une fonction f test ($\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Pour avoir l'idée inspirant la définition de $T * f$, on suppose que T est une distribution régulière associée à une fonction g et on écrit :

$$T_g * f(x) = \int f(x-t)g(t)\,dt = \int g(t)\tau_x(f^-)(t)\,dt =< T_g, \tau_x(f^-) >, \tag{4.12}$$

où $\tau_x f$ désigne la translatée par x de f, et f^- est la retournée de f définie par $\boxed{f^-(x) = f(-x)}$.

En définitive, par définition pour $T \in \mathcal{D}'$ et $f \in \mathcal{D}$ on pose :

$$T * f(x) =< T, \tau_x(f^-) > \tag{4.13}$$

Remarque On étendra cette définition quand le membre de droite conserve un sens. Ainsi par exemple $\mathbb{1}_{[0,1]} * 1 = 1$.
Exemple : $\delta * f = f$. Ainsi, δ est élément unité pour le produit de convolution.

4.5 Convolution entre distributions

L'idée de la définition part du fait que la convolution entre distributions doit prolonger la convolution introduite pour les fonctions. Autrement dit, on demande

$$T_{f*g} = T_f * T_g. \tag{4.14}$$

On a ainsi une définition de la convolution entre distributions régulières qu'on cherche à généraliser de manière naturelle. On a, en posant $X = x - y$ et $Y = y$:

$$\begin{aligned}
< T_f * T_g, \varphi > &= \int \left(\int f(x-y)g(y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx && (4.15)\\
&= \iint f(x-y)g(y)\varphi(x)\,dx\,dy && (4.16)\\
&= \iint f(X)g(Y)\varphi(X+Y)\,dX\,dY && (4.17)\\
&= \iint [f \otimes g](x,y)\varphi(x+y)\,dx\,dy && (4.18)
\end{aligned}$$

La forme symétrique précédente fait intervenir le *produit tensoriel* entre fonctions $f(x)$ et $g(y)$. C'est une fonction des deux variables x et y définie par :

$$[f \otimes g](x,y) = f(x)g(y). \tag{4.19}$$

4.5.1 Produit tensoriel entre distributions

Si S et T sont des distributions sur $\mathbb{R}$ et φ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution produit tensoriel de S et T, notée $S \otimes T$ est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$< S \otimes T, \varphi(x)\psi(y) >_{\mathbb{R}^2} =< S, \varphi >< T, \psi > . \tag{4.20}$$

On en déduit plus généralement que pour $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a :

$$< S_x \otimes T_y, \varphi(x,y) > =< S_x, < T_y, \varphi(x,y) >_{\mathbb{R}_y} >_{\mathbb{R}_x} . \tag{4.21}$$

Cette propriété s'écrit également en renversant les rôles de S et T. Il s'agit du *théorème de Fubini* quand les distributions sont régulières.

On retrouve ainsi $T_{f \otimes g} = T_f \otimes T_g$. On a aussi :

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}. \tag{4.22}$$

On vérifie $supp(f \otimes g) = supp(f) \times supp(g)$ (produit cartésien), et plus généralement $supp(T \otimes S) = supp(T) \times supp(S)$.

4.5.2 Définition de $T * S$

Pour T, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit

$$\begin{aligned} T * S : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto < T * S, \varphi >_{\mathbb{R}} = < T \otimes S, \varphi(x+y) >_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Cette définition n'est pas permise pour tous les couples de distributions car le membre de droite de l'équation précédente fait agir $T \otimes S$ sur la fonction de deux variables $(x, y) \longmapsto \varphi(x+y)$ qui n'est pas à support borné dans $\mathbb{R}^2$ bien que φ soit à support borné.

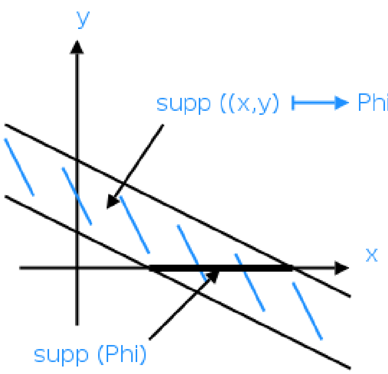

FIG. 4.2 – Support borné

Voici deux situations permettant la convolution :
- T ou S est à support borné ;
- T et S ont un support limité à gauche.

4.5.3 Propriétés

On retrouve les propriétés classiques obtenues pour les fonctions, exceptée l'associativité. En effet :

$$(1 * \delta') * Y = 0 \neq 1 = 1 * (\delta' * Y) \tag{4.24}$$

On démontre l'associativité quand au moins deux des distributions qui interviennent sont à support borné. Dans le contre-exemple précédent, on a
$supp 1 = \mathbb{R}$, $supp Y = \mathbb{R}^+$!

Rappellons les propriétés importantes :

$$(T * S)' = T' * S = T * S' \tag{4.25}$$

$$\tau_a(T * S) = \tau_a T * S \tag{4.26}$$

Exemples :

- $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$
- Si T à support borné, $T * 1 = cte \quad (=< T, 1 >)$.
- **Transformée de Laplace** (voir la fin du chapitre 5)
  Pour $p \in \mathbb{C}$, on pose $\mathcal{L}(T)(p) =< T, e^{-pt} >$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T * S)(p) &= < T \otimes S, e^{-p(x+y)} > \\ &= < T, e^{-px} >< S, e^{-py} > \\ &= \mathcal{L}(T)(p) \cdot \mathcal{L}(S)(p) \end{aligned} \tag{4.27}$$

(On aura remarqué l'échange convolution-produit ordinaire).

4.6 L'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$

4.6.1 Théorème du support

Théorème 32 *(i) Si f et g fonctions, $supp(f * g) \subset supp\ f + supp\ g$;*
(ii) Si T et S distributions, $supp(T * S) \subset supp\ T + supp\ S$.

Exemple : $\chi = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $supp(\chi * \chi) = [0, 2]$, $supp\,\underbrace{(\chi * \chi * \cdots \chi)}_{n\ facteurs} = [0, n]$.

4.6.2 Lois de composition interne

$\mathcal{D}'_+$ est l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ à support dans $\mathbb{R}$, on vérifie que $\mathcal{D}'_+$ est stable pour l'addition et la convolution, c'est à dire si T, $S \in \mathcal{D}'_+$ alors $T + S \in \mathcal{D}'_+$ et $T * S \in \mathcal{D}'_+$. On vérifie également que l'associativité de $*$ est vérifiée dans $\mathcal{D}$.

Finalement, avec ces deux lois (de composition interne), $\mathcal{D}'_+$ est une algèbre de convolution.

Application 1 :

Soit S une distribution de $\mathcal{D}'_+$ donnée. On cherche à résoudre dans $\mathcal{D}'_+$:

$$T' = S. \tag{4.28}$$

On remarque que $\boxed{Y' = \delta}$ (on dit que Y est une solution élémentaire de l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$). $Y * S$ est aussi à support $\mathbb{R}^+$ ($supp(Y * S) \subset supp\ Y + supp\ S \subset \mathbb{R}^+ + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$) et

$$(Y * S)' = Y' * S = \delta * S = S. \tag{4.29}$$

Ainsi, $Y * S$ est une solution particulière de (4.28), autrement dit $Y * S$ est une primitive à support dans $\mathbb{R}^+$ de S. Une autre primitive de S est alors de la forme $Y * S + cte$; sachant qu'une constante ($\neq 0$) est de support $\mathbb{R}$, une telle primitive n'est plus dans $\mathcal{D}'_+$.

Finalement, l'équation (4.28) a une solution unique ($Y * S$) dans $\mathcal{D}'_+$. En passant, on a observé que $\delta' * Y = \delta$ c'est à dire que δ' a un inverse (unique) pour la convolution dans $\mathcal{D}'_+$.

Exercice 1 Comparer $(Y * \delta') * (Y + c)$ et $Y * (\delta' * (Y + c))$ et rediscuter l'associativité dans $\mathcal{D}'$ et dans $\mathcal{D}'_+$.

Exercice 2 Si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors $f = T_f$ n'a pas d'inverse pour la convolution. (Par l'absurde, on aboutit à δ qui serait $\mathcal{C}^\infty$).

Application 2 :

Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T' + S' = \delta \\ T' - S = \delta' \end{array} \right. . \tag{4.30}$$

Ce système s'écrit encore :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta' & \delta' \\ \delta' & -\delta \end{pmatrix}}_{A} * \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta' \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

On multiplie « convolutement » les deux membres par la transposée de la matrice des cofacteurs

$$(ComA)^T = \begin{pmatrix} -\delta & -\delta' \\ -\delta' & \delta' \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} -\delta' - \delta'' & 0 \\ 0 & -\delta'' - \delta' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta - \delta'' \\ -\delta' + \delta'' \end{pmatrix}$$

$$(\delta' + \delta'') * \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta + \delta'' \\ \delta' - \delta'' \end{pmatrix}$$

Cherchons maintenant l'inverse U de $\delta' + \delta''$ (au signe près, il s'agit du déterminant (de convolution) de la matrice A). Il doit vérifier $(\delta' + \delta'') * U = \delta$, soit encore,

$$\begin{aligned} & U' + U'' = \delta \\ \Leftrightarrow \quad & U' + (U')' = \delta \\ \Leftrightarrow \quad & (U'e^t)' = e^t\delta = \delta \\ \Leftrightarrow \quad & U' = e^{-t}Y(t) \quad (\text{dans } \mathcal{D}'_+) \\ \Leftrightarrow \quad & U = e^{-t}Y * Y = (1 - e^{-t})Y(t) \quad (\text{voir Application 1}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = U * \begin{pmatrix} \delta + \delta'' \\ \delta' - \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(t)(1 - 2e^{-t}) + \delta \\ 2e^{-t}Y(t) - \delta \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

4.7 Régularisation d'une distribution

Soit f une fonction fixée de $\mathcal{D}$ telle que $\displaystyle\int f = 1$ et posons, pour $\epsilon > 0$, $\boxed{f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon})}$. On montre (voir TD) que $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'} \delta$.

La distribution $T * f_\varepsilon$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (comme la fonction f_ε). En admettant la continuité du produit de convolution, quand $\varepsilon \to 0$, on a alors :

$$T * f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'} T * \delta = T \tag{4.34}$$

Il est ainsi possible d'approcher une distribution aussi irrégulière soit-elle par une fonction aussi régulière qu'on veut.

Lorsque T est à support compact, on peut choisir la fonction f, indéfiniment dérivable sans condition de support. Par exemple, si $T = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, alors on a encore $T * f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'} T$. Dans ce cas, les régularisées $T * f_\varepsilon$ restent $\mathcal{C}^\infty$ mais ne sont plus à support borné (contrairement à ce que laisse supposer le graphe ci-après).

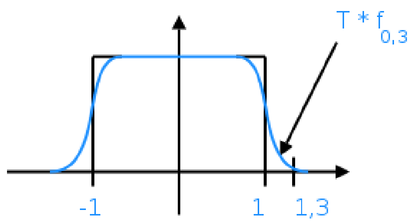

FIG. 4.3 – Régularisation d'une porte par convolution

Chapitre 5

Transformées de Fourier et de Laplace

On considère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ notée f. Pour $T > 0$, l'analyse de f à travers la « fenêtre » $[0, T]$ se fait par une suite de coefficients de Fourier $C_n^T = c_n(\mathbb{1}_{[0,T]}f)$ répartie le long de la grille $\frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$.

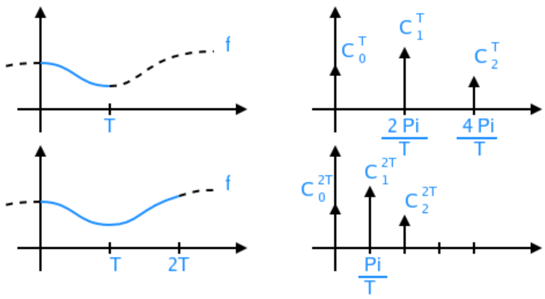

FIG. 5.1 – Analyse de Fourier de $\mathbb{1}_{[0,T]}f$, puis de $\mathbb{1}_{[0,2T]}f$

Quand T augmente, la « fenêtre » d'analyse de f s'agrandit. L'information sur la fonction f augmente également, mais l'analyse se fait sur une grille resserrée, ce qui confirme la présence d'une information sur f plus riche.

Comment peut-on espérer analyser f directement et dans sa totalité ? Inspiré par ce qui précède, doit-on imaginer des coefficients répartis selon une grille infiniment fine, c'est à dire sur $\mathbb{R}$? Autrement dit, une nouvelle fonction définie sur $\mathbb{R}$ apparaît qui représente f ...

5.1 Analyse de Fourier

5.1.1 Transformée de Fourier

Soit $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f (notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$) est définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-in\xi}\, dx \tag{5.1}$$

Du fait de la sommabilité de f, la quantité $\hat{f}(\xi)$ est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On définit ainsi une nouvelle fonction sur $\mathbb{R}$. En revanche, la fonction constante 1 n'a pas de transformée de Fourier avec la définition précédente.

Théorème 33 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini.*

Remarque L'hypothèse f sommable (autrement dit, f n'est pas trop explosive) implique le fait que $\hat{f}$ « s'annule à l'infini ». Une propriété sur $\hat{f}$ s'appelle une *propriété spectrale* de f. Ce qui précède est une illustration du principe « une certaine régularité sur f implique une certaine annulation à l'infini de $\hat{f}$ ». On a déjà vu une propriété analogue pour les séries de Fourier due à *Riemann et Lebesgue* (Rappel : $f \in L^1([0,T]) \Longrightarrow c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$).

Exemples : Soit $a > 0$.

- $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$, alors $\hat{f}(\xi) = 2\dfrac{\sin a\xi}{\xi}$;
- $f(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-ax}$, alors $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi}$.

(faire les calculs à titre d'exercice).

5.1.2 Autres définitions

A propos de la définition de la transformée de Fourier, nous en avons choisi une parmi trois qui coexistent dans la littérature. Les deux autres définitions sont :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \tag{5.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\,dx \tag{5.3}$$

La définition (5.2) fait apparaître une constante multiplicatrice jouant un rôle de normalisation ; elle est utilisée dans les ouvrages théoriques. Les formules obtenues sont souvent simples, mais les calculs sous-jacents restent les mêmes.

La définition (5.3) utilise la variable ξ interprétée comme une fréquences en Hertz alors que dans la définition que nous avons choisie, la variable ξ s'interprète comme une pulsation en radians par seconde.

5.2 Synthèse de Fourier

5.2.1 L'information spectrale

L'information spectrale, c'est à dire l'information contenue dans la donnée de $\hat{f}$ permet de reconstruire la fonction originale f. En effet :

Théorème 34 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,dx \qquad (p.p.) \tag{5.4}$$

On appelle $\overline{\mathcal{F}}$ l'opérateur qui à une fonction $f(x)$ associe une nouvelle fonction $\overline{\mathcal{F}}(f)$ définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix\xi}\,dx \tag{5.5}$$

La formule (5.4) se réécrit

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f. \tag{5.6}$$

Exercice

1. Vérifier que $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi) = \mathcal{F}(f(-x))(\xi)$.
2. Si on note f^- la fonction retournée de f, les égalités précédentes s'écrivent encore $\overline{\mathcal{F}}(f) = [\mathcal{F}(f)]^- = \mathcal{F}(f^-)$.
3. On a aussi $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f^-$.
4. Si f paire (respectivement impaire), alors $\mathcal{F}(f)$ et $\overline{\mathcal{F}}(f)$ paires (respectivement impaires).

5.2.2 Convergence en valeur principale

Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$, on a $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2\sin a\xi}{\xi}$. La formule de réciprocité (5.4) ne s'applique pas, *a priori* dans les conditions du théorème précédent car $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ ($\hat{f}$ est malgré tout d'énergie finie : $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$). On peut montrer que l'intégrale figurant dans (5.4) converge en valeur principale ($\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|>\varepsilon}$ existe) et que la formule (5.4) est valide.

Ainsi, on a :

$$2\pi\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) = \int \frac{2\sin a\xi}{\xi} e^{i\xi x}\, d\xi \quad , \qquad \forall x \neq \pm a \tag{5.7}$$

En intervertissant les rôles de ξ et x dans (5.7), en utilisant la parité de $\frac{\sin ax}{x}$, on obtient :

$$\widehat{\frac{\sin ax}{x}}(\xi) = \pi\mathbb{1}_{[-a,a]}(\xi) \quad , \qquad \forall \xi \neq \pm a \tag{5.8}$$

La fonction *sinus cardinal* (notée *snc*) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad snc\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{5.9}$$

C'est la fonction la plus célèbre du traitement de signal ! En faisant $a = \pi$ dans (5.8), on obtient $\widehat{snc} = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}$. On remarque que la transformée de Fourier du sinus cardinal n'est pas continue ; d'après le théorème 33 donné dans la section 5.1.1., on retrouve la non sommabilité du sinus cardinal.

5.3 Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^n$

Le traitement d'image nécessite une transformée de Fourier à deux variables, la mécanique quantique une transformée à 3, 4 variables ou même davantage. Donnons ici la définition générale de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on note la variable $x = (x_1, \cdots, x_n)$. La variable fréquentielle est notée $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ et bien sûr, $x \cdot \xi$ est le produit scalaire $\sum_{i=1}^n x_i\xi_i$. Alors

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n. \tag{5.10}$$

La formule de réciprocité est alors :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n \tag{5.11}$$

On obtient aussi une formule analogue à (5.5) : $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^n f$ ou $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^n f^-$.

Exercice

1. Montrer que $\quad \mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2}}) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\xi^2}{2}}$ (voir TD) ;
2. En déduire qu'en dimension n, $\quad \mathcal{F}(e^{\frac{-\|x\|^2}{2}}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$.

5.4 Les charmes de la transformée de Fourier

Les égalités suivantes seront valides dès que les deux membres sont définis.

5.4.1 Echange translation - modulation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\tau_{x_0} f\right)(\xi) &= e^{-ix_0\xi}\hat{f}(\xi) \\ \mathcal{F}\left(e^{i\xi_0 x} f\right)(\xi) &= \hat{f}(\xi - \xi_0) \end{aligned} \tag{5.12}$$

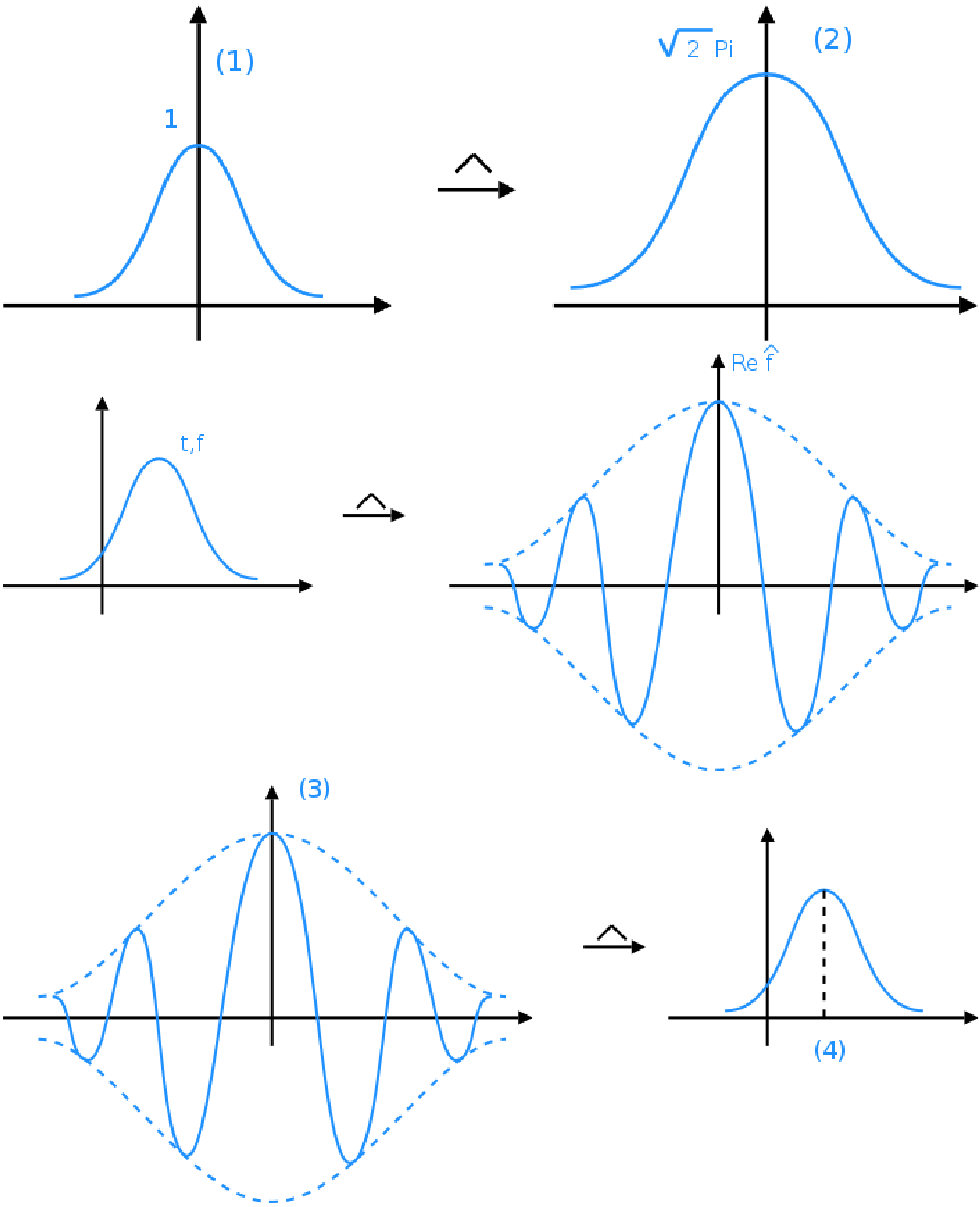

FIG. 5.2 – (1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, (2) $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, (3) $Re(e^{i\xi_0 x} f)$, (4) $\hat{f}(\xi - \xi_0)$

5.4.2 Echange dérivation - multiplication monômiale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f') &= i\xi \hat{f} \\ \mathcal{F}(-ixf) &= (\hat{f})' \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.4.3 Echange multiplication - convolution

$$\begin{aligned} \widehat{f * g} &= \hat{f}\hat{g} \\ 2\pi\widehat{fg} &= \hat{f} * \hat{g} \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.4.4 Changement d'échelle

$$\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) \qquad (\lambda \neq 0) \tag{5.15}$$

La représentation de Fourier, dite encore représentation fréquentielle, fournit une lumière différente sur plusieurs phénomènes. Une translation sur une fonction apparaît en « fréquence » comme une modulation, une dérivation comme une multiplication monômiale. Ce changement de nature permet l'utilisation d'outils très différents sur une même question. Par exemple, une équation différentielle à coefficients constants traitée en fréquentiel devient une équation algébrique qu'on sait le plus souvent résoudre complètement. (Voir le cas de la Gaussienne $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ en TD).

A propos du changement d'échelle, si on considère une Gaussienne contractée de rapport 2, $g(x) = f(2x)$, sa transformée de Fourier est toujours une Gaussienne, qui est cette fois dilatée de rapport $\frac{1}{2}$ par rapport à $\hat{f}$.

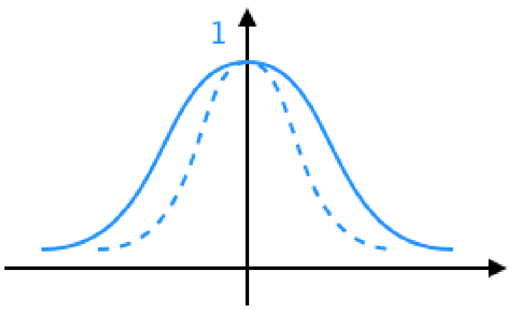

FIG. 5.3 – Trait plein : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, trait pointillé : $g(x) = f(2x) = e^{-2x^2}$

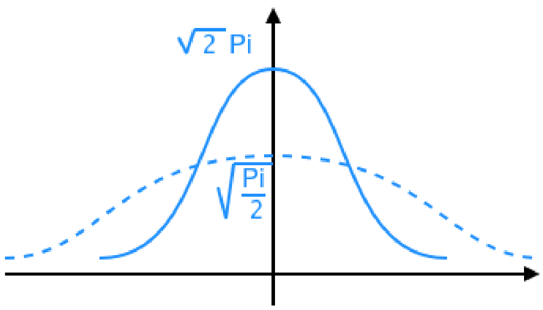

FIG. 5.4 – Trait plein : $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, trait pointillé : $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\hat{f}(\frac{\xi}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{8}}$

5.5 Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Dans l'espace de Hilbert des fonctions d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, l'étude de la transformée de Fourier présente une version achevée.

Théorème 35 *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Précisément au facteur 2π près, $\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire.*

$$\begin{aligned}
(\hat{f}|\hat{g})_{L^2_\xi(\mathbb{R})} &= 2\pi(f|g)_{L^2_x(\mathbb{R})} \\
\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Commentaire Une fonction de carré sommable n'est pas nécessairement sommable, par exemple $f(x) = snc\, x$. A cette étape de notre exposé, la transformée de Fourier n'est pas définie au delà de $L^1(\mathbb{R})$. On verra bientôt que cette transformée se prolonge aux distributions « tempérées » et ces distributions forment un espace contenant $L^2(\mathbb{R})$. Une autre définition possible pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ est :

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)e^{-ix\xi}\, dx. \tag{5.17}$$

La limite précédente étant prise par rapport à la norme L^2.

Exemple On choisit $f = g = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}$ pour vérifier l'égalité (5.16). On a $\|f\|^2_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$. Par ailleurs ,

$$\|\hat{f}\|^2_{L^2} = \int \left(\frac{2\sin\pi\xi}{\xi}\right)^2 d\xi \tag{5.18}$$

$$= \int \left(\frac{2\sin\pi t}{t}\right)\left(\frac{2\sin\pi t}{t}\right) e^{-it0}\, dt \tag{5.19}$$

$$\underset{(5.14)}{=} \frac{1}{2\pi}\widehat{\frac{2\sin\pi t}{t}} * \widehat{\frac{2\sin\pi t}{t}}(0) \tag{5.20}$$

$$\underset{\text{récip}}{=} \frac{1}{2\pi}(2\pi\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}) * (2\pi\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]})(0) \tag{5.21}$$

$$= 4\pi^2 \tag{5.22}$$

On a bien $\|\hat{f}\|^2 = 4\pi^2 = 2\pi\|f\|^2$.

Exercice Vérifier (5.16) avec $f = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

5.6 Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées

Une distribution est une fonction (ou fonctionnelle) sur $\mathcal{D}$. Une distribution est d'autant plus régulière qu'elle peut être prolongée à un espace plus gros que l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions test. Par exemple, δ peut être prolongée à l'espace des fonctions continues (mesure de Radon), δ' se prolonge à l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui est moins gros que l'espace précédent. De ces faits δ' est une distribution moins régulière que δ, comme l'intuition du passage à la dérivée dans les fonctions le suggère.

5.6.1 Espace de Schwartz $\mathcal{S}$

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est à *décroissance rapide* si $|x|^m f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées est appelé *espace de Schwartz* et est noté $\mathcal{S}$.

Une Gaussienne est dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Théorème 36 *On a :*
(i) $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *;*
(ii) $\mathcal{S}$ est stable par multiplication $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{S})$ *;*
(iii) $\mathcal{S}$ est stable par dérivation $(\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi^{(k)} \in \mathcal{S} \quad \forall k \in \mathbb{N})$ *;*
(iv) $\varphi \in \mathcal{S}$, $P(x)$ polynôme $\Rightarrow P(x) \cdot \varphi \in \mathcal{S}$ *;*
(v) $\mathcal{S} \subset L^1$ et si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

On peut faire ces vérifications faciles à titre d'exercice.

5.6.2 Comment étendre la définition de la transformée de Fourier ?

Pour des fonctions f et g sommables on a d'après le théorème d'interversion :

$$\int \hat{f}(x)g(x)\,dx = \iint f(y)g(x)e^{-ixy}\,dxdy = \int f(y)\hat{g}(y)\,dy \tag{5.23}$$

En raccourci, on a la propriété de transfert :

$$\int \hat{f}g = \int f\hat{g} \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \tag{5.24}$$

La formule (5.23) suggère une autre forme de la transformée de Fourier.

$$< \widehat{T_f}, \varphi > = < T_{\hat{f}}, \varphi > = < T_f, \hat{\varphi} > \qquad \varphi \in \mathcal{D} \tag{5.25}$$

Malheureusement, $\hat{\varphi}$ peut ne pas être dans $\mathcal{D}$. L'idée naît d'étendre le crochet précédent à la classe $\mathcal{S}$.

5.6.3 Distribution tempérée

Définition 37 *Une distribution T sur $\mathbb{R}$ est dite* tempérée *si elle se prolonge (de manière continue) à $\mathcal{S}$.*

Remarque : La définition précédente suppose qu'on puisse définir la convergence dans $\mathcal{S}$. On dit que *la suite φ_n converge vers φ dans $\mathcal{S}$*, et on note $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi$, si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta(\varphi_n - \varphi)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5.26}$$

On peut alors reformuler :

Définition 38 (équivalente) *Une distribution* tempérée *T est une application linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que si $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi$, alors $< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to+\infty]{} < T, \varphi >$ (dans $\mathbb{C}$).*

Exemples :
- Les distributions régulières associées aux fonctions $e^{|x|}$ et e^x ne sont pas tempérées.
- $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, les polynômes donnent naissance à des distributions tempérées. Une distribution périodique est tempérée.

5.7 $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ quand $T \in \mathcal{S}'$

Définition 39 *Soit T une distribution tempérée. La* transformée de Fourier *de T est une nouvelle distribution définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T} : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & <\widehat{T}, \varphi>=<T, \widehat{\varphi}> \end{array} \tag{5.27}$$

Remarques

- $<T, \widehat{\varphi}>$ a un sens car $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.
- S'il est acquis que $<T, e^{-i\xi x}>$ a un sens, alors ce sera $\widehat{T}(\xi)$.

Cette transformation de Fourier étendue conserve toutes les propriétés classiques énoncées au paragraphe (5.4) ainsi que la réciprocité.

Exemple

On vérifie à titre indicatif que $\mathcal{F}(T') = i\xi\widehat{T}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} <\mathcal{F}(T'), \varphi> & = & <T', \widehat{\varphi}> & \text{(définition de } \mathcal{F}) \\ & = & -<T, (\widehat{\varphi})'> & \text{(définition de dérivée de } T) \\ & = & -<T, \mathcal{F}(-ix\varphi)> & \text{(échange dérivation - mult. monômiale)} \\ & = & -<\widehat{T}, -ix\varphi> & \text{(définition de } \mathcal{F}) \\ & = & <i\xi\widehat{T}, \varphi> & \text{(définition de } fT) \end{array} \tag{5.28}$$

(C.Q.F.D.)

Comme $\mathcal{S} \in \mathcal{L}^1$, pour $\varphi \in \mathcal{S}$ la formule de réciprocité s'écrit :

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\varphi) = 2\pi\varphi^-. \tag{5.29}$$

Un petit calcul facile analogue à celui qui précède assure que pour $T \in \mathcal{S}'$,

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = 2\pi T^-, \tag{5.30}$$

où la *distribution retournée* T^- est définie par :

$$\begin{array}{rcl} T^- : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & <T^-, \varphi>=<T, \varphi^->\end{array} \tag{5.31}$$

On observe grâce à (5.30) que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{S}'$ et que la transformée inverse ou réciproque $\mathcal{F}^{-1}$ est telle que :

$$\forall T \in \mathcal{S}', \qquad \mathcal{F}^{-1}(T) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(T^-) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(T). \tag{5.32}$$

5.8 Des exemples

Exemple 1

$$\boxed{\widehat{\delta} = 1} \tag{5.33}$$

En effet :

$$\hat{\delta}(\xi) =<\delta, e^{-i\xi x}>= e^0 = 1. \tag{5.34}$$

Ou bien :

$$<\hat{\delta}, \varphi>=<\delta, \hat{\varphi}>= \hat{\varphi}(0) = \int \varphi =<1, \varphi>. \tag{5.35}$$

Exemple 2

Soit T une distribution périodique de période $a > 0$. Elle est égale à sa série de Fourier $\sum c_n e^{in\frac{2\pi}{a}x}$. La transformée de Fourier (qu'on démontre continue dans $\mathcal{S}'$) donne :

$$\begin{aligned}\widehat{T} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \widehat{e^{in\frac{2\pi}{a}x}} \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{\frac{2\pi}{a}n}\end{aligned} \tag{5.36}$$

On a utilisé $\boxed{\widehat{1} = 2\pi\delta}$, qui est une conséquence de l'exemple 1 et de la formule de réciprocité. Le spectre obtenu est localisé sur la grille $\frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$, d'où le nom de *spectre de raies*.

Exemple 3 : Peigne de Dirac (de pas $a > 0$)

$$\sqcup\!\sqcup_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na} \tag{5.37}$$

Ce peigne est une distribution périodique de période a, sa série de Fourier est $\frac{1}{a}\sum e^{in\frac{2\pi}{a}x}$ *(voir paragraphe 3.7., chapitre Fourier périodique)*. Il vient :

$$\widehat{\sqcup\!\sqcup_a} = \frac{1}{a}\sum \widehat{e^{in\frac{2\pi}{a}x}} = \frac{2\pi}{a}\sqcup\!\sqcup_{\frac{2\pi}{a}} \tag{5.38}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, la formule précédente donne la célèbre *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{a}\varphi\left(\frac{2\pi}{a}n\right). \tag{5.39}$$

Exemple 4

Nouvelle preuve d'un cas particulier de (5.39) : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi n)$. On considère la fonction $\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi n)$. C'est une fonction 2π-périodique. Calculons le coefficient de Fourier $c_n(\phi)$:

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} \varphi(x + 2k\pi)e^{-inx}\,dx. \tag{5.40}$$

Dans l'intégrale générique de la somme précédente on fait le changement de variable $x + 2k\pi = x'$. Alors :

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \varphi(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi}(n) \tag{5.41}$$

En égalant $\phi(x)$ et sa série de Fourier en $x = 0$, on obtient la formule cherchée.

5.9 Transformée de Laplace

Le marquis de Laplace est né dans le Calvados. Il vit à Paris à la fin du $XVIII^e$ siècle et au début du XIX^e. Napoléon le nomme Ministre de l'Intérieur, ce qui n'est pas une réussite. En revanche, il fonde les probabilités et il introduit la transformée qui va suivre. C'est surtout un grand astronome.

Pour les fonctions et distributions sur $\mathbb{R}$, on dispose de la transformée de Fourier. Certaines fonctions comme la fonction de Heaviside n'ont pas de transformation de Fourier simple (ainsi, $\widehat{Y} = \pi\delta + \frac{1}{i}vp(\frac{1}{\xi})$).

Quand le support d'une distribution est inclus dans $\mathbb{R}_+$, on introduit maintenant une transformation plus avenante.

Définition 40 *Pour une distribution T à support dans $\mathbb{R}_+$ (respectivement une fonction f à support dans $\mathbb{R}_+$), la* transformée de Laplace *est définie, pour $p \in \mathbb{C}$, par :*

$$\mathcal{L}(T)(p) = < T, e^{-px} > \tag{5.42}$$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\, dx \tag{5.43}$$

Bien entendu, les formules précédentes n'ont pas toujours un sens. On démontre que cette transformée est définie sur un demi plan ($\subset \mathbb{C}$) vertical (éventuellement vide) de la forme $Re(p) > s$ où s est un réel qu'on appelle *abscisse de sommabilité*. En outre sur ce demi plan, $\mathcal{L}(T)$ (resp $\mathcal{L}(f)$) est une fonction holomorphe, donc très régulière et en particulier $\mathcal{C}^\infty$. Il est clair que $\mathcal{L}$ est *linéaire*. En outre si $\mathcal{L}(T_1)(p) = \mathcal{L}(T_2)(p)$ pour $Re(p) > p_0$, alors $T_1 = T_2$. ($\mathcal{L}$ est *injective*).

5.9.1 Exemples

• Si la transformée de Laplace est définie sur l'axe imaginaire $p = i\xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$ on retrouve la transformée de Fourier :

$$\mathcal{L}(T)(i\xi) = \widehat{T}(\xi) \tag{5.44}$$

• L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)e^{-i\xi x}\, dx$ n'a pas de sens comme la transformée de Y considérée comme fonction. En revanche, dès que $Re(p) > 0$, $\mathcal{L}(Y)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-px}\, dx = \frac{1}{p}$.

$$\boxed{\mathcal{L}(Y)(p) = \frac{1}{p}} \tag{5.45}$$

• $\mathcal{L}(\delta)(p) =< \delta, e^{-px} >= 1$.

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta) = 1} \tag{5.46}$$

• En se rappelant la définition de la fonction Γ, si $\alpha > -1$, $Re(p) > 0$,

$$\mathcal{L}(x^\alpha Y(x))(p) = \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-px}\, dx \overset{u=px}{=} \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} u^\alpha e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{x^\alpha Y}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}} \tag{5.47}$$

Exercice

1. Si $a \in \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{L}(e^{ax}T)(p) = \mathcal{L}(T)(p-a)$.
2. Pour $\omega > 0$, déduire $\mathcal{L}(\cos(\omega x)Y) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ en écrivant $\cos(\omega x) = \frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$.
3. $\mathcal{L}(\sin \omega x Y) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.
4. Pour $\alpha > -1$ et $a \in \mathbb{C}$, en déduire aussi $\mathcal{L}(x^\alpha e^{ax} Y(x)) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-a)^{\alpha+1}}$.

5.9.2 Comportement de la transformée de Laplace

Dérivation et distribution

$$\mathcal{L}(T') = p\mathcal{L}(T) \tag{5.48}$$

Dérivation d'une fonction

Dérivation d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux à support inclus dans $\mathbb{R}_+$ et avec une discontinuité en 0

$$\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f) - f(0^+) \tag{5.49}$$

Preuve Avec la formule des sauts :

$$(T_f)' = T_{f'} + f(0^+)\delta \tag{5.50}$$

En prenant la transformée de Laplace qui est linéaire :

$$p\mathcal{L}(T_f) \overset{(5.48)}{=} \mathcal{L}(T_f) = \mathcal{L}(T_{f'}) + f(0^+)\mathcal{L}(\delta) \tag{5.51}$$

On obtient (5.49) en identifiant $\mathcal{L}(T_f) = \mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(T_{f'}) = \mathcal{L}(f')$ et en remarquant que $\mathcal{L}(\delta) = 1$;

Convolution

$$\mathcal{L}(T * S) = \mathcal{L}(T)\mathcal{L}(S) \tag{5.52}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T * S)(p) &= < T_x \otimes S_y, e^{-p(x+y)} > && (5.53)\\ &= < T_x, e^{-px} >< S_y, e^{-py} > && (5.54)\\ &= \mathcal{L}(T)(p)\mathcal{L}(S)(p) && (5.55) \end{aligned}$$

5.9.3 Exemple travaillé

Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$pour $a \in \mathbb{C}$:

$$T' + aT = \delta \tag{5.56}$$

Première méthode On multiplie par e^{ax} :

$$(e^{ax}T)' = e^{ax}\delta = \delta \tag{5.57}$$

(on a utilisé pour $f \in \mathcal{C}^\infty$, $f\delta = f(0)\delta$).
On passe à la primitive : $e^{ax}T = Y + c$, où la constante c est nulle pour avoir une solution à support dans $\mathbb{R}_+$, et donc :

$$T = e^{-ax}Y. \tag{5.58}$$

Deuxième méthode On cherche une solution de la forme $T = f(x)Y$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty$.
L'équation (5.56) devient

$$(f'(x) + af(x))Y(x) + f(0^+)\delta = \delta, \tag{5.59}$$

ce qui impose

$$f'(x) + af(x) = 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{et} \quad f(0^+) = 1. \tag{5.60}$$

Par conséquent, $f(x) = e^{-ax}$. Il reste à prouver que la solution obtenue $e^{-ax}Y$ de $\mathcal{D}'_+$ est bien la seule dans $\mathcal{D}'_+$.

Troisième méthode On applique la transformée de Laplace à l'équation (5.56). En utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$, formule (5.48) et $\mathcal{L}(\delta) = 1$ il vient $(p + a)\mathcal{L}(T) = 1$, et donc

$$\mathcal{L}(T) = \frac{1}{p + a} \tag{5.61}$$

Mais on sait que $\mathcal{L}(Y) = \frac{1}{p}$, par suite $\mathcal{L}(e^{-ax}Y) = \frac{1}{p+a}$. Avec ce qui précède, on note que T et $e^{-ax}Y$ ont la même image de Laplace. D'après l'injectivité de la transformée de Laplace, on obtient

$$T = e^{-ax}Y. \tag{5.62}$$

Epilogue

L'intégrale de Lebesgue en mathématique

Cédant comme les autres à la mode des commémorations, les mathématiciens ont célébré à leur manière le centenaire de l'intégrale de Lebesgue. En particulier, une rencontre a eu lieu à l'ENS Lyon les 27-28 avril 2001, intitulée *"La mesure de Lebesgue a 100 ans !"*. On trouvera dans [12] une transcription des exposés, ainsi qu'une photographie des pages manuscrites [12, p. 17-21] que Lebesgue a transmises à l'Académie des sciences. En ces temps pas encore pourvu d'ordinateur, la rédaction des articles était bien sûr manuscrite, le reste était du ressort de l'imprimeur (dans ce cas Gauthier-Villars). Le travail des typographes n'était pas mince !, et pourtant : *"Jusque dans les années 1950, il était possible de déposer une note aux Comptes rendus le lundi après-midi et de corriger les épreuves chez Gauthier-Villars, le mercredi matin"*. Rien à voir avec les délais actuels (plusieurs mois !).

Brisons-là la polémique (d'ailleurs réduite à 10 lignes dans l'avant-propos d'un ouvrage de 150 pages de belle mathématique), et citons Jean-Pierre Kahane [12, p. 1] :
"Vue d'aujourd'hui, l'intégrale de Lebesgue domine tout un pan des mathématiques du vingtième siècle : l'analyse de Fourier et l'analyse fonctionnelle, la théorie des probabilités, la théorie géométrique de la mesure, la théorie des ensembles mesurables et les différentes théories de la mesure et de l'intégration, liées aux groupes, aux variables réelles, à la physique et par là à presque tout le reste des sciences mathématiques.".

La fin de l'histoire ?

A Didon nous sommes maintenant en mesure de proposer le

Théorème 41 (problème isopérimétrique) *Parmi toutes les courbes planes, sans point double, fermées, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de longueur donnée, le cercle est celle qui entoure une aire maximale.*

Démonstration. On peut supposer que la longueur donnée est 2π, le cas général s'en déduit par homothétie.
Partons d'une courbe γ décrite paramétriquement à l'aide de l'abscisse curviligne. Ainsi γ est définie par $z(s) = x(s) + iy(s)$ avec $s \in [0, 2\pi]$, $z(0) = z(2\pi)$ et où $x(s)$ et $y(s)$ sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le choix de l'abscisse curviligne entraîne $|z'(s)| = 1$ pour tout $s \in [0, 2\pi]$ à l'exception d'un ensemble fini. La longueur de γ peut donc s'écrire indifféremment comme :

$$2\pi = \int_0^{2\pi} |z'(s)|ds = \int_0^{2\pi} |z'(s)|^2 ds. \tag{5.63}$$

Comme la courbe est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $z(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ins}$ (série de Fourier). Parseval pour $z'(s)$ donne alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z'(s)|^2 ds = 1. \tag{5.64}$$

Par ailleurs, la courbe γ entoure un domaine d'aire a qu'on calcule par

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} xy' - yx' = \frac{-1}{2} Im \left(\int_0^{2\pi} z\overline{z'} \right) \\ &= \frac{-1}{2} Im \left(2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{inc_n} \right) \\ &= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \end{aligned} \tag{5.65}$$

L'inégalité $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = 1$ étant toujours réalisée, on observe que $\boxed{a \leq \pi}$. L'égalité dans l'inégalité précédente correspond au cas qui nous intéresse et signifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n^2 - n)|c_n|^2 = 0$. Chaque terme de la somme étant positif, c'est encore équivalent à $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Mais alors $1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = |c_1|^2$. On peut écrire $c_1 = e^{-i\alpha}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) et la courbe correspondante est paramétrée par son abscisse curviligne sous la forme

$$z(s) = c_0 + e^{i(s-\alpha)}. \tag{5.66}$$

C'est donc un cercle de rayon 1. □

Remarque 42 Ce problème isopérimétrique et l'inégalité isopérimétrique (ici $a \leq \pi$ dans le plan, dimension $d = 2$) admettent de nombreuses généralisations. Le lecteur intéressé pourra lire les opuscules du géomètre Marcel Berger [1], deux petits livres de 150 pages, riches, clairs et bien illustrés, un plaisir !

En dimension d quelconque (dans $\mathbb{R}^d$), considérons un ensemble convexe C, de bord ∂C. Alors, si B désigne une boule de $\mathbb{R}^d$ on a l'inégalité

$$\frac{(Aire(\partial C))^d}{(Vol(C))^{d-1}} \geq \frac{(Aire(\partial B))^d}{(Vol(B))^{d-1}}. \tag{5.67}$$

De plus, si on a égalité, le convexe est une boule[1, Vol. 2, p.53]. Vérifier par soi-même que le second membre est indépendant du rayon de la boule, et faire le calcul pour $d = 2$ et $d = 3$. Le cas général est connu explicitement, voir [1, Vol. 2, p.47-50].

Bibliographie

[1] M. Berger, *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà. De la puissance et de la complexité d'une notion simple.*, Opuscules (2 volumes), Ellipses, 2006.

[2] J.-M. Bony, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses, 2004.

[3] G. Choquet, *Cours de topologie.*, 2^e édition revue et corrigée, 4^e tirage, Masson, 1992.

[4] R. Dalmasso, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications, Exercices corrigés*, Masson, 1996

[5] C. Gasket, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications, Cours*, Masson, 1995.

[6] T.M. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge University Press, 1998.

[7] J.-P. Kahane, P. G. Lemarié-Rieusset, *Séries de Fourier et ondelettes*, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, Paris, 1998.

[8] F. Roddier, *Distribution et transformation de Fourier*, à l'usage des physiciens et des ingénieurs. McGraw-Hill, (cinquième tirage), 1983.

[9] J.L. Schiff, *The Laplace transform, theory and applications*, Springer, 1999.

[10] T. Schücker, *Distributions, Fourier transforms and some of their applications to Physics*, World Scientific, 1991.

[11] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1965.

[12] G. Choquet, T. De Pauw, P. de la Harpe, J.-P. Kahane, H. Pajot, B. Sévennec, *Autour du centenaire Lebesgue*, Panoramas et Synthèses, **18**, Société Mathématique de France, 2004.