RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
UNIVERSITÉ DE TUNIS

INSTITUT SUPERIEUR DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION CONTINUE

DÉPARTEMENT
SCIENCES ET TECHNIQUES

MAÎTRISE
Physique-Chimie
Génie électrique
Génie Mécanique

CODE UV
PC104-1 - GE/GM103

TITRE DE L'UV
TMP-1

TITRE DU COURS
Techniques Mathématiques pour la Physiques

Enseignant :
Mondher TANGOUR

SEPTEMBRE 2002 - 39 SEMESTRE

Cette unité contient les notions mathématiques de base nécessaires à tout utilisateur des mathématiques. Elle s'adresse essentiellement aux candidats du premier cycle physique ou technique. Elle est constituée de six chapitres, trois chapitres (I, II, et III) d'algèbre et trois chapitres (IV, V et VI) d'analyse.

CHAPITRE I

POLYNÔMES
ET
FRACTIONS RATIONNELLES

Dans ce chapitre; IK désigne le corps des nombres réels IR ou le corps des nombres complexes ₵.

I- POLYNÔMES

I-1- Généralités

1) Définitions

On appelle **fonction polynôme** ou plus simplement polynôme toute application P de IK dans IK définie par :
$\forall$ x $\in$ IK ; $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$; où a_1; …; a_n sont des éléments de IK et $n \in$ IN.

2) Remarques

* On dit que x est une indéterminée et que P est un polynôme en x à coefficients dans IK. On notera IK[x] l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans IK.

* Pour tout entier n :
$\forall$ x $\in$ IK ; $a_0 + a_1x + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$; $\forall$ k $\in$ {0; …; n}

* Lorsqu'on écrit $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ (respectivement $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$); on dit que P(x) est ordonné suivant les puissances croissantes (respectivement décroissantes).

3) Degré d'un polynôme

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ un polynôme non nulle de IK[x]. Le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$ s'appelle le degré du polynôme P; on le note d° (P).

Cette définition a un sens pour tout polynôme P $\in$ IK[x]; sauf pour le polynôme nul. On pose par convention d°(0) = -∞.

*Soit P un polynôme de degré n ; $P(x) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$

Le terme a_nx^n s'appelle le monôme dominant de P et a_n le coefficient dominant de P.

Si $a_n = 1$; on dit que P est un polynôme unitaire.

* Les polynômes de degré 0 sont appelés polynômes constants ou plus simplement "constantes". Ce sont les éléments non nuls de IK.

4)Propriétés du degré

P et Q étant deux polynômes IK[x] alors :

i) $d°(P + Q) \leq \max(d°(P) ; d°(Q))$.

ii) $d°(PQ) = d°(P) + d°(Q)$.

I-2 Divisions des polynômes - Zéros d'un polynôme

1) Divisibilité dans IK[x]

a) Définition

Etant donné deux polynômes a et b de IK[x]; on dit que b divise a et l'on note b / a; s'il existe un polynôme $q \in$ IK[x] tel que $a = bq$:

$$b / a \Leftrightarrow (\exists\, q \in \text{IK}[x] \,;\, a = bq).$$

On dit aussi que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a.

b) Propriétés

Les propriétés suivantes résultent immédiatement de la définition :

$\forall$ a ; b ; c ; d $\in$ IK[x] ; $\forall \alpha \in$ IK* on a :

1) a / a.

2) a / b et b / c $\Leftrightarrow$ a / c.

3) a / b et a / c $\Leftrightarrow$ a / b + c.

4) a / b et c / d $\Leftrightarrow$ ac / bd.

5) a / b $\Leftrightarrow$ αa / b $\Leftrightarrow$ a / αb.

2) <u>Division euclidienne</u>

a) <u>Théorème</u>

> Etant donné deux polynômes a et b de IK[x] ; avec $b \neq 0$; il existe un couple unique de polynômes (q ; r) de IK[x] tels que :
>
> $$a = bq + r \quad \text{et} \quad d°(r) < d°(b).$$

b) <u>Définition</u>

Etant donné deux polynômes a et b de IK[x] avec $b \neq 0$.

Déterminer le couple (q ; r) tels que : $a = bq + r$ et $d°(r) < d°(b)$

c'est effectuer la division euclidienne de a par b. (On dit aussi division selon les puissances décroissantes).

Les polynômes q et r se nomment respectivement : quotient et reste.

c) <u>Remarque</u>

Pour que b / a ; il faut et il suffit que le reste de la division euclidienne de a par b soit nul.

d) <u>Exemple et disposition pratique</u>

Effectuons la division euclidienne de :

$$a = 3X^5 + 4X^2 + 1 \qquad \text{pour} \qquad b = X^2 + 2X + 3.$$

On adopte la disposition pratique suivante.

$$
\begin{array}{lcccccc|ccccc}
a = & 3X^5 & & & +4X^2 & & +1 & X^2 & +2X & +3 & & = b \\
\cline{8-12}
 & -3X^5 & -6X^4 & -9X^3 & & & & 3X^3 & -6X^2 & +3X & +16 & = q \\
\cline{2-7}
 & & -6X^4 & -9X^3 & +4X^2 & & +1 & & & & & \\
 & & 6X^4 & +12X^3 & +18X^2 & & & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & 3X^3 & +22X^2 & & +1 & & & & & \\
 & & & -3X^3 & -6X^2 & -9X & & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & 16X^2 & -9X & +1 & & & & & \\
 & & & & -16X^2 & -32X & -48 & & & & & \\
\cline{2-7}
r = & & & & & -41X & -47 & & & & &
\end{array}
$$

On a donc : $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.

(le degré du reste $-41X - 47$ est strictement inférieur à celui de b)

3) <u>Zéros d'un polynôme</u>

a) <u>Définition</u>

On dit qu'un élément a de IK est un zéro ou une racine du polynôme $P \in IK[x]$ si $P(a) = 0$.

b) <u>Théorème</u>

Soit $P \in IK[x]$ et $a \in IK$.

i) Le reste de la division euclidienne de P par $x - a$ est $P(a)$.

ii) Pour que a soit un zéro de P ; il faut et il suffit que P soit divisible par $x - a$.

<u>Preuve</u>

Effectuons la division euclidienne de P par $x - a$.

Il existe un couple $(q ; r)$ de polynômes tels que :

$$a = (x-a)q + r \quad \text{et} \quad d°(r) < d°(x-a)$$

or $d°(x - a) = 1$ donc r est une constante.

D'où $P(a) = (a - a)q(a) + r$.

Soit $P(a) = r$ et conséquent $P = (x - a)q + P(a)$.

Ainsi i) est établi.

D'autre part pour que P soit divisible par $x - a$; il faut et il suffit que $P(a) = 0$; c'est à dire que a soit un zéro de P. Ainsi ii) est établi.

4) <u>Tableau de HORNER</u>

* Soit $a \in IK$ et $P \in IK[x]$; $d°P = n$; $n \geq 1$.

Déterminons le quotient de la division euclidienne de P par $x - a$.

On a : $P = (x - a)Q + P(a)$ et $d°Q = n - 1$.

Posons $P = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$; $a_n \neq 0$

et $Q = b_0 + b_1x + ... + b_{n-1}x^{n-1}$.

On obtient :

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0) + P(a)$

$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + ... + (b_{k-1} - ab_k)x^k + ... + (b_0 - ab_1)x + P(a) - ab_0$

Par identification on a alors :

$a_n = b_{n-1}$; $a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$; ... ; $a_k = b_{k-1} - ab_k$;...; $a_1 = b_0 - ab_1$; $a_0 = P(a) - ab_0$

Soit

$b_{n-1} = a_n$; $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$; $b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$; ...; $b_{k-1} = a_k + ab_k$;...; $b_0 = a_1 + ab_1$;

$P(a) = a_0 + ab_0$.

On résume ceci dans le tableau suivant :

P	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_k	…	…	a_1	a_0	Reste
a	0	$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	…	b_k	b_{k-1}	…	…	b_0	P(a)

où on calcule les coefficients b_k par la formule :

$$b_k = a_{k+1} + ab_{k+1} \ ; \ \forall k \in \{0 ; ... ; n - 2\}.$$

Exemple

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

$$P = X^5 + 2X^4 - 3X^2 - 36X - 5 \qquad \text{par} \qquad X - 3.$$

P	1	2	0	-3	-36	-5	Reste
3	0	1	5	15	42	90	265

Soit $P = (X - 3)(X^4 + 5X^3 + 15X^2 + 42X + 90) + 265$.

Exemple (Tableau de HORNER complet)

1)Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de :

$$P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 40X + 24 \qquad \text{par} \qquad (X - 2)^3 \qquad \text{puis par} \qquad (X - 2)^4.$$

P	1	-9	30	-40	+24	Reste
2	0	1	-7	16	-8	8
2		0	1	-5	6	4
2			0	1	-3	0
2				0	1	-1

$P = (X - 2)(X^3 - 7X^2 + 16X - 8) + 8$; posons $Q = X^3 - 7X^2 + 16X - 8$; on a alors :

$Q = (X - 2)(X^2 - 5X + 6) + 4$; posons $Q_1 = X^2 - 5X + 6$; on a alors :

$Q_1 = (X - 2)(X - 3)$; posons $Q_2 = X - 3$; on a alors :

$Q_2 = (X - 2) - 1$.

D'où $P = (X - 2)^3[X - 3] + 4(X - 2) + 8 = (X - 2)^3(X - 3) + 4X$

et $P = (X - 2)^4 - (X - 2)^3 + 4(X - 2) + 8$.

2) Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de :

$$P = 5X^6 - 6X^5 + 1 \quad ; \quad \text{par } (X - 1)^2$$

P	5	-6	0	0	0	0	1	Reste
1	0	5	-1	-1	-1	-1	-1	0
1		0	5	4	3	2	1	0

Donc $P = (X - 1)^2(5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$.

5- <u>Polynômes associés</u>

* On dit que les éléments A et B de IK[X] sont associés s'ils se divisent l'un l'autre ($A \neq 0$; $B \neq 0$).

* Dans ce cas il existe P et Q tels que $A = BP$ et $B = AQ$ d'où $A = AQP$ et par conséquent $1 = QP$ donc P et Q sont des constantes non nulles.

Donc on a :

A / B et B / A si et seulement s'il existe $\lambda \in IK^*$ telle que $A = \lambda B$.

Exemple

Soit $A = 3X^3 - 2X - 6$.

Si A et B sont associés et B est unitaire alors : $B = X^3 - \frac{2}{3} X - 2$

6) Division selon les puissances croissantes

a) Théorème

> Etant donné un nombre naturel h et deux polynômes a et b de IK[X] avec b(0)≠ 0 ; il existe un couple unique (q ; r) de polynômes de IK[x] tels que :
>
> $$a = bq + x^{h+1} r; \quad \text{et } d°(q) \leq h$$

b) Définition

> Etant donné un nombre naturel h et deux polynômes a et b de IK[X] avec b(0) ≠ 0.
>
> Déterminer le couple (q ; r) tels que :
>
> $$a = bq + x^{h+1} r; \quad \text{et } d°(q) \leq h$$
>
> C'est effectuer la division de a par b à l'ordre h selon les puissances croissantes.

c) Disposition pratique

Soit $a = 2 + 4X^2 + X^3$ et $b = 1 + 2X + 3X^2$.

Effectuons la division à l'ordre h = 3; selon les puissances croissantes de a par b.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & & +4X^2 & +X^3 & & & 1 \ +2X \ +3X^2 \\ \cline{7-7}
-2 & -4X & -6X^2 & & & & 2 \ -4X \ +6X^2 \ +X^3 \\ \cline{1-6}
 & -4X & -2X^2 & +X^3 & & & \\
 & 4X & +8X^2 & +12X^3 & & & \\ \cline{1-6}
 & & 6X^2 & +13X^3 & & & \\
 & & -6X^2 & -12X^3 & -18X^4 & & \\ \cline{1-6}
 & & & X^3 & -18X^4 & & \\
 & & & -X^3 & -2X^4 & -3X^5 & \\ \cline{1-6}
 & & & & -20X^4 & -3X^5 &
\end{array}$$

On a donc :

$$2 + 4X^2 + X^3 = (1 + 2X + 3X^2)(2 - 4X + 6X^2 + X^3) + X^4(- 20 - 3X)$$

7) <u>Racines rationnelles d'un polynôme</u>

a- <u>Théorème</u>

Soit $A = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polynôme de degré $n \geq 2$ où les coefficients a_i sont des éléments de Z (premiers entre eux dans leur ensemble) et $\alpha = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel où $p \in Z$; $q \in IN^*$; p et q premiers entre eux.

Si α est racine de A alors p divise le terme constant a_0 et q divise le coefficient dominant a_n.

De plus p - q divise A(1) (si $A(1) \neq 0$) et p + q divise A(-1) (si $A(-1) \neq 0$).

b- <u>Application</u>

Soit $A = 4X^3 + X^2 + X - 3$.

Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de A alors p divise 3 et q divise 4 d'où $p \in \{-1 ; 1 ; -3 ; 3\}$ et $q \in \{1 ; 2 ; 4\}$ (car $q > 0$) .

Ce qui donne $\frac{p}{q} \in \{-1 ; 1 ; -3 ; 3 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; -\frac{3}{4} ; \frac{3}{4}\}$.

Comme $A(1) = 3$ et $A(-1) = -7$ alors p - q divise 3 et p + q divise -7 on en déduit alors que les rationnels $3 ; -3 ; \frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; -\frac{3}{4}$ ne sont pas racines.

Donc les seules racines rationnelles possibles sont donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. On vérifie alors que $A(-\frac{1}{2}) \neq 0$ et $A(\frac{3}{4}) = 0$.

Donc $\frac{3}{4}$ est une racine de A et A s'écrit : $A = (4X - 3)(X^2 + X + 1)$.

c- <u>Exercice</u>

Déterminer les racines des polynômes suivants :

a) $4X^4 + 36X^3 + 61X^2 - 90X + 25$.

b) $2X^3 - 7X^2 + 5X - 6$.

I-3- Dérivation des polynômes

1) Dérivée d'un polynôme

a- Définition

Soit $p = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ un polynôme de $IK[x]$; $d°(p) = n$.

Par définition; la dérivée de p (noté p' ou $p'(x)$) est le polynôme :

$$p' = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} \; ; \text{ si } n \geq 1$$

Et si $n = 0$ ou $-\infty$ alors $p' = 0$.

b- Remarques

* Si $d°(p) \geq 1$ alors $d°(p') = d°(p) - 1$.

c- Propriétés

1) $\forall p \in IK[x]$; $\forall q \in IK[x]$; $\forall \alpha \in IK$ on a :

i) $(p + q)' = p' + q'$.

ii) $(\alpha p)' = \alpha p'$.

2) $\forall p \in IK[x]$; $\forall q \in IK[x]$; on a :

i) $(pq)' = p'q + q'p$.

ii) $(p^n)' = np'p^{n-1}$; $\forall n \in IN^*$.

d) Dérivées successives

On définit par récurrence; le polynôme dérivée d'ordre n ($n \in IN$) d'un polynôme p ; noté $p^{(n)}$ comme suit : $p^{(0)} = p$; $p^{(n+1)} = [p^{(n)}]'$.

On a ainsi : $p^{(0)} = p$.

$p^{(1)} = p'$.

$p^{(2)} = (p')'$; noté p''.

$p^{(3)} = (p'')'$; noté p'''.

2) Multiplicité d'un zéro

a- Définition

On appelle multiplicité d'un zéro a d'un polynôme p de $IK[x]$; l'entier naturel $h \geq 1$ tel qu'il existe un polynôme q vérifiant :

$$p = (X - a)^h q \quad \text{avec} \quad q(a) \neq 0.$$

b- Remarque

* On dit aussi que a est un zéro d'ordre h de p.

* Si $h = 1$; on dit que a est une racine simple de p.

Si $h \geq 2$; on dit que a est une racine multiple de p

Si $h = 2$; on dit que a est une racine double de ; ….

c- Propriété

Si a_1 ; a_2 ; ... ; a_r sont des zéros distincts d'un polynôme p de $IK[x]$; de multiplicité respectives h_1 ; h_2 ; ... ; h_r il existe alors un polynôme q de $IK[x]$; tel que :

$$p = (x - a_1)^{h_1}(x - a_2)^{h_2} \ldots (x - a_r)^{h_r} q$$

avec : $q(a_i) \neq 0$ pour $i \in \{1 ; 2 ; ... ; r\}$.

d- Remarque

De la propriété précédente; il résulte que :

$$d^\circ(p) = h_1 + ... + h_r + d^\circ(q)$$

d'où; $h_1 + ... + h_r \leq d^\circ(p)$.

Donc tout polynôme p de $IK[x]$ de degré $n \geq 1$ a au plus n zéros distincts (il peut n'en avoir aucun).

En particulier si; $h_1 + ... + h_r = d^\circ(p)$ alors $d^\circ(q) = 0$ et q est une constante.

Si $q = \lambda \in IK^*$ est cette constante on a dans ce cas :

$$p = \lambda(x - a_1)^{h_1} \ldots (x - a_r)^{h_r}.$$

e- Lemme

Soit $p \in IK[x]$. Si a est un zéro d'ordre $h > 1$ de p ; alors a est un zéro d'ordre $h - 1$ de p'.

Preuve

Supposons a zéro d'ordre $h > 1$ de p. Alors il existe $q \in IK[x]$ tel que :

$$p = (x - a)^h q \quad \text{avec} \qquad q(a) \neq 0.$$

Dérivons p on obtient :

$p' = h(x - a)^{h-1}q + (x - a)^h q'$

$\quad = (x - a)^{h-1}[hq + (x - a)q']$.

Posons $t = hq + (x - a)q'$.

On a alors : $p' = (x - a)^{h-1}t$

avec $t(a) = hq(a) \neq 0$.

Donc a est zéro d'ordre $h - 1$ de p'.

f- Théorème

> Soit $p \in IK[x]$ et $h \in IN^*$; pour que a soit zéro d'ordre h de p ; il faut et il suffit que a soit zéro de $p^{(i)}$ pour $0 \leq i < h$ et que $p^{(h)}(a) \neq 0$.

g-Exercice

Soit le polynôme $P = 6x^8 - 8x^7 + 8x - 6$.

Vérifier que 1 est une racine de p et déterminer son ordre de multiplicité.

I-4- POLYNOMES de ₵[X] ET DE IR[X]

1) Polynômes Irréductibles

a- Définition

> Un polynôme P de IK[X] de degré $n \geq 1$; est dit **irréductible** ou **premier** sur le corps IK (ou dans IK[X]) si ses seuls diviseurs dans IK[X sont les polynômes associés à P et les éléments de IK*
>
> Un polynôme qui n'est pas irréductible est dit **réductible**.

b- Remarques

1) Il résulte de la définition que :

- Un polynôme non constant P est irréductible dans IK[X] si et seulement si (P = FG entraine que F ou G est constant.)

- Un polynôme irréductible P de degré $n \geq 1$ n'admet pas dans IK[X] des diviseurs dont le degré m vérifie $0 < m < n$.

- Tout polynôme irréductible n'est pas constant puisqu'il est de degré supérieur ou égal à 1.

-Tout polynôme associé à un polynôme irréductible est lui même irréductible.

-Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

2) -Le polynôme $X^2 - 2$ est réductible dans IR[X].

-Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans IR[X] et réductible dans ℂ[X] .

Ainsi la notion d'irréductibilité est relative au corps IK.

2) Polynômes premiers entre eux

a) Définition :

Etant donnés deux polynômes P et Q de IK[X]; on dit que P et Q sont premiers entre eux si les seuls diviseurs communs de P et Q sont les éléments de IK*

b) Proposition :

Soient P un polynôme irréductible de IK[X] et A un polynôme de IK[X]. Alors A et P sont premiers entre eux si et seulement si P ne divise pas A.

3- Polynômes de ℂ[X]

a) Théorème : Théorème de d'Alembert

Tout polynôme de ℂ[X] ; de degré $n \geq 1$; admet au moins un zéro dans ℂ.

b) Remarque :

D'après le théorème de d'Alembert; tout polynôme irréductible de ℂ[X] est de degré 1.

c) Factorisation :

Soit $p \in ℂ[X]$ avec $d°(p) = n \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert; il admet au moins un zéro $\alpha_1 \in ℂ$. Il existe donc un polynôme $p_1 \in ℂ[X]$ tel que :

$p = (X - \alpha_1)p_1$. Si $n = 1$ on a $d°(p_1) = 0$ et p_1 est une constante.

Si $n > 1$; on a $d°(p_1) \geq 1$ et l'on peut appliquer de nouveau le théorème de d'Alembert au polynôme p_1 ; ce polynôme admet au moins un zéro $\alpha_2 \in ℂ$ et il existe $p_2 \in ℂ[X]$ tel que $p_1 = (X - \alpha_2)p_2$ d'où $p = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)p_2$.

Si $n = 2$; alors $d°(p_2) = 0$ et p_2 est une constante.
Si $n \geq 2$; raisonnons par récurrence sur le degré n du polynôme p ; supposons que :

$$p = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_{n-1})p_{n-1} \qquad \text{avec} \qquad d°(p_{n-1}) = 1.$$

Alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et un nombre $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$p_{n-1} = \lambda(X - \alpha_n)$$

et par conséquent : $p = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$.

Il en résulte que tout polynôme p de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ possède n zéros; distincts ou non.

En regroupant les termes correspondants à des racines confondues; on obtient :

$\forall p \in \mathbb{C}[X]$; p non constant; p s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$p = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{k_i} \quad \text{où} \quad \lambda ; \alpha_i \in \mathbb{C}; \ k_i \in \mathbb{N}$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = d°p$$

appelée la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.

d) Exemple :

Soit $P = X^3 + 1$.

La factorisation du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$P = (X + 1)(X + j)(X - j^2)$

4- Polynômes de IR[X]

a) On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Par conséquent; ce qui a été dit des polynômes à coefficients complexes s'applique en particulier au polynômes à coefficients réels. Par exemple; tout polynôme non constant à coefficients réels admet au moins un zéro réel ou complexe.

Remarquons que les zéros d'un polynôme de IR[X] ne sont pas toujours réels; ainsi le polynôme du second degré à coefficients réels : $p = aX^2 + bX + c$
n'a de zéros réels que dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac \geq 0$.

Dans le cas où $b^2 - 4ac < 0$; les zéros appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.. Tout polynôme premier de IR[X] n'est pas nécessairement du premier degré. Nous nous proposons d'établir dans ce qui suit que tout polynôme premier de IR[X] est soit du premier degré soit du second degré à discriminant < 0.

b- Propriété

Soit $p \in IR[X]$ et $\alpha \in ℂ$. Alors $p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)}$.

($\overline{\alpha}$ désignant le conjugué de α).

Preuve

Rappelons que : $\forall\ \alpha \in ℂ$; $\forall\ \beta \in ℂ$; $\forall\ k \in IN$:

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha+\beta}$; $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$; $\overline{(\alpha)^k} = (\overline{\alpha})^k$

et que si $a \in IR$; $\overline{a} = a$

Prenons un polynôme p à coefficients réels :

$$p = a_n X^n + ... + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $a_k \in IR$; $\forall\ k \in \{0 ; 1 ; ... ; n\}$.

On a alors :

$p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$ d'où $p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)}$

c- Théorème

Si α est zéro d'ordre h d'un polynôme P à coefficients réels; alors le conjugué $\overline{\alpha}$ est zéro d'ordre h de ce polynôme P.

Preuve

On a par hypothèse :

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = ... = p^{(h-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } p^{(h)}(\alpha) \neq 0.$$

Appliquant la propriété précédente on a :

$$p(\overline{\alpha}) = p'(\overline{\alpha}) = ... = p^{(h-1)}(\overline{\alpha}) = 0 \text{ et } p^{(h)}(\overline{\alpha}) \neq 0.$$

Donc $\overline{\alpha}$ est zéro d'ordre h de p.

d- Polynômes premiers dans IR[X]

Soit $q \in IR[X]$; $d°q = n \geq 1$. Il admet n zéros réels ou complexes; distincts ou non. Soit h_i l'ordre de multiplicité du zéro α_i. Alors :

$$q = \lambda(X - \alpha_1)^{h_1} \dots (X - \alpha_r)^{h_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$; α_1 ; ... ; $\alpha_r \in \mathbb{C}$; $h_1 + \dots + h_r = n$.

Dans cette décomposition; à tout zéro $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ correspond un zéro distinct

$\alpha_j = \overline{\alpha_i}$ et $h_i = h_j$.

Portons notre attention sur deux tels zéros conjugués.

En ce qui les concerne; on a dans la décomposition précédente; un produit du type :

$$(X - \alpha)^h(X - \overline{\alpha})^h = [(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})]^h$$

or $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha}$

remarquons que $\alpha + \overline{\alpha} = s \in \mathbb{R}$

$\alpha\overline{\alpha} = p \in \mathbb{R}^+$

par conséquent : $(X - \alpha)^h(X - \overline{\alpha}))^h = (X^2 - sX + p)^h \in \mathbb{R}[X]$.

Il en résulte que tout polynôme q de IR[X] peut se décomposer en produit de polynômes appartenant aux deux types suivants dans IR[X] :

* Les facteurs du premier degré $X - \alpha$ pour tout zéro réel α.
* Les facteurs du second degré $X^2 - sX + p$ pour tout couple de zéros complexes non réels conjugués $(s^2 - 4p < 0)$.

De plus $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème

Les polynômes premiers de IR[X] sont du premier où du second degré à discriminant < 0.

e) En résumé

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut donc être factorisé de deux manières différentes en facteurs irréductibles :

-1) Si on le considère comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$; on le décompose en un produit de polynômes du premier degré appartenant à $\mathbb{C}[X]$.

-2) Si on le considère dans IR[X] ; on le décompose en produit de facteurs du premier degré et/ou du second degré appartenant à IR[X].

Les facteurs du premier degré correspondent aux racines réelles de P ; les facteurs irréductibles du second degré sont obtenus en regroupant les facteurs "conjugués" du premier degré de la factorisation sur ₵. Donc :

∀ p ∈ IR[X] ; p non constant; p s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$p = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{k_i} \quad \prod_{j=1}^{s} (X^2 + b_j X + c_j)^{l_j} \text{ où } \quad \lambda \,;\, a_i \,,\, b_j \,;\, c_j \in \text{IR};\, b_j^2 - 4c_j < 0$$

$$k_i \,,\, l_j \in \text{IN} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} k_i + 2\sum_{j=1}^{s} l_j = d°(p)$$

appelée la factorisation du polynôme p dans IR[X].

(il est clair que selon le polynôme p de IR[X]; la factorisation de p dans IR[X] contient un seul des deux produits ou les deux produits ci-dessus.)

<u>f) Exemple</u>

Factoriser dans IR[X] les polynômes suivants :

$p(x) = x^3 - 1$; $q(x) = x^4 + x^2 + 1$; $s(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

On a :

$p(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$q(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$s(x) = (x-3)^2(x+5)$

<u>I-5- Exemples pratiques : Equations réciproques</u>

1- <u>Définition</u>

Soit P ∈ IK[X] ; l'équation P(x) = 0 est dite **<u>réciproque</u>** si; α étant une racine quelconque non nulle de l'équation; $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine avec le même ordre de multiplicité.

2- <u>Proposition</u>

Pour qu'une équation algébrique $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ ($a_k \in$ IK) soit réciproque; il faut et il suffit que

:

∀ k ∈ {0 ; 1 ; ... ; n} ; $a_k = a_{n-k}$ ou bien ∀ k ∈ {0 ; 1 ; ... ; n} ; $a_k = -a_{n-k}$.

<u>Démonstration</u>

Soit l'équation algébrique :

$$\text{(i)} \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \ \ (a_i \in \mathbb{K} \ ; \ a_0 \neq 0 \ ; \ n \geq 1).$$

0 n'est pas racine car $a_0 \neq 0$.

L'équation ayant pour racines les inverses de (i) est :

$$a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 = 0$$

soit

$$\text{(ii)} \qquad a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n = 0$$

L'équation (i) est réciproque si elle admet les mêmes racines que l'équation (ii).

La condition nécessaire et suffisante est donc que les polynômes :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$$

et

$$Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$$

aient leurs coefficients proportionnels :

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \ldots = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_0}{a_n} = \lambda$$

On tire donc :

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_0}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

3- <u>Proposition</u>

Toute équation réciproque $P(x) = 0$ ($P \in \mathbb{K}[x]$); débarrassée des racines +1 et -1 ; se ramène à l'équation réciproque de degré pair :

$$\sum_{k=0}^{2r} b_k x^k = 0 \ ; \ \text{avec } b_k = b_{2r-k}.$$

<u>Démonstration</u>

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$; une équation réciproque.

Eliminons du polynôme P ; les racines éventuelles +1 et -1 ; en effectuant les divisions euclidiennes successives de P par X - 1 ou X + 1 autant de fois qu'il est nécessaire de telle sorte que le quotient Q est un polynôme dont les racines sont distinctes de +1 et -1.

Les racines du polynôme Q sont aussi racines de P et s'accouplent deux à deux $(\alpha ; \frac{1}{\alpha})$ $(\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$ car $\alpha \neq \pm 1)$; par conséquent le degré de Q est pair et l'équation $Q(x) = 0$ est réciproque.

Si $Q(x) = \sum_{k=0}^{2r} b_k x^k$; on ne peut pas avoir $b_k = -b_{2r-k}$ car 1 n'est pas racine de Q.

Soit $\sum_{k=0}^{2r} b_k x^k = 0$ avec $b_k = b_{2r-k}$; une équation réciproque de degré pair soit 2r.

4) Nous allons exposer une méthode de transformation de cette équation qui permet de ramener la résolution à celle d'une équation de degré r.

Groupons les termes équidistants des extrêmes; on aura :

$$b_0(x^{2r} + 1) + b_1(x^{2r-1} + x) + ... + b_{r-1}(x^{r-1} + x^{r-1}) + b_r x^r = 0$$

et en divisant par x^r ;

$$b_0(x^r + \frac{1}{x^r}) + b_1(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}) + ... + b_{r-1}(x + \frac{1}{x}) + b_r = 0$$

Posons : $y = x + \frac{1}{x}$.

En élevant au carré; on trouve :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

et généralement :

$$x^k + \frac{1}{x^k} = P_k(y)$$

où P_k est un polynôme de degré k (en y) défini par la relation de récurrence :

$$P_{k+1}(y) = yP_k(y) - P_{k-1}(y)$$

Par cette transformation l'équation :

$$b_0(x^r + \frac{1}{x^r}) + b_1(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}) + ... + b_{r-1}(x + \frac{1}{x}) + b_r = 0$$

peut donc s'écrire :

$$b_0P_r(y) + b_1P_{r-1}(y) + ... + b_{r-1}y + b_r = 0.$$

On est ainsi ramené à une équation de degré r.

Pour chaque racine y de cette dernière équation; on résoudre l'équation du second degré :

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

et l'on associera ainsi à chaque racine y deux racines inverses l'une de l'autre de l'équation :

$$\sum_{k=0}^{2r} b_k x^k = 0 \qquad (b_k = b_{2r-k}).$$

5- Exemple

Résoudre l'équation :

$$x^4 - 2x^3 + \frac{3}{4} x^2 - 2x + 1 = 0$$

En divisant par x^2 et en groupant les termes équidistants des extrêmes; on trouve :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2(x + \frac{1}{x}) + \frac{3}{4} = 0$$

et par suite en posant $y = (x + \frac{1}{x})$;

$y^2 - 2y - 2 + \frac{3}{4} = 0$

soit : $$(y - 1)^2 - \frac{9}{4} == 0$$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$y_1 = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = - \frac{1}{2}$$

Pour déterminer les racines de l'équation proposée; il reste à déterminer les racines des équations du second degré :

$$x^2 - \frac{5}{2} x + 1 = 0$$

et

$$x^2 + \frac{1}{2} x + 1 = 0$$

On a donc les racines :

$$x_1 = 2 \ ; \ x_2 = \frac{1}{2}; \ x_3 = \frac{-1-i\sqrt{15}}{4} \quad x_4 = \frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$$

6- Exercice

Résoudre l’équation : $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$

II-FRACTIONS RATIONNELLES

IK désigne IR ou ₵; IK[X] l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur IK. On pose IK[X]* = IK[X] - {0}.

II-1- Généralités

1) <u>Définition</u>

On appelle fraction rationnelle à une indéterminée un couple (a;b) de IK[X] x IK[X]* ; a se nomme numérateur; b dénominateur. On la note : $\frac{a}{b}$

On désigne par IK(X) l'ensemble des fractions rationnelles

La fraction $\frac{a}{b}$ où les deux polynômes a et b sont premiers entre eux est dite irréductible.

2) <u>Remarque</u>

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont équivalentes si et seulement si ad = bc.

Toute fraction est équivalente à une fraction irréductible.

II-2- <u>Décomposition d'une fraction rationnelle</u>

1- <u>Partie entière d'une fraction rationnelle</u>

A tout élément de IK(X) ; on associe son représentant irréductible $\frac{a}{b}$

Effectuons la division euclidienne de a par b dans IK[X] :

$$a = bq + r \qquad ; \qquad d°(r) < d°(b).$$

On a alors dans IK(X) :

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}\ ; \quad d°(r) < d°(b)$$

La fraction rationnelle $\frac{r}{b}$ est irréductible et le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur.

Le polynôme q se nomme "partie entière de la fraction rationnelle $\frac{a}{b}$".

La décomposition (1) est évidement unique à cause de l'unicité de la division euclidienne dans IK[X].

2) Théorème

Toute fraction irréductible $\frac{a}{b}$ de IK(X) ; telle que : $p_1^{h_1} \ldots p_n^{h_n}$ soit la décomposition de b en facteurs premiers dans IK[X]; se décompose d'une manière unique en somme de la forme :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{\alpha_{h_1}}{p_1^{h_1}} + \frac{\alpha_{h_1-1}}{p_1^{h_1-1}} + \ldots + \frac{\alpha_1}{p_1} \qquad \text{avec } d^\circ(\alpha_i) < d^\circ(p_1)$$

$$+ \frac{\beta_{h_2}}{p_2^{h_2}} + \frac{\beta_{h_2-1}}{p_2^{h_2-1}} + \ldots + \frac{\beta_1}{p_2} \qquad \text{avec } d^\circ(\beta_i) < d^\circ(p_2)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\lambda_{h_n}}{p_n^{h_n}} + \frac{\lambda_{h_n-1}}{p_n^{h_n-1}} + \ldots + \frac{\lambda_1}{p_n} \qquad \text{Avec } d^\circ(\lambda_i) < d^\circ(p_n)$$

3)Définition

Toute fraction rationnelle $\frac{\lambda}{p^h}$ avec $d^\circ(\lambda) < d^\circ(p)$ et p un polynôme premier dans IK[x] se nomme élément simple dans IK(x).

Lorsqu'on a déterminé la somme du théorème 2 ci-dessus ; on dit que l'on a décomposé la fraction $\frac{a}{b}$ en éléments simples dans IK(x).

II-3- Décomposition dans C(X)

1- Partie polaire relative à un pôle

On a vu que tout polynôme premier de C[X] est du premier degré.

Pour tout polynôme $b \in C[X]$; sa décomposition en facteurs premiers est du type :

$$b = \beta(X - \alpha_1)^{h_1}(X - \alpha_2)^{h_2} \dots (X - \alpha_n)^{h_n}$$

avec $\beta \in C$; et pour tout indice i ; $\alpha_i \in C$ et $h_i \in \mathbb{N}$.

Définition

Les zéros α_i du dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$ appartenant à C(X) sont nommés pôles de la fraction ; l'ordre de multiplicité h_i du zéro α_i de b est appelé ordre du pôle α_i de la fraction $\frac{a}{b}$.
Tout élément simple dans $\mathbb{C}(X)$ est du type : $\frac{\lambda}{(x-\alpha)^n}$ avec $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

La décomposition en éléments simples d'une fraction $\frac{a}{b}$ de $\mathbb{C}(X)$ est; en général; le résultat de l'addition de la partie entière E (E est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$) et des sommes partielles des types :

$$\frac{\lambda_h}{(x-\alpha)^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{(x-\alpha)^{h-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-\alpha}$$

pour chaque pôle α d'ordre h de la fraction $\frac{a}{b}$.

Une telle somme d'éléments simple se nomme partie polaire relative au pôle α ; et on la note π_α.

Ainsi : $\frac{a}{b} = E + \sum \pi_\alpha$

2) Détermination pratique

Pour obtenir pratiquement π_α partie polaire relative au pôle α d'ordre h; on remarque que :

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x)}{(x-\alpha)^h c(x)} \quad \text{avec } c(\alpha) \neq 0$$

On prend alors le polynôme $x - \alpha$ comme nouvelle indéterminée y en posant $y = x - \alpha$.

Après cette substitution le polynôme $a(x)$ devient un polynôme $a_1(y)$; $c(x)$ un polynôme $c_1(y)$ et la fraction $\frac{a(x)}{b(x)}$ devient :

$$\frac{a_1(y)}{y^h c_1(y)} \qquad \text{avec } c_1(0) \neq 0$$

Effectuons la division de $a_1(y)$ par $c_1(y)$ selon les puissances croissantes à l'ordre $h-1$; on obtient :

$$(1) : \quad a_1(y) = (\lambda_h + \lambda_{h-1}y + ... + \lambda_1 y^{h-1})c_1(y) + y^h d(y)$$

les nombres λ_i étant les coefficients du quotient et $y^h d(y)$ étant le reste de la division.

On obtient alors :

$$\frac{a_1(y)}{y^h c_1(y)} = \frac{\lambda_h}{y^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{y^{h-1}} + ... + \frac{\lambda_1}{y} + \frac{d(y)}{c_1(y)}$$

Comme $c_1(0) \neq 0$; alors la somme : $\frac{\lambda_h}{y^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{y^{h-1}} + ... + \frac{\lambda_1}{y}$

est bien la partie polaire relative au pôle zéro d'ordre h de $\frac{a_1(y)}{y^h c_1(y)}$; par conséquent; les λ_1 ; ... ; λ_h ainsi déterminé sont les coefficients de la partie polaire relative au pôle α de la fraction $\frac{a}{b}$ de $\mathbb{C}(X)$.

<u>3) Remarques</u>

1) Dans la relation (1) ; remplaçons y par 0 ; on obtient :

$$a_1(0) = \lambda_h c_1(0)$$

soit (2) : $\lambda_h = \frac{a(\alpha)}{c(\alpha)}$; et on écrit $\lambda_h = (x-\alpha)^h F(x)/_{x=\alpha}$ où $F(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$

La relation (2) donne immédiatement le coefficient de l'élément simple de "plus haut degré" relatif au pôle α.

Notons que la relation (1) est valable pour $h = 1$; c'est à dire dans le cas du pôle simple; de sorte que la relation (2) détermine dans ce cas l'unique élément simple de la partie polaire relative à un pôle simple.

2) Dans le cas d'un pôle simple; on peut utiliser une autre méthode.

Si la fraction $\frac{a}{b}$ admet le pôle simple α alors :$b(x) = (x - \alpha)c(x)$avec $c(\alpha) \neq 0$

En prenant les polynômes dérivés; on trouve :$b'(x) = c(x) + (x - \alpha)c'(x)$

en outre que $b'(\alpha) = c(\alpha)$.

La relation (2) fournit pour le coefficient λ relatif au pôle simple α ; $\lambda = \dfrac{a(\alpha)}{b'(\alpha)}$

4)- <u>Exemples</u>

* Dans $\mathbb{C}(X)$; décomposer $F(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$.

Le degré du numérateur étant strictement inférieur à celui du dénominateur; la partie entière de la fraction est nulle. D'autre part; la décomposition en facteurs premiers du dénominateur est :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x - j)(x - j^2)$$

1 ; j ; j^2 étant les racines cubiques de l'unité.

Comme chacun de ces nombres est un pôle simple; on a la décomposition suivante :

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x - j} + \frac{\lambda}{x - j^2}$$

Pour déterminer les coefficients α ; β ; λ ; utilisons la remarque précédente.

Puisque $b(x) = x^3 - 1$ alors $b'(x) = 3x^2$

et par suite $\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\beta = \dfrac{j}{3}$; $\lambda = \dfrac{j^2}{3}$

d'où la décomposition cherchée :

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3(x - 1)} + \frac{j}{3(x - j)} + \frac{j^2}{3(x - j^2)}$$

* Dans $\mathbb{C}(X)$; décomposer $G(x) = \dfrac{4}{(x^2 + 1)^2}$

La partie entière de la fraction G est nulle.

La décomposition en facteurs premiers du dénominateur est :

$$(x^2 + 1)^2 = (x + i)^2(x - i)^2.$$

On a donc la décomposition en éléments simples du type suivant :

$$\frac{4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\lambda_2}{(x - i)^2} + \frac{\lambda_1}{x - i} + \frac{\mu_2}{(x + i)^2} + \frac{\mu_1}{x + i}$$

Puisque la fraction proposée appartient plus précisément à $\mathbb{R}(x)$ (car les coefficients sont réels); on a immédiatement : $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$ et $\mu_2 = \overline{\lambda_2}$

il suffit donc de déterminer λ_2 et λ_1 .

Pour cela; posons $y = x - i$.

La fraction proposée devient alors : $\dfrac{4}{y^2 (y + 2i)^2} = \dfrac{4}{y^2(-4 + 4iy + y^2)}$

La division à l'ordre 1 selon les puissances croissantes du polynôme 4 par le polynôme -4 + $4iY + Y^2$ donne pour quotient -1 - iy ; par conséquent :

$$\lambda_2 = -1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = -i$$

d'où la décomposition cherchée :

$$\frac{4}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{(x-i)^2} + \frac{-i}{x-i} + \frac{-1}{(x+i)^2} + \frac{i}{x+i}$$

II-4- Décomposition dans IR(X)

1- Eléments simples dans IR(X)

Nous savons que les polynômes premiers dans IR[X] sont de deux types :

- Tout polynôme du premier degré.

- Tout polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

Dans IR(X) ; il y a donc deux types d'éléments simples :

- L'élément simple dit de première espèce; du type :

$$\frac{\lambda}{(x-\alpha)^h} \quad ; \quad \text{avec } \lambda \in IR \,;\, \alpha \in IR \,;\, h \in IN^*.$$

- L'élément simple dit de second espèce; du type :

$$\frac{\lambda x + \mu}{(x^2 + bx + c)^h} \quad ; \quad \text{avec } \lambda \,;\, \mu \in IR \,;\, h \in IN^* \text{ et } b^2 - 4c < 0.$$

Théorème :

Toute fraction $\frac{a}{b}$ de IR(x) s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$\frac{a}{b} = E + \sum \pi_\alpha + \sum S_{b;c}$$

où :

– E est la partie entière de la fraction

– pour chaque pôle réel α d'ordre h de la fraction $\frac{a}{b}$

$\pi_\alpha = \frac{\lambda_h}{(x-\alpha)^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{(x-\alpha)^{h-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-\alpha}$ est la partie polaire relative au pôle α

– pour chaque polynôme $(X^2 + bX + c)^h$ avec $b^2 - 4c < 0$; de la factorisation du dénominateur b dans IR[x] est associé la somme :

$$S_{b;c} = \frac{\lambda_1 x + \mu_1}{x^2 + bx + c} + \frac{\lambda_2 x + \mu_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{\lambda_h x + \mu_h}{(x^2 + bx + c)^h}$$

2- Détermination des éléments de première espèce

Dans la recherche de la décomposition en éléments simples d'une fraction dans IR(X); tout ce qui a été dit pour la décomposition dans $\mathbb{C}$(X) s'applique intégralement aux éléments de première espèce.

Exemple

Décomposer dans IR(X) la fraction $\frac{4}{(X^2-1)^2}$

La partie entière de la décomposition est nulle.

Les diviseurs premiers du dénominateur sont du premier degré dans IR[X] :

$$(X^2 - 1)^2 = (X - 1)^2(X + 1)^2.$$

Par conséquent dans la décomposition; il n'y a que des éléments simples de première espèce :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\mu_2}{(X+1)^2} + \frac{\mu_1}{X+1}$$

Remarquons que la fraction proposée est paire; c'est à dire qu'elle reste invariante lorsqu'à X on substitue -X :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} - \frac{\lambda_1}{X+1} + \frac{\mu_2}{(X-1)^2} - \frac{\mu_1}{X-1}$$

Comme la décomposition est unique; on en déduit :

$$\mu_2 = \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = -\lambda_1 .$$

Reste à déterminer λ_1 et λ_2 . A cet effet on utilise l'indéterminée auxiliaire :

Y = X - 1 ; la fraction proposée devient : $\frac{4}{Y^2(Y+2)^2}$

En divisant à l'ordre 1 selon les puissances croissantes le polynôme 4 par le polynôme : $4 + 4Y + Y^2$ on obtient pour quotient 1 - Y.

Par conséquent; $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = -1$ d'où la décomposition demandée :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}$$

3- Détermination des éléments de second espèce

a) Etudions d'abord le cas où le dénominateur b de la fraction proposée $\frac{a}{b}$ a un seul diviseur premier et que ce diviseur premier soit du second degré.

Après avoir effectué la division euclidienne de a par b ; on est ramené à une fraction $\frac{r}{b}$ avec

d ° (r) < d ° (b).

Posons b = $(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)^h$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$; on effectue alors des divisions euclidiennes successives de r par $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

Exemple

Décomposer dans IR(X) la fraction :

$$\frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3}$$

Notons que la partie entière est nulle.

Effectuons la division du numérateur pour $X^2 + X + 1$:

$$X^5 + 2 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - X + 1$$

on a donc :

$$\frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X^3-X^2+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-X+1}{(X^2+X+1)^3}$$

et la dernière fraction est un élément de second espèce.

Réitérons avec la fraction restante; c'est à dire effectuons la division euclidienne du quotient de la division précédente par le même diviseur :

$$X^3 - X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X - 2) + X + 3$$

on obtient finalement la décomposition cherchée :

$$\frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{X+3}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-X+1}{(X^2+X+1)^3}$$

b) Cas général

Etudions maintenant le cas général où le dénominateur b de la fraction proposée $\frac{a}{b}$ a plus d'un diviseur premier dont l'un au moins est du second degré. Supposons :

$$b(X) = [(X - \alpha)^2 + \beta^2]^h \, c(X)$$

c(X) n'admettant pas le diviseur premier $(X - \alpha)^2 + \beta^2$.

D'après la théorie de la décomposition en éléments simples; il existe un polynôme p(X) $\in$ IR[X] et deux nombres réels λ_h et μ_h tels que :

$$\frac{a}{b} = \frac{\lambda_h X + \mu_h}{\left[(X-\alpha)^2+\beta^2\right]^h} + \frac{p(X)}{\left[(X-\alpha)^2+\beta^2\right]^{h-1} c(X)}$$

En multipliant par b(X) les deux membres de cette égalité on obtient :

$$a(X) = (\lambda_h X + \mu_h)c(X) + [(X + \alpha)^2 + \beta^2]p(X)$$

En remplaçant X par $\alpha + i\beta$ dans cette relation on détermine λ_h et μ_h

puisque $c(\alpha + i\beta) \neq 0$.

Ces nombres étant calculés; on détermine ensuite le polynôme p(X) et on l'on réitère le procédé sur la fraction :

$$\frac{p(X)}{\left[(X-\alpha)^2 + \beta^2\right]^{h-1} c(X)}$$

on obtient ainsi successivement les éléments simples concernant le diviseur premier : $(X + \alpha)^2 + \beta^2$.

c) Exemple

Décomposer dans IR(X) la fraction :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2}$$

il existe un polynôme p(X) et deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda X + \mu}{(X^2+1)^2} + \frac{\mathrm{p(X)}}{(\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}$$

d'où $X + 1 = (\lambda X + \mu)(X^2 + X + 1)^2 + (X^2 + 1)p(X)$.

remplaçons X par i on obtient : $\lambda = \mu = -1$.

On détermine ensuite p(X) par :

$$(X + 1) + (X + 1)(X^2 + X + 1)^2 = (X^2 + 1)p(X)$$

Le premier membre doit être divisible par $X^2 + 1$ (la vérification de cette propriété constituera une preuve pour le calcul de λ et μ).

Remarquons que ce premier membre s'écrit :

$$\begin{aligned}(X + 1)[1 + (X^2 + X + 1)^2] &= (X + 1)[(X^2 + 1)^2 + 2X(X^2 + 1) + X^2 + 1]\\ &= (X^2 + 1)(X + 1)(X^2 + 1 + 2X + 1)\end{aligned}$$

par conséquent $p(X) = (X + 1)(X^2 + 2X + 2)$.

Réitérons le procédé. Il existe un polynôme q(X) et deux nombres réels λ' ; μ' tels que :

$$(X + 1)(X^2 + 2X + 2) = (\lambda' X + \mu')(X^2 + X + 1)^2 + (X^2 + 1)q(X)$$

En remplaçant X par i ; on obtient $\lambda' = -3$ et $\mu' = 1$; on détermine q(X) par :

$$(X^2 + 1)q(X) = (X + 1)(X^2 + 2X + 2) + (3X - 1)(X^2 + X + 1)^2.$$

Le second membre peut s'écrire en groupant d'abord les parties contenant $X^2 + 1$ en facteur :

$$(X + 1)(X^2 + 1) + (3X - 1)[(X^2 + 1)^2 + 2X(X^2 + 1)] + (X + 1)(2X + 1) + (3X - 1)X^2.$$

En remarquant que :

$$(X + 1)(2X + 1) + X^2(3X - 1) = 3X^3 + X^2 + 3X + 1 = (3X + 1)(X^2 + 1)$$

on obtient finalement :

$$q(X) = 3X^3 + 5X^2 + 5X + 1.$$

En définitive :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-X-1}{(X^2+1)^2} + \frac{-3X+1}{X^2+1} + \frac{3X^3+5X^2+5X+1}{(X^2+X+1)^2}$$

Pour décomposer la dernière fraction; il suffit d'effectuer une division euclidienne (le dénominateur à un seul diviseur premier).

$$3X^3 + 5X^2 + 5X + 1 = (X^2 + X + 1)(3X + 2) - 1$$

D'où la décomposition cherchée :

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-X-1}{(X^2+1)^2} + \frac{-3X+1}{X^2+1} + \frac{3X+2}{X^2+X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

4- <u>Méthode par identification</u>

Une autre méthode consiste à poser à priori la décomposition en éléments simples de $\frac{a}{b}$ et de calculer les coefficients inconnus de cette décomposition par identification de deux polynômes obtenus après avoir multiplié les deux membres par b. (La partie entière éventuelle ayant été calculée au préalable par une division euclidienne; on suppose ici d ° (a) < d ° (b)). Cette méthode d'identification s'applique surtout quand les diviseurs premiers de b sont de seconde espèce; chacun intervient avec l'exposant 1 dans la décomposition de b.

<u>Exemple</u>

Décomposer dans IR(X) la fraction : $\frac{X+1}{X^4+1}$

Cherchons d'abord les diviseurs premiers de $X^4 + 1$ dans IR[X] ; on remarque que $X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2$.

Soit $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2$

$$= (X^2 - \sqrt{2}\ X + 1)(X^2 + \sqrt{2}\ X + 1)$$

La décomposition en éléments simples de la fraction proposée est :

$$\frac{X+1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Pour déterminer des coefficients inconnus a ; b ; c ; d ; nous multiplions les deux membres par $X^4 + 1$; on trouve :

$$X + 1 = (aX + b)(X^2 + \sqrt{2}\ X + 1) + (cX + d)(X^2 - \sqrt{2}\ X + 1)$$

En identifiant les deux polynômes qui constituent les deux membres de cette relation on obtient :

(1) $a + c = 0$

(2) $a\sqrt{2} + b - c\sqrt{2} + d = 0$

(3) $a + b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2} = 1$

(4) $b + d = 1.$

En tenant compte de (4) ; les relations (1) et (2) donnent :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - c = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

d'où

$c = -a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

En tenant compte de (1) ; les relations (3) et (4) donnent :

$$\begin{cases} b - d = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b + d = 1 \end{cases}$$

d'où

$$b = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) \qquad \text{et} \qquad d = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

La décomposition demandée est; par conséquent :

$$\frac{X+1}{X^4+1} = \frac{-\sqrt{2}X+2+\sqrt{2}}{4(X^2-\sqrt{2}X+1)} + \frac{\sqrt{2}X+2-\sqrt{2}}{4(X^2+\sqrt{2}X+1)}$$

Remarque

Pour décomposer une fraction rationnelle; on commence par calculer la partie entière (si elle est non nulle) par division euclidienne.

Pour les pôles d'ordre relativement élevé ($h > 3$ par exemple) la méthode utilisant la division suivant les puissances croissante est conseillée.

Pour les pôles d'ordre faible ($h \leq 3$ par exemple); on pose a priori la décomposition; on calculera immédiatement le coefficient de l'élément simple "du plus haut degré" relatif à chacun des pôles; ensuite la substitution de valeurs particulières; jointe à l'utilisation éventuelle de considérations de parité ou de réalité; etc ...; donnera les relations permettant de calculer les autres coefficients. La méthode par identification appliquée brutalement n'est en général pas à conseiller (on est ramené à résoudre un système linéaire à un nombre assez grand d'inconnues même dans les cas simples).

5- Exemple

Décomposer dans IR(x) la fraction : $F(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$

Dans IR(X) : $F(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \dfrac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}$ (*)

Une première méthode :

On commence par décomposer F(x) dans C(x).

Dans ₵ (X) : $F(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{\lambda_1}{x-i} + \dfrac{\lambda_2}{(x-i)^2} + \dfrac{\mu_1}{x+i} + \dfrac{\mu_2}{(x+i)^2}$

On a : $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$; $\mu_2 = \overline{\lambda_2}$

$a = x\,F(x)\,/_{x=0} = -1$

$\lambda_2 = (x-i)^2F\,/_{x=i} = -\dfrac{1}{2}i$

$$-\frac{i}{2(x-i)^2} + \frac{i}{2(x+i)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

alors $F(x) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x}{x^2+1}$

donc $F(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x}{x^2+1}$

Une autre méthode : On décompose directement dans IR(X).

Remarquons que F est impaire F(-x) = F(x).

De la relation (*) et de l'unicité de la décomposition on a :

F(x) = - F(-x) $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{x}+\frac{b_1x+c_1}{x^2+1}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2} = \frac{a}{x}-\frac{-b_1x+c_1}{x^2+1}-\frac{-b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}$

Donc $c_1 = c_2 = 0$ et par suite f(x) = $\frac{a}{x}+\frac{b_1x}{x^2+1}+\frac{b_2x}{(x^2+1)^2}$

On a : a = -1 ; $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = 0 = a + b_1$ donc $b_1 = 1$.

D'autre part F(1) = 0 = a + $\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{4}$ donne $b_2 = 2$

Donc F(x) = $-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}$

EXERCICES

Exercice 1 :

On considère les polynômes :

$A = X^5+X^4+\alpha X^3+\beta X^2+5X-2$

$B = X^3-2X+1$

Effectuer la division euclidienne de A par B.

En déduire la valeur de α et β pour que B divise A.

Pour les valeurs de α et β trouvées; déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par le polynôme X-2.

Exercice 2 :

Soit P dans IR [X] tel que le reste de la division euclidienne de P par X-1 soit -4 et que celui de la division euclidienne de P par X+1 soit 2.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par X^2-1.

Exercice 3 :

Soit le polynôme $P = (X+1)^5 - X^5$

a) Montrer que s'il existe un polynôme Q de IR[X] tel que : $P = 5Q^2 +5Q +1$ (@) alors $Q(0) \in \{0;-1\}$.

b) Déterminer un polynôme Q vérifiant (@) et tel que $Q(0) = 0$.

c) Pour $n\in \angle^*$; trouver une expression de $\sum_{k=1}^{n} P(k)$ et en déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^2$.

Exercice 4 :

On considère dans 3[X] ; les polynômes :

$$P = X^3-2X^2-\frac{3}{4}X+\frac{9}{4} \quad \text{et} \quad Q = X^4-2X^3-\frac{11}{4}X^2+\frac{33}{4}X-\frac{9}{2}$$

Factoriser P et Q dans IR[X]; sachant qu'il admettent un zéro commun.

Exercice 5 :

Soit le polynôme $X^6-j^2X^4+4X^2-4j^2$

1) Calculer $P(1+i)$.

2) On considère le polynôme $Q = X^3-j^2X^2+4X-4j^2$.

Factoriser Q dans le domaine complexe.

En déduire la factorisation du polynôme P dans le domaine complexe.

Exercice 6 :

Soit $P = X^6+(6-2i)X^5+(8-12i)X^4-(6+18i)X^3-9X^2$

Vérifier que i est un zéro de P. Quel est sont ordre de multiplicité ?

Résoudre dans ∀ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 7 :

1) Factoriser dans ∀[X] le polynôme $A = (X-1)^7-X^7+1$.
2) Factoriser dans IR[X] le polynôme $B = X^8+X^6+X^2+1$.
3) Factoriser dans ∀[X] et dans IR[X] le polynôme X^8+1.

En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.

4) Factoriser dans IR[X] le polynôme $P = X^5-3X^4+7X^3-13X^2+12X-4$.

En déduire pgcd(P;Q) où $Q = X^{10}-3X^8+7X^6-13X^4+12X^2-4$.

Exercice 8 :

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \quad ; \quad F_2(X) = \frac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)}.$$

Exercice 9 :

Décomposer en éléments simples dans ∀(X) la fraction :

$$F(X) = \frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

Exercice 10 :

Décomposer la fraction : $F(X) = \dfrac{n!}{X(X+1)(X+2)...(X+n)}$.

Exercice 11 :

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^3} \quad ; \quad F_2(X) = \frac{4X^2+X+4}{(X-1)(X+2)^2} \quad ; \quad F_3(X) = \frac{1}{(X+1)^3X(X-1)}.$$