**Chapitre II**

# MATRICES

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

## Généralités

### *Définitions*

* On appelle matrice de type $(n ; p)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ une application $A$ de $\{1 ; ... ; n\} \times \{1 ; ... ; p\}$ dans $\mathbb{K}$.

On note $A : \{1 ; ... ; n\} \times \{1 ; ... ; p\} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$(i ; j) \longmapsto a_{ij}$$

On écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Une matrice de type $(n ; p)$ est donc la donnée ; pour tout entier $i \in \{1 ; ... ; n\}$ et tout entier $j \in \{1 ; ... ; p\}$ d'un élément $a_{ij}$ de $\mathbb{K}$.

$a_{ij}$ est appelé le terme général de $A$ et les $a_{ij}$ sont appelés les coefficients de $A$.

* Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est représentée de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \\ a_{n1} & & & & a_{np} \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice $i$ de $A$ est la suite $(a_{i1} ; a_{i2} ; ... ; a_{ip})$.

La colonne d'indice $j$ de $A$ est la suite $(a_{1j} ; a_{2j} ; ... ; a_{nj})$.

La matrice $A$ compte $n$ lignes et $p$ colonnes. Le seul terme commun à la ligne $i$ et la colonne $j$ est $a_{ij}$.

On désigne par $M_{n ;p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type $(n ; p)$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.

On désigne par $M_n(IK)$ au lieu de $M_{n\,;n}(IK)$ l'ensemble des matrices de type (n ; n) dites : matrices carrées d'ordre n .

* - La matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée la matrice nulle ; on la note O .

- Soit $A \in M_n(IK)$ ; les termes $a_{i\,i}$ ; $1 \le i \le n$ ; sont appelés les termes de la diagonale principale .

**Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de type (2 ; 4) ; $A \in M_{2\,;4}(IR)$ .

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & i \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3 ; $B \in M_3(\mathbb{C})$ .

## *Opérations sur les matrices*

Dans $M_{n\,;\,p}(IK)$ ; on définit :

a) Une addition par :

$\forall\ A = (a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ ; $\forall\ B = (b_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

$$A + B = (a_{i\,j} + b_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} .$$

b) Une multiplication par un scalaire (élément de IK) par :

$\forall\ A = (a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ ; $\forall\ \lambda \in IK$ ; $\lambda A = (\lambda a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ .

c) Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$\forall$ A; B; C $\in M_{n\,;\,p}(IK)$; $\forall\ \lambda; \mu \in IK$ :

$(A + B) + C = A + (B + C)$ ; $A + B = B + A$ ; $A + O = A + O = A$ ; $A + (-A) = O$.

$\lambda(A+ B) = \lambda A + \lambda B$ ; $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ ; $(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A)$ ; $1A = A$.

On dit que; muni de ces deux opérations; $M_{n\,;p}(IK)$ est un espace vectoriel sur IK.

d) Exemple :

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors on a :

$2A - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -9 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

e) Remarque :

Considérons les matrices $E_{i;j}$ ; $i \in \{1 ; ... ; n\}$ ; $j \in \{1 ; ... ; p\}$ dites matrices élémentaires

définies par : $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

tous les coefficients de $E_{ij}$ sont nuls sauf celui d'indice $(i ; j)$ qui est égal à 1 .

On a alors ; toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ de type $(n ; p)$ s'écrit d'une manière unique :

$$A = \sum_{\substack{ij \\ 1 \le j \le p}} a_{ij} E_{ij} .$$

## Produit de matrices

a) Par définition le produit de la matrice $A = (a_{ij})$ de type $(n ; p)$ par la matrice $B = (b_{ij})$ de type $(p ; q)$ est la matrice notée $AB = (c_{ij})$ de type $(n ; q)$ définie par :

$$\forall \ i \in \{1 ; ... ; n\} \ ; \ \forall \ j \in \{1 ; ... ; p\} \ ; \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

b) Exemple : Disposition pratique

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 & 2 \\ 7 & -6 & 21 & 14 \end{pmatrix} = AB$$

$$B = \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & .. & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & .. & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & c_{ij} & \end{pmatrix} = AB$$

c) Remarques :

- Le produit des matrices se fait ligne par colonne.
- Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .
- Attention le produit AB peut-être défini sans que l'on puisse définir le produit de B par A . (voir exemple ; A de type (2;3) et de B de type (3;4) alors AB est défini et AB de type (2;4) alors qu'on ne peut définir le produit de B par A car B a 4 colonnes et A deux lignes).
- Si A est une matrice de type (n;p) et B est une matrice de type (p;n) alors les produits AB et BA sont tous deux définis et les matrices AB et BA sont toutes deux carrées d'ordre respectif n et p .

En particulier si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors les deux produits AB et BA sont définis et sont aussi des matrices carrées d'ordre n .

## *L'ensemble $M_n(IK)$*

-Soit A ; B $\in$ $M_n$ (IK) alors A + B $\in$ $M_n$ (IK) et les produits AB et BA sont définis et appartiennent à $M_n$ (IK) .

En plus des propriétés de l'addition des matrices (voir I-2 1)); il est facile de vérifier que :

$\forall$ A ; B ; C $\in$ $M_n$ (IK) on a :

(AB) C = A (BC) ; (A + B) C = AC + BC ; A (B + C) = AB + AC .

- L'élément neutre de la multiplication des matrices est la matrice dite matrice unité notée $I_n = (a_{ij})_{\substack{1\le i \le n \\ 1\le j\le n}}$ avec $a_{ii} = 1 \ \forall i \in \{1 ; ... ; n\}$ et $a_{ij} = 0 \ \forall i ; j \in \{1 ; ... ; n\}$ $i \neq j$

Soit $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a : $\forall A \in M_n$ (IK) $A I_n = I_n A = A$

- On dit que; muni de l'addition et de la multiplication des matrices; $M_n$ (IK) est un anneau unitaire non commutatif

## Remarques :

* La multiplication dans $M_n$ (IK) n'est pas commutative.

Par exemple ; soit dans $M_2$ (IR) les matrices .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \textbf{on a alors} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}\ .$$

* Attention : dans $M_n$ (IK) ; AB = 0 n'entraine pas A = 0 ou B = 0

Par exemple soit dans $M_2$(IR) les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on a } A \neq 0 \ ; \ B \neq 0 \text{ et } AB = 0\ .$$

## Puissance d'une matrice :

**a)** Soit A $\in$ $M_n$ (IK) ; par récurrence sur l'entier p $\in$ IN on définit :

$A^0 = I$ ; $A^1 = A$ et $\forall$ p $\in$ IN* $A^p = A^{p-1} A = AA^{p-1}$

Par exemple soit $A \in M_n(IK)$ ; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

alors par récurrence; on montre que $\forall\, p \in IN^*$ ; $A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$

**b) Propriétés :**

i) $\forall\, A ; B \in M_n(IK)$ ; $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

ii) $\forall A \in M_n(IK)$ ; $\forall\ p \in IN$ ; $(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k$

iii) $\forall\, A ; B \in M_n(IK)$ tel que <u>$AB = BA$</u> on a : $\forall\, p \in IN$ .

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$

**c) Exercice :**

Dans $M_3(IR)$ on considère les matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $T^3$

2 ) Calculer $\forall\, p \in IN$ $A^p$

***Solution :***

1) On a $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = 0$ alors $\forall\ k \in IN$ ; $k \geq 3$ ; $T^k = 0$

2) On a $A = I + T$. D'où $\forall\ p \in IN$ ; $p \geq 2$ o n a :

$$A^p = (I + T)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k T^k = \sum_{k=0}^{2} C_p^k T^k \quad \text{car } T^k = 0\ \forall\ k \geq 3 .$$

Donc $A^p = I + pT + \frac{p(p-1)}{2} T^2$ . Cette formule étant valable aussi pour $p = 0$ ; $A^0 = I$

et $p = 1$ ; $A^1 = A = I + T$

On a alors $\forall\ p \in IN$ $A^p = I + pT + \frac{p(p-1)}{2} T^2$ .

Soit $\forall\ p \in \mathbb{N}\ \ A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Matrices particulières

## *Matrices triangulaires*

**Définition :**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice carrée d'ordre n.

On dit que :

* A est triangulaire supérieure si $\forall\ i > j\ \ a_{ij} = 0$

* A est triangulaire inférieure si $\forall\ i < j\ \ a_{ij} = 0$

* A est diagonale si $\forall\ i \in \{1; \dots ; n\}$ ; $\forall\ j \in \{1; \dots ; n\}\ \ a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

**2) Exemple :**

* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ A est une matrice diagonale .

Remarquons que A est aussi triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B est une matrice triangulaire inférieure.

**3) Proposition :**

- La somme de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Preuve :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux éléments de $T^{+}$ : l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (l'ensemble des matrices triangulaires inférieures est noté $T^{-}$ ).

1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ or $i > j$ $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ d'où $a_{ij} + b_{ij} = 0$

et par suite $A + B \in T^{+}$.

2) Prouvons que $AB \in T^{+}$.

Posons $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $\forall\ i ; j \in \{ 1; .... ; n\}$ ; $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$\forall\ i > j$ on a : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

or $\left.\begin{array}{l} \text{si } 0 \leq k \leq j \text{ alors } i > k \text{ et } a_{ik} = 0 \\ \text{si } j+1 \leq k \leq n \text{ alors } k > j \text{ et } b_{kj} = 0 \end{array}\right\}$ d'où $c_{ij} = 0$

**4) Remarque :**

Le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale d'ordre n.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & . & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & . & 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & . & 0 & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$ de plus on a $AB = BA$ .

En particulier; soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $M_n$ (IK)

alors $\forall$ p $\in$ IN; $A^p$ est une matrice diagonale de $M_n$ (IK) et on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

## II - 2 - Transposée d'une matrice

**1) Définition** :

Soit $A \in M_{n\,;\,p}$ (IK) ; $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de type (p;n) définie par :

${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $\forall$ i ; j $\quad b_{ij} = a_{ji}$

**2) Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

**3) Remarque :**

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A .

Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

**4) Propriétés :**

1) $\forall$ A ; B $\in$ $M_{n\,;\,p}$ (IK) on a :

i) ${}^tA \in M_{p\,;\,n}$ (IK).

ii) ${}^t({}^tA) = A$ .

iii) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

iv) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$ ;$\forall$ $\lambda \in$ IK .

2) Soit A ; B deux matrices telque le produit AB est défini alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini et on a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

**5) Définition :**

Soit $A \in M_n(IK)$ ; $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ ; on dit que A est :

* Symétrique si et seulement si ${}^tA = A$

c-à-d $\forall\, i\,;j \in \{1\,;...;n\}$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

* Antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$

c-à-d $\forall\, i\,;j \in \{1\,;...;n\}$ $\quad a_{ij} = -a_{ji}$

Remarquons que pour une matrice antisymétrique on a : $\forall\ i \in \{1;...;n\}$ $a_{ii} = 0$

**6) Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ est symétrique ;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ est antisymétrique

**7) Proposition :**

Toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve :

$\forall\ M \in M_n(IK)$ on a : $2M = M + {}^tM + M - {}^tM$

d'où $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Posons $M_1 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ alors

${}^tM_1 = {}^t(1/2(M + {}^tM)) = \frac{1}{2}{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = M_1$ d'où

$M_1$ est une matrice symétrique.

De même ${}^tM_2 = \frac{1}{2}{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -(\frac{1}{2}(M - {}^tM)) = -M_2$

d'où $M_2$ une matrice antisymétrique.

**8) Exercice :**

Ecrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

## *II -3 Matrices inversibles*

**1) Définition :**

Soit $A \in M_n(IK)$. On dit que A est inversible si et seulement s' il existe $B \in M_n(IK)$ tel que $AB = BA = I_n$ . On note $B = A^{-1}$ et on dit que $A^{-1}$ est la matrice inverse de A .

**2) Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$ (IR) . Vérifier que la matrice inverse de A est $A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3) Propriétés :**

Soit A ; B deux matrices inversibles de $M_n(IK)$ . Alors :

i) $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

iii) ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

**Preuve :**

i) évident .

ii) On a : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,I_n\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = BB^{-1} = I_n$ ; d'où AB est inversible et $(A B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) On a $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

Alors ${}^t(A\,A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n$ soit ${}^tA^{-1}\ {}^tA = {}^tA\ {}^tA^{-1} = I_n$

donc ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

**4) Proposition**

1) Soit A = $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

***A est inversible si et seulement si ad – bc ≠ 0 et dans ce cas*** $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

2) Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale principale sont non nuls.

Ainsi si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & . & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors A est inversible si et seulement si

$\forall i \in \{1; .... ; n\}$ $\lambda_i \neq 0$ et alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ 0 & . & 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$

**<u>5) Matrices semblables :</u>**

a) <u>Définition :</u>

* Soit A ; B ∈ $M_{n\,;\,p}$ (IK). On dit que A et B sont équivalentes si seulement si il existe une matrice carré inversible Q d'ordre n ; et une matrice carrée inversible P d'ordre p telle que : B = QAP.

- Soit A ; B ∈ $M_n$(IK). On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible P d'ordre n telle que $B = P^{-1} A P$.

b) <u>Proposition :</u>

Soient A et B deux matrices semblables de $M_n$(IK). Il existe alors une matrice carrée inversible P d'ordre n telle que $B = P^{-1} A P$. Alors :

Pour tout entier naturel k on a : $B^k = P^{-1} A^k P$ et $A^k = P B^k P^{-1}$

## II-4 Exemples de calcul de l'inverse d'une matrice

**1) Polynômes de matrices**

Soit $A \in M_n(IK)$ et $P = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p \in IK[x]$.

On pose $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_p A^p$.

Si $P(A) = 0$ et $a_0 \neq 0$ alors A est inversible.

**Preuve :**

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_p A^p = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_p A^p = - a_0 I_n$$

Comme $a_0 \neq 0$ ; on a alors :

$$A [-\frac{1}{a_0}( a_1 I_n + a_2 A + ... + a_p A^{p-1} )] = [-\frac{1}{a}( a_1 I_n + ... + a_p A^{p-1})].A = I_n$$

donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}( a_1 I_n + a_2 A + ... + a_p A^{p-1} )$.

**Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $A^3$ .

En déduire que A est inversible et donner $A^{-1}$.

Solution :

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ .

Ainsi $A^3 + I = 0 \Leftrightarrow A(-A^2) = I = (-A^2)A$ donc A est inversible et $A^{-1} = -A^2$

Soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

## *Résolution d'un système :*

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_n(\mathbb{K})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ ; X et Y sont des **matrices de type (n ; 1) dites matrices unicolonnes).**

L'équation matricielle d'inconnue X : A X = Y admet une solution unique si et seulement si A est inversible et dans ce cas la solution est : $A^{-1}\,Y$

**Remarque :**

Dans la pratique on écrit l'équation : AX = Y sous la forme d'un système d'équations :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}\,x_1 + \dots + a_{nn}\,x_n \end{cases}$$ que l'on résoud

**Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

AX = Y s'écrit : $\begin{cases} x' = x - 2z \\ y' = 3y - z \\ z' = -2x - y + 2z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}(-5x' - 2y' - 6z') \\ y = \frac{1}{7}(-2x' + 2y' - z') \\ z = \frac{1}{7}(-6x' - y' - 3z') \end{cases}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

## la méthode de GAUSS

### a) Transformations élémentaires

On appelle transformation élémentaire sur une matrice A toute opération qui consiste soit à :

$TE_1$ : permuter deux colonnes de A. On note : $C_i \longleftrightarrow C_j$

$TE_2$ : multiplier une colonne de A par un scalaire $\lambda \neq 0$ . On note : $C_i \longrightarrow \lambda\, C_i$

$TE_3$ : ajouter à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A. On

note : $C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j \neq i} \beta_j C_j$

**b) La méthode :**

Pour trouver l'inverse d'une matrice A on peut utiser la méthode pratique suivante : dite méthode de Gauss. Elle consiste en l'application d'une suite de transformations élémentaires sur les colonnes de la matrice A pour obtenir une matrice triangulaire T.
Si tous les éléments de la diagonale principale de cette matrice triangulaire T sont non nuls alors A est inversible et on continue à faire des transformations élémentaires jusqu'à obtenir la matrice unité. Alors l'inverse $A^{-1}$ de A est la matrice obtenue en appliquant la même série des transformations élémentaires dans le même ordre sur les colonnes de la matrice unité.
Si l'un des termes de la diagonale principale de la matrice triangulaire T est nul alors A n'est pas inversible.

Remarque : On peut appliquer la même méthode en effectuant les transformations élémentaires sur les lignes de la matrice A et de la matrice unité.

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_2 \longrightarrow c_2 - c_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3 \longrightarrow c_3 - c_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_3 \longrightarrow c_3 - c_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_3 \longrightarrow -c_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \longrightarrow c_1 - c_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

# IV- Rang d'une matrice

**1) Matrice extraite :**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n\,;\,p}(IK)$ . Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A. Par exemple une matrice carrée d'ordre $k \leq \inf(n\,;\,p)$ est extraite de A si elle est obtenue en supprimant dans A; (n - k) lignes et (p - k) colonnes.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors la matrice $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ est extraite de A.

**2) Définition :**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n;\,p}(IK)$; une matrice non nulle. Le rang de la matrice A; noté rg(A); est le plus grand entier r pour lequel il existe une matrice carré d'ordre r extraite de A qui est inversible.

**3) Proposition :**

On ne modifie pas le rang d'une matrice en lui appliquant une transformation élémentaire

**4) Propriétés :**

i) $\forall A \in M_{n\,;\,p}(IK)$ ; $rg(A) \leq \inf(n\,;\,p)$

ii) $\forall A \in M_{n\,;\,p}(IK)$ ; $rg({}^tA) = rg(A)$.

**5)Théorème :**

| |
|---|
| Soit $A \in M_n(IK)$. A inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$ |

**6) Exemple - disposition pratique**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ; Déterminons rg (A)

$$A : \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \longrightarrow A_1 : \begin{array}{ccc} c_1 & c'_2=c_2+c_1 & c_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \longrightarrow A_2 : \begin{array}{ccc} c_1 & c'_2 & c'_3=c_3+c'_2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}$$

Comme $rg(A_2) = 3$ alors $rg(A) = 3$

**<u>7) Exercice :</u>**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ ; déterminer rang de A.

## *EXERCICES*

**Exercice 1**

**1) Soient les matrices :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ;$$

**i) Calculer $A + B$ ; $B - A$ ; $2A - 4B$ ; ${}^tB$ ; ${}^tC$ ; ${}^t(A + B)$ ;**

**ii) Les matrices $A$ ; ${}^tA - A$ ; $B + 2A$ sont-elles symétriques ? antisymétriques ?**

**iii) Représenter $A - B$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.**

**2) Soient les matrices :** $K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ; $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ; $N = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & -2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

**i) Calculer $4K - 3M$ ; $K + M$ ; ${}^tK + {}^tM$ ;**

**ii) les matrices suivantes ont-elles un sens ? $K + M + N$ ; $K + {}^tM$ ; $K - {}^tK$**

Exercice 2

**1) Soient les matrices :** $E = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ; $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ; $G = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Calculer parmi les expressions suivantes celles qui ont un sens :**

**$E^2$ ; $F^2$ ; $G^2$ ; $EF$ ; $FE$ ; $FG$ ; $GF$ ; ${}^tFG$ ; ${}^tGEF$ ; $E^2 + 3E$ ;**

**1) Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 2 vérifiant $A^2 = I_2$ .**

**Exercice 3**

Soit a ; b des réels . Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ des matrices .

1) $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4**

On pose $B = A + (1 - n) I_n$

1) Calculer $B^2$

2) En déduire que A est inversible et donner $A^{-1}$.

**Exercice 5**

On considère les matrices suivantes I ; J ; K de $M_3$ (IR) .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $J^n$ ; $\forall$ n $\in$ IN .

2) Soit E le sous-ensemble de $M_3$(IR) des matrices $M = aI + bJ + cJ^2$ ; où a ; b et c sont

des Soit n $\in$ IN ; n $\geq$ 2 et la matrice de $M_n$ (IR) ; $A = \begin{pmatrix} n & 1 & . & . & 1 \\ 1 & & & & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 & n \end{pmatrix}$

réels.

a) Montrer que K $\in$ E et calculer $K^n$ ; $\forall$ n $\in$ IN.

b) Soit M $\in$ E ; $M = aI + bJ + c J^2$ ;

i) Montrer que si a = 0 alors M n'est pas inversible.

ii) Montrer que si a $\neq$ 0 alors M est inversible dans E et déterminer $M^{-1}$.

5) Déterminer $K^{-1}$ et montrer que $\forall$ n $\in$ IN on a :

$K^n = I + 2nJ + n(2n + 1) J^2$.

**Exercice 6**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & a \\ 0 & 2 & b & b \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \text{ a ; b ; c des réels ;}$$

Déterminer a ; b et c tels que $M^2 = 2M$ .

**Exercice 7**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^3 - 3A - 2I = 0$

2) En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

3) Calculer $A^6 - 3A^4 - 6A - 4I$.

**Exercice 8**

On considère dans $M_3(IR)$ ; les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les produits $AB$ et $BA$.

2) Montrer qu'il existe une matrice $D$ non nulle telle que $CD = DC = 0$.

**Exercice 9**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(IR)$ ; on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^2 = A - I$

2) Montrer que ; si $p \in IN^*$ on a : $A^{3p} = (-1)^p I$ ; $A^{3p+1} = (-1)^p A$ ; $A^{3p+2} = (-1)^p (A - I)$.

**Exercice 10**

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On pose $AX = Y$.

1) Calculer $y_1$ ; $y_2$ et $y_3$ en fonction de $x_1$ ; $x_2$ et $x_3$.

2) Calculer $x_1$ ; $x_2$ et $x_3$ en fonction de $y_1$ ; $y_2$ et $y_3$. En déduire que A est inversible et donner la matrice $A^{-1}$.

**Exercice 11**

Une matrice $M \in M_n(IK)$ est dite nilpotente s'il existe un nombre entier $r > 0$ tel que $M^r = 0$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; calculer $A^p$ ; $p \in IN^*$ . En déduire que A est nilpotente .

2) Démontrer que si une matrice M de $M_n(IK)$ est nilpotente alors M n'est pas inversible mais $I_n - M$ est inversible . Déterminer alors $(I_n - M)^{-1}$ .

3) Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ montrer que N est inversible et calculer $N^{-1}$.

**Exercice 12**

On considére les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice $B = P^{-1} A P$

2) Calculer $\forall\ n \in IN$ ; $B^n$ puis en déduire $A^n$.

3) On donne les suites réelles $(u_n)$ ; $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par : $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$ et

$\forall\ n \geq 0$ : $u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n$ ; $v_{n+1} = 2v_n$ et $w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n$ .

Calculer $u_n$ ; $v_n$ et $w_n$ .

**Exercice 13**

Déterminer le rang des matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$

**Exercice 14**

Calculer l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Chapitre III**

**DÉTERMINANTS ET RÉSOLUTION**

**DES SYSTÈMES D'EQUATIONS LINÉAIRES**

IK = IR ou IK = ₵

# I- DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

## I-1 GÉNÉRALITÉS

### <u>1) Préliminaire</u>

a) Soit $n \in$ IN* ; $E = \{1 ; 2 ; ... ; n\}$.

Une permutation $\sigma$ de E est une application bijective de E dans E

$$\sigma : E \longrightarrow E$$

$$i \longmapsto \sigma(i) \qquad \sigma \text{ est bijective}$$

On la note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \; 2 \; 3 \; . \; . \; . \; n \\ \sigma(1) \; \sigma(2) \; ... \; \sigma(n) \end{pmatrix}$.

On désigne par $\zeta_n$ l'ensemble des permutations de E . On a alors card $\zeta_n = n\,!$

Par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ; $\sigma \in \zeta_4$

b) Soit $\sigma$ une permutation de E ; on dit qu'un couple $(i ; j)$ est une inversion de $\sigma$ si on a : $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ . On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversion de $\sigma$ et on appelle signature de $\sigma$ et on note $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ . On a alors $\varepsilon(\sigma) \in \{-1 ; 1\}$ ;

Par exemple pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $\sigma$ possède 2 inversions $(1 ; 3)$ et $(2 ; 3)$ .

### <u>2 Définition :</u>

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(IK)$ ; A est une matrice carré d'ordre n .On appelle déterminant de A et on note det A ; le scalaire défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \zeta_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} .$$

Remarque : $I_n$ désigne la matrice unité d'ordre n ; alors $\det I_n = 1$.

**3) Cas particulier :**

a) n = 2 : Déterminant d'ordre 2

* Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ une matrice carré d'ordre 2 .

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ comme $\zeta_2$ contient seulement 2 permutation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$ alors :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{22}$$

Par exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

**On a** $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$

b) n = 3 : Déterminant d'ordre 3

* Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ une matrice carré d'ordre 3 ; $A \in M_3(IK)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ comme $\zeta_3$ contient 6 permutations :

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_3) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_4) = \varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_6) = -1$ alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (*)$$

Par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$

**<u>* Règle de SARRUS :</u>** (Pour le calcul d'un déterminant d'ordre 3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

On écrit en dessous du déterminant les deux premières lignes alors les termes précédés du signe " + " dans (*) s'obtiennent en faisant le produit des coefficients se trouvant sur la diagonale principale et les " 2 parallèles" a la diagonale principale. Les termes précédés du signe "-" dans (*) s'obtiennent en faisant le produit des coefficients de la diogonale non principale et les "2 parallèles" à cette diagonale.

<u>Par exemple</u> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 16 - (-6) - (0) - (-2) = -5$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{matrix}$$

<u>Remarque :</u> On peut appliquer la même technique en écrivant à droite du déterminant les deux premières colonnes .

**<u>4) Exercice :</u>**

Calculer $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .

**5) Théorème :**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(IK)$ ; $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(IK)$ ; on a alors :

1) $\det({}^tA) = \det A$

2) $\det(AB) = (\det A) . (\det B)$

3) $\forall k \in IN$ ; $\det(A^k) = (\det A)^k$

4) Si A est inversible alors $\det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Preuve :

1) $A = (a_{ij})$ ; ${}^tA = (a'_{ij})$ avec $\forall i ; j \in \{1 ; ... ; n\}$ $a'_{ij} = a_{ji}$

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \zeta_n} \varepsilon(\sigma)\, a'_{\sigma(1),1}\, a'_{\sigma(2),2} \ldots a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \zeta_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\,\sigma(1)}\, a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)}$$

or $\sigma(i) = j \Leftrightarrow j = \sigma^{-1}(i)$ alors $\{(i ; \sigma(i)) ; i = 1; ...; n\} = \{\sigma^{-1}(j) ; j)\, j = 1 ; ... ; n\}$

donc $a_{1\,\sigma(1)}\, a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1) ;1} \ldots a_{\sigma^{-1}(n) ; n}$

comme $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ alors $\zeta_n = \{\sigma^{-1} / \sigma \in \zeta_n\}$; d'où

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \zeta_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1),1} \ldots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \sum_{\sigma \in \zeta_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

soit $\det({}^tA) = \det A$.

2) en exercice

3) On a : $\det(A^0) = \det I_n = 1 = \det(A)^0$

$\det(A^1) = \det(A) = \det(A)^1$

$\det(A^2) = \det(A.A) = (\det A).(\det A) = (\det A)^2$.

Par récurrence sur l'entier IK on établit que $\det(A^k) = (\det A)^k$ ; $\forall k \in IN$

4) $A \in M_n(IK)$ ; A est inversible alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

d'où $(\det A).(\det A^{-1}) = \det I_n = 1$ donc $\det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

**6) Proposition**

Soient A et A' les matrices carrées d'ordre n semblables alors det A' = det A

Preuve :

On sait que $A' = P^{-1}AP$ où P est une matrice inversible

Alors $\det A' = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = (\det P^{-1})(\det P)(\det A)$

$= (\det P^{-1}P)(\det A) = (\det I_n)\det A = \det A$

**7) Propriétés**

* Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(IK)$ ; désignons par :

$c_j$ : j = 1 ; ... ; n les vecteurs colonnes de A

$L_i$ : i = 1 ; ... ; n les vecteurs lignes de A

Alors on écrit : $\det A = \det(c_1 ; ... ; c_n) = \det(L_1 ; ... ; L_n)$ (car $\det A = \det {}^tA$)

$P_1$) Le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à chaque ligne (respectivement colonne) de la matrice.

**Par exemple :**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_1 + \lambda' c'_1 & \lambda c_2 + \lambda' c'_2 & \lambda c_3 + \lambda' c'_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

*Attention :* A ; B $\in M_n(IK)$ ; $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

En effet soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

on a $\det A = -5$ ; $\det B = 2$ or $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\det(A+B) = 0$

$P_2$) Un déterminant dont une ligne (respectivement colonne) est composée de 0 est nul.

$P_3$) Un déterminant dont deux lignes (respectivement colonnes) sont proportionnelles est nul.

$P_4$) Un déterminant change de signe si on échange deux lignes (respectivement deux colonnes).

$P_5$) Un déterminant est multiplié par $\lambda$ si on multiplie une de ces lignes (respectivement colonnes) par $\lambda$ .

De plus ; $\forall A \in M_n$ (IK) ; $\forall \lambda \in$ IK ; on a : $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$ .

**Par exemple :**

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-8)\,(15) = -120$$

$P_6$) On ne change pas la valeur d'un déterminant si l'on ajoute à une ligne (respectivement à une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes).
On dit qu'on a fait la transformation :

$$L_i \longrightarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j \quad (\text{resp. } C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j \neq i} \beta_j C_j)$$

<u>En effet</u> : de la linéarité du déterminant par rapport à $L_i$ ; on a :

$$\det(L_1 ; \dots L_{i-1} ; L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j ; L_{i+1} ; \dots ; L_n)$$

$$= \det(L_1 ; \dots L_{i-1} ; L_i ; L_{i+1} ; \dots ; L_n) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \det_B(L_1 ; \dots L_{i-1} ; L_j ; L_{i+1} ; \dots ; L_n)$$

$$= \det(L_1 ; \dots L_{i-1} ; L_i ; L_{i+1} ; \dots ; L_n) .$$

**Par exemple :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

# I-2 Calcul d'un déterminant

## 1 - Cofacteur

* Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(IK)$

$\forall\ i ; j \in \{1 ; ... ; n\}$ ; on note $\Delta_{ij}$ le déterminant d'ordre $(n - 1)$ obtenu en supprimant dans déterminant de A ; la $i^e$ ligne et la $j^e$ colonne . $\Delta_{ij}$ est appelé le mineur relatif à $a_{ij}$ dans A .

On appelle <u>cofacteur</u> de $a_{ij}$ dans A et on note : $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\ \Delta_{ij}$ .

**<u>Par exemple :</u>** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le cofacteur du coefficient $a_{32} = 1$ dans A est :

$$(-1)^{3+2}\ \Delta_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

## 2) Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne.

<u>a) Proposition</u>

Soit $A \in M_n(IK)$ ; $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ; on a :

$\forall\ i \in \{1 ; ... ; n\}$ $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$ appelée : développement de det A suivant la $i^{\text{ième}}$ ligne.

$\forall\ j \in \{1 ; ... ; n\}$ ; $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{kj}\,\Delta_{kj}$ appelée : développement de det A suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne .

b) Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2 \to c_2 - c_4 \\ c_3 \to c_3 + 2c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

(On a developpé suivant la $4^{\text{ième}}$ ligne ) .

c) Conséquence

Soit $A \in M_n$ (IK). Si A est une matrice triangulaire (respectivement diagonale) alors detA est égal au produit des termes de la diagonale principale de A.

Preuve :

Supposons par exemple que A est une matrice triangulaire inférieure alors

$$D_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ & & & 0 \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ & & & 0 \\ a_{nn} & . & . & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

(on a développé suivant la $n^{\text{ième}}$ colonne )

d'où $D_n = a_{nn} D_{n-1}$ de même $D_{n-1} = a_{n-1\,n-1} D_{n-2}$ et de proche en proche on établit que

$$D_3 = a_{33} D_2 \text{ or } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{11} \quad .$$

$$\text{Donc } D_n = \det A = a_{11} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

d) Remarque

Pour calculer un déterminant ; on peut commencer par appliquer des transformations élémentaires sur les lignes ou les colonnes afin de faire apparaître le maximum de 0 sur une mêm ligne ou colonne ; puis on développe le déterminant suivant cette ligne ou colonne.

e) Exercice

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & n. & . & . & n \\ n & 2 & & & \\ & & & & \\ & & & & n \\ n & .. & . & n & n \end{vmatrix} \quad ; \ n \geq 2$$

Solution :

1) Appliquer les transformations :

$c_2 \longrightarrow c_2 + 2c_1 \,;\, c_3 \longrightarrow c_3 - 3c_1 \,;\, c_4 \longrightarrow c_4 + 2c_1 \,;\, c_5 \longrightarrow c_5 + 2c_1$

puis développer suivant la $1^e$ ligne .

2) On applique les transformations .

$c_i \longrightarrow c_i - c_n$ ; pour $i = 1 ; ... ; n - 1$ ; on obtient

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & & 0 & n \\ 0 & 2-n & & & \\ & & & & \\ & & & -1 & \\ 0 & 0 & & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, n\,!$$ (déterminant d'une matrice triangulaire .

## I-3 Applications des déterminants

**1) Aux Matrices inversibles**

a) Comatrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}} \in M_n$ (IK) . La matrice dont le terme d'indice (i ; j) est le cofacteur

$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$ de $a_{ij}$ dans A est appelée la comatrice de A ; on la note com (A) . Ainsi

$A = (a_{ij}) \in M_n(IK)$ ; com (A) = $(\alpha_{ij}) \in M_n(IK)$ avec $\forall\, i ; j \in \{1; ... ; n\}$; $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$

**Par exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ on a :

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \ ; \ \alpha_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13 \ ; \ \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$\alpha_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ ; $\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6$ ; $\alpha_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$

$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ ; $\alpha_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$ ; $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

D'où Com (A) = $\begin{pmatrix} 6 & -13 & -5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

b) Théorème :

$\forall\ A \in M_n$ (IK) ; on a : $A\ {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)\ A = (\det A)\ I_n$

**Preuve :**

Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ; $\text{Com}(A) = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ; $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\ \Delta_{ij}$

${}^t\text{Com}(A) = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ $d_{ij} = \alpha_{ji}$ ; $A\ {}^t\text{Com}(A) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec

$$\forall\ i \in \{1 ; ... ; n\}\ b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k}\ \Delta_{ik} = \det A$$

( c'est le developpemnt de det A suivant la $i^{\text{ième}}$ ligne ) .

$\forall\ i ; j \in \{1 ; ... ; n\}$ $i \neq j$ ; on a :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k}\ \Delta_{jk} .$$

C'est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans det A la $j^{\text{ième}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ ligne donc $b_{ij} = 0$ ; $i \neq j$ .

Ainsi $A\ {}^t\text{Com}(A) = (\det A)\ I_n$.

De même on démontrer que ${}^t\text{Com}(A).\ A = (\det A)\ I_n$ .

c) Conséquences :

Soit $A \in M_n$(IK) .A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ et de plus $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\ {}^t\text{Com}(A)$ .

Preuve :

Si A inversible alors $\det A \neq 0$

Si det A $\neq 0$ alors de la relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)\,.\,A = (\det A)\, I_n$ .

On tire que $A\,.\left(\frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Com}(A)\right) = \left(\frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Com}(A)\right).\,A = I_n$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Com}(A)$ .

d) Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ donc A est inversible

et $A^{-1} = \frac{1}{22}\ {}^t\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -13 & 6 & -8 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque : Cette méthode n'est pas pratique pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n si n est assez grand car elle nécessite; outre le calcul du déterminant de la matrice; le calcul de $n^2$ déterminant d'ordre n - 1 .

e) Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ 2 & m & m \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs de m ; A est inversible ?

Solution :

$\det A = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & m & m \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} m & 2(1-m) & m \\ 2 & -m & m \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 4(1-m)$ .

Soit $\det A = -(m-2)^2$ . D'où A est inversible $\Leftrightarrow m \in \mathrm{IR} \setminus \{2\}$ .

**2) Au Rang d'une matrice**

a) Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n\,;\,p}(IK)$ . On dit qu'un déterminant d'ordre $k \leq \inf(n\,;p)$ est extrait de A s'il est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre k obtenue en supprimant dans A $(n - k)$ lignes et $(p - k)$ colonnes .

b) Proposition :

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum d'un déterminant extrait non nul de cette matrice .

c) Exercice :

Déterminer le rang des matrices A et B .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \;;\; a \in IR$$

Solution :

1) $$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rg(A) = 2$$

2) $$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = a + 20$$

Si $a \neq -20$ alors $rg(B) = 4$.

Si $a = -20$ comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ alors $rg(B) = 3$.

## II- RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'EQUATIONS LINÉAIRES

### II-1- Généralités

**1) Définition :**

* On appelle système de $n$ équations linéaires à $p$ inconnues un système de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $\forall\ i \in \{1 ; \dots ; n\}$ ; $\forall\ j \in \{1 ; \dots ; p\}$ $a_{ij} \in$ IK ; les $a_{ij}$ sont les coefficients du système (S) .

$\forall\ i \in \{1 ; \dots ; n\}$ ; $b_i \in$ IK ; les $b_i$ forment les seconds membres du système (S) et $x_1 ; \dots ; x_p$ sont les inconnues du système (S) .

* Une solution du système (S) est un élément $(x_1 ; \dots ; x_p) \in \text{IK}^p$ vérifiant simultanément toutes les équations de (S) .

* Résoudre (S) c'est déterminer l'ensemble E des solutions de (S) .

* Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution ; incompatible dans le cas contraire .

* Deux systèmes ayant les mêmes inconnues sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

**Par exemple** : (S) : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

(S) est un système de 2 équations à 3 inconnues.

Comme (-2 ; 10 ; 0) est une solution de (S) alors (S) est compatible.

**2) Interprétation matricielle :**

* Soit (S) un système de n équations à p inconnues .

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On appelle matrice de (S) la matrice A de type (n ; p) formée des coefficients $(a_{ij})$ de (S)

.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \; ; \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$

Alors (S) s'écrit : $\boxed{AX = B}$ (*)

* Par définition le rang d'un système (S) est le rang de sa matrice A .

rg (S) = rg A .

**3) Système homogène**

* Un système (S) de n équations à p inconnues est dit homogène si les second membres sont nuls (c-à-d $\forall\ i \in \{1 ; ... ; n\}\ b_i = 0$ ) .

Donc (S) $\begin{cases} a_{11}\, x_1 + .... + a_{1p}\, x_p = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\, x_1 + .... + a_{np}\, x_p = 0 \end{cases}$

Comme $(0 ; 0 ; ... ; 0) \in IK^p$ est une solution de (S) alors on a :

| |
|---|
| Tout système homogène est compatible . |

* Soit (S) un système de n équations à p inconnues .

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + .... + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\, x_1 + .... + a_{np}\, x_p = b_n \end{cases}$$

On appelle système homogène associé à (S) ; et on note $(S_h)$ ; le système $(S_h)$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 \; + .... + \; a_{1p}\, x_p \; = \; 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\, x_1 \; + .... + \; a_{np}\, x_p \; = \; 0 \end{cases} ;$$

obtenu en remplaçant dans (S) les seconds membres $b_i$ ; $i = 1; ...; n$ par 0 .

**4) Proposition :**

Si $u_0 = (\alpha_1 ; ... ; \alpha_p)$ est une solution d'un systéme (S) alors l'ensemble des solutions de (S) est $u_0 + H$ où H est l'ensemble des solutions du système homogène $(S_h)$ associé à (S) .

Preuve :

Utilisons l'écriture matricielle de (S) : $AX = B$ .

Posons $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_p \end{pmatrix}$ on a alors $AX_0 = B$ car $u_0$ est solution de (S) .

Soit $u = (x_1 ; ... ; x_p)$ une solution de (S) ; posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ on a alors $AX = B$

d'où $A(X - X_0) = 0$ et par suite $u - u_0 \in H$ .

Inversement soit $v = u_0 + v_0$ où $v_0 \in H$ ; $v_0 = (\beta_1 ; ... ; \beta_p)$ .

Posons $Y_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_p \end{pmatrix}$ on a alors $AY_0 = 0$ .

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_p \end{pmatrix}$ $v = (y_1 ; ... ; y_p)$ où $\forall \; i \in \{1 ; ... ; p\}$ $y_i = \alpha_i + \beta_i$

$$Y = X_0 + Y_0$$

alors $AY = A(X_0 + Y_0) = A X_0 + AY_0 = B + 0 = B$ .

Ainsi v est une solution de (S).

**II-2- Résolution**

**<u>1) Système de Cramer</u>**

<u>a) Définition :</u> On appelle système de Cramer ; un système de n équations à n inconnues dont la matrice A est inversible .

<u>b) Remarque :</u> Soit (S) un système de n équation à n inconnues et A sa matrice ; alors A est une matrice carrée d'ordre n .

(S) est de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$ .

<u>c) Proposition :</u> Soit (S) un système de Cramer de n équations alors (S) admet une solution unique $(x_1 ; ... ; x_n)$ donnée par :

$$\forall\ k \in \{1 ; ... ; n\} \quad ; \quad x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

où $\Delta = \det A$ ; A est la matrice de (S) et $\Delta_k$ est le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant dans det A la $k^{ieme}$ colonne par le second membre B .

<u>Preuve :</u>

(S) s'écrit : $AX = B$.

Comme A est inversible alors : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} B$ .

Donc (S) admet une solution unique $(x_1 ; ... ; x_n)$ .

De plus $\Delta_k = \det (c_1 ; ... ; c_{k-1} ; B ; c_{k+1} ; ... ; c_n)$ ; ( les $c_i$ sont les colonnes de A)

$$= \det \left(c_1 ; ... ; c_{k-1} ; \sum_{i=1}^{n} x_i (c_i ; c_{k+1} ; ... ; c_n\right) .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \det (c_1 ; ... ; c_{k-1} ; c_i ; c_{k+1} ; ... ; c_n)$$

$$= x_k \det (c_1 ; ... ; c_n) = x_k \det A = x_k \Delta .$$

(car si $i \neq k$ ; $\det (c_1 ; ... ; c_{k-1} ; c_i ; c_{k+1} ; ... ; c_n) = 0$ puisque il y a deux colonnes identiques) .

<u>d) Exemple :</u>

Résoudre dans $IR^3$ ; le système :

(S) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ (S) est un système de 3 équations à 3 inconnues ; de matrice A

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ; comme $\Delta$ = det A = 7 alors A est inversible .

Donc (S) est un système de Cramer et par suite (S) admet une solution unique $(x_1 ; x_2 ; x_3)$ tels que :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \text{ d'où } x_1 = \frac{5}{7}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \text{ d'où } x_2 = \frac{1}{7}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \text{ d'où } x_3 = -\frac{9}{7}$$

e) Exercice :

Soit le système (S) $\begin{cases} 3x + y - mz = m \\ 2x + y - z = -1 \\ x + my + z_3 = 1 \end{cases}$ ; $m \in IR$ .

Résoudre (S) lorsqu'il est de Cramer .

Solution :

La matrice A du système (S) est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -m \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ ; det A = 2m (2 - m) .

(S) est de Cramer pour $m \in IR \setminus \{0 ; 2\}$ et on a alors $\forall\, m \in IR \setminus \{0 ; 2\}$ ; (S) admet une solution unique (x ; y ; z) avec

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ ; où } \Delta = 2m(2-m) \text{ et } \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 1 & -m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m(m+1) \text{ et par suite}$$

$$x = \frac{1+m}{2-m} .$$

De même ; on détermine $y = \dfrac{-3}{2-m}$ et $z = \dfrac{1+m}{2-m}$ .

**2) Résolution par combinaisons et substitutions**

a) Soit (S) un système de n équations à p inconnues .

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\, x_1 + \dots + a_{np}\, x_p = b_n \end{cases}$$

Posons $\forall\ i \in \{1 ; \dots ; n\}$ ; $f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ ; $x = (x_1 ; \dots ; x_p)$

Soit $\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_i \neq 0$ (i fixé) .

Alors les systèmes (S) et (S') suivants sont équivalents :

$$(S)\quad \begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ . \\ . \\ f_i(x) = b_i \\ . \\ . \\ f_n(x) = b_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S')\quad \begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \\ . \\ . \\ f_n(x) = b_n \end{cases}$$

On dit qu'on applique à (S) la transformation élémentaire qui consiste à remplacer la $i^e$ ligne de (S) par la ligne $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$ ; on écrit :

$$L_i \longrightarrow \lambda_i L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j L_j \quad ; \ \lambda_i \neq 0$$

<u>b) Exemple :</u> Résoudre dans $IR^3$ le système :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + 2y + z = 17 \end{cases} \qquad L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 7 \\ 6x = 24 \end{cases} \qquad L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ 2x - y + z = 7 \\ x = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc (S) admet une solution unique (4 ; 2 ; 1).

c) Transformations élémentaires

* Rappelons les trois transformations élémentaires applicables sur les " lignes " d'un système d'équations linéaires (S) .

Echange deux lignes : on écrit $L_i \longleftrightarrow L_j$

Multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$ : $L_i \longrightarrow \lambda L_i$

Ajouter à une ligne une combinaison des autres lignes :

$$L_i \longrightarrow L_i + \sum_{j \neq i}^{n} \lambda_j L_j \ .$$

On a alors :

- En appliquant une transformation élémentaire sur les lignes d'un système (S) ; on obtient un système (S') équivalent à (S) .

- En supprimant dans un système une ligne $L_i$ proportionnelle à une autre ligne; on obtient un système ($S_1$) équivalent à (S) .

Exemple :

Résoudre dans $IR^3$ le système (S) : $\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases}$

on fait $\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 - 5L_1 \end{array}$ On obtient : (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 7y = 5 \\ 7y = 5 \\ 21y = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 7y = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{5}{7} \\ x = \dfrac{8}{7} + 2z \end{cases} .$$

Ainsi (S) admet une infinité de solutions ; l'ensemble des solutions de (S) est :

$$E = \{ ( \frac{8}{7} + 2z ; \frac{5}{7} ; z ) \ ; \ z \in IR \} .$$

On présente cette résolution sous une forme matricielle plus simple .

Désignons par $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ la matrice de (S) et par

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -10 & 10 \end{array}\right)$$ appelée la matrice élargie de (S) ;

on n'écrit plus les inconnues et les signes " = " et on effectue les transformations élémentaires sur la matrice élargie $\overline{A}$ de (S) .

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -10 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_5 - 5L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

D'où $y = \frac{5}{7}$ et $x = \frac{8}{7} + 2z$ .

* D'une façon générale ; soit le système (S) : $\begin{cases} a_{1\,1}\, x_1 + .... + a_{1\,p}\, x_p = b_1 \\ a_{n\,1}\, x_1 + .... + a_{n\,p}\, x_p = b_n \end{cases}$

et $A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & & a_{1\,p} \\ & & \\ a_{n\,1} & & a_{n\,p} \end{pmatrix}$ la matrice de (S) .

La matrice obtenue en adjoignant à A la colonne des $b_i$ est appelée la matrice élargie de (S);

on la note $\overline{A}$ .

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{1\,1} & a_{1\,p} & b_1 \\ & & \\ & & \\ a_{n\,1} & a_{n\,p} & b_n \end{array}\right).$$

Pour la présentation des calculs de la résolution d'un système; on adopte dans la suite; une présentation matricielle.

**3) Méthode de GAUSS**

a) Exemple 1 :

Résoudre dans $IR^3$ :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)$$

D'où $z = \frac{4}{3}$ alors $y = 0$ et $x = -\frac{2}{3}$. Ainsi $(S_1)$ admet une solution unique $(-\frac{2}{3} ; 0 ; \frac{4}{3}$ ).

*Exemple 2*

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 4x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \end{array}\right)$$. Donc $(S_2)$ est incompatible . (la dernière équation $0z = -\frac{5}{2}$) .

*Exemple 3*

Résoudre dans $IR^3$ :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc $(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$.

Donc $(S_3)$ a pour ensemble de solutions .

$E = \{ (-3x_3 - x_4 \ ; 1 + 2x_3 \ ; x_3 \ ; x_4) \ ; \ x_3 ; x_4 \in IR \}$

b) La méthode utilisée pour résoudre les systèmes ci-dessus est appelée : La méthode de GAUSS : son principe est le suivant :

On utilise des combinaisons sur les lignes de la matrice élargie pour éliminer successivement une à une les inconnues.

On commence pour choisir un coefficient non nul appelé Pivot dans la $1^{er}$ ligne (par exemple $a_{1\,1} \neq 0$ ) et on élimine alors l'inconnue $x_1$ de toutes les autres équations ; puis on choisit un coefficien non nul sur la $2^{e}$ ligne ... et ainsi de suite . On obtient alors :

- une ligne de la forme $0\ 0 \dots 0 \mid \alpha$ ; $\alpha \neq 0$ qui lui correspond l'équation $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = \alpha$ ; $\alpha \neq 0$ ; donc (S) est incompatible .

-ou bien un système (S') équivalent à (S) de la forme :

$$(S') : \begin{cases} \alpha_{1\,1}x_1 + \dots + \alpha_{1\,p}x_p = \beta_1 \\ \alpha_{2\,2}x_2 + \dots + \alpha_{2\,p}x_p = \beta_2 \\ \\ \\ \alpha_{r\,r}x_r + \dots + \alpha_{r\,p}x_p = \beta_r \end{cases}$$

$\forall\ i \in \{1 ; \dots ; r\}\ \ \alpha_{i\,i} \neq 0$ (quitte à réindexer les inconnues ).

(S') contient r équations ; $r \leq \inf(n ; p)$ .

Alors : Si $r = p$ : (S) admet une solution unique. On détermine $x_p$ de la dernière équation puis on détermine $x_{p-1} ; \dots ; x_1$ de proche en proche .

Si $r < p$ : on écrit $x_r$ en fonction de $x_{r+1} ; \dots ; x_p$ puis on détermine de proche en proche les $x_i$ : $i = r - 1 ; \dots ; 1$ . (S) admet alors une infinité de solutions dépendantes de $p - r$ valeurs arbitraires .

On dit qu'on a une indétermination d'ordre $p - r$ .

c) Exercice :

Résoudre dans $IR^4$ suivant les valeurs des paramètres a ; b ; c le système :

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 3 \\ x_2 + ax_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = b \\ 6x_1 - 3x_2 - 6x_3 = c \end{cases}$$

Solution :

La matrice élargie de (S) est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & b \\ 6 & -3 & -6 & 0 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & b \\ 0 & -3 & -6 & 6 & c-18 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4-2a & 0 & b-4 \\ 0 & 0 & -6+3a & 0 & c-12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4-2a & 0 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b+2c-36 \end{array}\right)$$

Si $a = 2$ ; $b = 4$ et $c = 12$ : alors (S) admet une infinité de solution . L'ensemble des solutions est $E = \{(3 + x_4 ; 2 - 2x_3 + 2x_4 ; x_3 ; x_4) \; ; \; x_3 ; x_4 \in IR\}$

On a une indetermination d'ordre 2 .

Si $a = 2$ ; $b = 4$ et $c \neq 12$ : alors (S) est incompatible .

Si $a = 2$ et $b \neq 4$ : alors (S) est incompatible .

Si $a \neq 2$ et $3b + 2c - 36 \neq 0$ : alors (S) est incompatible .

Si $a \neq 2$ et $3b + 2c - 36 = 0$ : alors (S) admet une infinité de solutions . L'ensemble des solutions est :

$E_2 = \{(3 + x_4 \; ; \; 1 - a\dfrac{b-4}{4-2a} + 2x_4 \; ; \; \dfrac{b-4}{4-2a} \; ; \; x_4) \; ; \; x_4 \in IR\}$ ; on a une détermination d'ordre 1 .

**Exercices**

**Exercice 1**

1) Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ; b) $\begin{vmatrix} x & \alpha & 1 \\ 1 & x & x \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$ ; $\alpha \in IR$ ; $x \in IR$ ;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix}$ ; $a \in IR$ ; d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ;

2) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 0$ où $\varepsilon$ est une racine cubique de l'unité ($\varepsilon \in \{1; j; j^2\}$)

**Exercice 2**

Pour quelles valeurs du réel $\alpha$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

Donner alors la matrice $A^{-1}$ .

**Exercice 3**

Calculer le déterminant $D(x)$ de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ( $n \geq 2$ ) tel que :

$\forall\ i ; j \in \{1 ; ... ; n\}\ a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ x & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .

Pour quelles valeurs de $x$ ; $A$ n'est pas inversible ?

**Exercice 4**

Soient $D$ et $\Delta$ les déterminants définis par :

$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$ ; $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$

1) Montrer que $D = -4 \sin\frac{a-b}{2} \sin\frac{b-c}{2} \sin\frac{c-a}{2}$ ;

2) Montrer que $\Delta = -16 \sin^2\frac{a}{2} \sin^2\frac{b}{2} \sin^2\frac{c}{2}$ .

**Exercice 5**

Soit P la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)^3$ .

**Exercice 6**

Soit $\Delta$ le déterminant défini par :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ .

**Exercice 7**

Factoriser le déterminant D d'ordre n ; dont les éléments de la diagonale principale sont égaux à x ; et les autres éléments sont égaux à 1 .

**Exercice 8**

Pour quelles valeurs du nombre réel $\alpha$ les matrices .

a) $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin2\alpha \\ \sin2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & \alpha & 4\alpha-1 \\ \alpha-1 & -2 & 0 & -\alpha-1 \\ 0 & \alpha & 3 & 3\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont - elles inversibles ?

**Exercice 9 :**

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$ b ) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$

**Exercice 10 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ suivant les valeurs de a :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2 x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 11 :**

Résoudre et discuter sur IR les systèmes suivants lorsqu'ils ne sont pas de Cramer :

i) $\begin{cases} (m - 1)x + y - z = m \\ 2x + my + z = 3 \\ mx + (1 - m)y + mz = m^2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x + \lambda y + z + t = 1 \\ (1 + \lambda)x + 2y + \lambda t = a \\ x + \lambda y + z + t = 2a \\ x + y + \lambda t = 3a \end{cases}$

**Exercice 12 :**

Résoudre dans $IR^4$

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

**Exercice 13:**

Résoudre dans $IR^3$ ; suivant les valeurs du paramètre réel $\lambda$ ; le système :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 14 :**

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + y + 4z = 4 \end{cases}$

**Exercice 15 :**

Résoudre; suivant les valeurs des paramètres a ;b ; c et d les systèmes :

i) $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_2 + x_3 = 2b \\ x_3 + x_4 = 2c \\ x_4 + x_1 = 2d \end{cases}$

**Exercice 16 :**

Trouver un polynôme P de degré 3 a coefficients réels tel que :

$P(1) = 4$ ; $P(-1) = 0$ ; $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$ .

**Exercice 17 :**

Soit le système (S) :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = \lambda - 1 \\ x + 2y + 2z - t = \lambda \\ 2x + 3y + (\lambda + 3)z - 2t = 1 \\ 4x + 6y + (\lambda + 7)z + (\lambda^2 - \lambda - 4)t = 2 \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de $\lambda$ ; a-t- on $rg(S) = 4$ ?

2) Résoudre (S) lorsqu'il est de rang $\leq 3$ .