CHAPITRE V

CALCUL INTEGRAL

I désigne un intervalle de IR.

I - Généralités.

I-1- Primitives

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et vérifiant : $\forall\, x\in I,\ F'(x) = f(x)$.

2) Théorème :

Si f est continue sur I alors f admet au moins une primitive sur I.

3) Proposition :

Soit F une primitive d'une fonction f sur I alors une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe une constante α réelle telle que $\forall\, x\in I,\ G(x) = F(x)+\alpha$.

En effet :

F est une primitive de f.

Alors il est évident que la fonction G définie par $\forall\, x\in I,\ G(x) = F(x)+\alpha$ ($\alpha\in IR$) est une primitive de f (car $G'(x) = F'(x)$).

Inversement si G est une primitive de f alors la fonction $h = G - F$ est constante sur I puisque $\forall\, x\in I,\ h'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ et par suite il existe $\alpha\in IR$ telle que $\forall\, x\in I,\ h(x) = \alpha$ d'où $\forall\, x\in I,\ G(x) = F(x) + \alpha$.

4) Remarque :

- f admet une unique primitive qui prend la valeur y_0 en $x_0\in I$.
- Si F est une primitive de f sur I alors $\forall\, \alpha\in 3$, $F+\alpha$ est une primitive de f sur I.

5) Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f f(x)	Primitive F F(x)	Ensemble de validité
$e^{\alpha x}$; $\alpha\in IR^*$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	IR
sinx	-cosx	IR
cosx	sinx	IR
shx	chx	IR
chx	shx	IR
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot g^2 x$	-cotgx	IR-{nπ, n∈ Z)
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+ tg^2 x$	tgx	IR-{$\frac{\pi}{2}$+nπ, n∈ Z)
$\frac{1}{sh^2 x} = \coth^2 x - 1$	-cothx	IR*

$\frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$	thx	IR
x^n, $n \in IN$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	IR
x^n, $n \in Z\text{-}\backslash\{0,-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	IR *
x^α, $\alpha \in IR\text{-}Z$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	IR $*_+$
$\frac{1}{x}$	$Log\lvert x\rvert$	IR *
$\frac{1}{1+x^2}$	Arctgx	IR
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}Log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	IR \{-1,1}
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$Log(x+\sqrt{x^2+1})$	IR
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arcsinx	]-1,1[
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$Log\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

6) <u>Application</u> :

Soit u une fonction dérivable sur I, on a :

$f(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$ alors $F(x) = e^{u(x)}$

$f(x) = u'(x)\, u^\alpha(x)$; $\alpha \neq -1$; alors $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(x)$

$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$; $u(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$; alors $F(x) = Log|u(x)|$

$f(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ alors $F(x) = Arctg\, u(x)$.

(il est clair que F désigne une primitive de f sur I).

7) <u>Exemple</u> :

* $f(x) = (2x+1)^3$; $x \in IR$ alors $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4$.

* $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$; $x \in IR$. Comme $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

alors $F(x) = x - Log(1+e^x)$.

* $f(x) = \cos^2 x$; $x \in IR$. Comme $f(x) = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

alors $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

Remarque : D'après la dérivée d'une fonction composée, si on a

$f(x) = u'(x).h'(u(x))$ alors $F(x) = h(u(x))$.

(u et h étant des fonctions dérivables).

I-2-Intégrales définies

1) <u>Définition</u> :

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I.

$\forall$ a,b$\in$ I, on appelle intégrale de a à b de f le réel F(b) - F(a) qu'on note $\int_a^b f(x)dx$.

Ainsi : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

<u>Remarque</u> : La définition est indépendante du choix de la primitive de f, puisque si G est une autre primitive de f alors $G(x) = F(x)+\alpha$; $\alpha\in$ 3 et $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

On note :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

2) <u>Remarque</u> :

La fonction F définie sur I par : $\forall x\in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

3) <u>Exemple</u> :

$\int_{3/2}^{2} \frac{dx}{1-x} = [-\mathrm{Log}|1-x|]_{3/2}^{2}$ = -Log2.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ = Arctg1 - Arctg0 = $\frac{\pi}{4}$.

4) <u>Propriétés</u> :

f et g sont des fonctions continues sur I, $\forall$ a,b,c$\in$ I on a :

P_1: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

P_2: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

P_3: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$; $\alpha\in$ IR.

P_4: Si $a\le b$ et $\forall x\in [a,b]$ $f(x)\ge 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

P_5: Si $a\le b$ et $\forall x\in [a,b]$; $f(x) \le g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

P_6: Si $a\le b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve :

La démonstration de ces propriétés est facile. On donne seulement la preuve de P_4.

Soit F une primitive de f sur I, $F'(x) = f(x)$; comme $\forall x\in I$, $f(x) \ge 0$ alors F est une fonction croissante . $a \le b \Rightarrow F(a) \le F(b)$ d'où $F(b) - F(a) \ge 0$.

5) <u>Conséquence</u> :

Si $\forall x\in [a,b]$; on a $m \le f(x) \le M$, m,M$\in$ IR alors :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

6) <u>Théorème</u> :

Soit f continue sur [a,b] alors $\exists c \in [a,b]$ telle que :

$F(c)= \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$: appelé valeur moyenne de f sur [a,b].

II - Méthodes d'intégration.

II-1- <u>Méthode élémentaire</u>

L'utilisation des règles élémentaires sur les fonctions dérivées, des propriétés des intégrales, des primitives des fonctions usuelles permet de déterminer des primitives et de calculer des intégrales.

<u>Exemples</u> :

1) $\int_0^1 (e^{2x}+5x^2-\sqrt{x})dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{5}{3}x^3-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}.$

2) $\int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)^3}dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}dx + 2\int_1^3 \frac{1}{(x+1)3}dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^3 + \left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^3 = \frac{7}{16}.$

3) Soit la fonction f définie sur]-1,1[par $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les primitives de f sont les fonctions définies sur]-1,1[par :

$\forall x \in]-1,1[$, $F(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin}x)^2 + c$; $c \in IR$.

II-2- <u>Intégrations par parties</u>

1) <u>Théorème</u> :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] : (a < b) et u' et v' sont continues sur [a,b] alors on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx .$$

Preuve :

La fonction uv est une primitive de la fonction u'v+uv' sur [a,b], d'où :

$$\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx = [u(x)v(x)]_a^b .$$

2) <u>Exemples</u> :

a) Calculer $I = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Posons $u(x) = x$ alors $u'(x) = 1$
$v'(x) = \cos x$ $v(x) = \sin x$

D'où $I = [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

b) Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \operatorname{Log}x$; $x > 0$

$\forall x>0$, calculer $F(x) = \int_1^x \operatorname{Log}t dt$.

Posons $u(t) = \text{Log}t$ alors $u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $\qquad v(t) = t$

D'où $F(x) = [t\text{Log}t]_1^x - \int_1^x dt = x\text{Log}x - x + 1.$

Ainsi la fonction $F : IR^*_+ \to IR$

$x \mapsto F(x) = x\text{Log}x - x + 1$

et la primitive de la fonction "Log" qui s'annule en 1.

Une primitive φ de la fonction "Log" sur $]0,+\infty[$ est définie par $\varphi(x) = x\text{Log}x - x + \alpha;\ \alpha\in IR$

c) Calculer $\forall x\in IR,\ \int_0^x \text{Arctg}t\,dt$

Posons $u(t) = \text{Arctg}t$ alors $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$v'(t) = 1$ $\qquad v(t) = t$

D'où $\int_0^x \text{Arctg}t = [t\text{Arctg}t]_0^x - \int_0^x \dfrac{t}{1+t^2}dt$

$= [t\text{Arctg}t]_0^x - \dfrac{1}{2}[\text{Log}(1+t^2)]_0^x$

$= x\,\text{Arctg}x - \dfrac{1}{2}\text{Log}(1+x^2).$

3) <u>Exercice</u> :

Calculer $\forall x\in IR,\ I(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{(1+t^2)^2}$

<u>Solution</u>

On a : $\dfrac{1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$

D'où $I(x) = \text{Arctg}x - \int_0^x \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$.

Posons $u(t) = t$ alors $u'(t) = 1$

$v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$

D'où $\int_0^x \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \dfrac{1}{2}\int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = -\dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\text{Arctg}x$

Donc $I(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arctg}x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$.

II-3- <u>Méthode de changement de variable</u>

1) <u>Théorème</u> :

Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \to IR$ est une fonction de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et f une fonction continue sur un intervalle I contenant $\varphi([\alpha,\beta])$ alors $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$.

<u>Preuve</u> :

Soit F une primitive de f sur I, alors la fonction $F\circ\varphi$ est une primitive de la fonction $\varphi'(f\circ\varphi)$.

D'où $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$

$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

* On dit qu'on a effectué le changement de variable : $x = \varphi(t)$.
en notant $dx = \varphi'(t)dt$.

2) <u>Exemples</u> :

a) Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

La fonction $\varphi : [0,\pi/2] \to IR$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$; $\varphi([0, \pi/2]) = [0,1]$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi/2) = 1$; $\forall t\in [0, \pi/2]$, $\varphi'(t) = \cos t$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ qui contient l'intervalle $[0,1]$ alors on a :

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$

$= \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

Dans la suite, on présente les calculs d'une manière plus simple en écrivant seulement $x = \sin t$; $dx = \cos t\,dt$ pour présenter le changement de variable effectué.

3) <u>Proposition</u> :

Soit $f : IR \to IR$ une fonction continue sur IR. $\forall a\in IR$ on a :

i) Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

ii) Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

iii) Si f est périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Preuve :

i) et ii) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

Dans l'intégrale $\int_{-a}^0 f(x)dx$, on pose $u = -x$; $dx = -du$

On obtient $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(-x)dx$

D'où $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$.

Si f est paire alors $\forall x$; $f(-x) = f(x)$ et par suite on a :

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Si f est impaire alors $\forall x$; $f(-x) = -f(x)$ et par suite on a :

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

iii) Comme f est périodique de période T alors $\forall x\in IR$, $f(x+T) = f(x)$.

On a : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$.

Dans l'intégrale $\int_T^{a+T} f(x)dx$, on pose u = x - T, alors x = u+T et dx = du, on obtient alors :

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(u+T)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx$$

alors $\int_a^0 f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = 0.$

b) Calculer : $\int_0^{\pi/3} \text{tgtdt}$

Posons x = cost ; dx = -sint dt.

$$\int_0^{\pi/3} \text{tgtdt} = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int_0^{1/2} -\frac{dx}{x} = -[\text{Log}x]_1^{1/2} = \text{Log}2.$$

c) Soit a > 0, calculer $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$

Posons $u = \frac{x}{a}$; $du = \frac{1}{a} dx$

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \int_0^a \frac{dx}{a^2(1+(\frac{x}{a}))^2} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}[\text{Arctgu}]_0^1 = \frac{\pi}{4a}.$$

d) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$

Posons $u = \sqrt{1+x}$ alors $u^2 = 1+x$; dx = 2u du

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2udu}{1+u} = 2\int_1^{\sqrt{2}} (1-\frac{1}{1+u})du = 2[u - \text{Log}(1+u)]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2(\sqrt{2}-1) + \text{Log}\frac{4}{3+2\sqrt{2}}.$$

III- Application au calcul des primitives.

III-1- <u>Préliminaire</u>

* Soit f une fonction continue sur I, on désigne par $\int f(x)dx$ l'expression de l'une quelconque des primitives de f sur I (ou sur D_f dans le cas plus général où f est continue sur son domaine D_f qui est une réunion (finie ou non) d'intervalles).

On écrit alors $\int f(x)dx = F(x) + C$

Où C désigne une constante réelle si $x \in I$ (C désigne une constante sur chaque intervalle de D_f si $x \in D_f$).

Par exemple : * $\forall x \in IR^*$ on a : $\int \frac{dx}{x} = \text{Log}|x| + C$

Avec $\forall x \in]-\infty,0[$: $C = C_1$; $\forall x \in]0,+\infty[$: $C = C_2$, $C_1, C_2 \in IR$

* $\forall x \in IR$: $\int \frac{dx}{e^x} = -e^{-x} + C$, $C \in IR$.

Les méthodes d'intégration présentées au I-2 restent valable pour le calcul des primitives. Elles se présentent de la manière suivante :

Pour l'intégration par parties :

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Pour le changement de variable :

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \text{, en précisant } x = \varphi(t).$$

Remarque :
Certaines primitives ne s'expriment pas à partir des fonctions usuelles, comme par exemple pour $\int \frac{e^x}{x}dx$, nous ne pourrons pas calculer ces primitives dites "fonctions spéciales".

II-2- Des primitives classiques
Pour $a \in IR^*$ fixé, on a :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{Arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\text{Log}\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a}{|a|}\text{Arcsin}\frac{x}{a} + C$$

$$= \text{Arcsin}\frac{x}{a} + C \text{ si } a > 0.$$

III-3- Primitives d'une fonction rationnelle
Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle irréductible $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, on la décompose en éléments simples sur IR (x).
Rappelons pour toute fraction F(x) de IR (x), s'écrit d'une manière unique comme la somme de sa partie entière (qui est un polynôme) et d'éléments simples de 1^{er} espèce (de la forme $\frac{\lambda}{(X-a)^k}$; $\lambda, a \in IR$, $k \in IN^*$) et d'éléments simples de $2^{ème}$ espèce (de la forme $\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + bX + c)^k}$, $\alpha, \beta \in IR$; $b, c \in IR$; b^2-$4c<0$; $k \in IN^*$).
On est ainsi ramené à une primitive d'un polynôme (ce qui est facile), d'un élément simple de 1^{er} espèce ou de $2^{ème}$ espèce.

1) Primitive d'un élément simple de 1^{er} espèce :
On se propose de calculer : $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$; $a \in IR$; $n \in IN^*$

On a alors :

$$\text{Si } n = 1 : \int \frac{1}{x-a}dx = \text{Log}|x-a| + C.$$

$$\text{Si } n \neq 1 : \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Exemple :

Calculer $\int \frac{x^4-7}{x^3-3x+2}dx$

Posons $f(x) = \frac{x^4-7}{x^3-3x+2} = \frac{x^4-7}{(x-1)^2(x+2)}$

La décomposition de f en éléments simples sur IR (x) est :

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$$

D'où : $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 2\text{Log}|x-1| + \frac{2}{x-1} + \text{Log}|x+2| + C$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x-1} + \text{Log}[(x-1)^2|x+2|] + C.$$

2) <u>Primitive d'un élément simple de $2^{\text{ème}}$ espèce</u> :

On se propose de calculer $I(x) = \int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}dx$; $\alpha,\beta,b,c\in$ IR; $b^2-4c<0$; $n\in$ IN*

<u>1^{er} étape</u> : Si $a\neq 0$, on fait apparaître multiplicativement au numérateur la dérivée du trinôme x^2+bx+c, qui est $2x+b$.

Posons $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}$

On écrit alors : $f(x) = \frac{\alpha}{2}.\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} + \frac{\beta-\frac{\alpha b}{2}}{(x^2+bx+c)^n}$

Et par suite $I(x) = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx + \left(\beta-\frac{\alpha b}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx$

Posons $A(x) = \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx$ et $B(x) = \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx$

Le calcul de A(x) est aisé (de la forme $\frac{u'}{u^n}$)

On a $A(x) = \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx = \begin{cases} \text{Log}(x^2+bx+c) & \text{si } n=1 \\ \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+bx+c)^n} & \text{si } n\neq 1 \end{cases}.$

<u>$2^{\text{ème}}$ étape</u> : On ramène le calcul de $B(x) = \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx$ à celui de $\int \frac{df}{(t^2+1)^n}$ à l'aide d'un changement de variable affine plus précisément, on met le trinôme x^2+bx+c sous la forme canonique

$x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}$. Posons $\Delta = b^2-4c < 0$ et $\lambda^2 = \frac{4c-b^2}{4} = (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2$

Alors $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 + \lambda^2$

$$= \lambda^2\left[1+\left(\frac{1}{\lambda}(x+\frac{b}{2})\right)^2\right]$$

$$= \lambda^2\left[1+\left(\frac{2x+b}{2\lambda}\right)^2\right] = -\frac{\Delta}{4}\left(1+(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}})^2\right)$$

On effectue alors dans B(x) le changement de variable :

$t = \frac{2x+b}{2\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda t - \frac{b}{2}$

On obtient $B(x) = \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{1}{\lambda^{2n-1}(1+t^2)^n}dt$.

<u>3ème étape</u> : Calcul de $J_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$; $n \in IN^*$.

A l'aide d'une intégration par parties, on détermine une relation de récurrence qui permet de calculer de proche en proche $J_n(t)$.

D'abord pour $n = 1$ on a : $J_1(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = Arctgt + C$; $C \in IR$.

Pour tout $n \in IN^*$;

Posons $u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ alors $u'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$

$v'(t) = 1 \qquad\qquad v(t) = t$

D'où $J_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$

$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(J_n(t) - J_{n+1}(t))$.

Soit $\boxed{J_{n+1}(t) = \frac{1}{2n}\left[(2n-1)J_n(t) + \frac{t}{(1+t^2)^n}\right]}$

Par exemple $J_2(t) = \frac{1}{2}(J_1(t) + \frac{t}{1+t^2})$

Soit $J_2(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}Arctgt + \frac{t}{2(1+t^2)} + C$.

3) <u>Exemple</u> :

Calculer $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx$.

Posons $f(x) = \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+1+3}{(x^2+x+1)^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

Alors : $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

On a : * $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$

$$* \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$ alors $x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}$; $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}$

On obtient $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{du}{(1+u^2)^2}$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\text{Arctg}u + \frac{u}{2(1+u^2)}\right] + C$$

(on revient à x) $\qquad = \frac{4\sqrt{3}}{9}\text{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)} + C$

En définitive on a :

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{x}{(x^2+x+1)} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

4) <u>Exercice</u> :

a) Calculer $I(x) = \int \frac{dx}{x^3+1}$

<u>Indications</u> :

$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}$

$I(x) = \frac{1}{3}\text{Log}|x+1| - \frac{1}{3}I_1(x)$ où $I_1(x) = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$.

$I_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\text{Log}(x^2-x+1) - \frac{3}{2}I_2(x)$

Où $I_2(x) = \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

b) En déduire $J(x) = \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

Indication : Effectuer une intégration par parties qui permet d'écrire J(x) en fonction de I(x).

IV- Quelques types particuliers.

IV-1- <u>Calcul de</u> $\int P(x)e^{ax}dx$:

Soit $a \in IR^*$ et P un polynôme de IR [x]. On cherche à calculer $\int P(x)e^{ax}dx$.

<u>1ère méthode :</u>

Une intégration par parties donne :

$$\int P(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx$$

on diminue ainsi le degré du polynôme. En réitérant le même procédé jusqu'à faire "disparaître le polynôme".

<u>Exemple</u> : $\int (x^2-x+3)e^{2x}dx$

On pose $u(x) = x^2-x+3$ $\qquad u'(x) = 2x-1$

$\qquad v'(x) = e^{2x}$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

Alors : $\int (x^2 - x + 3)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{2x}dx$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)e^{2x} + C \;;\; C\in \mathbb{R}$$

Remarquons que cette méthode n'est pas pratique dès que le degré de P est supérieure ou égal à 3.

2ème méthode :

On cherche une primitive de $f(x) = P(x)e^{ax}$ sous la forme $F(x) = Q(x)\, e^{ax}$ où Q est un polynôme de même degré que P. On procède alors par identification.

Exemple : $\int (x^2 - x + 3)e^{2x}dx$

On pose $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$; $f(x) = (x^2-x+3)e^{2x}$

$F'(x) = (2ax^2+2(a+b)x+b+2c)e^{2x}$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -1 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Alors $F(x) = (\frac{1}{2}x^2-x+2)e^{2x}$ et $\int (x^2 - x + 3)e^{2x}dx = (\frac{1}{2}x^2-x+2)e^{2x} + C$.

Remarque :

Pour le calcul de $\int P(x)\cos\beta x dx$ et $\int P(x)\sin\beta x dx$, où P est un polynôme, on peut soit effectuer des intégrations par parties successives (méthode commode si $d°P \leq 2$) ou chercher une primitive de $f(x) = P(x)\cos\beta x$ (ou $f(x) = P(x)\sin\beta x$) sous la forme $F(x) = A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x$ où A(x) et B(x) sont des polynômes de degrés $\leq d°(P)$.

Exemple : $\int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x dx$

On pose $F(x) = (ax^3+bx^2+cx+d)\cos x + (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\lambda)\sin x$

$F'(x) = (-(ax^3+bx^2+cx+d) + (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma))\sin x + ((\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\lambda) + (3ax^2+bx+c)\cos x)$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 & \alpha = 0 \\ -b + 3\alpha = -1 \quad \text{et} & \beta + 3a = 0 \\ -c + 2\beta = 2 & \gamma + 2b = 0 \\ -d + \gamma = -3 & \lambda + c = 0 \end{cases}$$

D'où $a = -1$; $\alpha = 0$; $b = 1$; $\beta = 3$; $c = 4$; $\gamma = -2$: $d = 1$ et $\lambda = -4$.

Ainsi : $\int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x dx = (-x^3+x^2+4x+1)\cos x + (3x^2-2x-4)\sin x + C$.

IV-2- Primitives d'une fraction rationnelle en sinx et cosx

Pour calculer $\int R(\sin x, \cos x)dx$ où R est une fraction rationnelle de deux variables, on pose $t = tg\frac{x}{2}$ et on se ramène alors à l'intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Rappelons qu'on a, en posant $t = tg\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Exemple : $\int \frac{dx}{\sin x}$

On pose $t = tg\frac{x}{2}$, on obtient $\int \frac{1+t^2}{2t}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{Log}|t| + C$

Alors $\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{Log}\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

Cas particuliers :

Soit à calculer $\int R(\sin x, \cos x)dx$, on a alors :

- Si le changement de x en -x ne modifie pas R(sinx,cosx)dx, on pose u = cosx.
- Si le changement de x en π-x ne modifie pas R(sinx,cosx)dx on pose u = sinx.
- Si le changement de x en π+x ne modifie pas R(sinx,cosx)dx on pose u = tgx.

Exemple : $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$

On pose u = cosx, on obtient $\int \frac{u^2-1}{2+u}du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2}\right)du = \frac{u^2}{2} - 2u + 3\mathrm{Log}|u+2| + C.$

D'où $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 2\mathrm{Log}(2+\cos x) + C.$

Exercice :

1) Calculer $\int \frac{\cos^3 x}{3 - 2\sin x - \cos^2 x}dx$; (poser u = sinx).

2) Calculer $\int \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x}$; $a > 0$; (poser u = tgx).

IV-3- Primitives d'une fraction rationnelle en $e^{\alpha x}$; $\alpha \in$ IR *

1) Pour calculer $\int F(e^{\alpha x})\, dx$ où F est une fraction rationnelle d'une variable, généralement on pose u = $e^{\alpha x}$ on obtient alors $\frac{1}{\alpha}\int \frac{F(u)}{u}du$.

Exemple : $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

On pose u = e^x, du = u dx , on obtient $\int \frac{du}{u(1+u)} = \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u})\, du = \mathrm{Log}\frac{u}{u+1} + c$.

Soit $\int \frac{dx}{e^x+1} = \mathrm{Log}\frac{e^x}{e^x+1} + c$;

$= x - \mathrm{Log}(e^x + 1) + c$;

2) Pour calculer $\int R\,(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)\,dx$, où R est une fraction rationnelle de deux variables, on peut effectuer le changement de variable $u = e^{x}$, puis il s'agit d'une fraction rationnelle en e^{x} puisque $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

Exemple: $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{1+\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x}dx$

On a: $\quad I(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{1+e^{x}}dx$

On pose $u = e^{x}$, on obtient $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{u^2+2+\frac{1}{u^2}}{1+u}.\frac{du}{u} = \frac{1}{4}\int \frac{u^4+2u^2+1}{u^3(1+u)}\,du$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{3}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}-\frac{u}{u+1}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[u+3\mathrm{Log}|u|+\frac{1}{u}-\frac{1}{2u^2}-4\mathrm{Log}|u+1|\right]+C.$$

Alors $\quad I(x) = \dfrac{1}{4}\left[e^{x}+3x+e^{-x}-e^{-2x}-4\mathrm{Log}(e^{x}+1)\right]+C.$

Remarque :

*Pour calculer $\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$, on peut aussi poser $u = \mathrm{th}\dfrac{x}{2}$ pour se ramener à $\int F(t)dt$ où F est une fonction rationnelle en utilisant :

$$\mathrm{sh}x = \frac{2u}{1-u^2} \quad ; \quad \mathrm{ch}x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad ; \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}.$$

Cas particuliers :

Soit à calculer $\ I(x) = \int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$.

On considère $\ J(x) = \int R(\sin x, \cos x)dx$, pour laquelle on essaye un changement de variable particulier $u = \cos x$, $u = \sin x$ ou $u = \mathrm{tg}x$ (voir cas particuliers IV-2). On utilise alors dans notre cas, pour le calcul de I(x), le changement de variable correspondant pour les fonctions hyperboliques : $u = \mathrm{ch}u$; $u = \mathrm{sh}x$ ou $u = \mathrm{th}x$.

Exemple : $\quad I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}x(2+\mathrm{sh}^2 x)}dx$

On considère $\ J(x) = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x(2+\sin^2 x)}dx$, pour calculer J(x), on pose $u = \cos x$ (car le changement de x en -x ne modifie par $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x(2+\sin^2 x)}dx$).

Alors pour le calcul de I(x), on pose $u = \mathrm{ch}x$, on obtient :

$$\int \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = \int\left(-\frac{1}{u}+\frac{2u}{u^2+1}\right)du = -\mathrm{Log}|u|+\mathrm{Log}(u^2+1)+C$$

Ainsi $I(x) = \int \frac{sh^3x}{chx(2+sh^2x)}dx = -\text{Log}chx + \text{Log}(2+sh^2x) + C$.

IV-4- <u>Calcul de</u> $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Soit $n \in$ IN; $n \geq 2$, R une fraction rationnelle de deux variables. Pour calculer $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, on pose $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ce qui ramènera le calcul à celui de $\int F(u)du$ où F est une fraction rationnelle en u.

<u>Exemple</u> : $I(x) = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $u^2 = \frac{x+1}{x-1}$ d'où $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$ et $dx = -\frac{4u}{(u^2-1)^2}du$

On obtient alors $\int \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du = \int\left(\frac{2}{1-u^2} - \frac{2}{1+u^2}\right)du$

$$= \text{Log}\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - 2\text{Arctg}u + C$$

et par suite $I(x) = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \text{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}}{1-\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}}\right| - 2\text{Arctg}\sqrt{\frac{1+x}{x-1}} + C$.

V- Extension de la notion d'intégrale.

V-1- <u>Intégration sur [a,+∞[ou]-∞,a]</u>

1) <u>Définition</u> :

Soit $a \in$ IR et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Alors $\forall x \in]a,+\infty[$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ existe.

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si :

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$, $\ell \in$ IR. On note alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \ell = \lim_{+\infty}\int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge lorsqu'elle n'est pas convergente c-à-d si $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ est infinie ou n'existe pas.

2) <u>Exemple</u> :

* Etudier la nature (convergente ou divergente) de :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctg}t}{1+t^2}dt$

$\forall x \in [0,+\infty[$; soit $F(x) = \int_0^x \frac{\text{Arctg}t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\text{Arctg}^2x$

Comme $\lim\limits_{+\infty} F(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2}\text{Arctg}^2 x = \frac{\pi^2}{8}$ alors $\int \frac{\text{Arctgt}}{1+t^2}dt$ est convergente et

$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctgt}}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{8}$.

b) $\int_1^{\infty} \text{Logtdt}$

$\forall\, x \geq 1$; $F(x) = \int_1^x \text{Logtdt} = x\,\text{Log}x - x - 1$

$\lim\limits_{+\infty} x\,\text{Log}x - x - 1 = \lim\limits_{+\infty} x(\text{Log}x - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$ alors $\int_1^{\infty} \text{Logtdt}$ est divergente.

3) <u>Théorème fondamental</u> :

Soit $\beta \in$ IR, alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

<u>Preuve</u> :

$$\forall\, x \geq 1\ ;\ F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}(x^{1-\beta} - 1) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \text{Log}x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Alors si $\beta \leq 1$; $\lim\limits_{+\infty} F(x) = +\infty$ et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ diverge.

si $\beta > 1$; $\lim\limits_{+\infty} F(x) = \frac{1}{\beta - 1}$ et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ converge

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} = \frac{1}{\beta - 1}$.

4) <u>Remarque</u> :

La convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est indépendante de a.

5) <u>Définition</u> :

* De la même manière on définit la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, a[$.

$\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)dt = L$; $L \in$ IR.

* Soit f une fonction continue sur IR.

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall\, a \in$ IR.

$\int_{-\infty}^a f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont convergentes.

6) <u>Exemple</u> :

Etudier la nature de :

a) $\int_{-\infty}^0 e^t dt$.

$\forall\, x \leq 0$; $F(x) = \int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = 1 - e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$

Donc $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$ converge.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$.

Soit $a \in IR$; $\int_{-\infty}^{a} e^t dt$ converge mais $\int_{a}^{+\infty} e^t dt$ diverge (car $\lim_{+\infty} \int_{a}^{x} e^t dt = +\infty$) alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ diverge.

V-2- <u>Critères de convergence</u> :

1) <u>Théorème1</u> :

Soit f et g deux fonctions sur $[a,+\infty[$ et vérifiant :

$\forall t \in [a,+\infty[$; $0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_{a}^{+\infty} g(t)dt \text{ converge } \Rightarrow \int_{a}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge.}$$

<u>Exemple</u> :

$\forall t \geq 1$, on a : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, comme $\int_{1}^{+\infty} e^{-t} dt$ converge alors $\int_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2) <u>Théorème2</u> :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,+\infty[$.

Si $f \overset{+\infty}{\sim} g$ (c-à-d $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$) alors :

$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{a}^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

<u>Exemple</u> :

Comme $\lim_{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{t^2}}{t^2} = 1$ alors $\sin \frac{1}{t^2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

Et comme $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (car 2>1) alors $\int_{1}^{+\infty} \sin \frac{1}{t^2} dt$ converge.

3) <u>Théorème 3</u> :

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

Si $\int_{a}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge (on dit que $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente) alors $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

<u>Exemple</u> :

Etudier la nature de $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

$\forall t \geq 1$, on a $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq 1$, comme $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge alors $\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ converge et par suite $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge.

V-3- <u>Intégration sur [a,b[ou]a,b]</u> .

1) <u>Définition</u> :

Soit f une fonction continue sur [a,b[; $a,b \in IR$ $a<b$.

$\forall\, x \in [a,b[$, on pose $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x\to b^-} \varphi(x) = \ell$; $\ell \in$ IR (c-à-d $\varphi(x)$ admet une limite finie quand $x \to b^-$).

On écrit alors $\int_a^b f(t)dt = \ell = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

2) <u>Exemple</u> :

Etudier la nature de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$\forall\, x \in [0,1[$; $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arc}\sin x \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{\pi}{2}$

Alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

3) <u>Théorème fondamental</u> :

Soit $\beta \in$ IR ; $\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta}$ converge si et seulement si $\beta<1$.

4) <u>Définition</u> :

* De la même manière on définit la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur]a,b].

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt = L \;;\; L \in \text{IR}$$

* Soit f une fonction continue sur]a,b[.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\forall\, c \in [a,b]$,

$\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.

<u>Exemple</u> :

$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge car $\forall\, x \in]0,1]$; $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

* Les critères de convergence s'énoncent de la même manière que ceux du V-2 pour les différents types de convergences. (convergence en $-\infty$ pour $\int_{-\infty}^a f(t)dt$, convergence en b pour $\int_a^b f(t)dt$ quand f est continue sur [a,b[et convergence en a pour $\int_a^b f(t)dt$ quand f est continue sur]a,b]).

* Pour l'étude de la convergence d'une intégrale, on peut rencontrer des différents types de convergence, il faut alors étudier séparément la question de convergence pour chaque borne.

Par exemple, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ où f est continue sur $]0,+\infty[$ présente un problème de convergence en $+\infty$ et un problème de convergence en 0.

$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall\, a \in]0,+\infty[$.

$\int_0^a f(t)dt$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice :

Etudier la nature de :

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$.

Solution :

a) Au voisinage de 0, on a : $\frac{e^x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ et comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge (en 0) alors $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ converge.

b) Pour $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$; on doit étudier la convergence en 0 et en $+\infty$.

Convergence en 0 : $\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \overset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$ converge.

Convergence en $+\infty$: $\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \overset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{t}{2}}$, or $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt$ converge

car $\int_1^x e^{-\frac{t}{2}}dt = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_1^x = 2\ e^{-\frac{1}{2}}$ - $2\ e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2e^{-\frac{1}{2}}$

alors $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$ est convergente.

Exercices

Exercice 1 :

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\operatorname{ch}x\,dx \quad ; \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad ; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

2) Calculer $\int_0^{\pi/4} \cos x \operatorname{Log}(1+\cos x)dx$, en déduire la valeur de $\int_0^1 \operatorname{Log}(1+\sqrt{1-x^2})dx$.

Exercice 2 :

1) Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg}x)dx$ (poser $t = \frac{\pi}{4}$ - 4).

2) En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x^2}dx$.

Exercice 3 :

1) Déterminer une primitive de : $f_1(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; $f_2(x) = x\,e^{\sqrt{x}}$.

2) Calculer :

$$\int \frac{x^5-1}{x(x^3-1)}dx \quad ; \quad \int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sin x+\cos x+2}dx \quad ;$$

$$\int \frac{x\sqrt{2x-1}}{(x+1)^2}dx \quad ; \quad \int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx.$$

Exercice 4 :

Soit f une fonction continue sur [0,1].

1) Montrer que : a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

2) Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Exercice 5 :

$\forall$ x>0, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{t^4}{25+t^{10}}dt$.

Calculer I(x) puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

Exercice 6 :

1) Etudier la convergences des intégrales en précisant la valeur de chaque intégrale convergente.

a) $\int_0^1 \text{Log} u\, du$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)\sqrt{u}}$.

2) Déterminer la nature de :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)} dx$.

b) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\text{Log} x}$.

Exercice 7 :

1) Soit $a \in$ IR, pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$ est - elle convergente ?

2) Etudier, suivant les valeurs du réel α, la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$.