Chapitre 6 Les factorielles

6.1 Les factorielles

Les suites des nombres consécutifs en produits sont : ***les factorielles***.

Exemple :

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$

Définition :
Soit ***n*** un nombre entier positif. On définit « ***n factoriel*** » par :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{si} \qquad n > 0$$

$$0! = 1$$

Exercice 1 :
Compléter le tableau suivant :

0!	=	
1!	=	
2!	=	
3!	=	
4!	=	
5!	=	
6!	=	720
7!	=	5'040
8!	=	40'320
9!	=	362'880
10!	=	
11!	=	39'916'800
12!	=	479'001'600
13!	=	6'227'020'800
14!	=	87'178'291'200
15!	=	1'307'674'368'000
16!	=	20'922'789'888'000
17!	=	355'687'428'096'000
18!	=	6'402'373'705'728'000
19!	=	121'645'100'408'832'000
20!	=	2'432'902'008'176'640'000
30!	=	
50!	=	

Exercice 2 :
Calculer :

a) $\dfrac{15!}{12!} =$

c) $\dfrac{600!}{598!} =$

b) $\dfrac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} =$

d) $\dfrac{300!}{3! \cdot 297!} =$

Exercice 3 :
Calculer

a) $(4 \cdot 3)! =$ b) $4! \cdot 3! =$ c) $4 \cdot 3! =$

d) $(4+3)! =$ e) $4! + 3! =$ f) $15! - 15! =$

Exercice 4 :
Simplifier les expressions ci-dessous (*n* est un entier positif) :

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} =$

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} =$

c) $\dfrac{(n+1)!}{n!} =$

d) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} =$

Exercice 5 * :
Combien y a-t-il de ZEROS qui terminent 100! ?

6.2 Les nombres triangulaires

Définition :
Un nombre triangulaire d'ordre ***n*** c'est la somme de tous les nombres de **1** à ***n***.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

Exemples :

$T_1 = 1$

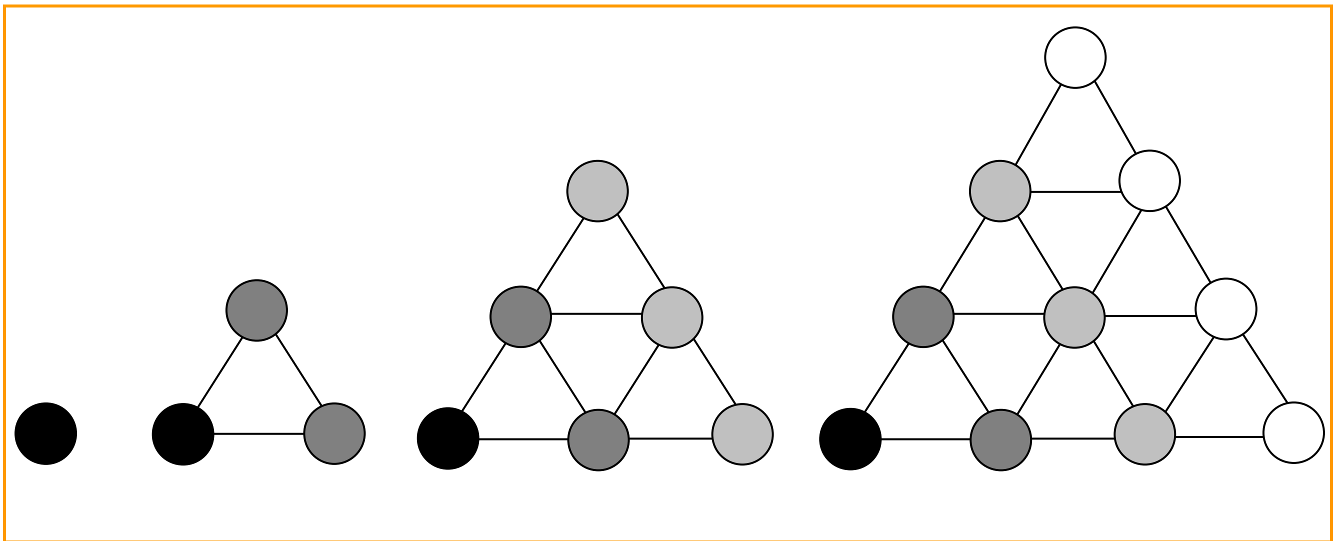
$T_2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$T_{101} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 + 101 = 5'151$

Illustration N° 1



1	1 + 2 = 3	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 + 4 = 10

Illustration N° 2 – une autre façon de visualiser

			X
		X	X
	X	X	X
X	X	X	X
1	2	3	4

$T_4 = 10$

O	O	O	X
O	O	X	X
O	X	X	X
X	X	X	X
1	2	3	4

$4^2 = T_4 + T_3$

Remarque :
Deux nombres triangulaires consécutifs ajoutés donnent un carré.

Formule de calcul :

$$1+2+3+....+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Exemple :

$$T_7=1+2+3+4+5+6+7=\frac{7\cdot 8}{2}=28$$

TABLE des Nombres TRIANGULAIRES

n	T_n
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66

n	T_n
20	210
30	465
40	820
50	1 275
60	1 830
70	2 485
80	3 240
90	4 095
100	5 050
1'000	501500
10'000	50015000
100'000	5000150000

Exercice 6 :
Calculer :

a) $T_{12}=1+2+3+...+11+12=$

b) $T_{22}=$

c) $T_{35}=$

d) $T_{105}=$

Exercice 7 * :

Donner l'idée de la démonstration de la formule : $\boxed{1+2+3+....+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

6.3 Deux formules importantes

Définition :
Soient p et n deux nombres entiers positifs tels que $p \leq n$, on définit :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$ *(Nombre d'arrangements.)*

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\cdot p!} = \frac{(n-p+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot p}$$ *(Nombre de combinaisons.)*

Exercice 8 :
Calculer :

a) $A_3^7 =$ b) $A_5^9 =$ c) $A_2^{100} =$ d) $A_1^{15} =$

e) $A_0^{18} =$ f) $A_{30}^{30} =$ g) $A_3^{15} =$ h) $A_{12}^{15} =$

i) $A_{20}^{30} =$ j) $A_{15}^{50} =$ k) $A_1^{1000} =$ l) $A_{500}^{500} =$

Exercice 9 :
Calculer :

a) $A_3^5 + 2 =$ b) $A_{3+2}^8 =$ c) $A_3^5 \cdot A_8^{10} =$ d) $A_2^7 + A_6^7 =$

Exercice 10 :
Calculer :

a) $C_3^7 =$ b) $C_2^5 =$ c) $C_{98}^{100} =$ d) $C_1^{18} =$

e) $C_0^{15} =$ f) $C_{20}^{20} =$ g) $C_3^{10} =$ h) $C_7^{10} =$

i) $C_{20}^{50} =$ j) $C_{600}^{600} =$ k) $C_{300}^{300} =$

Exercice 11 :
Calculer :

a) $C_2^8 \cdot C_3^5 =$ b) $C_{2+3}^8 =$ c) $C_2^8 + C_1^5 =$ d) $C_3^5 + 5 =$

Exercice 12 :
Comparer et généraliser :

a) C_4^{10} et C_6^{10} b) C_8^{15} et C_7^{15}

c) C_2^7 et C_5^7 d) C_1^{19} et C_{18}^{19}

6.4 Théorème du binôme - Binôme de Newton

On veut donner la formule générale du développement de $(a+b)^n = ?$

Cas particuliers du théorème du binôme :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & .. & & \ldots
\end{array}$$

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \qquad \textbf{avec} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

Binôme de Newton : (Théorème du binôme)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Formule utile :

$\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{n-k}^n$ c.à.d. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(voir ex. 12 et ex. 16)*

Exercice 13 :
Donner le développement de $(a+b)^6$ en utilisant le triangle de Pascal.

Exercice 14 :
Donner le développement de $(a+b)^7$ en utilisant la formule du binôme.

Exercice 15 :
Donner le développement de $(a+b)^{10}$ en utilisant la formule du binôme.

Exercice 16 :
Donner une démonstration de la « formule utile ».

SOLUTIONS

Ex 1 :

0!	=	1	3!	=	6	10!	=	3'628'800
1!	=	1	4!	=	24	30!	=	$2,653\cdot 10^{32}$
2!	=	2	5!	=	120	50!	=	$3,041\cdot 10^{64}$

Ex 2 :

a) 2730 b) $1,69\cdot 10^{15}$ c) 359'400 d) 4'455'100

Ex 3 :

a) $4,79\cdot 10^{8}$ b) 144 c) 24 d) 5040 e) 30 f) 0

Ex 4 :

a) n b) n^2-n c) $n+1$ d) n^2+n

Ex 5 * :

Il y a **24 zéros** qui terminent 100 !

Ex 6 :

a) $T_{12}=78$ b) $T_{22}=253$ c) $T_{35}=630$ d) $T_{105}=5565$

Ex 7 * :

Indication : s'inspirer de la 2ème illustration.

Ex 8 :

a) 210 b) 15'120 c) 9'900 d) 15

e) 1 f) $2,65\cdot 10^{32}$ g) 2'730 h) $2,179\cdot 10^{11}$

i) $7,31\cdot 10^{25}$ j) $2,94\cdot 10^{24}$ k) 1'000 l) 500!

Ex 9 :

a) 62 b) 6720 c) $1,089\cdot 10^{8}$ d) 5082

Ex 10 :

a) 35 b) 10 c) 4'950 d) 18

e) 1 f) 1 g) 120 h) 120

i) $4,71\cdot 10^{13}$ j) 1 k) 1

Ex 11 :

a) 280 b) 56 c) 33 d) 15

Ex 12 :

a) 210 et 210 b) 6435 et 6435 c) 21 et 21 d) 19 et 19 Généralisation : $C_p^n = C_{n-p}^n$

Ex 13 :

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Ex 14 :

$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$