CHAPITRE 1 IDENTITES REMARQUABLES

1. Les Quantificateurs

L'expression « quel que soit » ou « pour tout » se note par le symbole $\forall$: ce symbole est un quantificateur (dit universel).
L'expression «il existe au moins un » se note par le symbole $\exists$: ce symbole est aussi un quantificateur (dit existentiel).

2. Factorielle d'un entier naturel

2.1. Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le nombre appelé facorielle n et noté $n!$ est le produit de tous les entiers naturels de 1 à n.

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0;1\} \qquad n! = 1x2x.....xn$$
$$avec \quad 0! = 1 \quad et \quad 1! = 1$$

2.2. Relation de récurrence

En utilisant l'associativité du produit, on peut écrire

$$pour \;\; n \geq 2 \qquad 1x2x........xn = \left[1x2x....x(n-1)\right]xn$$

soit

$\forall n \in \mathbf{N} - \{\,0\,;1\,\} \qquad n! = [\,(n-1)!\,]\, x\ n$

Cette relation de récurrence permet un calcul rapide d'une valeur de factorielle n, après avoir calculé les valeurs des (n-1) factorielles précédentes.

2.3. Petite table de factorielle

Il est souhaitable de connaitre les valeurs des premières factorielles

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

Exemple

Simplifier l'écriture du nombre suivant (sans utiliser la calculatrice)

$$A = \frac{21!}{19!}$$

On peut simplifier le numérateur et le dénominateur de cette fraction par les facteurs multiplicatifs communs $1x2x3x......x19$:

Il reste $A = 21x20 = 420$

Exemple

Ecrire sous forme d'un quotient de 2 factorielles, le nombre suivant :

$$B = 50x49x48$$

On multiplie et on divise par le même nombre non nul $1x2x.....x47$ et l'on trouve $B = \dfrac{50!}{47!}$

Exemple

Exprimer en fonction de n et sans le symbole factorielle, les nombres suivants :

$$X=\frac{(n+1)!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!} \qquad puis \qquad Y=\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$$

Les factorielles ne portent que sur des nombres $n\in\mathbf{N}$, donc des nombres positifs ou nuls.

L'expression X n'a de sens que si $n\geq 2$

D'après la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0;1\,\}$ $\qquad n!=\left[\,(n-1)!\right]x\ n$

et $\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0,1\,\}$ $\qquad \dfrac{n!}{(n-1)!}=n$

De même $\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0,1\,\}$ $\qquad (n+1)!=\left[\,(n-2)!\right]x(n-1)\,x\,n\,x\,(n+1)$

et $\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0,1\,\}$ $\qquad \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}=(n-1)\,x\,n\,x\,(n+1)=n^3-n$

soit $\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0,1\,\}$ $\qquad X=n^3-n+n=n^3$

L'expression Y n'a de sens que si $n\geq 1$

$\forall n\in\mathbf{N}-\{\,0\,\}$ $\qquad Y=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

3. LE TRIANGLE de PASCAL

3.1. Les COMBINAISONS

Soit E un ensemble non vide contenant n éléments et k un entier naturel tel que $0\leq k\leq n$

Une combinaison à k éléments de E est une partie (non ordonnée) de E formée de k éléments.

Définition

On appelle coefficient binomial ou nombre de combinaisons à k éléments de E, et on note C_n^k ou encore $\binom{n}{k}$, le nombre entier égal à :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!} \qquad avec \qquad 0 \le k \le n$$

l'indice *n* est en ligne (ou encore en abscisse) et *k* en colonne (ou encore en ordonnée)

Exemple

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\ 4!} = \frac{7x6x5}{1x2x3} = 35$$

Propriété

Quelques propriétés des coefficients binomiaux :

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad C_n^0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad C_n^1 = n \qquad C_n^n = 1$
- $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad C_n^k = C_n^{n-k} \qquad k\ \ entier\ \ vérifiant \quad 0 \le k \le n$ (symétrie sur une ligne)
- $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad k\ \ entier\ \ vérifiant \quad 1 \le k \le n-1$

3.2. Le TRIANGLE de PASCAL

Les coefficients C_n^k sont donnés par le triangle de Pascal généré à partir des formules

$$\begin{cases} C_n^0 = 1 \qquad et \qquad C_1^1 = 1 & \forall n \in \mathbf{N} \\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} & 1 \le k \le n-1 \end{cases}$$

Pour obtenir le terme C_n^k du triangle de Pascal, il suffit d'additionner le terme immédiatement au dessus de celui-ci (en l'occurrence C_{n-1}^k) et le terme à gauche de ce dernier (en l'occurrence C_{n-1}^{k-1})

RAPPEL

l'indice n est l'indice de ligne (ou encore l' abscisse) et k l'indice de colonne (ou encore l' ordonnée)

Nous donnons ci-dessous le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 8

	$col0$	$col1$	$col2$	$col3$	$col4$	$col5$	$col6$	$col7$	$col8$
$lig0$	1								
$lig1$	1	1							
$lig2$	1	2	1						
$lig3$	1	3	3	1					
$lig4$	1	4	6	4	1				
$lig5$	1	5	10	10	5	1			
$lig6$	1	6	15	20	15	6	1		
$lig7$	1	7	21	C_7^3	35	21	7	1	
$lig8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Remarque

- dans le triangle de Pascal, les coefficients sont obtenus en effectuant uniquement des additions
- on peut obtenir directement les coefficients de la ligne n du triangle de Pascal, sans calculer les coefficients des (n-1) lignes précédentes en utilisant la formule suivante :

$$C_n^k = \left(C_n^{k-1}\right)\left(\frac{n-k+1}{k}\right) \quad k \ \ entier \ \ vérifiant \quad 1 \le k \le n$$

Les coefficients du triangle de Pascal sont alors obtenus en effectuant uniquement des multiplications.

4. FORMULE du BINOME de NEWTON

Soit a et b deux nombres réels (et par la suite, éventuellement complexes)

Partons de l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

On en déduit en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(a+b)$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

puis :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

et plus généralement, on peut montrer par récurrence

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots\ldots + C_n^n b^n$$

Les coefficients C_n^k étant les coefficients binomiaux du paragraphe précédent

Remarque

Dans la formule du binôme de Newton, les nombres a et b ont un rôle symétrique

$(a+b)^n = (b+a)^n$, et l'on peut aussi écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0\, b^n + C_n^1\, a\, b^{n-1} + \ldots\ldots + C_n^k\, a^k\, b^{n-k} + \ldots\ldots + C_n^n\, a^n$$

Exemple

pour $n = 5$ alors $(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$

mais aussi, en changeant $b \ \ en \ -b$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 - 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 - b^5$$

Ecrire les formules donnant $(a+b)^6 \ \ puis \ \ (a-b)^6$

Exemple

Développer suivant la formule du binôme de Newton $(3x-2)^5$

On utilise la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

et pour $a = 3x$ *et* $b = 2$

$$(3x-2)^5 = (3x)^5 - 5(3x)^4.(2) + 10(3x)^3.(2^2) - 10(3x)^2.(2^3) + 5(3x).2^4 - (2^5)$$

soit

$$(3x-2)^5 = 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32$$

Exemple

Quel est le coefficient du terme en x^6 dans le développement de $(x+2)^8$

Appliquons la formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$

en remplaçant n par 8, a par x et b par 2

$$(x+2)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \; x^{8-k} \; 2^k$$

Le coefficient du terme en x^6 correspond à la valeur $k = 2$

Ce coefficient est donc $C_8^2 \; (2)^2$

Puisque $C_8^2 = \dfrac{8!}{2!6!} = \dfrac{8x7}{1x2} = 28$

Le coefficient du terme en x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ est $28\,x\,4 = 112$

Exemple

Reprenons la formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$

Pour $a = b = 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots\dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

De même , pour $a=1 \quad et \quad b=-1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n$$

En effectuant la demi-somme des deux dernières formules, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \sum_{2k\leq n}^{n} C_n^{2k} = C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^{2k-2} + C_n^{2k} = 2^{n-1}$$

et par demi-différence de ces deux mêmes formules

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \sum_{2k+1\leq n}^{n} C_n^{2k+1} = C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2k-1} + C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$$

On obtient aussi, pour $a=1 \quad et \quad b=2$

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 3^n=(1+2)^n=\sum_{k=0}^{n}2^k\, C_n^k = C_n^0 + 2C_n^1 + ... + 2^{n-1} C_n^{n-1} + 2^n C_n^n$$

et bien d'autres formules que l'on utilisera dans la suite du cours

5. AUTRES IDENTITES REMARQUABLES

Partons de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1+q+........+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad si \quad q \in \mathbf{N} \setminus \{\, 1 \,\}$$

On en déduit : $\forall q \in \mathbf{N} \qquad 1-q^n=(1-q)(1+q+....+q^{n-1})$

Et en posant $q=\dfrac{b}{a}$

$$1-\left(\frac{b}{a}\right)^n = (1-\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a}+........+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1})$$

En multipliant chacun des membres de l'égalité précédente par a^n

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+.......+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

On retiendra tout particulièrement les identités remarquables obtenues pour n=2 puis n=3

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Et en changeant $b \;\; en \;\; -b$ (uniquement pour *n* impair)

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Les identités remarquables

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

sont à connaître à tout moment.