Synthèse « Factorielle de n »

Le document suivant est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LEPS.

La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant :

en quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux) ?

Un énoncé au lycée : Combien y a-t-il de zéros à la fin de n! ?

****

$20! = 2432902008176640000$

****

Cette situation a été expérimentée au collège, au lycée et avec des étudiants.

- Environ deux heures semblent nécessaires pour une mise en œuvre aboutie. -

1.Analyse mathématique du problème

Un nombre m écrit dans la base 10 se termine par k zéros si et seulement si sa décomposition en produit de facteurs premiers peut s'écrire :

$$m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$$

avec $k = min(k_1, k_2)$.

Preuve :

Supposons que le nombre m se termine par k zéros alors
$m = m_1 \times 10^k = m_1 \times 2^k \times 5^k$;
si 5 divise m_1 alors 2 ne divise pas m_1 (sinon il y aurait un 0 de plus) et de même si 2 divise m_1 alors 5 ne divise pas m_1. Donc $m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$ avec $k = min(k_1, k_2)$

Réciproquement :

Si $m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$ avec $k = min(k_1, k_2)$ alors
$m = 2^k \times 5^k \times 2^{k_1-k} \times 5^{k_2-k} \times \cdots$ et l'un des deux nombres $k_1 - k$ et $k_2 - k$ au moins est nul ; donc m se termine par k zéros.

Pour déterminer le nombre de zéros à la fin de $n!$, il suffit donc de déterminer l'exposant de 5 dans la décomposition en produit de facteurs premiers, le nombre de 2 étant plus important que le nombre de 5 . . .
Ce que l'on peut obtenir de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$$

ou bien

$$\sum_{k=1}^{p} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$$

avec p l'entier tel que $5^p \leq n < 5^{p+1}$

Retour au Menu Factorielle de n
Suite

2.Éléments didactiques pour la mise en œuvre en classe

Scénario en seconde

La classe de seconde comportait 23 élèves qui se sont répartis en 5 groupes avec un élève volontaire pour noter toutes les remarques et réflexions de ses camarades pendant la recherche.

Le professeur donne la définition de $n!$ à l'aide d'exemples : $3!, \quad 4!, \quad 5!, \quad 10!$ puis écris l'énoncé du problème au tableau.

Après un certain délai le professeur indique aux élèves où trouver la touche $\boxed{!}$ sur leur calculatrice.

Retour au Menu Factorielle de n   Suite

Au bout d'une heure de recherche le professeur distribue une feuille blanche aux groupes leur demandant de faire une conclusion de leurs résultats. Un quart d'heure après, chaque groupe passe au tableau pour présenter sa synthèse aux autres. L'ordre de passage est déterminé par le professeur en fonction de l'avancée des recherches de chaque groupe ...

Après chaque exposé il s'en suit quelques discussions. Mais surtout lors du passage du dernier groupe dont les résultats étaient bien plus avancés que les autres.

Le professeur n'a plus qu'à conclure, en redonnant quelques explications sur des erreurs importantes commises, sur des questions de définition de $n!$, expliquer brièvement à quoi elle correspond et surtout prolonger le débat entamé car la démonstration est loin d'être terminée ...

Retour au Menu Factorielle de n   Suite

Scénario en première S

L'énoncé suivant est donné aux élèves de première S sur feuille :

« On appelle $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 ... \times (n-1) \times n$
par exemple $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
Peut-on prévoir le nombre de zéros qui terminent $n!$? »

Les élèves cherchent individuellement en silence pendant environ 10 minutes (ils sont prévenus d'avoir à s'arrêter après ce laps de temps)

Les élèves remplissent le questionnaire numéro 1 dont l'objectif est double :

- repérer la façon dont les élèves attaquent spontanément le problème
- permettre aux élèves de prendre du recul sur leur démarche

Puis les élèves poursuivent la recherche en groupes de 3 ou 4.
Le professeur adopte une attitude neutre et si un groupe lui propose une solution il l'invite à la vérifier.

Retour au Menu Factorielle de n   Suite

Après une demi-heure de recherche, un second questionnaire est donné à remplir sur lequel les élèves doivent indiquer leurs idées, bonnes ou mauvaises et ce qu'ils en ont fait.
Ce questionnaire ne sera ramassé qu'à la fin de la séance, et les élèves sont invités à continuer de le remplir jusqu'au bout, cependant un arrêt dans la recherche est nettement marqué pour permettre de commencer à le remplir.

Au bout d'une heure le professeur affiche :

« $40! = 815\ 915\ 283\ 247\ 897\ 734\ 345\ 611\ 269\ 596\ 115\ 894\ 272\ 000\ 000\ 000$ »

en indiquant que nous avons obtenu ce résultat à l'aide d'un ordinateur.

Les élèves terminent la séance en préparant une affiche qui sera exposée et commentée pendant la prochaine heure de mathématiques, le lendemain.

Retour au Menu Factorielle de n
Suite

Compte-rendu en première S

Cette observation était destinée à tester les effets sur la recherche du dispositif de breaks périodiques décrit dans le scénario.
L'analyse du problème nous avait amenés à penser que les élèves seraient assez vite coincés dans leurs essais avec la calculatrice.

Devant : $14! = 8.717\ 829\ 12\ E\ 10$ trois attitudes nous paraissaient possibles :

- appel au secours du professeur
- 14! se termine par 2 zéros (le 10 de l'exposant moins les 8 décimales)
- abandon de la calculatrice pour commencer à repérer l'importance des facteurs 2 et 5

Aux élèves qui interpréteraient mal le résultat fourni par la calculatrice, on avait prévu de fournir d'autres calculatrices utilisant un nombre différent de chiffres pour leur montrer la variabilité dans l'affichage.

L'affichage de 40! jouait le rôle de joker pour éviter que des élèves persistent trop longtemps dans les erreurs rédhibitoires.

Contrairement à la consigne, les élèves qui étaient déjà regroupés par 3 ou 4 n'ont pas cherché seuls, ils ont tout de suite commencé à échanger entre eux.
Le premier questionnaire a été décevant car les réponses étaient trop prévisibles et les élèves n'ont pas tiré profit de cette interruption. Plusieurs groupes ont commis l'erreur prévue : imaginer que les décimales situées après celles qui sont affichées sont des zéros. Cette attitude ne produit pas de résultats trop invraisemblables au début.

Un groupe a persisté dans cette erreur presque jusqu'à la fin.
Une élève a demandé au professeur s'il y avait une touche sur la calculatrice permettant d'obtenir les chiffres qui n'apparaissaient pas.
La constatation que les résultats fournis par la calculatrice sont assez vite inopérants pour ce problème amène les élèves : soit à un blocage, soit à la mise en place d'un procédé ce calcul à la main (attitude non observée ici), soit à l'abandon du calcul des factorielles des entiers successifs et à la recherche d'un raisonnement.
Les buts visés par le second questionnaire, qui étaient d'obliger les élèves à travers l'écriture d'un bilan à faire un travail de reconstruction et à se constituer une mémoire commune au groupe, ont été généralement atteints.
Mais les groupes n'ont pas toujours compris qu'ils devaient répertorier aussi les idées fausses ou peut-être sont-ils gênés par le fait de rédiger des pistes abandonnées.
Dans un groupe où la communication était très faible, le moment de remplissage du questionnaire a été l'occasion de retrouver un fonctionnement de groupe (un des membres a expliqué sa conjecture).
Dans un autre groupe, une élève s'est investie dans un rôle de secrétaire de séance active : elle a remplie le questionnaire en interrogeant ses partenaires et en faisant préciser certains points. Son travail a été très important pour la cohérence du groupe et a permis que le groupe parvienne à la fin de la séance à une synthèse réussie.

Retour au Menu Factorielle de n   Suite

Trois groupes ont été plus spécialement observés pendant la séance.
Leur comportement s'est avéré très différent.

Le groupe 1 s'est trompé dans l'interprétation des résultats fournis par la calculatrice il a longuement rempli un tableau de résultats $(n; n!)$ qui était donc en grande partie faux, et a recherché sur ce tableau des régularités. Le joker 40! les a amenés à reconnaître que ce qu'ils avaient fait était faux mais a provoqué une certaine déstabilisation (ils ont été jusqu'à penser que le nombre de zéros pouvait diminuer). C'est seulement tout à la fin qu'ils ont compris où se situait leur erreur et jamais ils n'ont aperçu ni la récurrence dans la définition de $n!$, ni le lien avec les facteurs 2 et 5 Ce groupe s'est investi dans une direction sans prendre le recul nécessaire : les interventions prévues par le professeur en cours de recherche n'ont ici pas été suffisantes. Par ailleurs, il est à noter que la situation ne donnait pas beaucoup de moyens de contrôle des résultats produits.

Le groupe 2 a très mal fonctionné comme groupe : deux élèves ne semblaient pas vouloir communiquer et le troisième a tenté vainement de servir de lien entre eux. Cependant le remplissage du second questionnaire a obligé le groupe à communiquer et a amené le plus solitaire à expliquer sa conjecture aux autres. Dans un fonctionnement de classe habituel, l'intervention du professeur, qui n'était pas souhaitée dans le contexte de notre séance d'observation, est souvent déterminante pour amener le groupe à un fonctionnement collectif.

Le groupe 3 a proposé très vite la conjecture $f(n) = E\left(\frac{n}{5}\right)$. Le professeur leur ayant demandé s'ils en étaient sûrs, les élèves ont poursuivi la recherche et ont alors eu l'idée de compter les facteurs 2 et 5. Deux types d'entiers n les ont alors intéressés : 25 d'une part, 10, 100, 1000 d'autre part ; 100! est apparu comme contre-exemple de la conjecture initiale.
A ce stade ils ont essayé de construire une formule avec des logarithmes pour rendre compte du nombre de zéros de $10k!$. Après la relance 40!, un élève a trouvé une réponse prenant en compte les différents essais faits par le groupe, et finalement le groupe a décrit sur son affiche un algorithme détaillé exact qu'il a appelé : « pentatochomie ».
La récurrence $n! = n \times (n-1)!$, si elle a été un passage obligé du groupe, n'a jamais été explicitée. De même, le groupe a vite vu qu'il suffisait de compter les facteurs 5, mais ne l'a pas non plus explicité, ni dans le questionnaire, ni dans l'affiche.

Pour tous les groupes observés, il semble qu'il y ait un lien fort entre un fonctionnement riche : échanges, interactions,... et la mise en place d'un contrôle (collectif) sérieux de la recherche.
Comment constituer les groupes, comment créer dans un groupe l'équilibre nécessaire entre travail individuel et fonctionnement collectif, comment faire voir au groupe comment il fonctionne : voilà quelques directions de recherche ...

Objets mathématiques susceptibles d'être travaillés

- écriture scientifique, écriture arrondie
- lien entre écriture décimale et décomposition en facteurs
- divisibilité par 2, par 5
- technique de dénombrement
- récursivité
- représentation de fonctions discontinues, de suites, de courbes sur la calculatrice
- écriture dans une autre base que 10, base cinq ici
- usage du symbole Sigma
- utilisation de différentes calculatrices
- utilisation du calcul formel avec calculatrice ou logiciel

Retour au Menu Factorielle de n   Suite

Des prolongements possibles :

- quel est le dernier chiffre non nul de $n!$?
- quel est le nombre de chiffres de $n!$?
- pour les élèves de Terminale S en spécialité :
  nombre de zéros en base n avec n premier ou non

Retour au Menu Factorielle de n
Suite

Et par exemple concernant la base ...

Le premier fait à remarquer est que le problème du nombre de zéros de Factorielle de n n'est pas intrinsèque, ce nombre dépendant de la base choisie pour écrire $n!$.

Pour tout ce qui concerne les nombres il y a des problèmes intrinsèques, comme par exemple « est-ce que n est premier ? »
et des problèmes qui dépendent de la base choisie, comme par exemple « le nombre de chiffres pour écrire un nombre n ».

Regardons 12 ! ; en base 10, 12 ! s'écrit 479001600, en base 2 il s'écrit :
$12! = 11100100011001111110000000000$, pardon
$1100! = 11100100011001111110000000000$,
et dans la base 60, chère aux babyloniens
$12! = 36\ 57\ 36\ 0\ 0$, c'est à dire presque 37 suivi de 4 zéros.

D'autres développements sont sur la ressource.

Sites :

- Feuille à problèmes
- Foire aux questions
- Recréomaths
- Prolongements
- Maths-Express - Exercice 11

Retour au Menu Factorielle de n