

# Electronique pour les télécoms



Filtrage

---

---

---

---

---

---

---

---

## I. Généralités, définitions Traitement des signaux

- Traiter un signal c'est **mettre en oeuvre les techniques les mieux appropriées pour en extraire le maximum d'information, le plus souvent en présence de bruits perturbateurs**
- En télécommunications spatiales, par exemple, l'énergie disponible étant très limitée, toute méthode de détection et d'exploitation d'un signal faible est très intéressante et de grands efforts ont été développés dans ce domaine, parallèlement à la mise au point d'amplificateurs à très faible niveau de bruit intrinsèque.

2

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## I. Généralités, définitions Traitement des signaux

- La séparation des deux composantes, bruit et signal, n'est possible que si leurs caractéristiques sont différentes :
  - **contenu spectral différent** (on opère alors par **filtrage**) ;
  - direction incidente différente (utilisation d'antennes directives) ;
  - propriétés statistiques différentes.

3

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtres

- Nous nous limiterons dans ce cours au **filtrage dit de fréquences**.
- Le **filtrage de fréquences** est l'opération qui consiste à **modifier les composantes spectrales d'un signal**.
- Les intervalles de fréquence où les composantes du signal sont transmises sont appelées **bandes passantes**, les intervalles où les signaux sont bloqués sont désignés sous le nom de **bandes d'arrêt** ou **d'atténuation**.
- Les filtres de fréquences sont des **systèmes linéaires invariants**

4

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

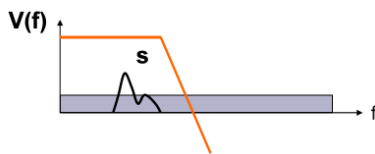
---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtres, utilisation

- Un simple filtre analogique correctement calculé et réalisé peut augmenter d'un facteur 10 le rapport signal sur bruit en sortie d'un amplificateur de mesure



5

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtres, utilisation

- Un filtrage de fréquences est **indispensable lorsque l'on se propose de numériser un signal analogique** ; en effet, cette numérisation implique un **échantillonnage** préalable du signal, et pour que le phénomène de **repliement de spectre** ne détériore pas le signal, il est indispensable de limiter l'étendue spectrale de celui-ci à la demi-fréquence d'échantillonnage. C'est le rôle du **filtre anti-repliement**.

6

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

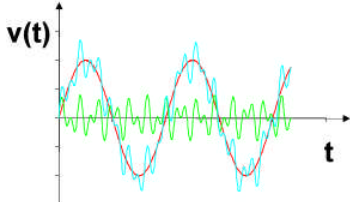
---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres, utilisation

- Sélection (ou élimination) d'une bande fréquentielle dans le spectre d'un signal



7

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

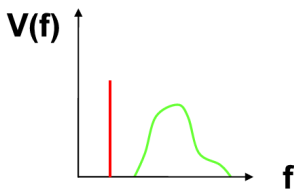
---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres, utilisation

- Sélection (ou élimination) d'une bande fréquentielle dans le spectre d'un signal



8

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

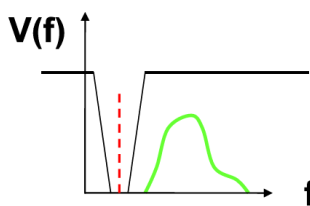
---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres, utilisation

- Sélection (ou élimination) d'une bande fréquentielle dans le spectre d'un signal



9

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
**Filtre idéal**

- Un **filtre idéal** est caractérisé par :
  - une réponse fréquentielle dont le module vaut 1 dans les bandes passantes ;
  - une réponse fréquentielle dont le module vaut 0 dans les bandes d'arrêt ;
  - un temps de propagation  $t_p$  qui est le même pour toutes les composantes spectrales (équivalent à une réponse fréquentielle à phase linéaire)

10

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

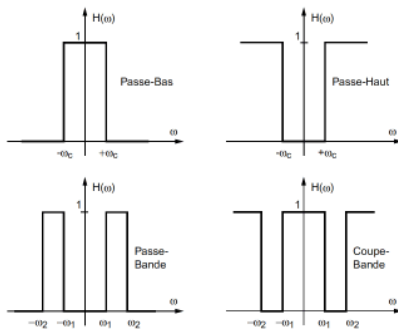
---

---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
**Filtre idéal**



11

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
**Filtre réel**

- Ce type de filtres, purement théorique et impossible à réaliser pratiquement, est celui vers lequel on cherche à tendre avec un filtre réel.

12

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

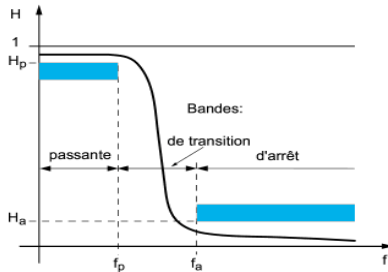
---

---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtre réel



13

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Systemes différentiels et aux différences

- On appelle système différentiel d'ordre  $N$  une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

où  $u(t)$  (entrée) et  $y(t)$  (sortie) sont des signaux scalaires.

14

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Systemes différentiels et aux différences

- L'analogie discret, appelé système aux différences d'ordre  $N$ , est une équation aux différences de la forme :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k u[n-k]$$

qui établit une loi entre  $N+1$  valeurs consécutives du signal de sortie et  $M+1$  valeurs consécutives du signal d'entrée.

15

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Systèmes différentiels et aux différences

- Un système linéaire invariant à temps continu peut être modélisé par des équations différentielles linéaires à coefficients constants
- Un système linéaire invariant à temps discret peut être modélisé par des équations aux différences à coefficients constants

16

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtres

- On peut également leur associer une fonction de transfert :
  - Isomorphe (transformée de Laplace ou en  $z$ )
  - Isochrone (transformée de Fourier)

17

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert

- La réponse d'un SLI à temps continu à une entrée de type exponentielle complexe  $e^{pt}$  est aussi une fonction du temps de type  $e^{pt}$ , le coefficient de proportionnalité  $H(p)$  entre la sortie et l'entrée étant une fonction de  $p$  appelée fonction de transfert du SLI

18

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- En termes mathématiques, les exponentielles complexes sont les fonctions propres des SLI, la valeur  $H(p)$  correspondante de la fonction de transfert étant la valeur propre associée

$$u(t) = e^{pt} \Rightarrow y(t) = H(p)e^{pt}$$

$$u(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

19

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- La fonction de transfert d'un système analogique est la transformée de Laplace du rapport sortie/entrée (et aussi de sa réponse impulsionnelle)
- La fonction de transfert d'un système à temps discret est la transformée en z du rapport sortie/entrée (et aussi de sa réponse impulsionnelle)

20

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- La propriété fondamentale de la transformation de Laplace est de remplacer l'opération de dérivation dans le domaine temporel par une multiplication par la variable complexe  $p$  dans le domaine des transformées (sous réserve de conditions initiales nulles)
- Les systèmes d'équations différentielles sont ainsi transformés en systèmes d'équations algébriques, beaucoup plus faciles à résoudre

21

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert : calcul

- Exemple

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

$$Y(p) + \tau p Y(p) = U(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$$

22

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert : calcul

- Cas général

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k p^k}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

23

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert

- La propriété fondamentale de la transformation en  $z$  est de remplacer l'opération de retard unité dans le domaine temporel par une multiplication par la variable  $z^{-1}$  dans le domaine des transformées (sous réserve de conditions initiales nulles)
- Les systèmes d'équations aux différences sont ainsi transformés en systèmes d'équations algébriques, beaucoup plus faciles à résoudre

24

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---



## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert : calcul

- Exemple

$$y[n] - a y[n-1] = u[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$$H(e^{j\omega T_e}) = H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T_e}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

25

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert : calcul

- Cas général

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

26

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- En termes physiques, lorsqu'on applique un signal sinusoïdal à l'entrée d'un SLI, on obtient en sortie un signal sinusoïdal de même fréquence
- Les caractéristiques (amplitude, phase) du signal de sortie peuvent se déterminer à partir de la transmittance isochrone

27

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

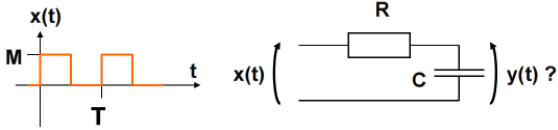
---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres

- Qu'en est-il avec un signal d'entrée non sinusoïdal ?



28

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres

- $x(t)$  est périodique  $\Rightarrow$  il admet une décomposition en série de Fourier (ne comportant que des harmoniques impairs)

$$x(t) = \frac{M}{2} + \sum_0^{\infty} \frac{2M}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t)$$

- On peut utiliser le principe de superposition

29

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

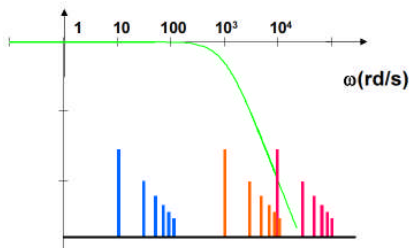
---

---

---

**I. Généralités, définitions**  
Filtres

- 3 cas différents



30

T. BRU

14/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

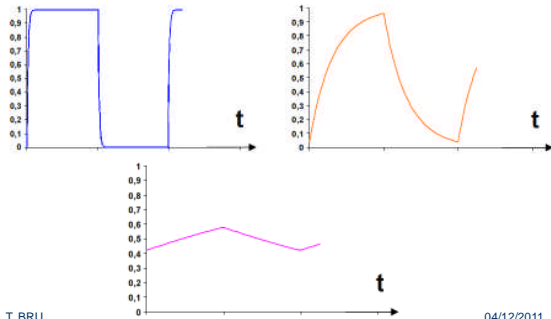
---

---

---

## I. Généralités, définitions

### Filtres



31

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert

- La transmittance isochrone s'obtient en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans l'expression de la transmittance isomorphe (cas des systèmes analogiques)
- La transmittance isochrone s'obtient en remplaçant  $z$  par  $e^{j\omega T}$  dans l'expression de la transmittance isomorphe (cas des systèmes à temps discret,  $T$  représentant la période d'échantillonnage)

32

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert

- En utilisant la relation  $2 \cos \omega t = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}$  et en tenant compte de  $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ ,

$$u(t) = \cos \omega t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} [H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}] = \Re \{ H(j\omega)e^{j\omega t} \}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$u(t) = \cos \omega t \Rightarrow y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

33

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- Lorsqu'un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  passe au travers d'un système LTI, son amplitude est multipliée par le module  $|H(j\omega)|$  de la transmittance et sa phase est décalée (augmentée) d'un angle  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ .

34

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- On peut aussi dire que  $|H(j\omega)|$  représente le rapport entre les amplitudes des signaux de sortie et d'entrée et  $\text{Arg}[H(j\omega)]$  le déphasage  $\varphi_{y/u}$  entre la sortie  $y$  et l'entrée  $u$ .

35

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert

- Le module  $|H(j\omega)|$  de la transmittance à la pulsation  $\omega$  est souvent appelé (abusivement) "gain" du système.
- Le nombre  $20 \log[|H(j\omega)|]$  est appelé le "gain en décibels (dB)" du système à la pulsation  $\omega$  (ou à la fréquence  $f$ ). Le graphe de  $20 \log[|H(j\omega)|]$  en fonction de  $\omega$  est appelé la réponse en amplitude du système.

36

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert, diagramme de Bode

- L'angle  $\text{Arg}[H(j\omega)]$  est appelé la **phase du système à la pulsation  $\omega$** . Le graphe de  $\text{Arg}[H(j\omega)]$  en fonction de  $\omega$  est appelé la **réponse en phase** du système.
- L'ensemble de ces deux graphes représente la **réponse fréquentielle du système**. On l'appelle **diagramme de Bode** du système.

37

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

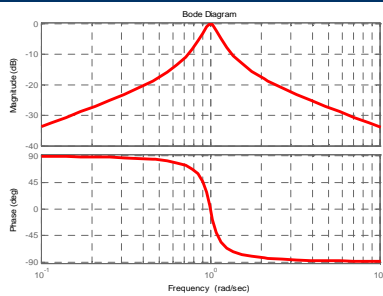
---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert, diagramme de Bode



38

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires Fonction de transfert, diagramme de Bode

- La phase d'un système est également une caractéristique très importante. Qualitativement, **une variation de phase est associée à un décalage (avance ou retard) temporel du signal**.
- Un système retard pur  $y(t) = u(t - t_0)$  a comme fonction de transfert  $H(p) = \exp(-pt_0)$ , ce qui implique un gain unité et une phase linéaire :

39

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### Fonction de transfert, diagramme de Bode

$$|H(j\omega)|=1 \quad \angle H(j\omega)=-\omega t_0$$

- La pente de la courbe de phase correspond donc au retard appliqué au signal temporel
- Pour un système plus général, la courbe de phase est une fonction non linéaire de la fréquence. Cet effet de retard (ou d'avance) différent sur chaque fréquence peut causer une distorsion importante du signal temporel.

40

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

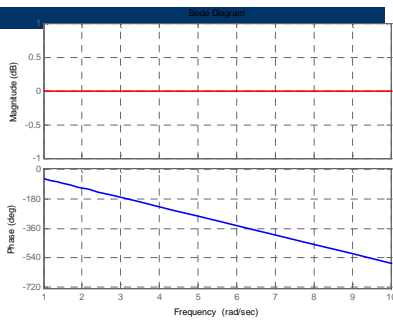
---

---

---

## II. Modélisation des filtres linéaires

### diagramme de Bode d'un retard pur



41

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## III. Tracé des diagrammes de Bode

- Hendrick W. **Bode** (1905-1982), mathématicien et physicien américain. Bode entra dès 1929 aux Bell Labs, où il travailla avec **Fry** et **Nyquist** sur la théorie des circuits et des systèmes.
- Il apporta plusieurs contributions fondamentales à l'étude de la stabilité, notamment pour les amplificateurs à contre-réaction.
- Il participa également à de nombreux comités d'études (entre autre, pour la création de la NASA en 1958). Entre 1952 et 1967, il fut directeur de la recherche en mathématiques aux Bell Labs. Il termina sa carrière comme professeur de Théorie des Circuits à Harvard.

42

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode

- Hendrick W. **Bode** (1905-1982), mathématicien et physicien américain. Bode entra dès 1929 aux Bell Labs, où il travailla avec **Fry** et **Nyquist** sur la théorie des circuits et des systèmes.
- Il apporta plusieurs contributions fondamentales à l'étude de la stabilité, notamment pour les amplificateurs à contre-réaction.

43

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode

- Il a mis au point une méthode simplifiée pour l'obtention des tracés de réponse en fréquence des SLI. Il s'agit des tracés du module ou amplitude (en décibels) et de la phase en fonction du logarithme de la pulsation ou de la fréquence.

44

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Principe

- Le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert d'un SLI ne comportant pas de retard pur peuvent se factoriser sous la forme de termes du 1er et du 2ème ordre :

$$\prod_i (p - p_i)^{\alpha_i} \prod_j (p^2 + 2m\omega_{0j}p + \omega_{0j}^2)^{\beta_j}$$

45

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Principe

- Il devient donc possible de **décomposer n'importe quelle fonction de transfert** sous la forme :

$$H(p) = \frac{\prod_k N_k(p)}{\prod_l D_l(p)} = \prod_k N_k(p) \cdot \prod_l \frac{1}{D_l(p)}$$

- où les  $N_k$  et les  $D_l$  sont des termes élémentaires de la forme  $(p - p_j)$  ou  $(p^2 + 2 m \omega_0 p + \omega_0^2)$ .

46

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Principe

- On a :

$$\begin{cases} \angle H(j\omega) = \sum_k \angle N_k(j\omega) - \sum_l \angle D_l(j\omega) \\ 20 \log [|H(j\omega)|] = \sum_k 20 \log [|N_k(j\omega)|] - \sum_l 20 \log [|D_l(j\omega)|] \end{cases}$$

- Avec de telles relations additives, il devient **aisé de construire graphiquement la réponse fréquentielle d'un système ou d'une cascade de systèmes à partir de leurs réponses fréquentielles individuelles**

47

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Principe

- Pour les systèmes continus, on utilise aussi une échelle logarithmique pour les fréquences.

$$\begin{cases} \text{Phase } \varphi = \angle H(j\omega) = \angle H(2j\pi\nu) \\ \text{Gain en décibels } G_{dB} = 20 \log [|H(j\omega)|] = 20 \log [|H(2j\pi\nu)|] \end{cases}$$

48

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### III. Tracé des diagrammes des Bode Principe

- Règles pour le tracé des diagrammes de Bode des systèmes à minimum de phase d'ordre quelconque
  - Lorsqu'on trace le diagramme asymptotique du gain de gauche à droite, le passage au droit du module d'un zéro correspond à une pente asymptotique de gain qui augmente de 20 dB/décade; le passage au droit du module d'un pôle correspond à une pente asymptotique qui diminue de 20 dB/décade.

49

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Principe

- Règles pour le tracé des diagrammes de Bode des systèmes à minimum de phase d'ordre quelconque
  - Lorsqu'on trace le diagramme asymptotique de la phase de gauche à droite, le passage au droit du module d'un zéro réel à gauche (resp. à droite) de l'axe imaginaire correspond à un saut asymptotique de phase égal à  $\pi/2$  vers le haut (resp. vers le bas). Le passage au droit du module d'un pôle réel à gauche (resp. à droite) de l'axe imaginaire correspond à un saut asymptotique de phase égal à  $\pi/2$  vers le bas (resp. vers le haut).

50

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur analogique $y = du/dt$

- Sa fonction de transfert est  $H(p) = 1/\tau_i p$  et donc :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_i} = \frac{1}{\omega\tau_i} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega\tau_i} \quad \angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

51

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur analogique $y = du/dt$

- En réponse à un signal d'entrée  $u(t) = \cos \omega t$

$$y(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \cos(\omega \tau) d\tau = \frac{1}{\omega \tau_i} [\sin \omega \tau]_0^t$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega \tau_i} \sin \omega t = \frac{1}{\omega \tau_i} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

52

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

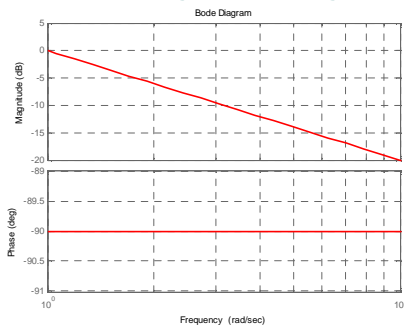
---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur analogique



53

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- Si on considère maintenant un temps discret  $t = k \cdot T_e$ , le modèle approché, par la méthode des rectangles inférieurs, de l'intégrateur idéal est donné par l'équation :

$$y[kT_e] = y[(k-1)T_e] + \frac{T_e}{\tau_i} u[(k-1)T_e]$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{T_e}{\tau_i} u_{k-1}$$

54

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- En prenant la TZ de l'équation aux différences et en utilisant la propriété  $TZ(y_{k-1}) = z^{-1} y_k$ , on obtient la fonction de transfert du système discret

$$H(z) = \frac{T_e}{\tau_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T_e/\tau_i}{z-1}$$

55

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- En régime harmonique, en prenant  $\tau_i = 1$  :

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_e}{e^{j\omega T_e} - 1} = \frac{T_e}{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}} = \frac{T_e e^{j\frac{\omega T_e}{2}}}{2j} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}}$$

$$G(\omega) = |H(e^{j\omega T_e})| = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2}$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T_e}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_e T_e}{2}$$

56

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

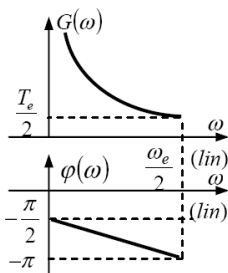
---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret



57

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes de Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- Comparaison entre les caractéristiques de l'intégrateur analogique : l'intégrateur numérique produit des erreurs
- Pour les faibles valeurs de la fréquence, on peut écrire :

$$G(\omega) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \cong \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\omega T_e}{2}} = \frac{1}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2} \cong -\frac{\pi}{2}$$

58

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- Propriétés proches de celles de l'intégrateur idéal (à préciser).
- Intégration par la méthode des trapèzes

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T_e}{2} [u(k) + u(k-1)]$$

59

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret

- Fonction de transfert

$$H(z) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1+e^{-j\omega T_e}}{1-e^{-j\omega T_e}} = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}} = \frac{T_e}{2j} \cdot \frac{\cos \frac{\omega T_e}{2}}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} = \frac{T_e}{2j} \operatorname{ctg} \frac{\omega T_e}{2}$$

60

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

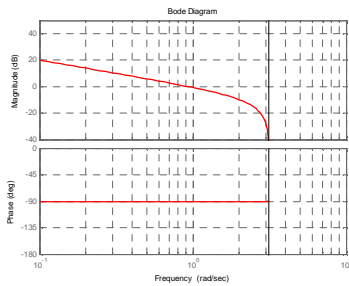
---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret



61

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Tracé des diagrammes des Bode Exemple : intégrateur à temps discret

$$G(\omega) = \frac{T_e}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T_e}{2}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

- Comparez à l'intégrateur précédent

62

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Rappel : la fonction de transfert d'un filtre est la transformée de sa réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion de Dirac)
- En pratique, on utilise plutôt la réponse indicielle (réponse à un échelon)

63

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Dans cas d'un système analogique du 1<sup>er</sup> ordre de type passe-bas

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = u(t) \quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$y_h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) h(t) \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

64

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

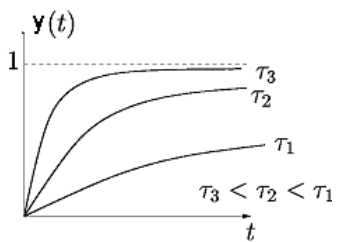
---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles



65

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Fréquence de coupure à  $-3$  dB :  $1 / 2\pi \tau$
- Temps de montée de 10 à 90 % de la réponse indicielle :  $t_m = 2.2 \tau$

$$t_m \cdot f_{c-3dB} = 0,35$$

66

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

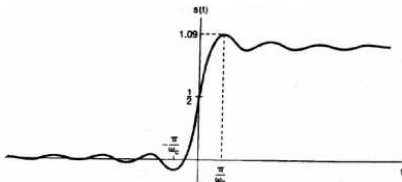
---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Réponse indicielle du filtre passe-bas idéal,

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$




---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Le temps de montée est inversement proportionnel à la fréquence de coupure
- Les effets indésirables observés (dépassement, oscillations, caractère non causal) sont dus à des spécifications trop "dures" dans le domaine fréquentiel
- En pratique, on réalise donc un **compromis entre les spécifications fréquentielles et les spécifications temporelles, en sachant que le durcissement des unes implique le relâchement des autres.**

68

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- En pratique, les courbes de gain et de phase d'un filtre passe-bas peuvent être optimisées pour **satisfaire un des 3 critères suivants** :
  - Une **courbe de gain aussi plate que possible** dans la bande passante (Butterworth ou maximally flat)
  - Une **transition de la bande passante à la bande d'arrêt aussi brutale que possible** (Tschébycheff)
  - Une **réponse en phase aussi linéaire que possible** (Bessel)

69

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

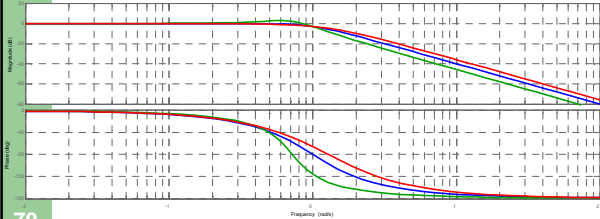
---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre, diagramme de Bode (Bessel, Tschebycheff, Butterworth)



70

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

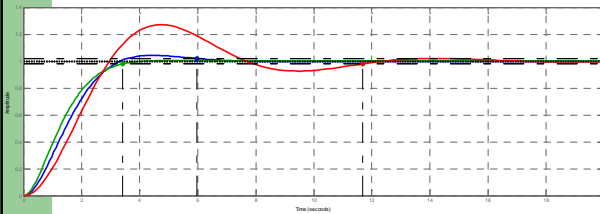
---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre, réponses indicielles (Bessel, Tschebycheff, Butterworth)



71

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Liens entre propriétés fréquentielles et propriétés temporelles

- Coefficients des filtres du 2<sup>ème</sup> ordre de Bessel, Butterworth, et Tschebyscheff :

$$A_1(s) = \frac{A_0}{(1 + a_1s + b_1s^2)}$$

| SECOND-ORDER | BESSEL | BUTTERWORTH | 3-dB TSCHEBYSCHIEFF |
|--------------|--------|-------------|---------------------|
| $a_1$        | 1.3617 | 1.4142      | 1.065               |
| $b_1$        | 0.618  | 1           | 1.9305              |
| Q            | 0.58   | 0.71        | 1.3                 |
| $R_2/R_3$    | 0.268  | 0.568       | 0.234               |

72

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

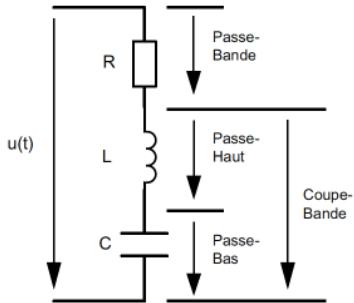
---

---

---



#### IV. Filtrés analogiques du second ordre



73

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du second ordre

- Passe-bas :

$$T(p) = T_0 \frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Passe-haut

$$T(p) = T_0 \frac{(p/\omega_0)^2}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

74

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du second ordre

- Passe-bande :

$$T(p) = T_0 \frac{2m \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Réjecteur

$$T(p) = T_0 \frac{1 + (p/\omega_0)^2}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

75

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du second ordre

- $T_0$  : transmittance statique (pour le passe-bas)
- $\omega_0$  : pulsation propre
- $m$  : coefficient d'amortissement
- 3 cas sont à considérer suivant la valeur du coefficient d'amortissement

76

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nf</sup> ordre, $m > 1$

- $m > 1$  : la transmittance a deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$

- Elle peut se factoriser sous la forme

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)}$$

- La réponse indicielle est de la forme

$$s_h(t) = 1 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

77

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, $m > 1$

- Le diagramme de Bode comporte deux cassures et deux asymptotes obliques
- Ce cas n'est pas très intéressant car correspondant à des temps de réponse assez longs

78

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, m = 1

- m = 1 : la transmittance a un pôle double réel  $p_0$ 
  - Elle peut se factoriser sous la forme

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)^2}$$

- La réponse indicielle est de la forme

$$s_h(t) = 1 - e^{p_0 t} (1 + p_0 t)$$

79

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, m = 1

- Le diagramme de Bode comporte une cassure double
- Ce cas, appelé régime critique, est aussi souvent jugé trop lent

80

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, m < 1

- Si  $m < 1$ , la transmittance a deux pôles complexes conjugués  $p_1$  et  $p_2$

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

- La transmittance ne peut pas se factoriser
- La réponse à un échelon est de la forme

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi) = m$$

81

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, $m < 1$

- Le diagramme de Bode asymptotique présente une cassure double
- C'est le cas le plus intéressant en pratique

82

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

| m       | caractéristiques  | allure |
|---------|---|--------|
| $m > 1$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>- pas de dépassement <math>D = 0</math></li> <li>- système très lent si <math>m</math> est élevé</li> <li>- si <math>m &gt; 1</math> alors <math>t_{r,5\%} = \frac{3mT_0}{\pi}</math></li> </ul>   |        |
| $m = 1$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>- pas de dépassement <math>D = 0</math></li> <li>- <math>t_{r,5\%} = 0,75T_0</math></li> </ul>   |        |
| $m < 1$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>- deux valeurs de <math>m</math> utiles : 0,7 et 0,43</li> <li>- si <math>m = 0,7</math> on a <math>D = 4\%</math> le temps de réponse est minimal <math>t_{r,5\%} = 0,45T_0</math></li> <li>- si <math>m = 0,43</math> on a <math>D = 20\%</math> le temps de réponse vaut <math>t_{r,5\%} = 0,85T_0</math></li> <li>- la pseudo-période de l'oscillation vaut : <math>T_p = \frac{T_0}{\sqrt{1-m^2}}</math></li> </ul> |        |

83

04/12/2011

---

---

---

---

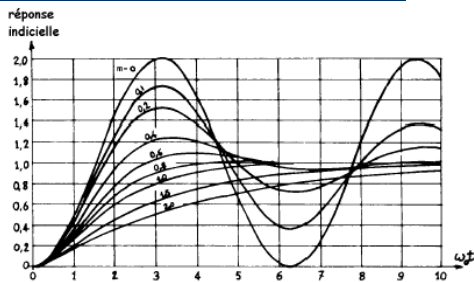
---

---

---

---

#### IV. Filtres analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre



84

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

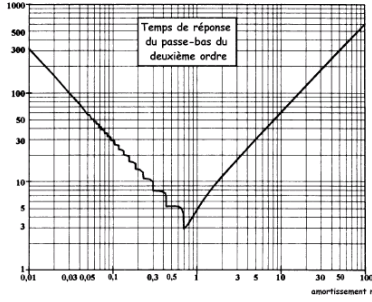
---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre

temps de réponse réduit  $\tau_r \omega_0$



85

T. BRU

amortissement m 34/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

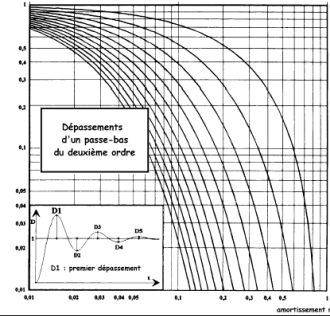
---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre

dépassement



86

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, étude fréquentielle

| m       | caractéristiques   | allure  |
|---------|--|---|
| $m > 1$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>- la transmittance a deux pôles réels</li> <li>- elle peut donc se factoriser</li> <li>- les racines sont :<br/> <math>\omega_1 = \omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1})</math> et<br/> <math>\omega_2 = \omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1})</math> avec<br/> <math>\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2</math></li> </ul> $T(j\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$ | <p><math>T_{dB} = 20 \log( L )</math></p> <p><math>\varphi = \arg(L)</math></p> |

87

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

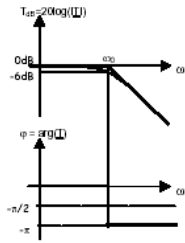
---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, étude fréquentielle

- la transmittance a un pôle double
  - elle peut donc se factoriser
- $$T(j\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$
- à la cassure, le module vaut -6dB

$m = 1$



88

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

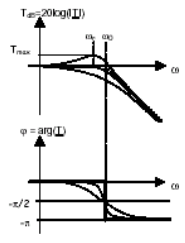
---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, étude fréquentielle

- la transmittance a deux pôles complexes conjugués
- elle ne peut pas se factoriser
- à la cassure, le module vaut  $T=1/2m$
- si  $m < 0,707$  le module passe par un maximum
- le maximum est à :  $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$
- et vaut :  $T_{max} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$
- à chaque valeur de  $m$  est liée une courbe de gain et phase particulière

$m < 1$



89

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Filtrés analogiques du 2<sup>nd</sup> ordre, étude fréquentielle

- Pour  $m = \sqrt{2} / 2 \approx 0.707$ , on obtient la courbe de réponse en gain la plus proche des asymptotes (sans jamais passer au dessus)
- La fréquence de coupure à -3 dB est alors égale à la fréquence propre
- Le filtre est alors dit de Butterworth ou « maximally flat »

90

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtres actifs analogiques

- En **haute fréquence** (> 1MHz), les **filtres** sont généralement **passifs** (R L C)
- **C'est également le cas** quand ces filtres doivent laisser passer une **puissance importante** (filtres intégrés dans les enceintes acoustiques)
- Cependant, dans la **bande des fréquences basses à moyennes** (1 Hz à 1 MHz), les valeurs des inductances nécessaires à leur réalisation deviennent élevées, ainsi que leur encombrement et leur coût ; on utilise alors des **filtres actifs**

91

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtres actifs analogiques

- **Inconvénients des filtres actifs**
  - Usage limité aux basses fréquences (jusqu'à quelques dizaines de MHz)
  - Limitent la valeur des tensions traitées
  - Ajoutent du bruit et de l'offset
  - Peuvent être instables

92

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

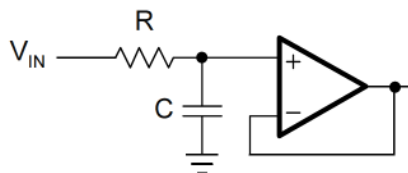
---

---

---

---

## V. Filtres actifs analogiques Passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre



93

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

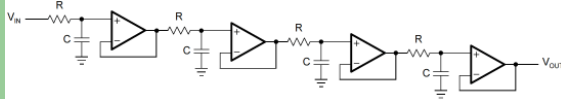
---

---

## V. Filtrés actifs analogiques

### Association de filtres passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

- La fonction de transfert est égale au produit des 4 fonctions de transfert élémentaires



- La fréquence de coupure à - 3dB est divisée par un facteur 2.3
- Structure généralement pas intéressante

94

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtrés actifs analogiques

### Structure de Sallen-Key

- Utilise un amplificateur suiveur et une réaction positive
- Permet de réaliser des filtres à gain fixe de type passe-bas, passe-haut et passe-bande
- Permet de réaliser tous les filtres polynomiaux (Butterworth, Tschebyscheff, Bessel)

95

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

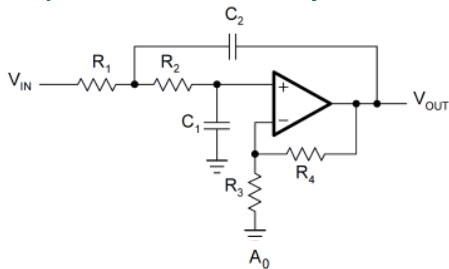
---

---

---

## V. Filtrés actifs analogiques

### Cellule passe-bas de Sallen-Key



$$A(s) = \frac{A_0}{1 + \omega_c [C_1(R_1 + R_2) + (1 - A_0) R_1 C_2] s + \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

96

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

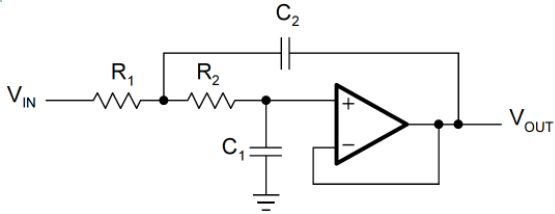
---

---

---



**V. Filtres actifs analogiques**  
**Cellule passe-bas de Sallen-Key à retour unitaire**



$$A(s) = \frac{1}{1 + \omega_c C_1 (R_1 + R_2) s + \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

97

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
**Structure de Sallen-Key**

- Identification avec la forme polynomiale générale

$$a_1 = \omega_c C_1 (R_1 + R_2)$$

$$b_1 = \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2$$

- Si on se donne les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$

$$R_{1,2} = \frac{a_1 C_2 \mp \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4b_1 C_1 C_2}}{4\pi f_c C_1 C_2}$$

98

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

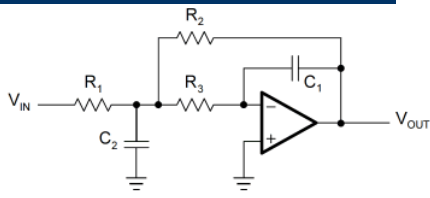
---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
**Structure de Rauch (MBF) passe-bas**



$$A(s) = - \frac{R_2 R_3}{R_1} \frac{1}{1 + \omega_c C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) s + \omega_c^2 C_1 C_2 R_2 R_3 s^2}$$

99

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtrés actifs analogiques Structure de Rauch (MBF)

- Identification avec la forme polynomiale générale

$$a_1 = \omega_c C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right)$$

$$b_1 = \omega_c^2 C_1 C_2 R_2 R_3$$

$$R_2 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4b_1 C_1 C_2 (1 - A_0)}}{4\pi f_c C_1 C_2}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{-A_0}$$

$$R_3 = \frac{b_1}{4\pi^2 f_c^2 C_1 C_2 R_2}$$

10  
0

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtrés actifs analogiques Comparaison Sallen- Key / MBF

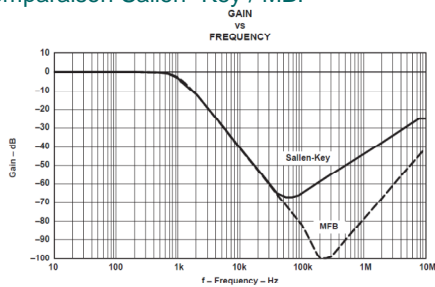


Figure 7. Second-Order Butterworth Filter Frequency Response

10  
1

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

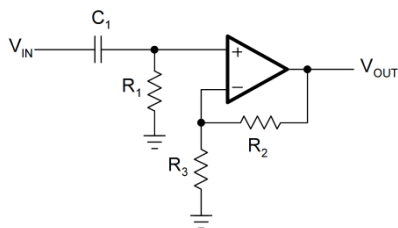
---

---

---

## V. Filtrés actifs analogiques Filtrés passe-haut

- 1<sup>er</sup> ordre



10  
2

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

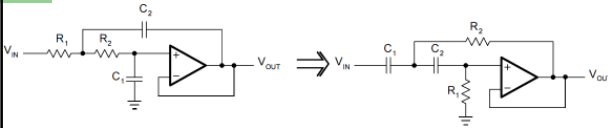
---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Filtres passe-haut ; Sallen-Key

- En remplaçant les résistances par des capacités et les capacités par des résistances dans un filtre passe-bas, on obtient un filtre passe-haut



10  
3

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

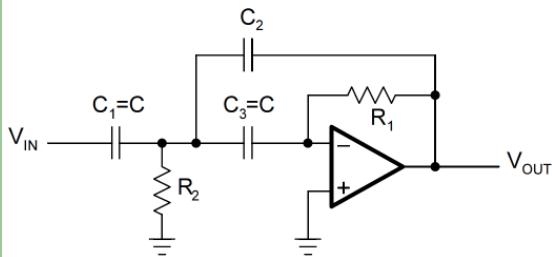
---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Filtres passe-haut ; MBF



10  
4

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Filtres passe-haut ; MBF

$$A(s) = \frac{-\frac{C}{C_2}}{1 + \frac{2C_2 + C}{\omega_c R_1 C_2 C} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{\omega_c^2 R_2 R_1 C_2 C} \cdot \frac{1}{s^2}}$$

10  
5

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

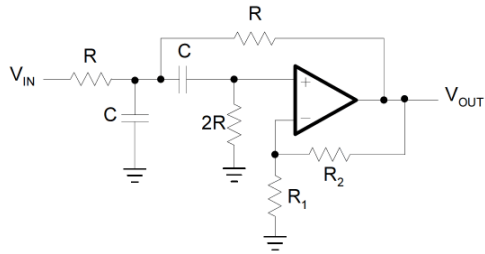
---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Filtres passe-bande ; Sallen-Key



10  
6

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

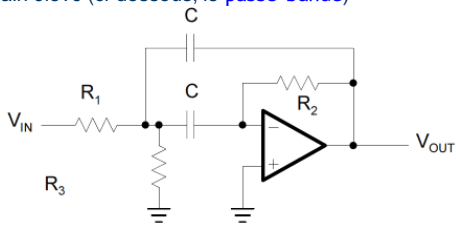
---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Cellule Multiple feedback (ou de Rauch)

- Utilisé pour obtenir un coefficient de qualité et un gain élevé (ci-dessous, le **passe-bande**)



10  
7

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

**V. Filtres actifs analogiques**  
Cellule Multiple feedback (ou de Rauch)

- Fonction de transfert (passe-bande)

$$A(s) = \frac{-\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_m \cdot s}{1 + \frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_m \cdot s + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3} C^2 \cdot \omega_m^2 \cdot s^2}$$

10  
8

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## V. Filtres actifs analogiques

### Cellule Multiple feedback (ou de Rauch)

- Caractéristiques (passe-bande)

$$\text{mid-frequency: } f_m = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}}$$

$$\text{gain at } f_m: \quad -A_m = \frac{R_2}{2R_1}$$

$$\text{filter quality: } Q = \pi f_m R_2 C$$

$$\text{bandwidth: } B = \frac{1}{\pi R_2 C}$$

- $R_3$  peut être utilisée pour faire varier la fréquence d'accord  $f_m$  sans affecter la bande passante ou le gain

10  
9

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

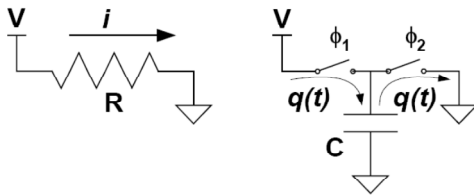
---

---

---

## VI. Filtres à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées



11  
0

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtres à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- Considérons les 2 dispositifs de la diapositive précédente :
  - l'un, de type analogique "classique" (à gauche sur la figure ci-contre) est constitué d'une simple résistance R connectée entre un nœud d'un circuit et sa masse ;
  - l'autre, à droite, de type "capacité commutée" est constitué d'une capacité et de deux interrupteurs commandés de façon périodique et en opposition.

11  
1

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtres à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- Dans le cas du circuit résistif, l'intensité du courant  $i$  qui circule à travers la résistance  $R$  soumise à la différence de potentiel  $V$  est donnée par la loi d'Ohm :  $i = V / R$
- Ce courant est constitué d'un mouvement de charges continu (à l'échelle macroscopique), fonction linéaire du potentiel  $V$ .

11  
2

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtres à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- Le fonctionnement du dispositif à capacité commutée comporte quant à lui 2 phases distinctes :
  - quand l'interrupteur  $\Phi_1$  est fermé et que  $\Phi_2$  est ouvert, la capacité se charge totalement sous la tension  $V$  et la charge stockée  $q$  est donnée par la relation :
  - quand l'interrupteur  $\Phi_1$  s'ouvre et que  $\Phi_2$  se ferme, toute la charge précédemment stockée s'écoule à la masse.

11  
3

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtres à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- Sur un cycle complet de fonctionnement (qui correspond à une séquence des 2 phases précédemment décrites), une quantité de charge  $q$  s'est écoulée depuis le nœud au potentiel  $V$  jusqu'à la masse.
- Si cette séquence est répétée à la fréquence  $f_s$ , la quantité de charge déplacée par unité de temps sera égale à  $q.f_s$  et ces mouvements périodiques vont correspondre à un courant moyen :

$$i = q/t = f_s q = f_s C V$$

11  
4

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtrés à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- Contrairement à ce que l'on avait dans le cas de la résistance, il ne s'agit pas là d'un mouvement continu de charges mais d'un déplacement sous forme de quanta de charge  $q$ . Cela n'est pas un problème (ce n'est pas visible) si les signaux ne sont observés qu'à la fin de chaque cycle.
- L'équation suivante montre qu'une capacité commutée est alors équivalente à une résistance présentant le même rapport (chute de tension) / (courant délivré) :

$$\frac{V}{i} = R = \frac{1}{f_s C}$$

11  
5

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VI. Filtrés à capacités commutées

### Principe des circuits à capacités commutées

- La résistance équivalente est inversement proportionnelle à la capacité et à la fréquence de commutation  $f_s$ .
- Sa valeur peut donc être changée de façon simple en modifiant cette fréquence : augmenter  $f_s$  signifie transférer plus de quanta par unité de temps et donc augmenter le courant et diminuer la résistance équivalente.
- Il est donc ainsi possible de modifier les caractéristiques d'un circuit (et en particulier la fréquence de coupure d'un filtre) sans rien changer du point de vue matériel, en changeant simplement la valeur de la fréquence d'horloge.
- Ceci peut être effectué « automatiquement » par un microcontrôleur

11  
6

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtrés numériques

- Aujourd'hui, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité, de coût, ..., la majorité des signaux traités dans les applications d'ingénierie subissent un traitement numérique équivalent
- Avantages des systèmes de traitement numérique
  - Pas de dérives dues au vieillissement ou aux variations des conditions environnementales

11  
7

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtrés numériques

- Avantages des systèmes de traitement numérique
  - Modifications des caractéristiques du traitement sans changer le hardware
  - Pas de nécessité de « figinage » pour ajuster la valeur des composants
  - Possibilité d'implémenter des fonctions très sophistiquées
  - Systèmes plus compact et plus fiables.

11  
8

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtrés numériques

- Cette technique s'appuie sur plusieurs disciplines dont les principales sont :
  - l'électronique analogique et numérique (conditionnement des signaux, conversions numériques ↔ analogiques),
  - les microprocesseurs (classiques ou dédiés au traitement du signal),
  - l'informatique (algorithmes, systèmes de développements et d'exploitations),
  - les mathématiques du signal (traitement du signal).

11  
9

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

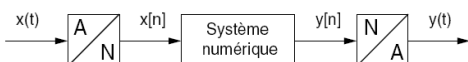
---

---

---

## VII. Filtrés numériques Temps réel et temps différé

- **Temps réel**
  - Un traitement est dit en temps réel s'il est suffisamment rapide pour que la sortie suive le rythme de l'entrée, c.a.d qu'il s'effectue au fur et à mesure des variations du signal d'entrée. Les échantillons du signal d'entrée sont pris au fur et à mesure que le processus fournissant ce signal s'exécute et la valeur traitée est disponible en sortie avant que l'échantillon suivant ne se présente à l'entrée



12  
0

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---



## VII. Filtres numériques Temps réel et temps différé

- Temps différé
  - Le traitement est réalisé "off-line", c.a.d que la donnée à traiter est d'abord stockée, puis qu'elle est traitée ultérieurement.
- Dans les systèmes électroniques embarqués, les traitements doivent en général s'effectuer en temps réel.

12  
1

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- Les filtres numériques peuvent être divisés en 2 grandes catégories :
  - les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF ou FIR), qui n'ont pas d'équivalent analogique ;
  - les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR), qui peuvent être obtenus par transposition de filtres analogiques

12  
2

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

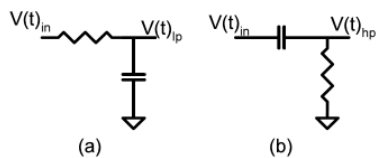
---

---

---

## VII. Filtres numériques

- Filtres passifs analogiques "de base".



12  
3

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- On a de façon évidente :

$$\begin{cases} V_{hp} = V_{in} - V_{lp} & (1) \\ V_{lp} = \frac{V_{hp}}{RCp} & (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{V_{hp}}{V_{in}} = \frac{RCp}{1+RCp} & (3) \\ \frac{V_{lp}}{V_{in}} = \frac{1}{1+RCp} & (4) \end{cases}$$

12  
4

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- L'équation (2) montre que la sortie passe-bas  $v_{lp}$  est la primitive (au facteur multiplicatif  $1/RC$  près) de la sortie passe-haut  $v_{hp}$  ; dans le domaine temporel, cette relation s'écrit :

$$v_{lp}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_{hp}(\tau) d\tau + v_{lp}(0)$$

12  
5

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- Si les signaux sont échantillonnés (pour être convertis en numérique et filtrés), on remplace  $t$  par  $kT_e$  (où  $T_e$  représente la période d'échantillonnage) et en approximant l'intégration analogique par une intégration numérique par la méthode des rectangles inférieurs, on obtient :

$$v_{lp}[kT_e] = v_{lp}[(k-1)T_e] + \frac{T_e}{RC} v_{hp}[(k-1)T_e]$$

12  
6

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- ou encore, pour alléger la notation :

$$v_{lp}[k] = v_{lp}[k-1] + \frac{Te}{RC} v_{hp}[k-1]$$

- En posant  $a = RC / T_e$ , cette équation peut s'écrire :

$$v_{lp}[k] = v_{lp}[k-1] + \frac{1}{a} v_{hp}[k-1]$$

12  
7

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- L'équation (1) devient quant à elle :

$$v_{hp}[k] = v_{in}[k] - v_{lp}[k]$$

- L'algorithme permettant de calculer simultanément la sortie passe-bas et la sortie passe-haut comprendra les étapes suivantes :
  - lire la nouvelle valeur de l'entrée (par exemple sur un CAN), soit  $v_{in}[k]$

12  
8

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- calculer la nouvelle valeur  $v_{lp}[k]$  de la sortie passe-bas à partir des **valeurs précédentes**  $v_{lp}[k-1]$  et  $v_{hp}[k-1]$  des sorties passe-bas et passe-haut (cela nécessite de diviser préalablement  $v_{hp}[k-1]$  par  $a$ , ce qui peut se ramener à des décalages à droite si  $a$  est une puissance de 2)
- calculer la nouvelle valeur  $v_{hp}[k]$  de la sortie haut en soustrayant la valeur précédemment calculée  $v_{lp}[k]$  à  $v_{in}[k]$
- écrire dans un CNA et stocker les valeurs de  $v_{lp}[k]$  et  $v_{hp}[k]$  qui deviendront  $v_{lp}[k-1]$  et  $v_{hp}[k-1]$

12  
9

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- Il aura fallu préalablement déterminer la valeur du coefficient  $a$  en fonction de la fréquence de coupure désirée. Sachant que la fréquence de coupure du filtre analogique que l'on a transposé est  $f_0 = 1/2\pi RC$ , on a :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{f_e}{2\pi a} \Rightarrow a = \frac{1}{2\pi} \frac{f_e}{f_0}$$

- La fréquence d'échantillonnage étant fixée, on peut calculer la valeur à donner au coefficient  $a$  pour obtenir la fréquence de coupure  $f_0$  désirée.

13  
0

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## VII. Filtres numériques

- En prenant la TZ des équations aux différences et en les combinant, on obtient les fonctions de transfert du système

$$\begin{cases} \frac{V_p}{V_{in}} = \frac{1}{1+a(z-1)} \\ \frac{V_{hp}}{V_{in}} = \frac{a(z-1)}{1+a(z-1)} \end{cases}$$

13  
1

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

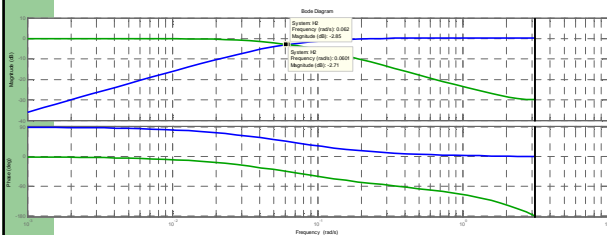
---

---

---

---

## VII. Filtres numériques



13  
2

T. BRU

04/12/2011

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---