Cours d'électronique analogique 2016-2017

Audioprothèse 1er Année

Enseignant : Christophe Adessi
email : christophe.adessi@univ-lyon1.fr

http://ilm-perso.univ-lyon1.fr/∼cadessi/audioprothese.html

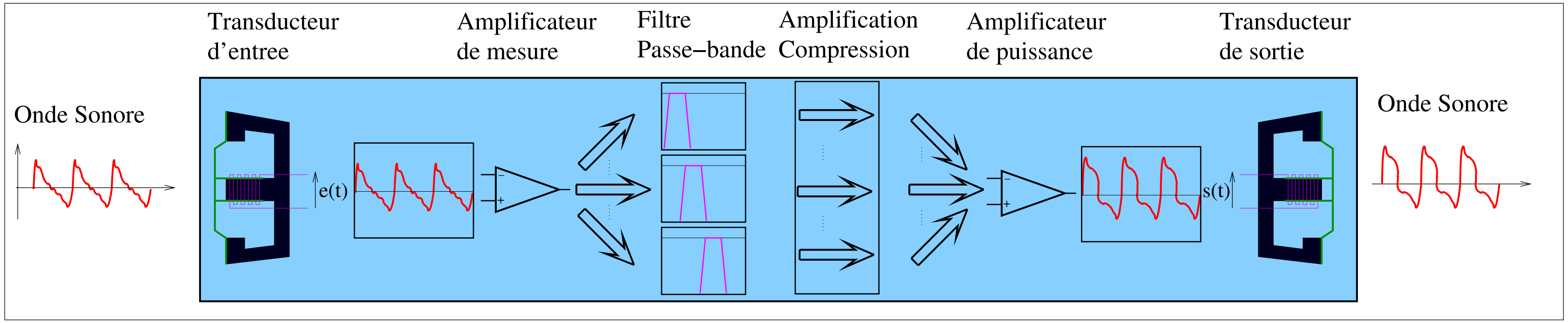
Sommaire

I Signaux et systèmes linéaires

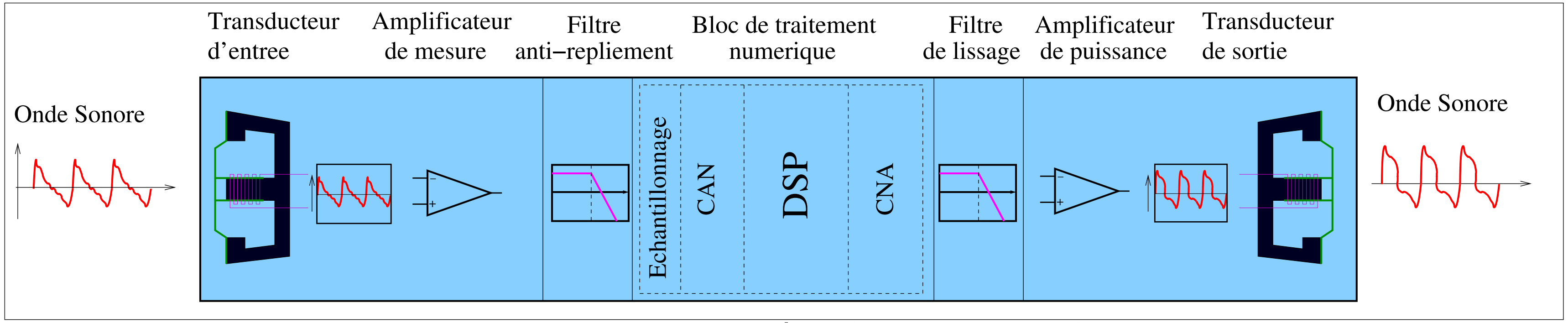
I.A *Introduction*

Chaine de traitement du signal en correction auditive :

Analogique



Numerique



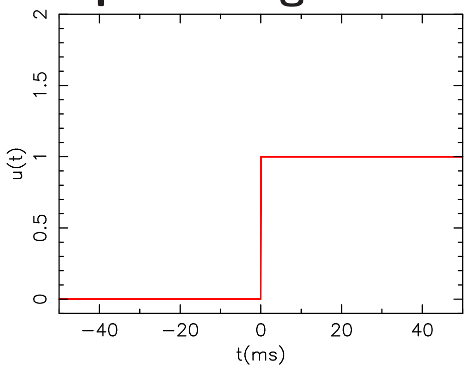
- Dans la chaîne analogique, les deux principales fonctions sont le filtrage et l'amplification.
- Dans la chaîne numérique, il est fondamental de disposer de filtre passe-bas en entrée (anti-repliement) et en sortie (lissage).
- Les transducteurs convertissent les signaux acoustiques (pressions) en signaux électriques.
- A la sortie du transducteur d'entrée, il est nécessaire de pré-amplifier le signal.
- De même le signal à la sortie est amplifié par un étage de puissance.

I Signaux et systèmes linéaires

Notion de signal :

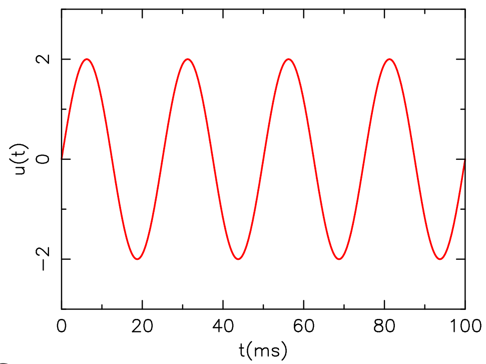
- Un signal est une grandeur physique mesurable (tension, courant, pression ...) dépendant d'autres grandeurs mesurables (position, temps, ...).
- Nous nous intéresserons ici uniquement aux signaux électriques dépendants du temps : $i(t)$, $u(t)$.
- Ces signaux peuvent être ou non modélisés par une fonction mathématique.

Exemple de Signal :



Echelon unité (ou de *Heaviside*) :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \forall t < 0 \\ u(t) = 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

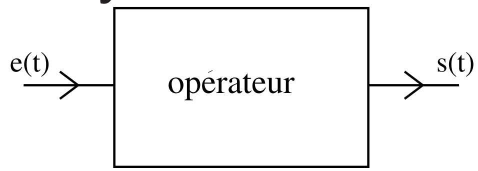


Signal sinusoïdal :

$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$

ω fréquence angulaire (rad/s) et ϕ déphasage (rad).

Notion de système :



- Un système physique est décrit par un opérateur qui, à un signal d'entrée $e(t)$, associe un signal de sortie $s(t)$.
- système linéaire :

  Soit, $e_1 \Rightarrow s_1$ et $e_2 \Rightarrow s_2$.

  Le système est linéaire si :

  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Rightarrow \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$
- Lorsque la relation entre $e(t)$ et $s(t)$ est une équa. diff. linéaire, le système est linéaire.
- système invariant dans le temps :

$$\begin{array}{lr} \text{Si} & e(t) \Rightarrow s(t) \\ \text{alors } \forall \tau & e(t+\tau) \Rightarrow s(t+\tau) \end{array}$$

- On parle de S.L.I.T. (système linéaire et invariant dans le temps).

I Signaux et systèmes linéaires

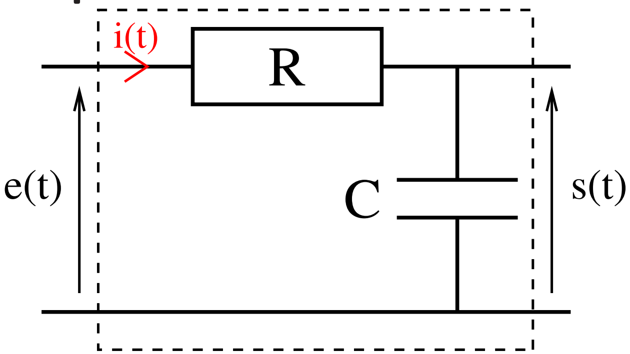
On appelle signal isomorphe tout signal ayant la même forme à l'entrée et à la sortie d'un SLIT. Les signaux sinusoïdaux sont isomorphres.

Si la réponse d'un système à un signal sinusoïdal n'est pas sinusoïdal de même pulsation alors le système n'est pas linéaire.

Pour un SLIT, les signaux d'entrée et de sortie sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficient constant :

$$\boxed{A_0.s(t) + A_1.\frac{ds}{dt} + \ldots + A_n.\frac{d^n s}{dt^n} = B_0.e(t) + B_1.\frac{de}{dt} + \ldots + B_m.\frac{d^m e}{dt^m}}$$

Exemple :

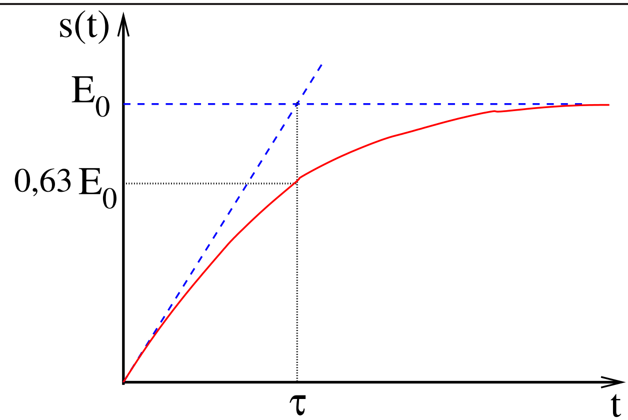


$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{ds(t)}{dt} \\ e(t) &= Ri(t) + s(t) \\ e(t) &= RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) \end{aligned}$$

Solution pour un échelon de tension :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \forall t < 0 \\ e(t) = E_0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{s(t) = E_0.\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC}$$



On définit le temps de réponse t_r d'un système à ϵ, le temps au bout duquel l'écart relatif de la sortie est inférieur à ϵ : $\frac{|E_0 - s(t)|}{E_0} \leq \epsilon \ \forall t \geq t_r$

Application: Quel est le temps de réponse à 5%?

$I.B$ *Fonction de transfert*

Solution pour une tension sinusoïdale :
On utilise la notation complexe :
$\overline{u}(t) = U_0 e^{j(\omega t+\phi)}$ (avec $j^2 = -1$).
on a ainsi : $\frac{d^n\overline{u}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n\overline{u}(t)$. Par commodité on notera également $p = j\omega$.

$$\begin{aligned}\overline{e}(t) &= RC\frac{d\overline{s}(t)}{dt} + \overline{s}(t)\\ &\Updownarrow\\ \overline{e}(t) &= (j\omega RC + 1)\overline{s}(t)\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\frac{\overline{s}(t)}{\overline{e}(t)} = \frac{1}{j\omega RC+1}$

La fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$ se définit comme le rapport de la tension de sortie par la tension d'entrée :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\overline{s}(t)}{\overline{e}(t)}}$$

Rq : Cette grandeur peut être généralisée à un signal périodique (ou non) quelconque tant que l'on a un SLIT. Ceci se déduit directement de l'écriture en série de Fourier (ou de la transformée de Fourier pour les signaux non périodiques).

Généralisation :

$$\begin{aligned}A_0.\overline{s}(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k.\frac{d^k\overline{s}(t)}{dt^k} &= B_0.\overline{e}(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k.\frac{d^k\overline{e}(t)}{dt^k}\\ A_0.\overline{s}(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k.p^k.\overline{s}(t) &= B_0.\overline{e}(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k.p^k.\overline{e}(t) \quad \text{avec } p = j\omega\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{H(p) = \frac{\sum_{k=0}^{m} B_k.p^k}{\sum_{k=0}^{n} A_k.p^k}}$$

Application: Soit la fonction de transfert : $H(p) = \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$. *En déduire l'équation différentielle du système.*

I Signaux et systèmes linéaires

- La fonction de transfert est une **grandeur complexe** *i.e.* caractérisée par une amplitude et une phase : $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi}$.
- La représentation dans le plan de Bode se définit par les deux diagrammes suivants :
  - La courbe de Gain, qui correspond à l'amplitude de H exprimée en déciBel :

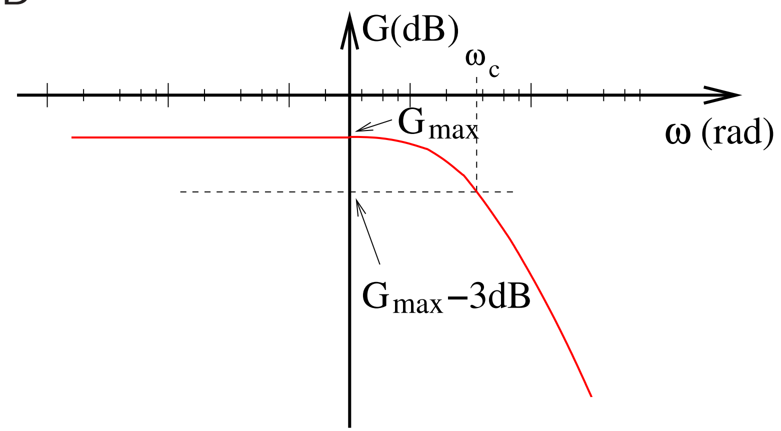
$$\boxed{G(\omega) = 20\log|H(j\omega)|}$$

  - La courbe de phase $\phi(\omega)$ en radian :

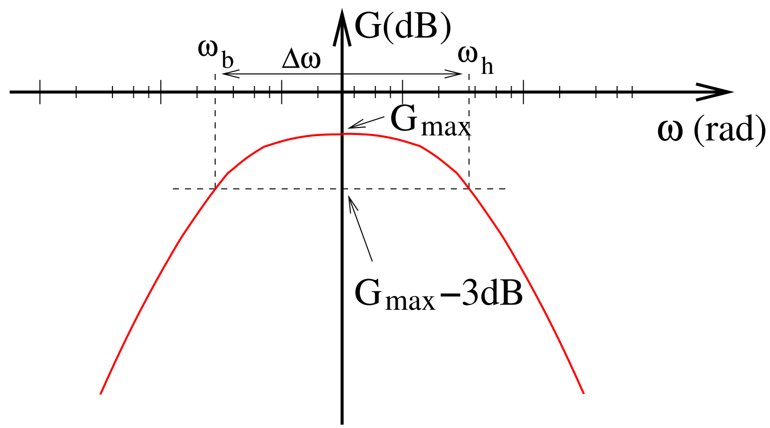
$$\boxed{\phi = arg\,[H(j\omega)] = \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m[H(j\omega)]}{\mathcal{R}e[H(j\omega)]}\right)}$$

Le gain d'un système physique réel possède toujours une borne supérieure H_{max} on définit ainsi les fréquences caractéristiques suivantes :

Pour un filtre passe bas (ou haut) on définit la **fréquence de coupure :** $|H(j\omega_c)| = \frac{H_{\mathsf{max}}}{\sqrt{2}}$
Cela correspond en Gain : $G(\omega_c) = G_{\mathsf{max}} - 3\,\text{dB}$



Pour un filtre passe-bande (*i.e.* $\lim_{\omega\to\pm\infty}|H(\omega)| = 0$), on définit l'intervalle $\Delta\omega$ tel que $|H(j\omega)| > \frac{H_{\mathsf{max}}}{\sqrt{2}}$, comme la **Bande passante à 3 dB.**



I.C Cas d'un système non linéaire

Rappel série de Fourier :
Toute fonction réelle périodique de fréquence f peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

avec $\omega = 2\pi f$ et :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$
$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega t)dt$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)dt$$

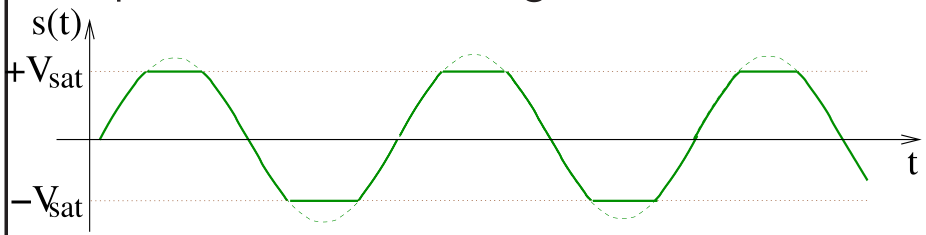
autre écriture :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

avec $\left\{\begin{array}{rcl} c_0 & = & a_0 \text{ et } \phi_0 = 0 \\ c_n & = & \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ cos(\phi_n) & = & \frac{a_n}{c_n} \\ sin(\phi_n) & = & \frac{-b_n}{c_n} \end{array}\right.$

On considère le cas d'un système qui pour un signal d'entrée sinusoïdale fournit un signal de sortie non sinusoïdale mais de même fréquence.

Exemple : Saturation du signal de sortie



Le signal de sortie tronqué a la même fréquence que le signal d'entrée. Il peut s'écrire comme une série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

On parlera dans ce cas de **distorsion harmonique**. La distorsion crée de nouvelles harmoniques. Toute les harmoniques autres que c_1 correspondent à la distorsion.

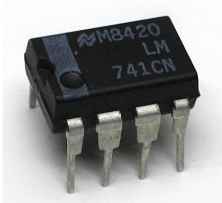
On définit le taux de distorsion harmonique par rapport au fondamental comme :

$$\boxed{D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2}}{c_1}}$$

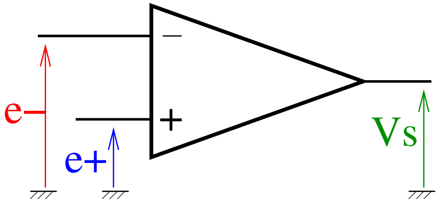
II L'amplificateur opérationnel (AOP)

II.A *Introduction*

- C'est un composant de base de l'électronique. Il permet, entre autres, de réaliser des opérations mathématiques telles que l'addition, la soustraction, l'intégration, la dérivation.
- C'est un amplificateur différentiel, il amplifie une différence de potentiel à son entrée.
- Il est constitué d'un grand nombre de transistors et se présente sous la forme d'un circuit intégré (C.I.).



Représentation :



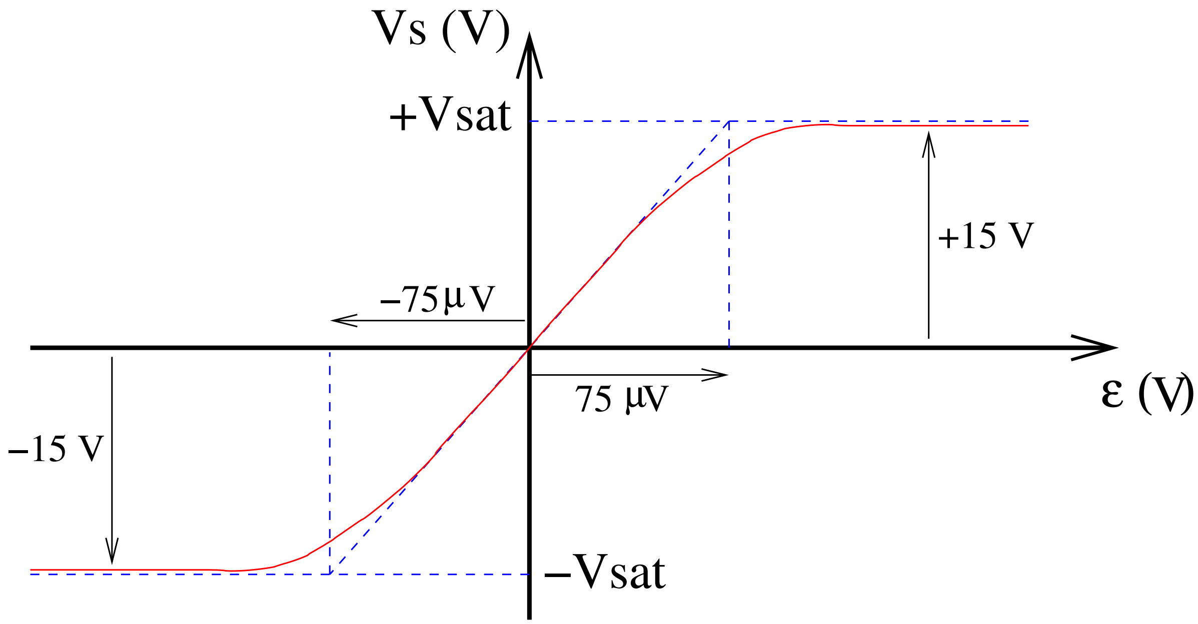
L'AOP est un composant actif. Il possède une alimentation (généralement ± 15 V) non représentée sur le schéma.

- L'AOP possède 2 entrées et une sortie.
- L'entrée e_+ est l'entrée non inverseuse et l'entrée e_- est l'entrée inverseuse.
- La sortie de sortie V_s dépend de la différence $\epsilon = e_+ - e_-$ ($V_s = f(\epsilon)$).

La zone de linéarité de l'AOP est très réduite. Il ne peut donc être utilisé tel quel (en boucle ouverte) dans un montage. Un fonctionnement stable peut se faire en réalisant une boucle de contre-réaction entre la sortie et l'entrée.

II L'amplificateur opérationnel (AOP)

Caractéristique de transfert :



On distingue deux zones de fonctionnement :

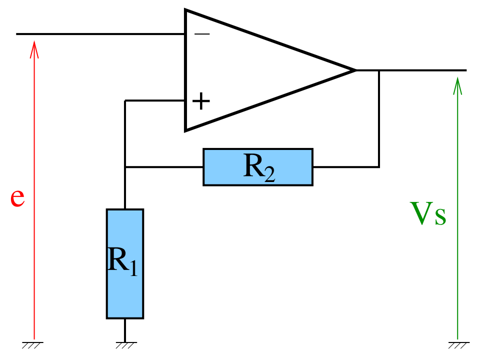
- Zone linéaire pour laquelle $V_s = \mu\epsilon$, où μ représente l'amplification de l'AOP (typiquement $\mu \simeq 2.10^5$).
- Cette zone est très réduite $\simeq 150\,\mu$V et n'est pas exploitable tel quel en fonctionnement en boucle ouverte.
- Les zones de saturation pour lesquelles $V_s \to \pm 15$ V. Ces régions correspondent à la limitation physique de la tension de sortie compte tenu de son alimentation.

Remarque : La caractéristique peut présenter un décalage sur l'axe ϵ (appelé tension de décalage). Cette tension est de l'ordre de qq. mV. En pratique, elle peut être corrigée par une entrée spécifique du C.I.

II.B Contre-réaction

- Un AOP en boucle ouverte est instable. La moindre ddp à son entrée le met en saturation en sortie.
- Pour fonctionner il est nécessaire d'utiliser une boucle dite de réaction reliant la sortie à l'entrée pour stabiliser l'AOP.
- Quelle entrée (inverseuse ou non) utilisée pour réaliser cette réaction?

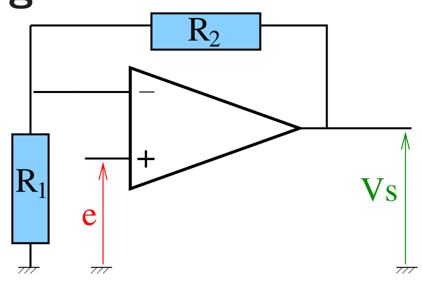
Réaction positive



- La résistance R_2 réalise ici la réaction.
- Supposons que le système est à l'équilibre en régime linéaire.
- Une perturbation fait augmenter V_s.
- Cela induit une augmentation de e_+ et donc de V_s.

Un effet d'avalanche se produit et le système se met en saturation.

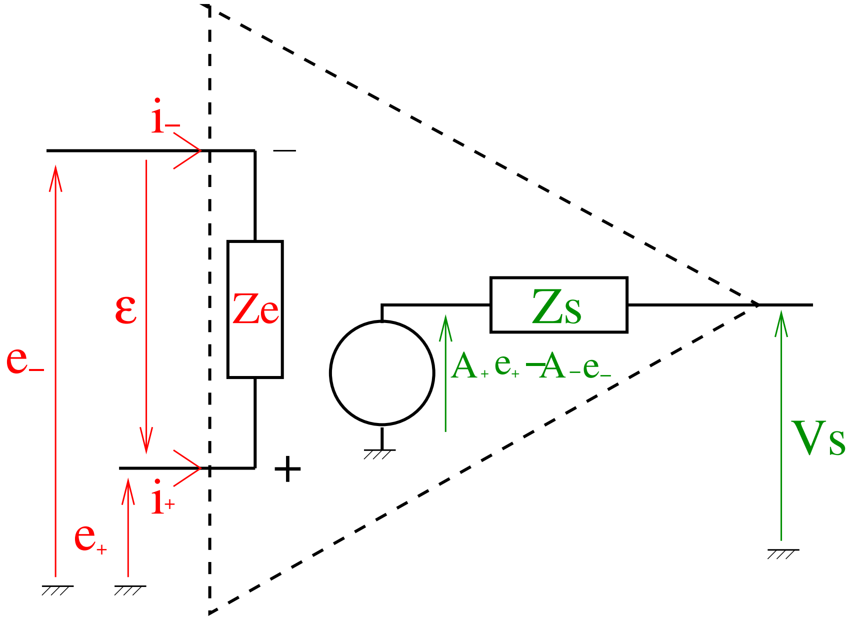
Réaction négative



- De nouveau, on suppose que le système est initialement à l'équilibre.
- Une perturbation fait augmenter V_s et donc e_- par la réaction.
- En régime linéaire $V_s = \mu(e_+ - e_-)$, donc si e_- augmente, V_s va diminuer.

On réalise bien une contre-réaction : Action positive $\Rightarrow$ réaction négative.
Seul la réaction négative permet de stabiliser l'AOP en régime linéaire stable.

II.C Modèle équivalent de l'AOP



Pour un AOP idéal, on considère :

$$\begin{cases} Z_e & \rightarrow & \infty & \Leftrightarrow i_+ = i_- = 0 \\ Z_s & \rightarrow & 0 \end{cases}$$

- Pour un AOP réel, il faut considérer que la sortie dépend des entrées e_+ et e_- indépendament.
- A chaque entrée $+$ et $-$ est associé un gain A_+ et A_-.
- La sortie est équivalente à un générateur de Thévenin de f.e.m. $A_+ \times e_+ - A_- \times e_-$ et d'impédance interne Z_s.
- Les entrées peuvent être décrites comme reliées par une impédance d'entrée Z_e.
- Valeurs typique (TL081) : $Z_e \simeq 10^{12}\,\Omega$, $Z_s \simeq 200\,\Omega$.

Pour $Z_s = 0$, on a : $\begin{cases} V_s & = & A_+.e_+ - A_-.e_- & & \\ & = & \frac{A_+ + A_-}{2}.(e_+ - e_-) & + & (A_+ - A_-).\frac{e_+ + e_-}{2} \\ & = & \mu.\epsilon & + & G_{mc}.< e > \end{cases}$

μ est la gain différentiel et G_{mc} le gain en mode commun. $< e >$ est également apellé tension en mode commun, car si $e_+ = e_- = e$ alors $< e > = e$.

Pour un AOP idéal, on considère que $\mu \rightarrow \infty$ et que $G_{mc} = 0$.

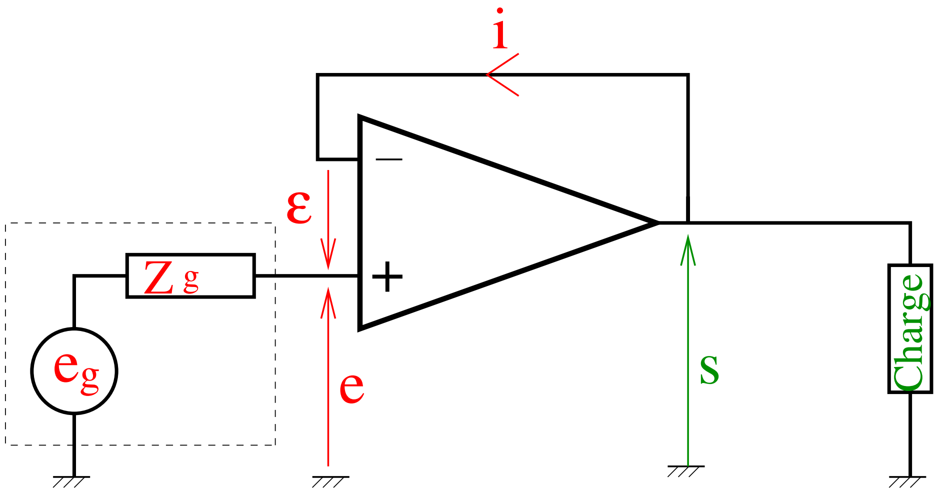
II L'amplificateur opérationnel (AOP)

Pour quantifier l'écart au modèle idéal, on définit le

Taux de Réjection de Mode Commun : $\boxed{\text{TRMC} = 20 \times \log \left| \frac{\mu}{G_{mc}} \right|}$

Pour l'AOP idéal, le TRMC $\rightarrow \infty$ (TL081 : TRMC $= 86\,$dB).
Dans la suite on considèrera uniquement le cas ou l'AOP est idéal et en régime linéaire *i.e.* $\epsilon \simeq 0$

Exemple : Le montage suiveur



- La contre réaction consiste simplement à relier la sortie à e_-.
- D'après la loi des mailles, $s = -\epsilon + e$.
- Pour un AOP idéal en régime linéaire, $\epsilon = 0$ et donc $s = e$.
- Le montage suiveur est un montage amplificateur de gain unité.
- Pour un AOP idéal, l'intérêt du montage est :
  - Comme $i_+ = 0$, on a $e = e_g$ (pas de chute de tension).
  - Quelle que soit l'impédance de la charge, $s = e$ puisque $Z_s = 0$.

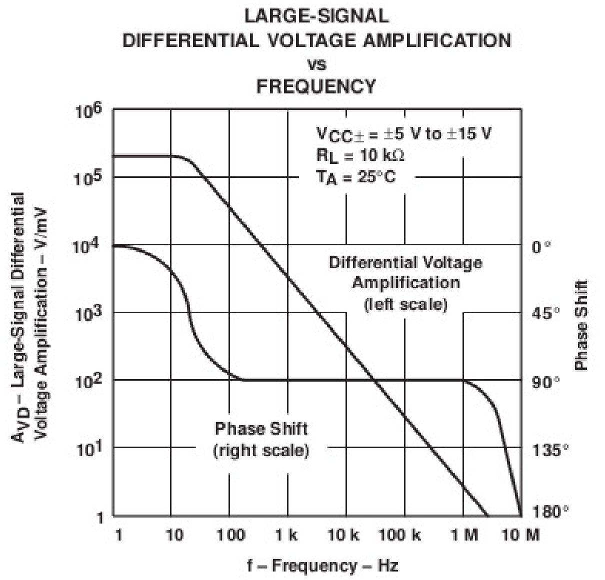
Ce montage permet d'effectuer une adaptation d'impédance :

- La source d'entrée voit la charge “comme si” elle avait une impédance ∞.
- La charge voit le générateur comme une source idéale (d'impédance nulle).

II.D AOP en régime dynamique

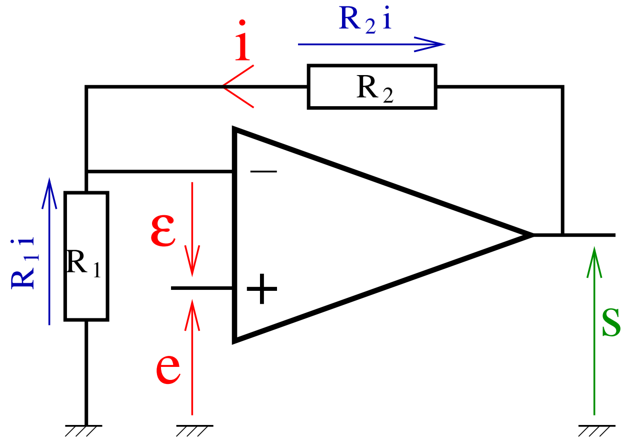
Comportement dynamique

- A basse fréquence, l'AOP a un fonctionnement amplificateur.
- A plus haute fréquence, on observe un déphasage et une diminution du gain.
- La fonction de transfert harmonique est typiquement celle d'un filtre passe-bas d'ordre 1 : $\mu(j\omega) = \frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_C}}$
- La fréquence de coupure est de l'ordre de 15 Hz pour le TL081



http://www.ti.com/product/TL081/datasheet

Exemple : Le montage non inverseur



On considère toujours un AOP idéal en régime linéaire.
En régime statique, la fonction de transfert est :

$$\left.\begin{array}{rcl} e & = & R_1.i \\ s & = & (R_1+R_2).i \end{array}\right\} s = \frac{R_1+R_2}{R_1}e$$

$$A_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1}$$

II L'amplificateur opérationnel (AOP)

En régime dynamique, nous avons :

$$\begin{cases} e &= R_1.i + \epsilon \\ s &= (R_1 + R_2).i \\ \mu(j\omega) &= \frac{s}{\epsilon} = \frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \end{cases}$$

Ce que l'on peut réecrire $e = R_1.i + \frac{s}{\mu(j\omega)}$, d'où :

$$\begin{aligned} s &= \frac{R_1+R_2}{R_1}\left(e - \frac{s}{\mu(j\omega)}\right) \\ s &= A_0.\left(e - \frac{s}{\mu(j\omega)}\right) \\ s\left(1 + \frac{A_0}{\mu(j\omega)}\right) &= A_0.e \\ s &= \frac{A_0.\mu(j\omega).e}{\mu(j\omega)+A_0} \end{aligned}$$

Soit, $H(j\omega) = \frac{A_0.\mu_0}{\mu_0+A_0+jA_0\frac{\omega}{\omega_c}}$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega'_c}}$$

avec $H_0 = \frac{A_0.\mu_0}{\mu_0+A_0}$ et $\omega'_c = \frac{\mu_0+A_0}{A_0}\omega_c$.

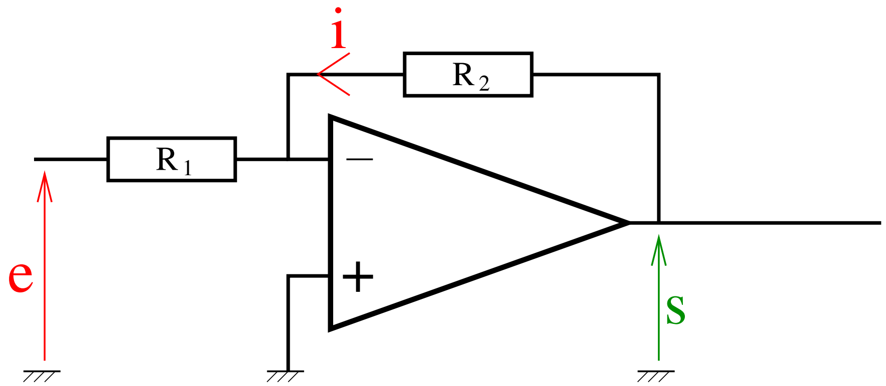
Conséquences :

- Si $\mu_0 \gg A_0 \begin{cases} H_0 &\simeq A_0 \\ \omega'_c &\simeq \frac{\mu_0}{A_0}\omega_c \end{cases}$
- Dans ces conditions, la fréquence de coupure du montage est beaucoup plus élevée que la fréquence de coupure de l'AOP seul.
- Par exemple, avec $\mu_0 = 2.10^5$, $f_c = 15$ Hz et $A_0 = 10$, $f'_c = 300$ kHz.

En pratique, on utilise pour caractériser les propriétés dynamiques du filtre, la fréquence de coupure de gain unité : $\mu_0 \times f_c$

II L'amplificateur opérationnel (AOP)

Exemple 1 : Le montage inverseur

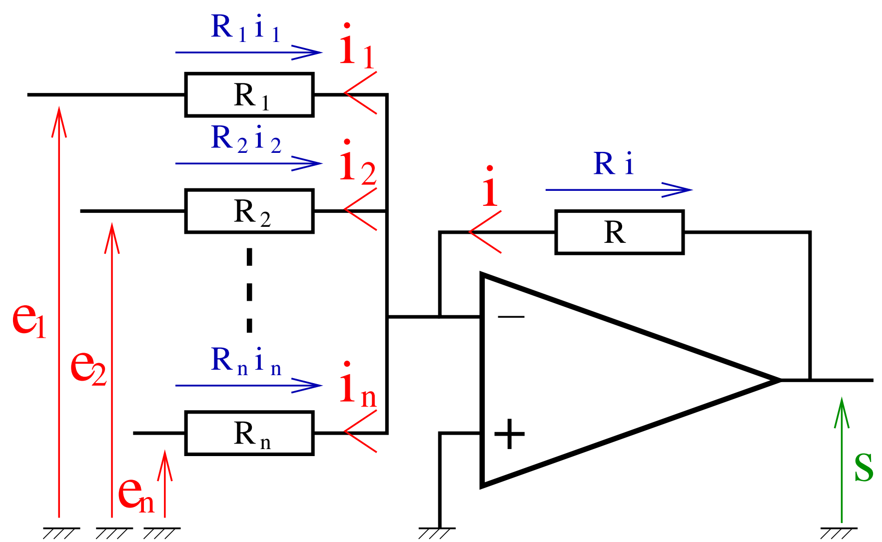


On considère toujours un AOP idéal ($e_+ = e_-$).

$$\left.\begin{array}{rcl} e & = & -R_1.i \\ s & = & R_2.i \end{array}\right\} s = -\frac{R_2}{R_1}e$$

La fonction de transfert est : $H = \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}$
L'inconvénient de ce montage est que l'inpédance d'entrée est égale à R_1.

Exemple 2 : Le montage sommateur inverseur



$$\begin{array}{rcl} s & = & R.i \\ i & = & i_1 + i_2 + \cdots + i_n \\ e_1 & = & -R_1 i_1 \\ e_2 & = & -R_2 i_2 \\ & \vdots & \\ e_n & = & -R_n.i_n \\ i & = & -\left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \cdots + \frac{e_n}{R_n}\right) \end{array}$$

La tension de sortie est :
$s = -\left(\frac{R}{R_1}e_1 + \frac{R}{R_2}e_2 + \cdots + \frac{R}{R_n}e_n\right)$
Exercice : Retrouver ce résultat avec le théorème de Millman.

III La fonction de filtrage

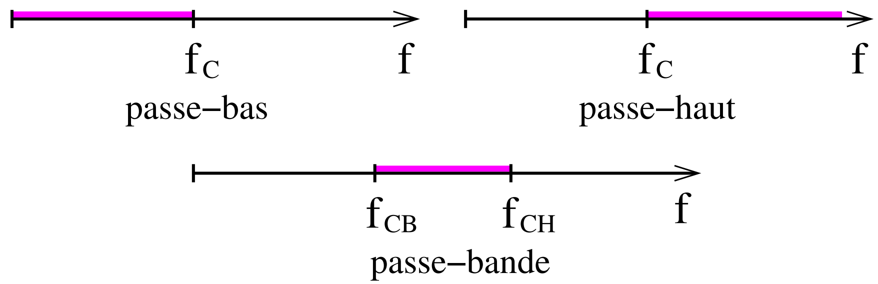
III.A Introduction

On distingue 3 principaux types de filtres :

- **Filtre passe-bas** : Il transmet les BF et atténue les HF
- **Filtre passe-haut** : Il transmet les HF et atténue les BF
- **Filtre passe-bande** : Il transmet les signaux entre les basses et hautes fréquences.

Un filtre peut être passif *i.e.* n'utulisant que des composants passifs (résistance, capa., self.) ou actif *i.e.* ayant une alimentation propre comme un AOP.

L'étude d'un filtre se fait par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



- Un filtre passe-bas ou passe-haut se caractérise par sa fréquence de coupure.
- Un filtre passe-bande sera caractérisé par deux fréquences de coupure (haute et basse).
- La fréquence de coupure se caractérise par : $|H(j\omega_c)| = \frac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$

III.B Filtre passe-bas

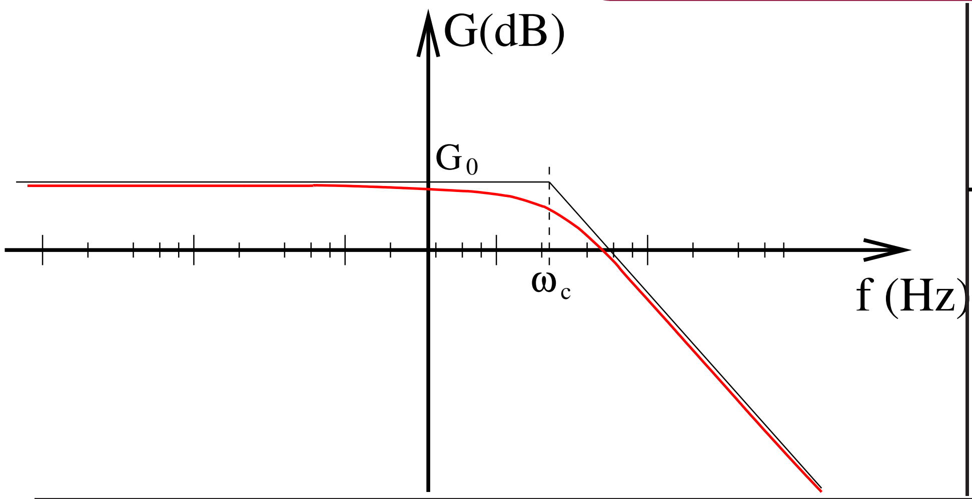
Fonction de transfert du 1$^{\text{er}}$ ordre :

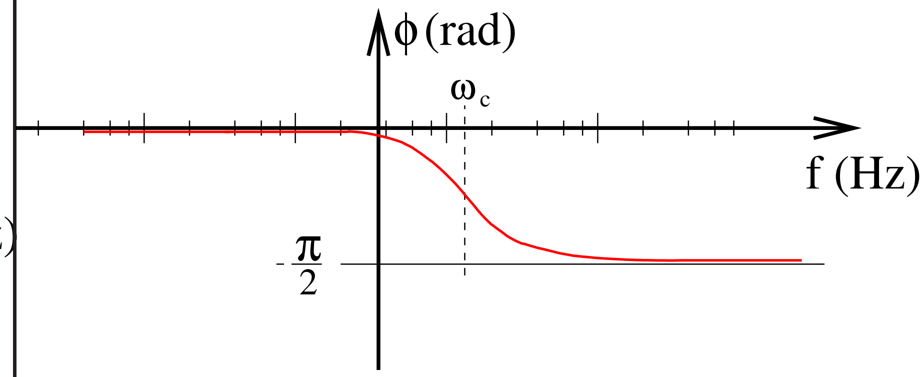
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}}$$

H_0 est l'amplification dans la bande passante.

$$\begin{aligned}
|H(j\omega)| &= \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \\
G(\omega) &= 20\log H_0 - 10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] \\
\phi(\omega) &= -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)
\end{aligned}$$

III La fonction de filtrage





Si $\omega \gg \omega_c$,
$G(\omega) \simeq G_0 - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$.
La pente de G sur une octave (doublement de ω) est alors :

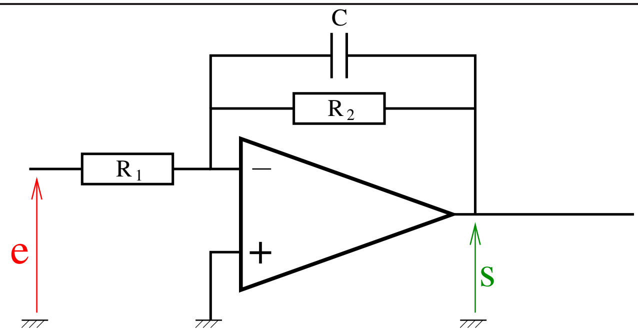
$$\begin{aligned} G(2\omega) - G(\omega) &= -20 \log \left(\frac{2\omega}{\omega_C}\right) \\ &\quad +20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right) \\ &= -20 \log 2 \\ &\simeq -6 \text{ dB/octave} \end{aligned}$$

Sur une décade ($\omega \times 10$) :
$G(10\omega) - G(\omega) = -20 \log 10 \simeq -20$ dB/décade.
La pente de l'asymptote pour $\omega \gg \omega_c$ est caractéristique de l'ordre du filtre.

Comportement asymptotique :

$$\omega \ll \omega_c \begin{cases} G(\omega) \rightarrow G_0 = 20 \log H_0 \\ \phi(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_c \begin{cases} G(\omega) \rightarrow -\infty \\ \phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

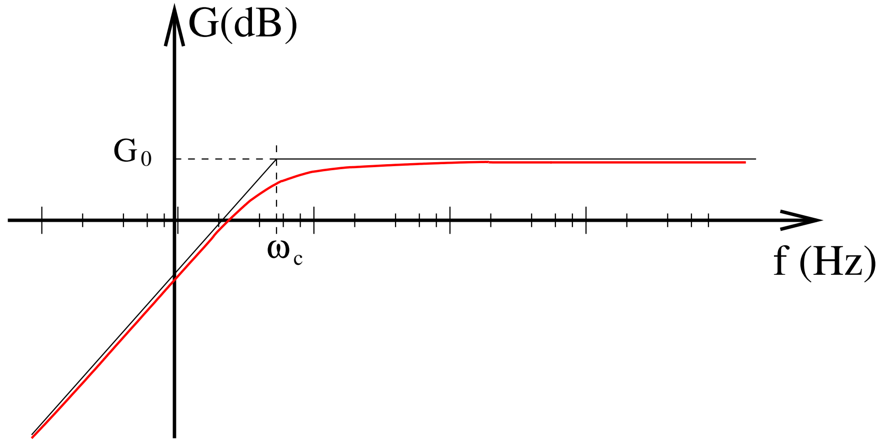


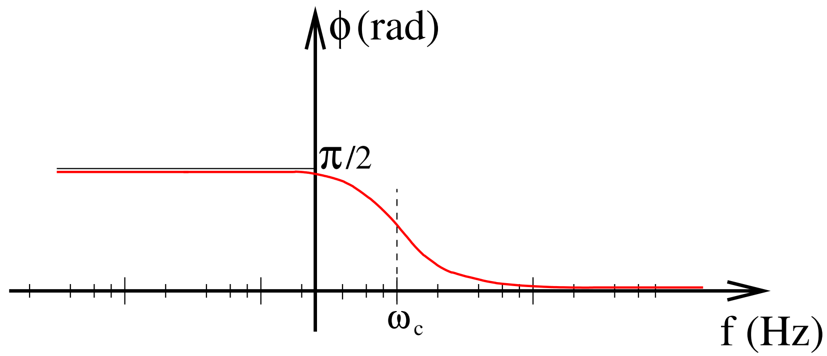
Exemple :

$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+jR_2C\omega}$,
avec $H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ et $\omega_c = \frac{1}{R_2C}$

III.C Filtre passe-haut

Fonction de transfert du 1[er] ordre : $\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{jp}{1+jp}}$ avec $p = \frac{\omega}{\omega_c}$

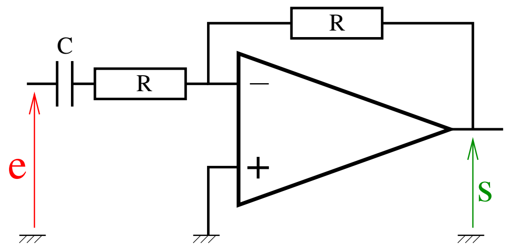




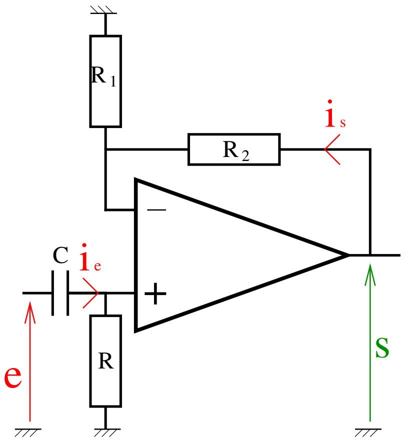
Comportement asymptotique :
La pente du gain lorsque $\omega \ll \omega_c$ est de +20 dB/décade (filtre du 1[er] ordre).

$$\omega \ll \omega_c \begin{cases} G(\omega) \to -\infty \\ \phi(\omega) \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_c \begin{cases} G(\omega) \to G_0 = 20 \log H_0 \\ \phi(\omega) \to 0 \end{cases}$$



$H(j\omega) = -\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$,
avec $H_0 = -1$ et $\omega_c = \frac{1}{RC}$



$$\begin{cases} s & = & (R_1 + R_2) i_s \\ & = & R_2 i_s + R i_e \\ e & = & \left(R + \frac{1}{jc\omega}\right) i_e \end{cases}$$

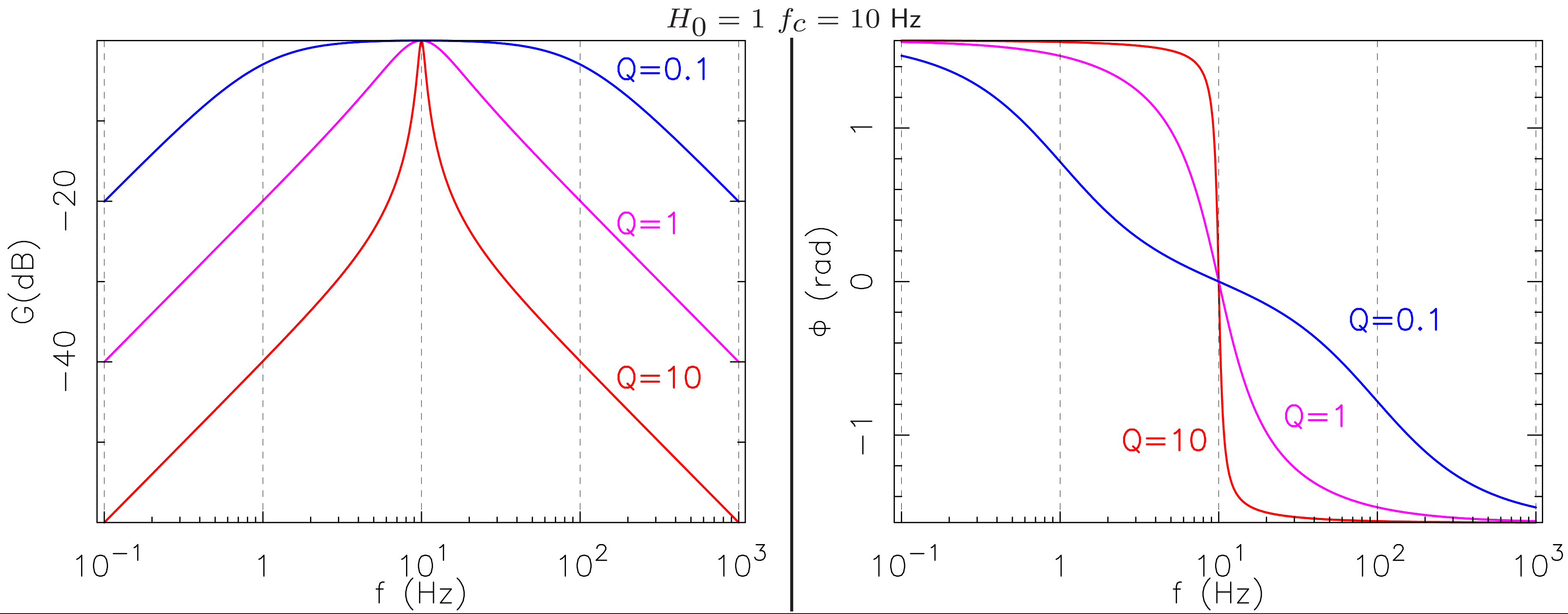
$H(j\omega) = \frac{R_1+R_2}{R_1} \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$,
avec $H_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1}$ et
$\omega_c = \frac{1}{RC}$

III La fonction de filtrage

III.C Filtre passe-bande

Fonction de transfert du 2eme ordre : $\boxed{H(jp) = H_0 \frac{1}{1+jQ\left(p-\frac{1}{p}\right)}}$ avec $p = \frac{\omega}{\omega_c}$

Q représente le facteur de qualité du filtre (sans unité). Plus il est élevé plus le filtre est sélectif.



$$G = 20\log\left[\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(p-\frac{1}{p}\right)^2}}\right]$$

$$\phi = \arg(H_0) - \arg\left[1+jQ\left(p-\frac{1}{p}\right)\right]$$

$$\phi = \arg(H_0) - \arctan\left[Q\left(p-\frac{1}{p}\right)\right]$$

$\arg(H_0) = 0$ si $H_0 > 0$ et $\arg(H_0) = \pi$ si $H_0 < 0$.

G sera maximum lorsque le dénominateur sera minimum, soit lorsque $p - \frac{1}{p} = 0$ ou encore $p^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_c$.

III La fonction de filtrage

Comportement assymptotique :

$\omega \ll \omega_c$	$H(jp) \simeq \frac{H_0}{1-j\frac{Q}{p}}$ $\lvert H\rvert \simeq \lvert H_0\rvert\, p/Q$	$G = 20\log\left(\frac{\lvert H_0\rvert}{Q}\right) + 20\log p$ droite de pente $+\,20\,\mathrm{dB}/$décade
		$\phi = +\frac{\pi}{2} \quad (H_0 > 0)$ comportement dérivateur
$\omega = \omega_c$	$H(jp) = H_0$	$G = 20\log\lvert H_0\rvert$ Résonance
		$\phi = 0$
$\omega \gg \omega_c$	$H(jp) \simeq \frac{H_0}{1+jQp}$ $\lvert H\rvert \simeq \lvert H_0\rvert/pQ$	$G = 20\log\left(\frac{\lvert H_0\rvert}{Q}\right) - 20\log p$ droite de pente $-\,20\,\mathrm{dB}/$décade
		$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad (H_0 > 0)$ comportement intégrateur

---

Bande Passante (à -3 dB) : Cela correspond au domaine de fréquence pour lesquelles $\frac{H_0}{\sqrt{2}} \leq |H| \leq H_0$.

Les fréquences de coupure vérifient l'équation : $$\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(p-\frac{1}{p}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Soit, $$\begin{aligned} 1+Q^2\left(p-\frac{1}{p}\right)^2 &= 2 \\ Q\left(p-\frac{1}{p}\right) &= \pm 1 \end{aligned}$$

III La fonction de filtrage

1

1[er] cas :

$$Q\left(p-\frac{1}{p}\right) = -1$$
$$p^2+\frac{1}{Q}p-1=0$$

La seule solution positive est :

$$p_1 = -\frac{1}{2Q}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}$$

2[eme] cas :

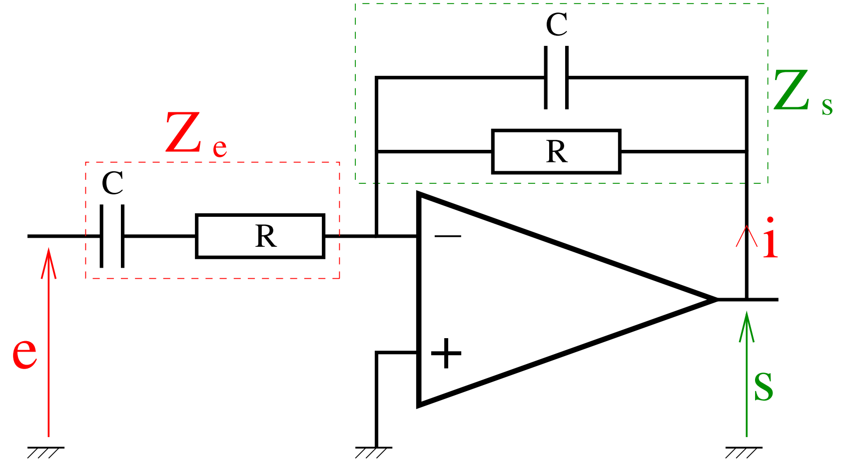
$$Q\left(p-\frac{1}{p}\right) = +1$$
$$p^2-\frac{1}{Q}p-1=0$$

La seule solution positive est :

$$p_2 = \frac{1}{2Q}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}$$

D'où, $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{Q}$.

Sachant que, $\Delta p = \frac{\omega_2}{\omega_c}-\frac{\omega_1}{\omega_c}=\frac{\Delta\omega}{\omega_c}$ on obtient : $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{Q}$



$$\begin{aligned} e &= -Z_e i \quad \text{avec} \quad Z_e = R+\frac{1}{jC\omega} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \frac{jRC\omega+1}{jC\omega} \\ s &= Z_s i \quad \text{avec} \quad Z_s = \left(\frac{1}{R}+jC\omega\right)^{-1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \frac{R}{jRC\omega+1} \end{aligned}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{s}{e} \\ &= -\frac{Z_s}{Z_e} \\ &= \frac{jRC\omega}{(1+jRC\omega)^2} \\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{jRC\omega}+jRC\omega} \end{aligned}$$

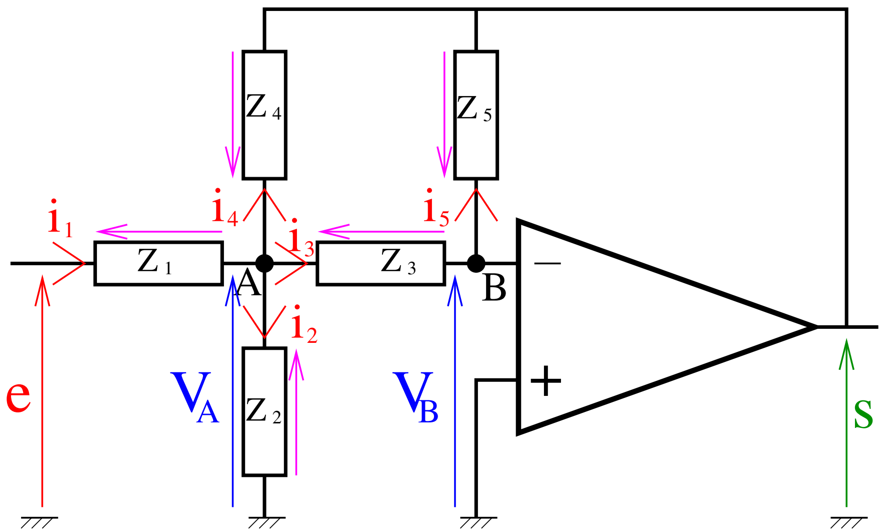
en posant, $\omega_c = \frac{1}{RC}$

$$= \frac{1}{2+j\left(\frac{\omega}{\omega_c}-\frac{\omega_c}{\omega}\right)}$$

Pour ce filtre, $H_0 = 1/2$ et $Q = 1/2$.

III.D Cellule de Rauch

Permet de réaliser des filtres d'ordre 2. Les impédances peuvent être des résistances ou des condensateurs.



L'ampli. Op. est supposé idéal.

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_A & = & Z_2.i_2 \\ V_A & = & Z_3.i_3 + V_B \quad (V_B \simeq 0) \\ e & = & Z_1.i_1 + V_A \\ s & = & V_A - Z_4.i_4 = -Z_5.i_5 + V_B \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} i_1 & = & i_2 + i_3 + i_4 \\ i_3 & = & i_5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{e-V_A}{Z_1} & = & \frac{V_A}{Z_2} + \frac{V_A}{Z_3} + \frac{V_A-s}{Z_4} \\ \frac{V_A}{Z_3} & = & -\frac{s}{Z_5} \quad \Leftrightarrow \quad V_A = -s\frac{Z_3}{Z_5} \end{array}\right.$$

$$e = -s\left[\frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_5} + \frac{Z_3}{Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_2.Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_4.Z_5}\right]$$

$$\boxed{H = -\left[\frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_5} + \frac{Z_3}{Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_2.Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_4.Z_5}\right]^{-1}}$$

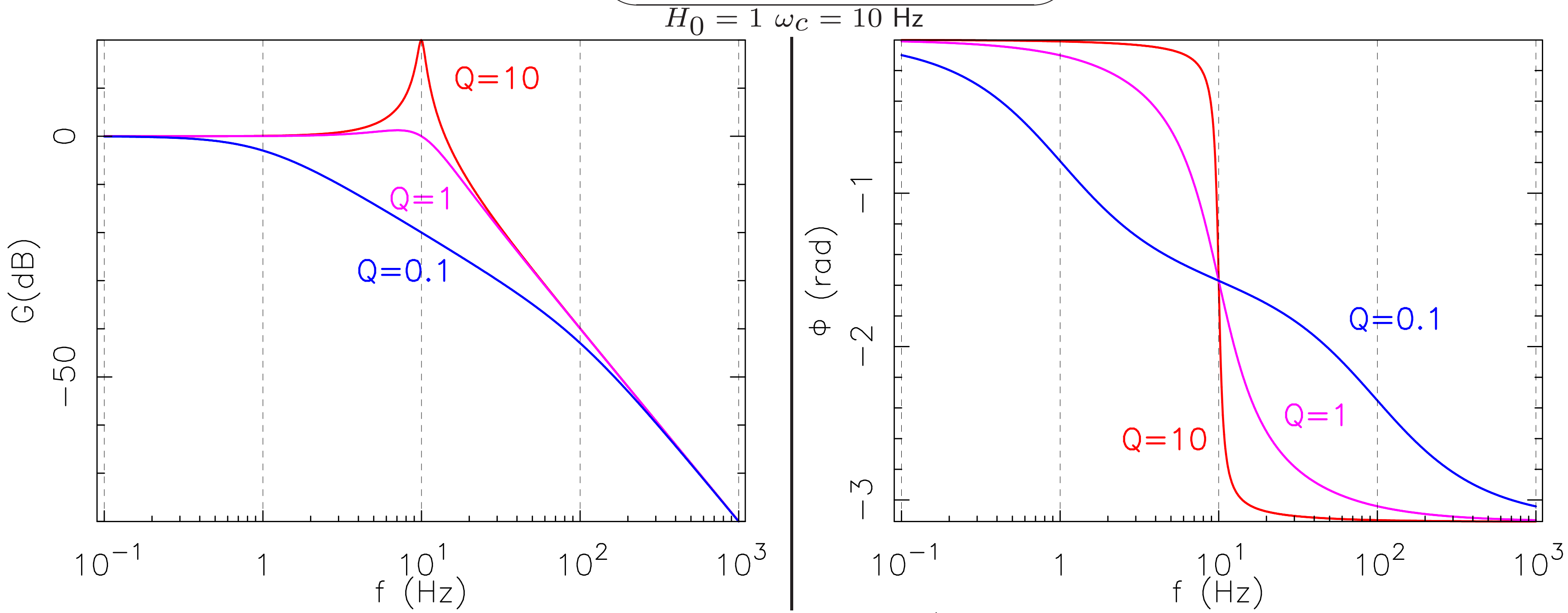
Exemple : Passe bande ($Z_2 = Z_3 = Z_4 = R$, $Z_5 = \frac{1}{jC\omega}$ et $Z_1 = nZ_5 = \frac{n}{jC\omega}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{rcl} H & = & -\left(jRC\omega + n + \frac{n}{jRC\omega} + n + n\right)^{-1} = -\left(\sqrt{n}\frac{jRC\omega}{\sqrt{n}} + 3n + \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{jRC\omega}\right)^{-1} \\ & = & -\frac{1}{3n}.\frac{1}{1+\frac{1}{3\sqrt{n}}\left[j\frac{RC\omega}{\sqrt{n}} - j\frac{\sqrt{n}}{RC\omega}\right]} \quad \text{avec} \quad H_0 = -\frac{1}{3n}, \quad Q = \frac{1}{3\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{\sqrt{n}}{RC}. \end{array}$$

III La fonction de filtrage

III.E Filtre du 2^{eme} ordre

Passe-bas : $H(jp) = \dfrac{H_0}{1 - p^2 + j\frac{p}{Q}}$ avec $p = \frac{\omega}{\omega_c}$



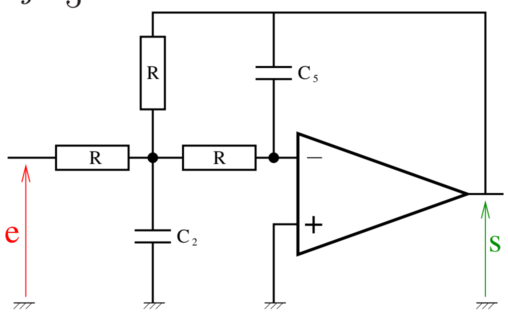
La pente de G pour $p \gg 1$ est maintenant de -40 dB/décade.
La variation totale de phase est de π ($\pi/2$ pour un filtre du 1^{er} ordre).

Passe-haut : $H(jp) = H_0 \dfrac{(jp)^2}{1 + j\frac{p}{Q} + (jp)^2}$

Les diagrammes de Bode sont similaires au filtre passe-bas.

III.E *Filtre du* 2^{eme} *ordre*

Exemple de filtre passe-bas : Cellule de Rauch avec $Z_1 = Z_3 = Z_4 = R$, $Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega}$ et $Z_5 = \frac{1}{jC_5\omega}$.



$$\begin{aligned} H &= -\left(\frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_5} + \frac{Z_3}{Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_2.Z_5} + \frac{Z_1.Z_3}{Z_4.Z_5}\right)^{-1} \\ &= -\left(1 + 3jRC_5\omega + j^2R^2C_2C_5\omega^2\right)^{-1} \\ &= -\left(1 + 3\frac{\sqrt{C_5}}{\sqrt{C_2}} jR\sqrt{C_2.C_5}\omega + j^2R^2C_2C_5\omega^2\right)^{-1} \end{aligned}$$

On cherche une expression du type : $H(jp) = \dfrac{H_0}{1 - p^2 + j\frac{p}{Q}} \Rightarrow \begin{cases} H_0 = -1 \\ \omega_c = \dfrac{1}{R\sqrt{C_2.C_5}} \\ Q = \frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_5}} \end{cases}$

- Un filtre d'ordre supérieur est réalisé par la mise en cascade de filtre du 1^{er} et du 2^{eme} ordre.
- On distingue trois grandes familles de filtre selon le choix des facteurs de qualité et des fréquences de coupure.

Chebyshev	Butterworth
• Avantage : Accentuation de la pente après la fréquence de coupure.	• Avantage : Gain le plus plat possible dans la bande passante.
• Inconvénient : Ondulation du gain dans la bande passante.	• Inconvénient : La pente est strictement un multiple de 20 dB/décade.

Bessel :Utilisé pour la linéarité de la transition de phase.

III.F Filtre passe-bas d'ordre n

Butterworth

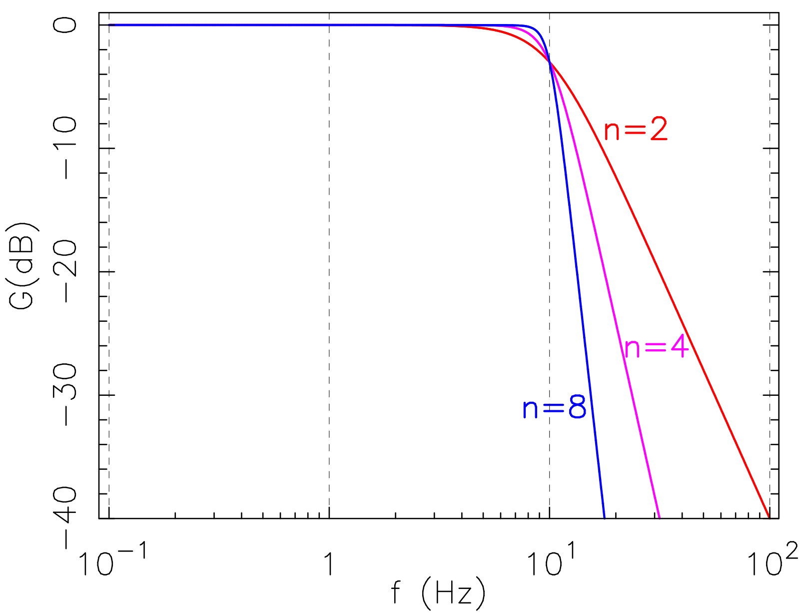
Le gain de ce filtre est toujours de la forme :

$$|H_n| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}, \quad (x = \omega/\omega_c)$$

$\forall n\,,\quad G(\omega_c) = G_0 - 3$ dB.

$$\begin{array}{lcl} H_1(p) & = & \frac{1}{1+p} \\ H_2(p) & = & \frac{1}{1+\sqrt{2}p+p^2} \\ H_3(p) & = & \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \\ H_4(p) & = & \frac{1}{(1+0.765p+p^2)(1+1.848p+p^2)} \\ & \vdots & \end{array}$$

avec $p = j\omega/\omega_c$



Chebyshev

Défini à partir des polynômes de Chebyshev :

$$P_n(x) = 2z.P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$$

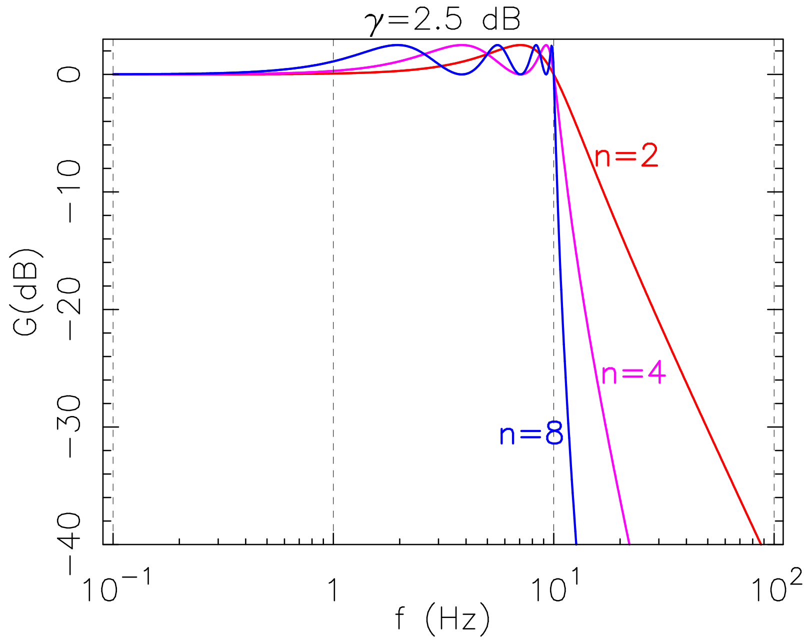
Le Gain s'exprime sous la forme :

$$|H_n| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 P_n^2(p)}}$$

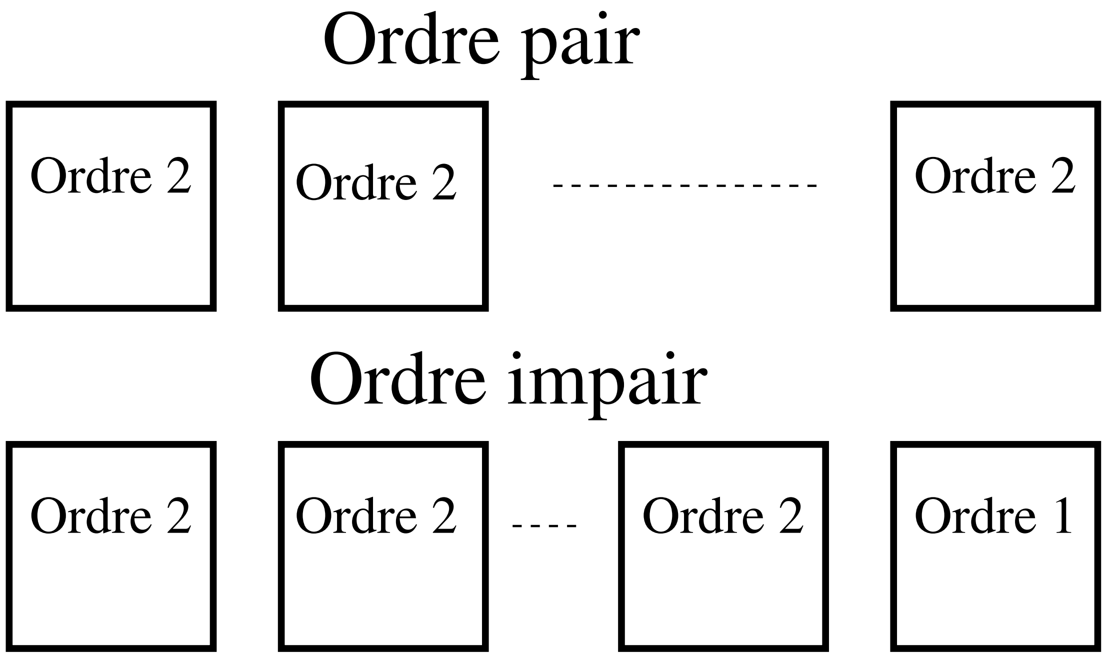
ϵ permet de contrôler les ondulations :

$\gamma(\text{dB}) = 10 \log\left(1+\epsilon^2\right)$

$$\begin{array}{lcl} P_1(x) & = & x \\ P_2(x) & = & 2x^2 - 1 \\ P_3(x) & = & 4x^3 - 3x \\ P_4(x) & = & 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ & \vdots & \end{array}$$



III La fonction de filtrage



- Un filtre d'ordre n pair est constitué de $n/2$ filtres d'ordre 2.
- Un filtre d'ordre n impair est constitué de $(n-1)/2$ filtres d'ordre 2 et d'un filtre d'ordre 1.

Exercice : Quel doit être le facteur de qualité des filtres pour obtenir un filtre de Butterworth d'ordre 3, d'ordre 4 ?

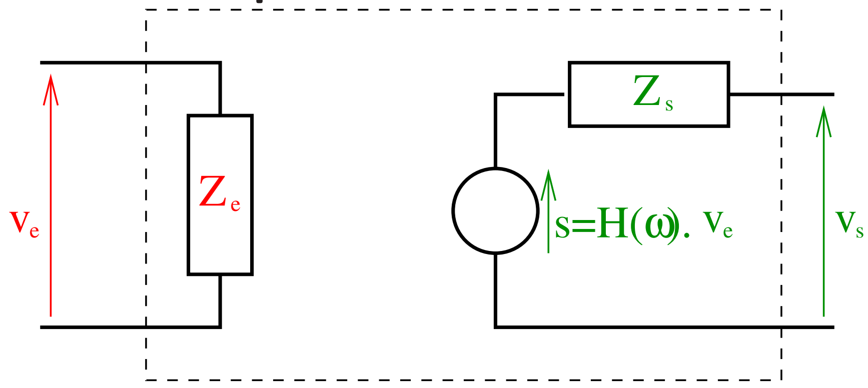
IV L'amplification

$IV.A$ Introduction

- C'est un SLIT pour lequel $|H| > 1$.
- Un amplificateur est un quadripôle.
- Dans l'idéal, les grandeurs de sortie (v_s , i_s) ont la même forme que les grandeurs d'entrée (v_e , i_e).
- Il fournit en sortie une puissance active supérieure qu'en entrée.
- Selon l'utilisation on peut réaliser un amplificateur avec :
  - Transistor (ampli. audio de puissance)
  - Ampli. Op. (chaine de mesure)
- On peut définir différents types d'ampli. :
  - Ampli. en tension :$H_v = \frac{v_S}{v_e}$
  - Ampli. en intensité :$H_i = \frac{i_S}{i_e}$
  - Ampli. en puissance :$H_P = \frac{P_S}{P_e}$

Remarque : L'ampli. différentiel permet de ne pas amplifier le bruit.

Amplificateur de tension



Un ampli. idéal est tel que : $\left\{ \begin{array}{rcl} Z_e & \rightarrow & \infty \\ Z_s & = & 0 \\ H(j\omega) & = & H_0 \ \forall\, \omega \end{array} \right.$

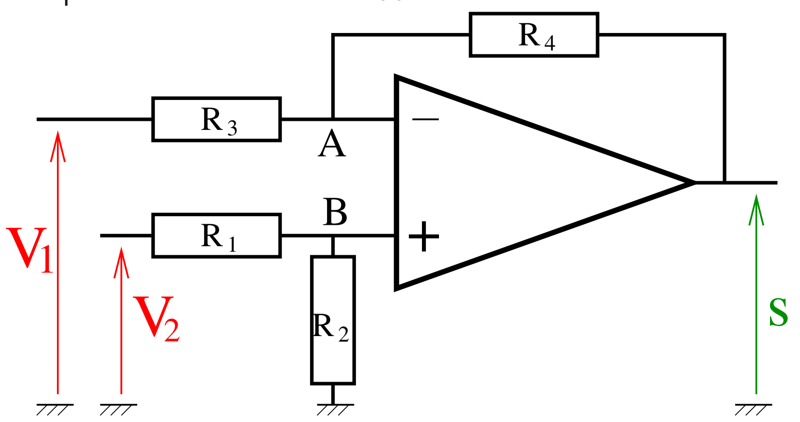
Pour un ampli réel, il faudra définir :

- Le domaine de linéarité pour la tension d'entrée.
- La bande passante à -3 dB.
- Les impédances d'entrées et de sortie.

IV.B Montage Amplificateur différentiel

Montage à un AOP :

Exemple commercial : INA 106



On suppose toujours que l'AOP est idéal et en régime linéaire ($V_A = V_B$).

On applique le théorème de Millman aux tensions V_A et V_B :

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_3}+\frac{s}{R_4}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = \frac{R_4.V_1+R_3.s}{R_3+R_4}$$

$$V_B = \frac{\frac{V_2}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2.V_2}{R_1+R_2}$$

d'où, $s = \frac{R_2}{R_3}\frac{R_3+R_4}{R_1+R_2}V_2 - \frac{R_4}{R_3}V_1$

Si l'on prend $R_2 = R_4$ et $R_1 = R_3$ alors :

$s = \frac{R_4}{R_3}(V_2 - V_1)$

On a un montage amplificateur différentiel $(V_2 - V_1)$ de gain différentiel $A_D = \frac{R_4}{R_3}$.

- Le problème posé par ce montage est que d'une part les impédances d'entrée $+$ et $-$ sont très différentes et que d'autre part, ce montage est très sensible aux erreurs sur les résistances.
- Supposons que $R_1 = R_3(1+\alpha)$ où α représente la tolérance de la résistance :
  $s = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{R_3+R_4}{R_3(1+\alpha)+R_4}V_2 - V_1\right)$
- La dissymétrie induit un gain en mode commun en plus du gain différentiel.

Pour le mettre en évidence, il suffit de prendre :

$$V_1 = V_2 = e \Rightarrow \begin{cases} V_2 - V_1 = 0 \\ (V_2+V_1)/2 = e \end{cases}$$

On obtient : $$\begin{aligned} s &= e.A_D\left[\frac{1}{1+\frac{\alpha}{1+A_D}} - 1\right] \\ &\simeq e\frac{-\alpha.A_D}{1+A_D} \end{aligned}$$

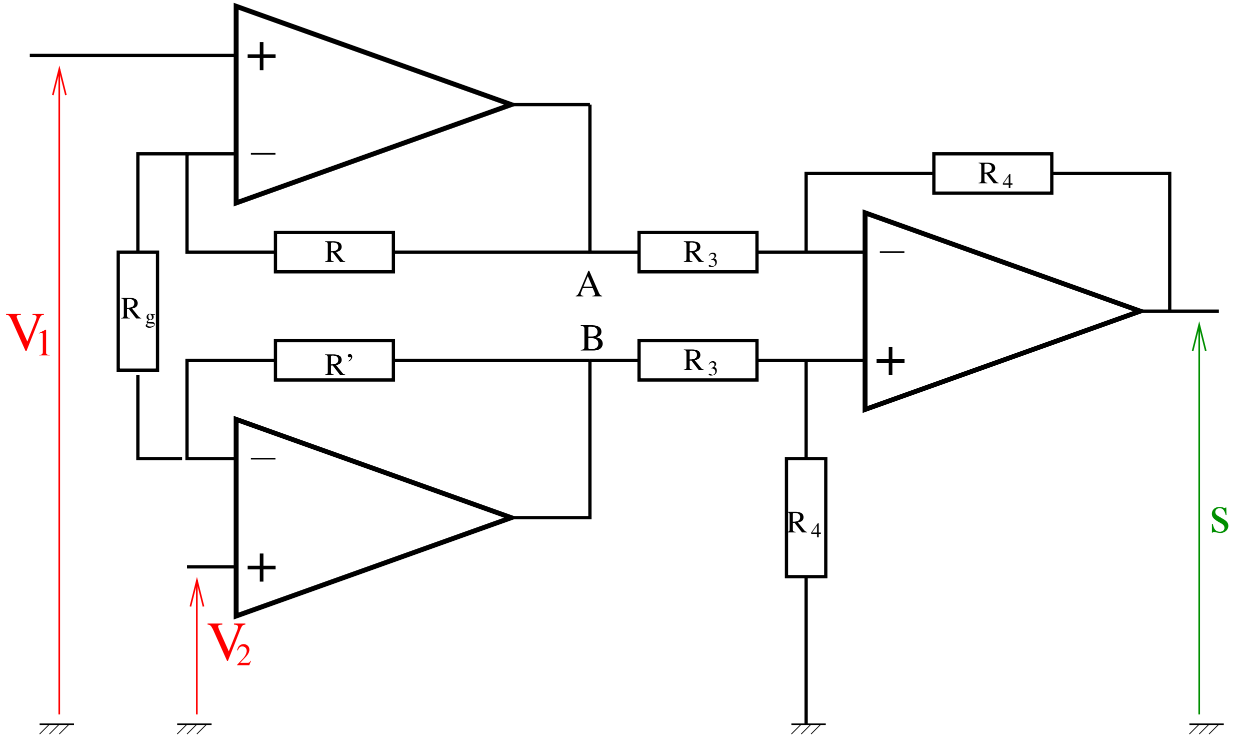
Le Gain en mode commun est : $A_c = \frac{-\alpha.A_D}{1+A_D}$

$\text{TRMC} = 20 \times \log\left|\frac{1+A_D}{\alpha}\right|$

IV L'amplification

Montage à trois AOP :

Exemple commercial : INA 114



Le montage reprend en étage de sortie le montage précédent à un AOP.

On applique le théorème de Millman aux tensions V_2 et V_1 :

$$V_1 = \frac{\frac{V_A}{R}+\frac{V_2}{Rg}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{Rg}} = \frac{Rg.V_A+R.V_2}{Rg+R}$$

$$V_2 = \frac{\frac{V_B}{R'}+\frac{V_1}{Rg}}{\frac{1}{R'}+\frac{1}{Rg}} = \frac{Rg.V_B+R'.V_1}{R'+Rg}$$

Soit,

$$\frac{R+Rg}{Rg}V_1 = V_A + \frac{R}{Rg}V_2$$
$$\frac{R'+Rg}{Rg}V_2 = V_B + \frac{R'}{Rg}V_1$$

d'où, $V_B - V_A = \left(1+\frac{R}{R_g}+\frac{R'}{R_g}\right)(V_2 - V_1)$

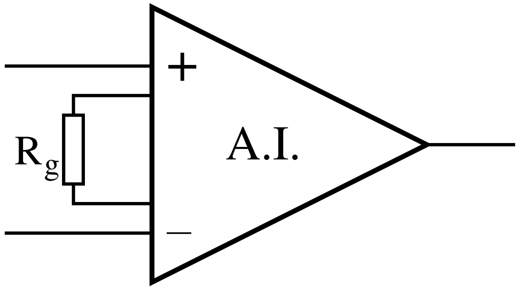
L'intérêt de ce montage est que une différence de valeur des résistances R et R' n'induit pas de gain en mode commun.

Avec le résultat précédent, on obtient un gain différentiel :

$A_D = \frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{R}{R_g}+\frac{R'}{R_g}\right).$

$IV.C$ *Représentation symbolique*

Symbole d'un amplificateur d'instrumentation :



- Un amplificateur différentiel ou d'instrumentation (A.I.) se présente sous forme d'un circuit intégré.
- R_g est une résistance externe fixée par l'utilisateur, afin de pouvoir choisir le gain de l'AI.
- Comme pour l'AOP, le constructeur donne dans la documentation le TRMC de son AI.