

Modélisation statistique multivariée des images dans le domaine des transformées multi-échelles orientées et non-orientées

Larbi BOUBCHIR

SAGAH (UMR INRA/Agrocampus-Ouest/Univ. Angers)
Agrocampus Ouest, 2 rue Le Nôtre, 49045 Angers, France
Larbi.Boubchir@angers.inra.fr

Résumé – Dans cet article, nous proposons un modèle statistique multivarié, à savoir le modèle Formes K de Bessel Multivarié (MBKF), pour caractériser les dépendances inter- et intra-échelle des coefficients d’images dans le domaine des transformées multi-échelles parcimonieuses orientées et non-orientées. Notre modèle est basé sur une extension multivariée de la distribution des Formes K de Bessel. Pour mettre en application ce modèle, nous avons proposé une forme analytique pour sa classe de PDFs, ainsi que des estimateurs pour estimer ses hyperparamètres. Ensuite, nous l’avons comparé avec d’autres modèles multivariés proposés dans la littérature.

Abstract – In this paper, we propose a multivariate statistical model namely the Multivariate Bessel K Forms (MBKF) to characterize the inter- and intra-scale dependencies between image coefficients in oriented and non-oriented multiscale sparse transforms domain. Our proposed model was based on multivariate extension of Bessel K Forms density. To establish this model in practice, we have proposed an analytical form for class of PDFs and then estimate its hyperparameters. Also, we have compared it to other multivariate models proposed in literature.

1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, les ondelettes ont eu un immense succès dans le domaine du traitement d’images, et ont été utilisées pour de nombreux problèmes tels que le débruitage et la compression d’images [1]. Il apparaît aujourd’hui que les ondelettes ne sont pas optimales pour l’analyse d’objets anisotropes dans l’image (e.g. les lignes, les contours), mais restent efficaces pour la détection de structures isotropes à différentes échelles. Depuis quelques années, de nouvelles transformées multi-échelles dites les X-lets géométriques ont été développées –comme les curvelets, contourlets et bandlets– qui intègrent la notion de directionnalité et qui permettent de rechercher des objets de manière optimale dont l’efficacité en traitement d’image reste encore à confirmer.

De nombreux travaux dans la littérature ont proposé des modèles statistiques pour caractériser les statistiques des coefficients d’images dans le domaine des transformées multi-échelles [2, 3, 4]. Ces coefficients tendent à se regrouper autour des bords des objets dans l’image (e.g. les contours, les lignes, etc.). Ce phénomène persiste également à d’autres orientations et à d’autres échelles. Les statistiques marginales ne prennent pas en compte ces dépendances inter- et intra-échelles entre les coefficients. Des modèles statistiques multivariés ont été proposés afin de caractériser ces dépendances, citons notamment, le modèle de Jeffrey [5] et le modèle multivarié Gaussien Généralisé Anisotrope (AMGGD) [6].

Dans cet article, nous proposons un modèle statistique multivarié, à savoir le modèle Formes K de Bessel Multivarié (MBKF), pour caractériser les dépendances inter- et intra-échelles entre

les coefficients d’images dans le domaine des transformées multi-échelles orientées (e.g. curvelets) et non-orientées (e.g. ondelettes non-décimées). Notre modèle est basé sur une extension multivariée de la distribution des Formes K de Bessel (BKF) [2]. Pour mettre en application ce modèle, nous proposons une forme analytique pour sa classe de PDFs, ainsi que des estimateurs pour estimer ses hyperparamètres. Enfin, nous évaluons la qualité de notre modèle sur une base de 100 images [7] en le comparant à d’autres modèles statistiques multivariés proposés dans la littérature.

2 Ondelettes et curvelets

Dans le cadre des transformées multi-échelles orientées, nous nous sommes intéressé plus principalement à la transformée de curvelet.

Les curvelets ont été proposées par E. Candès et D. Donoho [8, 9], constituent une nouvelle famille de frames d’ondelettes géométriques plus efficaces que les transformées traditionnelles, et qui sont conçues pour représenter de façon parcimonieuse les contours. Par exemple, sur la Fig. 1(a), les ondelettes prendraient beaucoup de coefficients pour représenter précisément un tel contour. Comparées aux ondelettes, les curvelets peut représenter un contour lisse avec moins de coefficients pour la même précision (Fig.1(b)).

La transformée de curvelet est une transformée multi-échelles multi-directionnelles avec des atomes indexés par un paramètre de position, d’échelle et de direction. La Fig.2 montre une représentation de la transformée de curvelet pour l’image de Barbara, en employant la transformée de curvelet discrète rapide

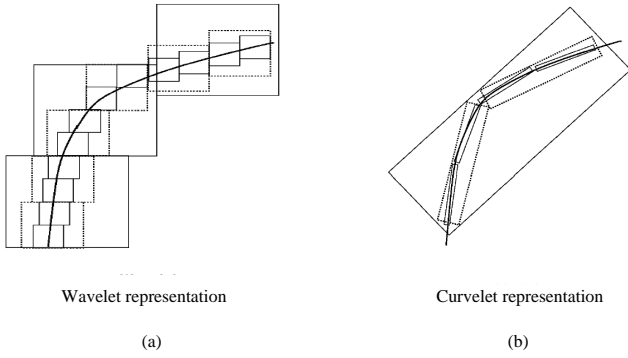


FIGURE 1 – Comparaison de l'approximation non-linéaire des ondelettes et des curvelets.

(FDCT) [9].

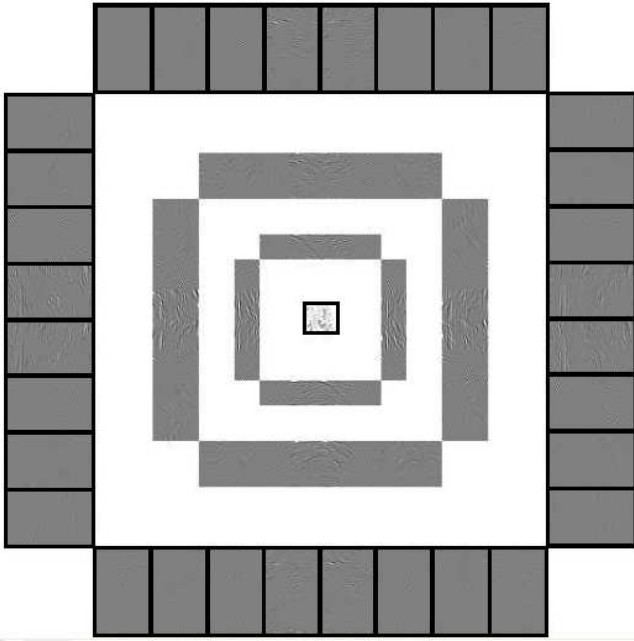


FIGURE 2 – Transformée de curvelet discrète rapide (FDCT) de l'image "Barbara". L'image d'approximation est située au centre de la représentation. Seuls trois niveaux d'échelles sont montrés.

3 Étude et analyse statistique

Nous introduisons ici une étude statistique des coefficients d'images dans le domaine des ondelettes et des curvelets pour caractériser les dépendances inter- et intra-échelles de ces derniers.

3.1 Statistiques marginales

La distribution marginale des coefficients d'ondelettes et de curvelets est caractérisée par une densité symétrique centrée en zéro avec des queues relevées [1, 10, 6]. Ceci trouve son origine dans le fait que les transformées multi-échelles sont des transformées parcimonieuses où la majorité de coefficients ont

des amplitudes nulles. De nombreux modèles statistiques ont été proposés pour modéliser ce comportement (PDFs leptokurtiques à queues lourdes). Citons par exemple le modèle GGD [10] et BKF [11]. Ces modèles ne prennent pas en compte les dépendances entre les coefficients.

3.2 Statistiques jointes

Les coefficients d'ondelettes et de curvelets sont très dépendants de leurs parents et voisins, à différentes échelles et orientations. Plusieurs travaux ont étudié et analysé les dépendances inter- et intra-échelle entre les coefficients [1, 10, 5, 6]. Fig.3 donne une illustration des PDFs jointe et conditionnelle de deux coefficients d'ondelettes à deux échelles différentes.

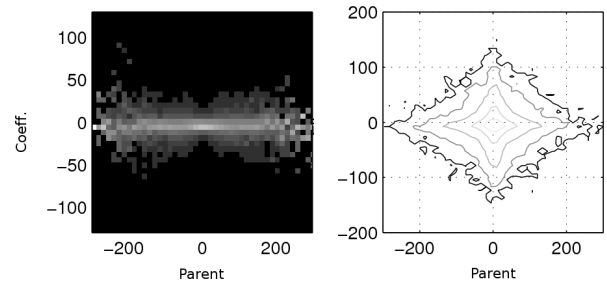


FIGURE 3 – Exemple de PDFs (observées et ajustées par des modèles) jointe et conditionnelle de deux coefficients de l'image de Barbara (le père est à une échelle plus grossière par rapport au fils).

Des modèles multivariés ont été proposés pour modéliser ces dépendances en entre les coefficients. Citons par exemple le modèle Jeffrey [5] et AMGGD [6]. Ces derniers seront mis en comparaison avec notre modèle proposé dans la section suivante.

4 Modèle multivarié analytique

Nous introduisons ici un modèle statistique multivarié de PDFs (MBKF) afin de modéliser les dépendances inter- et intra-échelles entre les coefficients dans l'espace des transformées. Ce modèle est basé sur une extension multivariée de la distribution BKF.

4.1 Modèle MBKF

Définition 1 Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ un vecteur de VA défini dans \mathbb{R}^d . Si \mathbf{X} suit une distribution BKF multivarié (MBKF) alors la PDF s'écrit comme suit :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \alpha, \Sigma) = \frac{2^{1-\alpha}}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} (2\alpha)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{d}{4}} \|\mathbf{x}\|_{\Sigma^{-1}}^{\alpha - \frac{d}{2}} K_{\alpha - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{2\alpha} \|\mathbf{x}\|_{\Sigma^{-1}} \right) \quad (1)$$

où $K_{\alpha - \frac{d}{2}}$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre $\alpha - \frac{d}{2}$. α est le paramètre de forme et Σ est une matrice symétrique définie positive. $\|\mathbf{x}\|_{\Sigma^{-1}} = (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$.

Ce modèle bénéficie de plusieurs propriétés intéressantes que nous avons établis et résumés dans la proposition suivante.

Proposition 1 soit $\mathbf{X} \sim MBKF(\alpha, \Sigma)$ avec $\alpha > 0$.

(i) $\mathbf{X} \xrightarrow[\alpha \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$

(ii) Si $\mathbf{X} \sim MBKF(\alpha, \Sigma)$ et $\alpha > 0$, alors $\mathbb{E} \left[(\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X})^i \right] = 2^i \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + i) \Gamma(\alpha + i)}{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha)}$.

(iii) les cumulants ont la forme suivante :

$$\kappa_j(2i) = \alpha^{1-i} \frac{(2i)!}{2^{i_i}} \sum_{l=1}^d \sigma^{2i}(j, l) \text{ avec } i \geq 1, j = 1, \dots, d$$

où $\sigma(j, l)$ est l'élément à la position (j, l) de la matrice $\Sigma^{\frac{1}{2}}$.

4.2 Estimation des hyperparamètres

Pour mettre en application le modèle MBKF, nous avons proposé deux estimateurs pour estimer ses hyperparamètres (α et Σ), à savoir la méthode des moments et le maximum de vraisemblance.

4.2.1 Méthode des moments

D'après la proposition et en prenant $i = 2$ dans (ii), les paramètres α et Σ sont estimés comme suit :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, \quad \hat{\alpha} = \left(\frac{(\mathbf{x}^T \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{x})^2}{d(d+2)} - 1 \right)^{-1} \quad (2)$$

où $\overline{(\mathbf{x}^T \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{x})^2} = \frac{1}{n} \sum_i (\mathbf{x}_i^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}_i)^2$ est la moyenne empirique de $\mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^2 \right]$.

4.2.2 Algorithme EM

La procédure d'estimation du paramètre α est donnée par l'algorithme 1. Par ailleurs, la matrice de covariance Σ est estimée une fois pour toute par l'Eq.2.

5 Application : ajustement sur des images

Afin d'évaluer la qualité du modèle MBKF, une comparaison des PDFs jointes estimées et observées des coefficients de détails de curvelets et d'ondelettes des images naturelles, est illustrée sur les figures 4 et 5. Deux modèles multivariés ont été mis en comparaison avec notre modèle MBKF à savoir : Jeffrey [5] et AMGGD [6].

Sur la Fig.4-(b), la PDF jointe observée des coefficients de détail de l'UDWT de l'image test de Barbara (en rouge) a été ajustée par trois modèles : MBKF (en bleu), AMGGD (en vert) et Jeffrey (en bleu clair), dans le cas bivarié. Les trois colonnes correspondent respectivement aux dépendances entre : les coefficients et leurs voisins directs gauche/droite, les coefficients et leurs voisins diagonaux, les coefficients et leurs parents à l'échelle supérieure. Nous constatons, suite à l'observation des courbes, que la PDF MBKF est en général plus proche de la PDF observée comparée aux PDFs du modèle AMGGD

Algorithme 1 Algorithme EM pour l'estimation du paramètre α du modèle MBKF

ENTRÉES: estimation initiale de α

- 1: **répéter**
- 2: **Étape E** : calculer

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(t)} &= \mathbb{E}[U|\mathbf{x}] \\ &= \left(\frac{\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\alpha - \frac{d}{2} + 1} \left(\sqrt{2\alpha} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \right)}{K_{\alpha - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{2\alpha} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(t)} &= \mathbb{E}[\log(U)|\mathbf{x}] = -\log(\alpha) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\alpha (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial K_{\alpha - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{2\alpha} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \right)}{K_{\alpha - \frac{d}{2}} \left(\sqrt{2\alpha} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \right)} \end{aligned}$$

U et (\mathbf{X}, U) représentent respectivement les données cachées et les données complètes.

- 3: **Étape M** :

l'estimé de $\alpha^{(t+1)}$ est la solution de l'équation suivante :

$$\Psi(\alpha^{(t)}) - \log(\alpha^{(t)}) = \overline{\varphi_2^{(t)}} - \overline{\varphi_1^{(t)}} + 1$$

où $\overline{\varphi_1}$ et $\overline{\varphi_2}$ sont respectivement les moyennes empiriques de

$$\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 : \varphi_1^{(t)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_1^{(t)}(i), \quad \varphi_2^{(t)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_2^{(t)}(i)$$

- 4: **jusqu'à** convergence.

et Jeffrey. Ceci est confirmé par la divergence KL calculée entre la PDF observée et estimée.

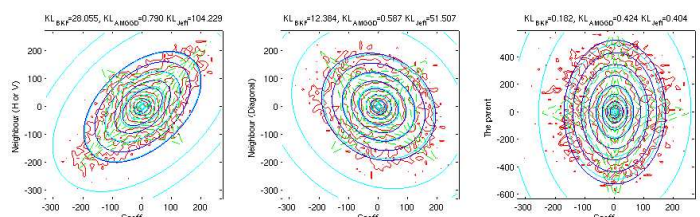
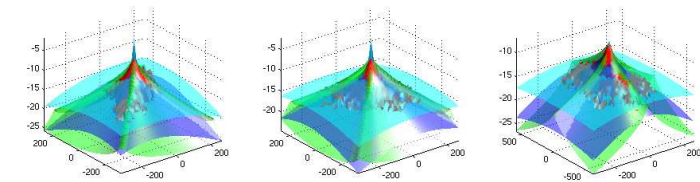
Dans la Fig.4-(a), nous illustrons cette même comparaison sur les coefficients de détails de la FDCT [9] de Barbara. Nous constatons que la PDF MBKF est plus proche de la PDF observée pour le voisinage "coefficient-parent". En revanche, le MBKF fournit des résultats moins bons comparé au modèle AMGGD pour capturer les dépendances intra-échelles, mais reste meilleur comparés au modèle de Jeffrey. Ceci est confirmé par la divergence KL calculée entre la PDF observée et estimée.

Ce comportement observé pour le cas des coefficients de détail d'ondelettes (sur 3 échelles et 3 orientations) et de curvelets (sur 3 échelles et toutes les orientations) est confirmé, dans la Fig.5, par la divergence KL calculée sur une base de 100 images [7]. Nous constatons que le modèle MBKF dépasse le modèle de Jeffrey que ce soit pour le cas des ondelettes ou des curvelets. Par ailleurs, il est en général meilleur comparé au modèle AMGGD dans le cas des ondelettes. Cette tendance s'inverse pour la cas des curvelets où le modèle AMGGD devient meilleur. Finalement, ce résultat plaide en faveur de notre modèle de PDF comme un modèle *d'a priori* adéquat pour les statistiques jointes observées.

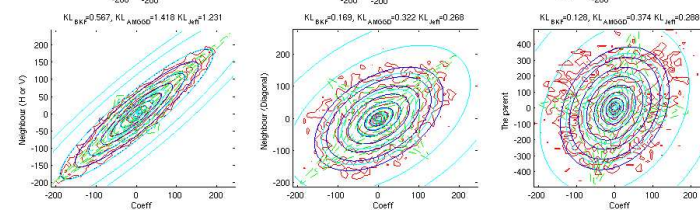
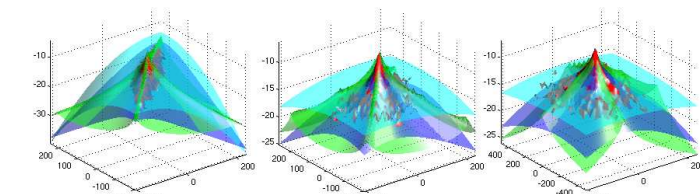
6 Conclusion

Nous avons proposé le modèle MBKF pour caractériser les dépendances inter- et intra-échelle entre les coefficients d'images dans le domaine des transformées multi-échelles parcimonieuses orientées et non-orientées. Ce modèle a été pleinement caractérisé en proposant une forme analytique pour sa classe de PDFs, ainsi que des estimateurs pour estimer ses hyperparamètres.

Après cette phase de modélisation des statistiques jointes (dépendances inter- et intra-échelles), notre futur travail se focalisera sur la mise à profit du modèle MBKF comme *a priori* pour le problème de la restauration d'images dans un contexte bayésien.



(a) Coefficients de curvelets

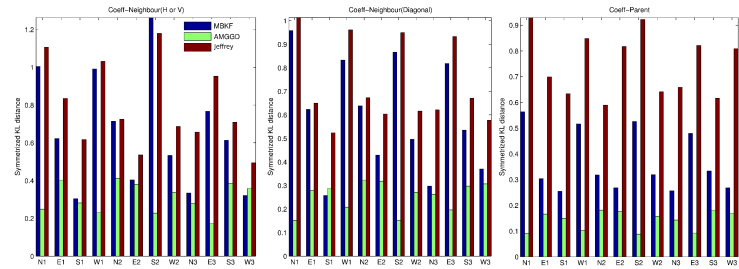


(b) Coefficients d'ondelettes

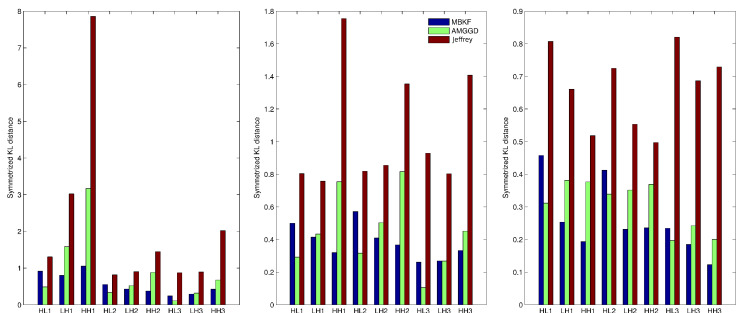
FIGURE 4 – Exemple de comparaison sur une échelle log – log entre la PDF jointe observée et les PDFs estimées des coefficients de détail de curvelets et d'ondelettes pour l'image Barbara dans le cas bivarié ($d = 2$). La distribution jointe observée (en rouge) a été ajustée par trois modèles d'*a priori* : MBKF (en bleu), AMGGD (en vert) et Jeffrey (en bleu clair). Les trois colonnes correspondent aux dépendances inter- et intra-échelles entre les coefficients.

Références

- [1] S. G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2nd Edition, San Diego : Academic Press, 1999.
- [2] U. Grenander and A. Srivastava. *Probability Models for Clutter in Natural Images*. PAMI, Vol 23(4), pp 424-429, 2001.
- [3] J. Liu and P. Moulin. *Information-Theoretic Analysis of Interscale and Intrascale Dependencies Between Image Wavelet Coefficients*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol 10(10), pp 1647-1658, 2001.
- [4] A. Srivastava, A. B. Lee, E. P. Simoncelli and S-C. Zhu. *On Advances in Statistical Modeling of Natural Images*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol 18, pp 17-33, 2003.



(a) Coefficients de curvelets



(b) Coefficients d'ondelettes

FIGURE 5 – Evaluation de la divergence de KL, calculée entre la PDF observée et les PDF estimées par les *a priori* multivariés : MBKF, AMGGD et Jeffrey. La divergence KL a été moyennée pour chaque orientation et à chaque échelle sur une base de 100 images [7]. Trois orientations ont été considérées pour le UDWT. Pour la FDCT et pour mieux synthétiser les résultats, nous avons aussi moyenné les valeurs KL sur toutes les orientations faisant partie d'un même quadrant : Est, Ouest, Nord, Sud.

- [5] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright and E. P. Simoncelli. *Image Denoising Using Scale Mixtures of Gaussians in the Wavelet Domain*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol 12(11), pp 1338-1351, 2003.
- [6] L. Boubchir and J. Fadili. *Multivariate Statistical Modeling of Images with the Curvelet Transform*. IEEE International Conference on Signal Processing and Its Applications, pp 747-750, 2005.
- [7] <http://sipi.usc.edu/services/database/Database.html>
- [8] E. Candès and D. Donoho. *Curvelets : A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation of Objects with Edges*. Curves and Surface, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, pp 123-143, 1999.
- [9] E. J. Candès, L. Demanet, D. L. Donoho and L. Ying. *Fast Discrete Curvelet Transforms*. SIAM Multiscale Model. Simul., Vol 5(3), pp 861-899, 2006.
- [10] E. P. Simoncelli. *Modeling the Joint Statistics of images in the wavelet Domain*. Proc.SPIE : Wavelet Applications in Signal and Image Processing VII, Vol. 3813, pp 188-195, 1999.
- [11] J. Fadili and L. Boubchir. *Analytical Form for a Bayesian Wavelet Estimator of Images Using The Bessel K forms Densities*. IEEE Transaction on Image Processing, Vol 14(2), pp 231-240, 2005.