Chapitre I

Notions de Base

- Traitement d'image
- Treillis
- Résidus
- Mesures

Traitement d' Images (I)

=> L'analyse d'images peut se diviser en trois grands types de problèmes : Codification, Extraction de caractéristiques et Segmentation.

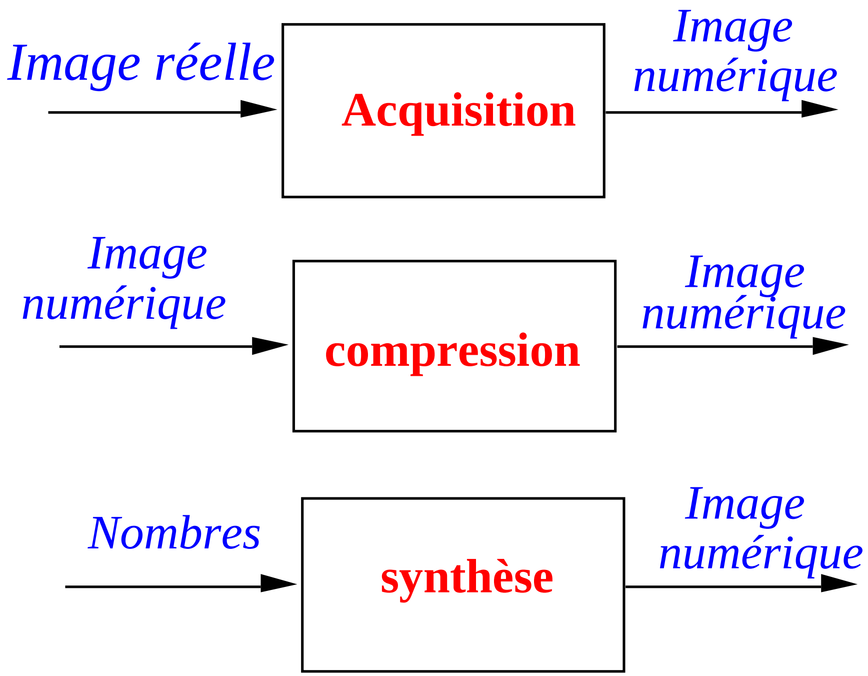
1- *Codification :*

La codification inclut tous les modes de représentation des images. Il s'agit en particulier de:

Acquisition: Transformation d'une image réelle en nombres

Compression: Modification de la représentation de l'image.

Synthèse: Création d'une image à partir d'une représentation plus symbolique.



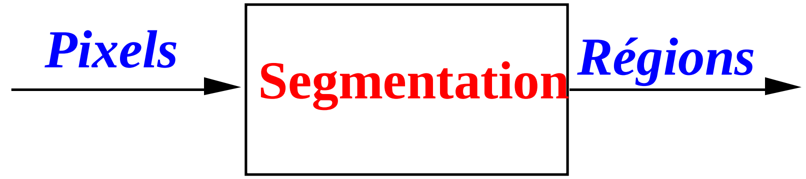
Traitement d' Images (II)

2- *Extraction de Caractéristiques :*

L'objectif est l'amélioration de la qualité d'une image ou la mise en évidence de quelques unes de ses caractéristiques. Ceci inclut l'extraction de paramètres et la restauration d'images présentant du bruit ou des défauts.

3- *Segmentation :*

La segmentation consiste à construire une représentation symbolique de l'image. C'est à dire, définir une carte de l'image qui décrit les régions homogènes selon un critère établi *a priori*.



Quatre démarches en traitement d'image

	Espace 'Géométrique'	Espaces abstraits
Linéaire	***Linéaire:*** • *Convolution,* • *Fourier, ondelettes* • *Tomographie* • *Krigeage, Splines*	***Statistique:*** • *Analyse multivariée* • *Réseaux neuronaux* • *Stéréologie*
Non linéaire	***Morphologique:*** • *Filtrage* • *Hiérarchies* *(ex. Granulométries)* • *Ensembles aléatoires* • *Ligne de partage des eaux*	***Syntactique:*** • *démarches sémantiques* • *Grammaires* • *Indexation*

Définitions de la Morphologie Mathématique

Mathématique

Algèbre des Treillis
Géométries ensembliste et intégrale
Stéréologie
Modèles topologico-probabilistes

Physique

Démarche fondée sur la théorie des ensembles destinée à lier propriétés physiques des objets et textures des structures.

Traitement du signal

Techniques non linéaires de traitement du signal reposant sur des opérations de sup. et d'inf.

Informatique

Algorithmes et programmes permettant d'effectuer des traitements d'image sur ordinateur ou sur matériel spécialisé.

Structures de Base

Traitement linéaire du signal

La structure fondamentale dans le cas linéaire est l' ***espace vectoriel***

- ensemble de vecteurs V
- ensemble de scalaires K,

tels que:

1) V, muni de l'addition, est un ***groupe commutatif***
2) K est un ***corps,***
3) Il existe une loi de ***multiplication*** externe entre scalaires et vecteurs.

Morphologie mathématique

La structure fondamentale est le ***treillis complet,*** ou ensemble L tel que:

1) L est muni de l'ordre partiel ≤ :

$$\begin{cases} a \leq a \\ a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b \\ a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c \end{cases}$$

2) Pour toute famille d'éléments $\{X_i\} \in L$, il existe, dans L, un ***supremum*** et un ***infimum*** *i.e.*:

Inf: plus grand minorant $\wedge \{ X_i \}$
Sup: plus petit majorant $\vee \{ X_i \}$

Concepts Premiers

Traitement linéaire :

=> La structure de travail est l'espace vectoriel et la loi fondamentale est l'addition .

- La transformation de base est celle qui préserve la structure de travail et commute avec la loi .

$$\Psi(\Sigma \lambda_i f_i) = \Sigma \lambda_i \Psi(f_i)$$

C'est la **convolution**.

Morphologie Mathématique :

=> La structure de travail est le treillis (ordre) et les lois fondamentales sont le supremum et l'infimum :

Les transformations premières sont celles qui préservent ces lois de base du treillis.

Préservation de l'ordre:

$$X \leq Y \Rightarrow \Psi(X) \leq \Psi(Y) \Leftrightarrow \text{croissance}$$

Commutativité avec Sup.:

$$\Psi(\vee X_i) = \vee \Psi(X_i) \Leftrightarrow \text{dilatation}$$

Commutativité avec Inf.:

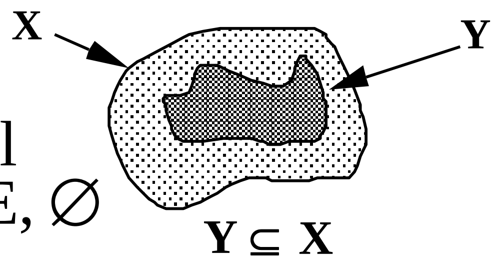
$$\Psi(\wedge X_i) = \wedge \Psi(X_i) \Leftrightarrow \text{érosion}$$

Exemples de treillis

Treillis $\mathcal{P}$(E) des parties d'un ensemble E:

L'ordre est défini sur $\mathcal{P}$(E) par la relation d' inclusion

Sup: ∪
Inf : ∩
Ordre partiel
Extrêmes : E, ∅



Treillis des réels ou entiers:

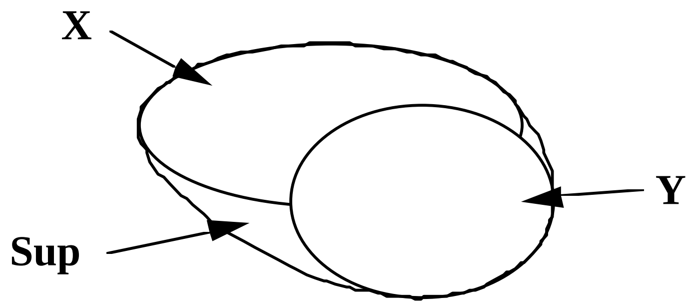
Ordre numérique sur N ou R

Sup: ∨ (sens usuel)
Inf : ∧
Ordre total
Extrèmes : **-∞, +∞**

Treillis des ensembles convexes de R^n:

Ordre défini par la relation d'inclusion

sup : enveloppe convexe de la réunion
Inf : intersection



Treillis de Fonctions

- E étant un ensemble arbitraire, et T désignant **R, Z** ou une de leurs parties fermées, les fonctions $f : E \rightarrow T$ forment à leur tour un **treillis** , noté T^E, pour **l'ordre produit** :

$$f \leq g \quad \text{ssi} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tous } x \in E ,$$

  et où le sup et l'inf dérivent des sup et inf numériques, *i.e.*

$$(\vee f_i)(x) = \vee f_i(x) \qquad (\wedge f_i)(x) = \wedge f_i(x) .$$

  On convient de noter 0 à la fois le minimum dans T et dans T^E

- Dans T^E, les fonctions **impulsions** :

  $$k_{x,t}(y) = t \quad \text{si} \quad x = y \qquad ; \qquad k_{x,t}(y) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq y$$

  sont **sup-génératrices** *i.e.* tout $f : E \rightarrow T$ est un supremum d'impulsions.
- La démarche précédente s' étend directement aux produits de treillis de type T, c'est à dire aux ***fonctions multivariées*** (*e.g.* couleur).

Treillis des partitions

Définition : On appelle **Partition** d'un espace E toute application D: E $\rightarrow \mathcal{P}$(E) telle que

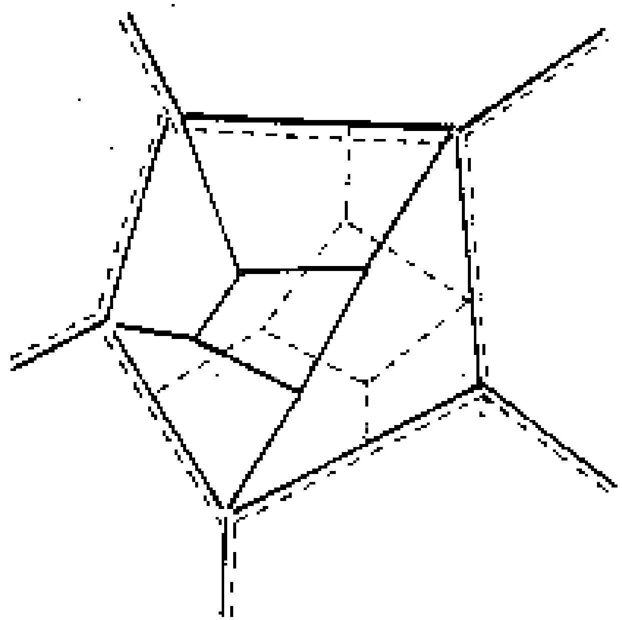
(i) $\forall\ x \in E, \quad x \in D(x)$

(ii) $\forall\ (x, y) \in E,$

soit $\quad D(x) = D(y)$

soit $\quad D(x) \cap D(y) = \emptyset$

- Les partitions de E forment un **treillis** $\mathcal{D}$ pour l'ordre selon lequel D ≤ D' quand chaque classe de D est incluse dans une classe de D'. Le plus grand élément de $\mathcal{D}$ est E lui-même, et le plus petit celui qui pulvérise E en la totalité de ses points.



Le **sup** *des deux types de cellules est le pentagone où leurs frontières coïncident.*

Leur **inf***, plus simple, s'obtient par intersection des cellules.*

Atomes , Co-premiers et Complément

- Une partie L' d 'un treillis L est un ***sous treillis*** si elle est stable pour les $\vee$ et $\wedge$, et si elle contient les deux éléments extrêmes 0 et m de L.

- Un treillis L est ***complémenté*** quand pour tout $a \in L$, il existe au moins un $b \in L$ tel que

$$\mathbf{a \vee b = m \quad ; \quad a \wedge b = 0 .}$$

- Un élément a , non nul, d'un treillis L est un ***atome*** si

$$\mathbf{x \leq a \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = a .}$$

- Un élément $x \in L$ est dit ***co-premier*** quand

$$\mathbf{x \leq a \vee b \quad \Rightarrow \quad x \leq a \quad ou \quad x \leq b .}$$

- De plus, l 'élément $x \in L$ est ***fortement co-premier*** quand pour toute famille $\{b_i , i \in I\}$, finie ou non, l 'on a

$$\mathbf{x \leq \mathit{f}\{ b_i , i \in I \} \quad \Rightarrow \quad x \leq b \quad pour\ un \quad b \in \{ b_i \} .}$$

Sup-générateurs ; Distributivité

- Un treillis L est ***sup-généré*** quand il possède un sous-ensemble $X \subseteq L$, dit ***sup-générateur***, tel que tout élément $a \in L$ est le supremum des éléments de X qu'il majore:

$$\mathbf{a = \vee \{ x \in X , x \leq a \}}$$

Quand les sup-générateurs sont co-premiers (resp. atomiques) , L est qualifié de co-premier (resp. atomique) .

- Le treillis L est ***distributif*** quand, pour tout $a , y , z \in L$

$$\mathbf{a \wedge (y \vee z) = (a \wedge y) \vee (a \wedge z)}$$ ou, de façon équivalente

$$\mathbf{a \vee (y \wedge z) = (a \vee y) \wedge (a \vee z) .}$$

- Quand ces conditions s'étendent à l'infini, L est dit ***infiniment distributif***

$$\mathbf{a \wedge (\vee y_i , i \in I) = \vee \{ (a \wedge y_i) , i \in I \}}$$

$$\mathbf{a \vee (\wedge y_i , i \in I) = \wedge \{ (a \vee y_i) , i \in I \}}$$

(NB : *Les deux conditions ne sont plus équivalentes* !)

Caractérisation des treillis $\mathcal{P}$(E)

Théorème *(G.Matheron)**:*** Les quatre énoncés suivants sont équivalents

- L est ***complémenté*** et généré par la classe Q de ses ***co-premiers*** ;
- L est ***atomique*** (de classe Q_a) et généré par la classe Q_s de ses ***co-premiers forts*** ;
- L est isomorphe à un treillis de type $\mathcal{P}$**(E)** ;
- L est isomorphe au treillis $\mathcal{P}$**(Q)** .

Quand ils sont vérifiés, Lest alors infiniment distributif et l'on a

$$\mathbf{Q = Q_a = Q_s} \ .$$

Autres treillis :

- Le treillis de fonctions T^E est ***infiniment distributif*** mais pas complementé. Les impulsions y sont des ***co-premiers*** sup-générateurs, et même ***forts*** quand Test discret (T fini, T = Z), mais pas des atomes .
- Le treillis g des partitions est ***sup-généré***, mais ni distributif ni complementé.

Notion de Dualité

Avec la structure de treillis , on a défini deux lois, Sup. et Inf., qui jouent des rôles symétriques .

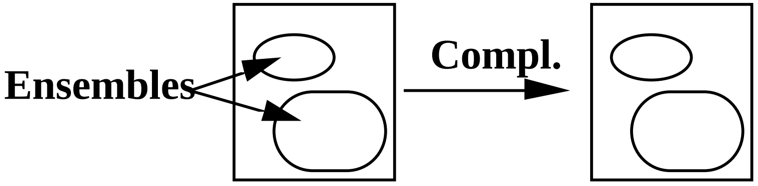
Toute involution qui permute Sup. et Inf. engendre une dualité .

***Définition*:** Deux opérateurs ψ et ψ^* sont duaux vis à vis de l' involution (c) si, pour tout X

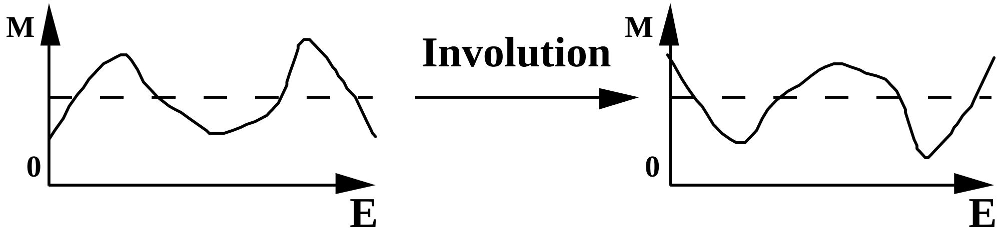
$$\psi (X^c) = [\psi^* (X)]^c$$

***Exemples d'involution*:**

Treillis des parties d'un ensemble : L'involution est la complémentation :



Treillis des fonctions f : E $\rightarrow$ [0,M] : L'involution est la symétrie par rapport à M/2.



Autodualité

Démarche linéaire :

- La convolution est auto-duale , c'est à dire duale d'elle- même:

  $$f * (-g) = - (f * g)$$

- Cela signifie que les composantes claires et sombres sont toujours traitées de manière symétrique.

Démarche morphologique :

- La dualité fondamentale entre le sup. et l'inf. se transmet à tous les outils de la morphologie mathématique.

- En général, les transformations vont par paires qui se correspondent par dualité, par exemple érosion et dilatation, ouverture et fermeture
- Cependant , on trouve aussi des opérateurs
  - ***autoduaux***, *i.e.*

$\psi (X^c) = [\psi (X)]^c$ (le centre morphologique)

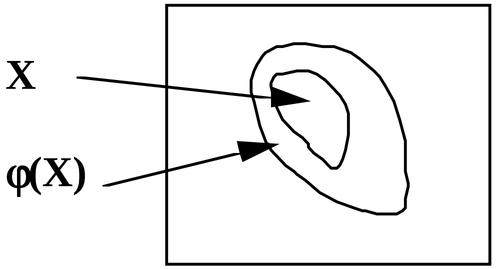
- ou ***invariants par dualité***, *i.e.*

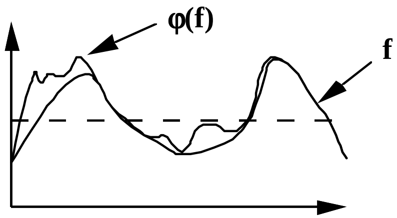
$\psi (X^c) = \psi (X)$ (ex : la frontière dans R^n)

Comparaison entre Entrée et Sortie

- ***Extensivité, anti-extensivité :*** Une transformation est extensive si son résultat est toujours plus grand que l'original. On définit la notion d'anti-extensivité par dualité.

Extensivité : $X \subseteq \Psi(X)$ anti-extensivité : $X \supseteq \Psi(X)$ $X \subseteq E$





Ensembles (extensivité) ***Fonctions (extensivité)***

- ***Idempotence :*** Une transformation est dite idempotente lorsqu'elle est invariante par itération.

Idempotence: $\Psi[\Psi(X)] = \Psi(X)$

Treillis d' opérateurs

A tout treillis L est associé la classe L' des opérations $\alpha: L \to L$. Or, L' est à son tour un treillis où:

$\alpha \leq \beta$ *(dans L')*

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha(A) \leq \beta(A)}$ *pour tout* $\mathbf{A} \in L$

$\boldsymbol{(\vee\alpha_i)\ (A) = \vee\alpha_i\ (A)}$

$\boldsymbol{(\wedge\alpha_i)\ (A) = \wedge\alpha_i\ (A)}$ *(dans L')* *(dans L)* *(dans L')* *(dans L)*

- Par exemple, les applications $\alpha : L \to L$ qui sont:

  croissantes*, ou *extensives*, ou *anti-extensives

  sur L sont autant de sous-treillis de L' ;

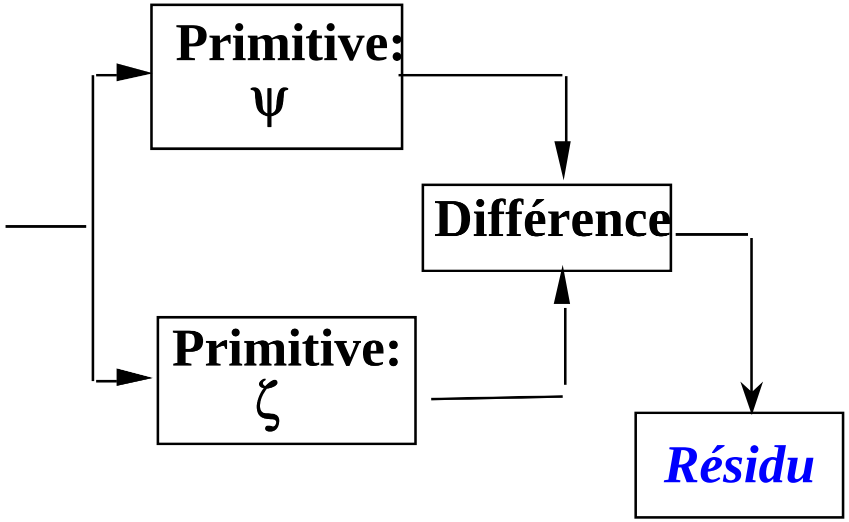
- Plus généralement, nous rencontrerons les treillis

  des ouvertures ; des filtres ; de l'activité *etc...*

Notion de Résidu en Morphologie

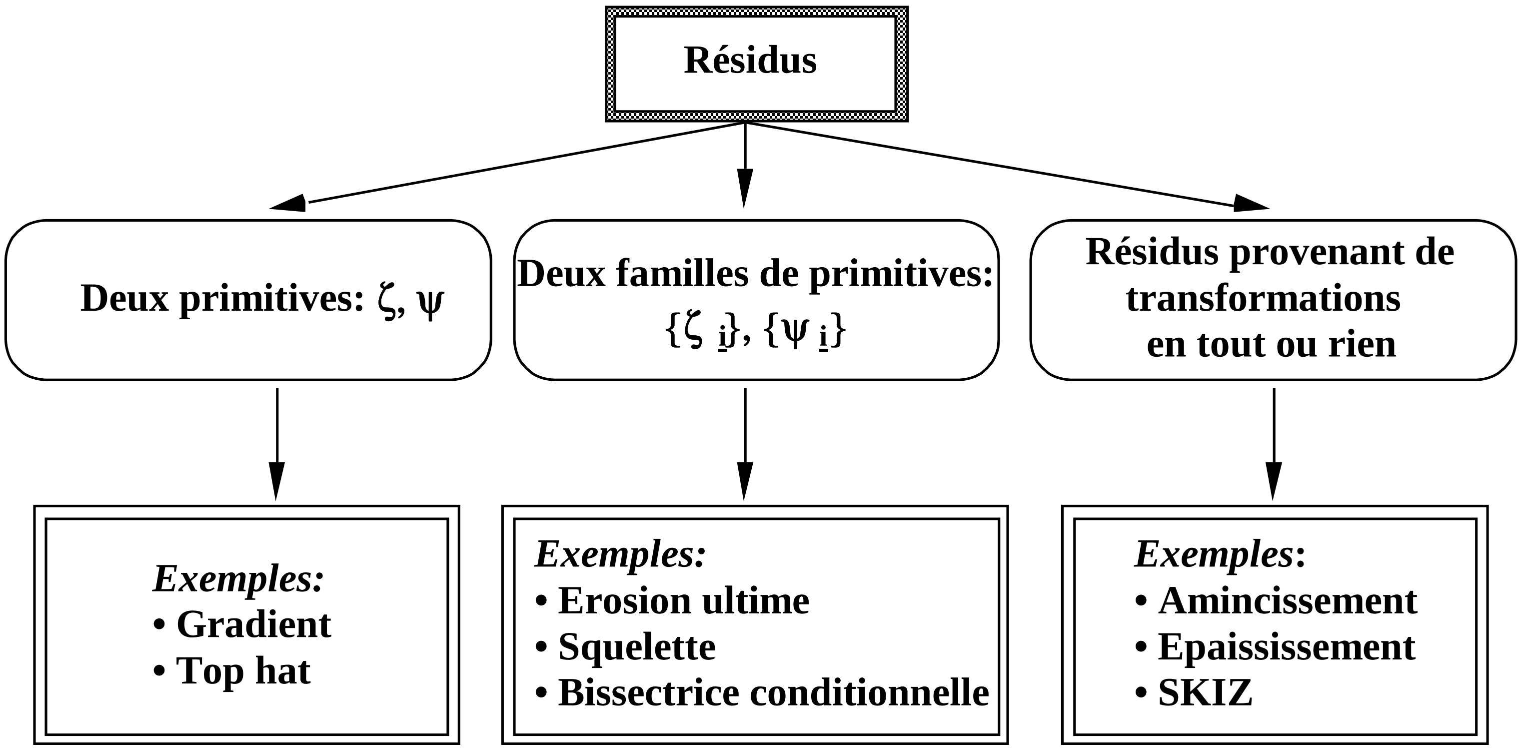
- La théorie du filtrage morphologique met l'accent sur les propriétés de croissance et d'idempotence ainsi que sur les relations d'ordre entre transformations .

- On peut aussi s'intéresser aux différences entre deux (ou plus) transformations. On parle alors de ***résidus*** .



Classification des résidus

- Les résidus que l'on utilise en pratique peuvent être regroupés en trois catégories :
  1- Les résidus de deux primitives
  2- Les résidus de deux familles de primitives
  3- Les résidus provenant de transformations en tout ou rien



Transformations morphologiques et homothéties

Il est souvent nécessaire de modifier l'échelle de travail, c'est à dire de procéder à une homothétie $X \to \lambda X$. On peut distinguer deux types de transformations:

1- Opérations ***invariantes par homothétie*:**

$$\psi(X) = (1/\lambda)\, \psi(\lambda X)$$

Exemples: Frontière, squelette, centre de gravité.

2- Familles de transformations ***compatibles avec l'homothétie*:**

$$\psi_1(X) = (1/\lambda)\, \psi_\lambda(\lambda X)$$

Exemple: granulométrie, FAS, associés à des éléments structurants homothétiques $B(\lambda) = \lambda B$. On a alors $\psi_B(X) = (1/\lambda)\, \psi_{\lambda B}(\lambda X)$.

N.B. 1/ C’est la famille prise **globalement** qui devient invariante selon les homothéties.
2/ *Mutatis mutandis*, les notions ci-dessus s’étendent aux fonctions.

Mesures et Courbes

Toute analyse d'image se termine soit par une image nouvelle (ex. filtrage), soit par une mesure, c'est à dire des nombres.

Mesures

La plus simple, et sans doute la plus fréquente des mesures est l'indicateur de présence-absence. La seconde est la mesure de Lebesgue, ou ses versions digitales. Il en existe quelques autres, topologiques ou métriques

Familles dépendant d'un paramètre positif

Les deux représentations courantes dans ce cas consistent à

Associer une mesure à chaque transformation de la famille et obtenir une courbe dépendant du paramètre λ. *Exemples :* ***histogramme, fonction de distribution granulométrique***.

- ou considérer la famille de transformations comme les sections d'une fonction numérique. *Exemple :* ***fonction distance***.

Références

Sur les origines :

La morphologie mathématique a pour racines principales la théorie des treillis et la géométrie aléatoire. Crée par G. Matheron et J.Serra en 1964, elle a été connue par trois publications de base de ces derniers, à savoir :

- {MAT75}, qui porte sur les ensembles (cadre topologique, ensembles aléatoires, modèle booléen, convexité, granulométries, représentation des transformations croissantes) ,
- {SER82}, axé sur les transformations invariantes par translation (extension aux fonctions, morphologie discrète, amincissements, combinaison d'opérateurs),
- {SER88}, qui étend la démarche au cadre des treillis (dilatation, theorie du filtrage morphologique, connexité, squelette, fonctions booléennes). Cette démarche a été poursuivie par H.Heijmans et Ch. Ronse {HEI90} {RON91}.

Il existe par ailleurs trois excellents traités sur le sujet {COS89} {SCH93} {HEI 94}. On trouvera enfin de significatives introductions à la morphologie mathématique dans {SER87},{HAR87},{GIA88},{DOU92b} et {SER97}.