Décompositions en ondelettes

Stéphane Jaffard

Qu'entendrons-nous par l'expression 'décompositions en ondelettes'? Au sens le plus restrictif, elle signifiera l'étude des décompositions des fonctions sur des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ qui ont une forme algorithmique remarquable

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

les éléments de la base sont obtenus par translations-dilatations d'une unique fonction ψ. Cette acceptation réductrice constituera cependant l'un des fils conducteurs de l'ensemble des thèmes scientifiques que nous allons décrire. En fait la recherche 'autour des ondelettes' recouvre maintenant un ensemble assez disparate de décompositions; on pourrait presque affirmer que leur seul lien est d'avoir été initialement développées au sein d'une petite communauté scientifique qui s'est rassemblée au début des annés 80 autour d'Alex Grossmann, Jean Morlet et Yves Meyer, et qui a maintenant largement essaimé. Nous décrirons les problèmes scientifiques qui ont motivé le développement de ces différentes techniques, leurs rapports, leurs différences, et surtout l'extraordinaire 'fertilisation croisée' que ces études ont permis, en réunissant des scientifiques d'origines diverses et en favorisant leurs collaborations. Une description chronologique stricte serait assez décousue, car les mêmes idées sont souvent apparues, sous des déguisements différents, de façon indépendante dans des communautés scientifiques séparées. Nous allons donc plutôt essayer de prendre comme fil conducteur quelques thèmes centraux dont nous suivrons successivement les développements et les interactions. Notre but est également de fournir une introduction aux articles et ouvrages sur ce sujet. La litterature étant maintenant gigantesque, nous mentionnerons plutôt des monographies ou des articles introductifs récents, qui contiennent eux-mêmes la bibliographie spécialisée dans chaque sous-domaine. *Ce texte est le fruit de nombreuses discussions avec Yves Meyer; qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.*

1 Pourquoi des bases inconditionnelles ?

1.1 Constructions de bases orthonormées de L^2

La 'base reine' a certainement été longtemps le système trigonométrique (et l'est encore probablement...). Même si la formulation précise et synthétique que nous connaissons en terme de base orthonormée de $L^2([0,2\pi])$ ne pouvait avoir un sens qu'après l'introduction de l'intégrale de Lebesgue, on savait depuis les travaux de Bernoulli sur l'équation des ondes, et surtout depuis les travaux de Fourier, motivés par l'équation de la chaleur, que la base trigonométrique est incroyablement bien adaptée à la recherche des solutions de nombreux problèmes issus de la physique. Malheureusement la convergence des séries correspondantes posa très vite des problèmes difficiles aux mathématiciens, depuis que Du Bois-Reymond démontra en 1873 que la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger en certains points. Ce phénomène est-il inhérent à toute décomposition orthogonale? C'est le problème que Hilbert posa à son élève Alfred Haar, et celui-ci apporta un démenti en construisant dans sa thèse, publiée en 1909, la base orthonormée de $L^2([0,1])$ suivante: Cette base est composée de la fonction 1, et des $\psi_{j,k}$ définis comme en (1), avec $j \geq 0$, $k = 0, \dots 2^{j-1}$, et

$$\psi(x) = 1_{[0,1/2]} - 1_{[1/2,1]}$$

où 1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A. On peut aussi prendre toutes les valeurs entières de j et k et obtenir alors une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Haar montra que les sommes partielles de la décomposition d'une fonction continue dans cette base convergent uniformément. La comparaison avec Fourier peut laisser perplexe: une base composée de fonctions discontinues est plus adaptée à la décomposition des fonctions continues que la base de Fourier, dont les éléments sont indéfiniment dérivables. La base de Haar possède une autre propriété remarquable qui fait défaut au système trigonométrique: Marcinkiewicz montra en 1937 qu'elle est une base inconditionnelle de tous les espaces L^p si $1 < p < \infty$; cela signifie que toute fonction de L^p s'écrit de façon unique comme limite d'une série $\sum C_{j,k}\psi_{j,k}$ et que la convergence est 'inconditionnelle' c'est-à-dire ne dépend pas de l'ordre des termes de la série. Par contre, la base de Haar ne peut évidemment pas être une base d'espaces ne contenant que des fonctions continues, puisque ses éléments ne sont pas continus. Cette dernière remarque motiva les recherches pour 'régulariser' la base de Haar; le but était de construire des bases similaires, bien localisées, et adaptées à la plus grande gamme possible d'espaces fonctionnels. En 1910, Faber considère la base composée des fonctions 1, x et des primitives de la base de Haar. Cette *base de Schauder* (ainsi nommée car elle sera redécouverte par Schauder en 1927) a la même forme algorithmique que la base de Haar: elle est encore du type (1) en prenant pour ψ la primitive de l'ondelette de Haar, c'est-à-dire la fonction 'chapeau' définie par

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \inf(x, 1-x) \quad \text{si} \quad x \in [0,1] \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Faber montre que l'on obtient ainsi une base des fonctions continues sur $[0,1]$. Il y a cependant un prix à payer: la base de Schauder n'est pas une base de L^2. Doit-on nécessairement perdre d'un côté ce que l'on a gagné de l'autre? En 1928, Franklin applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base de Schauder, et obtient ainsi une base qui est simultanément inconditionnelle pour les espaces $L^p([0,1])$, $C([0,1])$, et pour les espaces de Sobolev de faible régularité. On peut dès lors itérer intégration (qui a pour effet de régulariser) et orthonormalisation de Schmidt (qui assure l'orthonormalité L^2); Ciesielski construit ainsi en 1972 des bases inconditionnelles d'une gamme de plus en plus large d'espaces de Sobolev. Bien sûr, l'application du procédé de Gram-Schmidt fait perdre à ces bases, théoriquement calculables, tout caractère explicite (elles gardent cependant une très bonne localisation). La situation est encore plus mauvaise que pour les polynômes orthogonaux classiques (Legendre, Tchébycheff...) dont la définition peut certes être donnée au moyen du procédé de Gram-Schmidt, mais qui sont également définis par des formules explicites. Nous avons perdu la simplicité algorithmique des bases de Haar ou de Schauder, et on ne sera donc pas étonné que les bases de Franklin ou de Ciesielski n'aient pas eu d'utilisations hors des mathématiques pures. On notera à un autre extrême l'existence de la 'Base de Shannon', où l'ondelette est

$$\psi(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2x} - \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

qui jouit de propriétés opposées à celles de la base de Haar. Ici ψ est mal localisée en espace mais C^∞. Peut-on trouver un compromis entre la base de Haar et celle de Shannon, c'est-à-dire concilier régularité, localisation et simplicité algorithmique? Une première simplification conceptuelle importante par rapport aux travaux de Faber et Ciesielski est amenée par Strömberg en 1981. Son idée est d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt non plus sur l'intervalle $[0, 1]$ mais sur toute la droite réelle en partant de $-\infty$. Cela est effectivement possible et, du fait de l'invariance par translation et dilatation de la droite réelle, ce substitut de la base de Franklin fournit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ qui a la forme algorithmique de (1). En commençant ce procédé avec fonctions polynomiales par morceaux arbitrairement régulières (les 'B-splines') au lieu des fonctions affines par morceaux de la base de Schauder, Strömberg construit ainsi des bases orthonormées d'ondelettes de régularité arbitrairement grandes. Ces bases sont inconditionnelles pour une gamme d'espaces de Sobolev de régularité (ou d'irrégularité) arbitraire, mais majorée par la régularité du polynôme par morceaux dont on est parti. L'ultime perfectionnement sera apporté par Yves Meyer qui construit en 1986 une ondelette C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées. Cette base d'ondelettes convient donc pour analyser simultanément tous les espaces de Sobolev. Rappelons que l'espace de Sobolev H^s est constitué des fonctions de L^2 dont les dérivées d'ordre (éventuellement fractionnaire) s appartiennent à L^2. Ainsi une fonction f appartient à H^s si et seulement si ses coefficients d'ondelettes $C_{j,k}$ vérifient

$$\sum |C_{j,k}|^2 (1 + 2^{2j})^s < +\infty.$$

L'importance de telles bases se situe à plusieurs niveaux: Tout d'abord, elles apportent une simplification conceptuelle importante; ainsi elles sont des bases simples de certains espaces 'limites' pour lesquels l'obtention de bases tenait jusqu'alors de la prouesse technique. Citons l'espace de Hardy réel $\mathcal{H}^1$ dont une base avait été construite par Maurey en 1980, son dual, l'espace BMO de John et Nirenberg, ou les espaces de Besov $B_p^{s,q}$, qui généralisent les espaces de Sobolev; nous verrons l'importance des espaces de Besov, notamment dans le cas non localement convexe, lorsque p et q sont plus petits que 1. Les bases d'ondelettes apportent donc une réponse simple et unificatrice au problème de la détermination de bases inconditionnelles des espaces fonctionnels 'classiques', détermination qui se faisait jusqu'alors au 'coup par coup'. Citons à titre d'exemple la caractérisation très simple des espaces de Hölder $\dot{C}^\alpha$ ($=B_\infty^{\alpha,\infty}$), composés (si $\alpha \notin \mathbb{N}$) des fonctions $[\alpha]$ fois dérivables, dont les dérivées d'ordre $[\alpha]$ vérifient la condition de Hölder

$$|f^{([\alpha])}(x) - f^{([\alpha])}(y)| \leq C|x-y|^{\alpha-[\alpha]}.$$

La fonction f appartient à $\dot{C}^\alpha$ si et seulement si

$$\exists C > 0 \; \forall j, k \;\; |C_{j,k}| \leq C 2^{-(\frac{1}{2}+\alpha)j}.$$

Rappelons à titre de comparaison que l'appartenance à $\dot{C}^\alpha$ d'une fonction périodique ne peut se caractériser par une condition sur le module de ses coefficients de Fourier.

Les caractérisations de tous ces espaces fonctionnels ont été étudiées dans le premier tome de la monographie 'Ondelettes et Opérateurs' [11]. Il est remarquable qu'Yves Meyer ait effectué cette étude extrêmement exhaustive alors que des applications directes de ces caractérisations n'étaient pas encore en vue. Ce travail qui, à sa parution a pu paraître comme le couronnement, mais aussi le point final, de tout un ensemble de recherches sur les bases des espaces fonctionnels, allait en fait être un formidable point de départ pour de nombreux chercheurs. Disposer de fonctions qui sont simultanément des bases de toute une gamme d'espaces fonctionnels ne tient en effet pas uniquement de la simplification esthétique; on a souvent besoin de décomposer des fonctions sans savoir a priori à quel espace fonctionnel elles appartiennent, ou en voulant utiliser l'information qu'elle appartiennent simultanément à plusieurs espaces fonctionnels. Cette situation est par exemple courante dans l'étude théorique ou numériques des équations aux dérivées partielles. Ce n'est cependant pas dans ce domaine que les bases d'ondelettes ont trouvé jusqu'à présent leurs applications les plus manifestes. Nous allons considérer d'autres situations où apparaissent de façon cruciale le besoin d'utiliser des bases qui soient simultanément inconditionnelles pour des espaces très différents. Notre premier exemple est issu des statistiques.

1.2 Algorithmes de débruitage

Commençons par une description très succincte des méthodes de minimum du risque, ou 'minimax' en statistique. Supposons que nous voulions estimer un nombre f en ayant accès à une information bruitée $y = f + \sigma z$ où z est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, et $\hat{f}$ un estimateur de f. Si l est une fonction de coût paire et convexe, on définit le risque associé à ce coût par

$$R(\hat{f}, f) = E_f l(\hat{f}(y) - f).$$

Pour une très grande famille de 'coûts' l'estimateur naturel $\hat{f} = y$ est optimal en un sens très fort: il réalise le minimum du risque

$$R(y, f) = \inf_{\hat{f}} \sup_{f} R(\hat{f}, f),$$

d'où le terme *minimax* (on a la meilleure estimation possible dans le pire des cas).

Le problème est infiniment plus complexe si l'on souhaite estimer non plus un nombre f mais une fonction $f(t)$. C'est le cas par exemple lorsqu'un signal ou une image ont été bruités. Le problème du débruitage consiste à trouver le meilleur estimateur d'un signal déterministe auquel a été superposé un bruit. Supposons que nous souhaitions donc estimer une fonction $f(t)$ en n'ayant à notre disposition que les observations

$$y_i = f(t_i) + \sigma z_i,$$

les z_i étant des gaussiennes indépendantes centrées réduites, et les points t_i $(i = 1, \dots n)$ étant équidistribués sur $[0, 1]$. Si les valeurs $f(t_i)$ n'ont aucune relation entre elles, on est ramené au problème précédent, en effet la connaissance simultanée des $f(t_j) + \sigma z_i$ pour $j \neq i$ n'apporte pas d'information sur $f(t_i)$. A l'extrême opposé, si nous avons l'information (très forte!) 'f est constante', alors le meilleur estimateur de $f(t_i)$ est évidemment

$$\hat{f}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Grâce à l'information que nous avions sur la fonction cherchée, on est passé d'un estimateur dont la variance est de l'ordre de grandeur d'une constante à un estimateur dont la variance est de l'ordre de grandeur de $1/\sqrt{n}$. Plus généralement, si l'on dispose d'une information a priori sur la régularité de la fonction f, on voudrait pouvoir utiliser cette information pour déterminer le meilleur estimateur possible de f. On exprime en général cette information de régularité par l'appartenance à une boule d'un espace fonctionnel.

Si E est un espace fonctionnel, on cherchera donc l'estimateur $\hat{f}$ qui réalise

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{\|f\|_E \leq C} R(\hat{f}, f).$$

Dans les années 70-80, le problème de la détermination de l'estimateur de minimax a été résolu pour de nombreux espaces fonctionnels. Ces estimateurs théoriques ont souvent laissé les utilisateurs sceptiques, car la vitesse de convergence de l'estimateur optimal quand n tend vers l'infini dépend fortement de l'espace fonctionnel choisi. Or souvent, on ne connaît pas a priori la régularité exacte d'un signal ou d'une image à débruiter, ou bien cette régularité peut s'exprimer par l'appartenance simultanée à plusieurs espaces fonctionnels de nature différente; dès lors on n'a pas de raison de prendre l'estimateur optimal pour un espace plutôt qu'un autre. D'où l'importance de trouver des méthodes de décomposition qui, sans réaliser le minimax exactement pour un espace fonctionnel donné, fournissent un estimateur dont la vitesse de convergence soit du même ordre de grandeur pour toute une gamme d'espaces fonctionnels. Ces nouvelles méthodes nécessitent l'emploi de bases qui soient inconditionnelles pour tous les espaces que l'on souhaite considérer a priori. C'est ici que l'utilisation des ondelettes s'impose. La méthode de *Wavelet shrinkage* a été introduite par Donoho, Johnstone et leurs collaborateurs au début des années 90. Elle consiste à calculer les coefficients du signal bruité sur une base orthonormée d'ondelettes, et à remplacer chaque coefficient $C_{j,k}$ par

$$\tilde{C}_{j,k} = sign(C_{j,k}) \inf(|C_{j,k}| - t, 0);$$

le seuil t est fixé en fonction de la variance (connue ou estimée) du bruit: on remplace donc les petits coefficients par 0 et on 'rétrécit' les grands coefficients. Cette méthode très simple est presque aussi efficace que l'estimateur de minimax dans de nombreux espaces fonctionnels (on perd, dans les pires des cas, un terme $\log n$ dans l'estimation du risque). Nous conseillons la lecture du passionnant article 'Wavelet shrinkage: Asymptopia?' de Donoho, Johnstone, Kerkyacharian et Picard [20] qui a été écrit avec un enthousiasme communicatif, et explique l'apport des ondelettes en statistique dans un language compréhensible même par les lecteurs ne connaissant aucun de ces deux sujets. La moitié de cet article est occupée par une 'discussion' dans laquelle des statisticiens reconnus discutent, parfois avec âpreté, l'intérêt des méthodes et l'importance des résultats des auteurs. La lecture de cette partie, souvent polémique, est si passionnante que l'on se demande pourquoi l'habitude de faire figurer de telles discussions ne se généralise pas aux journaux des autres domaines des mathématiques.

1.3 Approximation non linéaire

L'un des intérêt de l'algorithme de 'Wavelet Shrinkage' est que l'utilisateur n'a pas besoin de connaître a priori la régularité du signal qu'il analyse; il est cependant légitime de se demander quels sont les 'bons espaces' adaptés à l'analyse de certains signaux. Nous serons ainsi amenés à considérer certains espaces dont l'utilisation n'est pas courante en analyse mathématique, probablement parce que leur manipulation était très délicate, jusqu'à l'introduction des ondelettes. Considérons par exemple une image représentant quelques objets géométriques simples. La fonction qui la représente (le 'niveau de gris') sera donc régulière par morceaux, avec des discontinuités. Les espaces de Sobolev classiques sont mal adaptés à son analyse. En effet, les discontinuités ont pour effet une absence de dérivabilité, et l'on ne peut alors prendre en compte le fait que, en dehors d'une petite région, la fonction est très régulière. L'examen de la série d'ondelettes d'une telle fonction va nous guider vers les espaces appropriés: En dimension 2, les bases d'ondelettes sont de la forme

$$2^j \psi^i(2^j x - k) \;\; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2 \;\; i = 1, 2, 3$$

(il est nécessaire d'utiliser 3 ondelettes). De plus les fonctions ψ^i et donc les fonctions $2^j \psi^i(2^j x - k)$ ont plusieurs moments nuls; elles fournissent donc des coefficients nuls lorsqu'on les intègre contre des polynômes, et des coefficients négligeables lorsqu'on les intègre contre des fonctions qui, au voisinage du support de $\psi^i(2^j x - k)$ sont 'proches d'un polynôme de petit degré', c'est-à-dire régulières. La plupart des coefficients d'ondelettes de l'image considérée seront donc numériquement négligeables: Pour j grand, seuls les coefficients correspondant aux quelques ondelettes centrées près des discontinuités seront importants. Une façon efficace de quantifier le fait qu'une suite c_n a la plupart de ses éléments de taille négligeables est d'affirmer qu'elle vérifie $\sum |c_n|^p < +\infty$ pour un $p < 1$. Cette condition est d'autant plus forte que p est proche de 0, et on vérifiera facilement que, si cette condition est satisfaite pour tout $p \in]0, 1]$, alors le réarrangement décroissant de la suite c_n est à décroissance rapide. Il est donc naturel d'introduire les espaces de fonctions dont les coefficients d'ondelettes vérifient pour des $p < 1$

$$\sum_{j,k} |2^{\alpha j} C_{j,k}|^p < \infty \tag{2}$$

(le coefficient de pondération $2^{\alpha j}$ prend en compte la régularité globale). La condition (2) caractérise en fait l'espace de Besov $B_p^{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{2},p}$. Si le lecteur n'est pas habitué à la terminologie des espaces de Besov, il peut, en première approximation, considérer que $B_p^{s,q}$ est l'espaces des fonctions de L^p dont les dérivées fractionnaires d'ordre s appartiennent à L^p. Le troisième indice q apporte une petite correction qui, comme le remarque Bradley Lucier, sert surtout à 'démontrer les théorèmes'. Ces espaces lorsque $p < 1$ ne sont plus localement convexes, ce qui explique en partie la difficulté de leur utilisation; difficulté maintenant en partie palliée par la simplicité de la caractérisation (2). Auparavant, l'appartenance à ces espaces se caractérisait soit par la vitesse d'approximation par des fractions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur ont un degré donné, soit par l'approximation par des splines à 'noeuds libres' (ce qui signifie que les points de raccord des polynômes ne sont pas fixés a priori, mais peuvent être adaptés à la fonction considérée). Ce type d'approximation est difficile à manier, car non-linéaire (la meilleure approximation par une fraction rationnelle de degré donné de la somme de deux fonctions n'est pas en général la somme des approximations correspondantes, qui serait de degré trop élevé). L'approximation non-linéaire basée sur l'utilisation des ondelettes est par contre immédiate à mettre en oeuvre: On garde uniquement les N plus grands coefficients. On remarque la similarité entre cette méthode d'approximation et le 'wavelet shrinkage' (si l'on oublie le petit raffinement dû au 'rétrécissement' des grands coefficients, et qui n'est d'ailleurs pas toujours effectué). Les fonctions régulières par morceaux sont donc typiquement les fonctions pour lesquelles les algorithmes d'approximation non-linéaire fondés sur les bases d'ondelettes sont efficaces. L'oeil humain apprécie particulièrement les résultats des débruitages reposant sur le principe du wavelet shrinkage. Cela s'explique facilement: reprenons l'exemple d'un petit bruit uniformément réparti sur une image géométriquement simple. Les grands coefficients d'ondelette qui correspondent aux discontinuités de l'image sont (relativement) peu affectés par le bruit et laissés (presque) inchangés par l'algorithme. Par contre les petits coefficients correspondant aux zones lisses de l'image ne sont essentiellement que les coefficients du bruit, et sont éliminés. Ainsi l'algorithme efface la texture parasite créée par le bruit et très visible dans les régions planes, tout en ne modifiant pas les discontinuités qui restent nettes. Les anciennes techniques de débruitage, fondées sur des critères de minimisation d'énergie, effectuaient un lissage de l'image, efficace certes pour éliminer le bruit des régions régulières mais catastrophique pour les discontinuités: l'oeil est particulièrement sensible à leur lissage qui donne une impression de flou. On voit ici l'une des difficultés mathématiques du traitement d'image: il faut optimiser la qualité de la reconstruction pour l'oeil, lequel a le mauvais goût de préférer des critères de 'type Besov' avec p proche de 0, que les critères d'énergie ($p = 2$) chers aux mathématiciens et aux ingénieurs, car beaucoup plus faciles à optimiser. Les algorithmes de débruitage ont également prouvé leur efficacité pour des images qui leur sont a priori moins naturellement bien adaptées que des objets géométriques simples. Ainsi Sylvie Roques a appliqué avec succès cette méthode aux images astronomiques bruitées fournies par le télescope Hubble (on pourra consulter [33] ainsi que l'article [17] de A.Bijaoui qui passe également en revue l'ensemble des applications des méthodes d'ondelettes en astronomie).

Les fonctions régulières par morceaux sont le prototype des fonctions pour lesquelles les algorithmes d'approximation non linéaire fondés sur les décompositions en ondelettes sont efficaces. Les exemples les plus naturels se rencontrent en analyse d'image, mais elles sont également courantes en analyse mathématique. Les solutions d'équations d'évolution non linéaires sont souvent régulières par morceaux. Les espaces de Besov devraient donc être l'un des cadres naturels de leur étude. En fait les difficultés mathématiques liés à leur utilisation lorsque $p < 1$ sont telles qu'il existe peu de résultats dans cette direction. Il faut ici citer les travaux de DeVore et Lucier pour les équations hyperboliques scalaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \tag{3}$$

avec f convexe (cf [45]). Ils ont montré que, si la condition initiale est à variation bornée et appartient à $B_p^{s,p}$ avec $s \in]0,2]$ et $p = 1/(s+1)$, la solution entropique (c'est-à-dire la limite des solutions obtenues en ajoutant au second terme de (3) un terme de viscosité arbitrairement petit) reste dans ces espaces pour tout temps. On voit ici comment l'utilisation des espaces de Besov permet de prendre en compte l'apparition de discontinuités: Si l'on restait dans les espaces classiques ($p \geq 1$), on ne pourrait accéder à des indices de régularité $s > 0$ à cause des discontinuités. Ce résultat s'applique bien sûr aux solutions régulières par morceaux, mais peut aussi s'appliquer à des solutions très irrégulières; en effet certaines conditions initiales peuvent générer des solutions ayant pour tout temps $t \geq 0$ une infinité de points de discontinuité partout denses. La solution peut donc être extrêment complexe, tout en gardant une certaine régularité au sens de l'approximation non linéaire; L'étude des solutions très irrégulières de l'équation (3) s'est effectuée surtout dans un cadre probabiliste. On prend comme condition inititiale un processus aléatoire, et on cherche à déterminer les propriétés statistiques des sauts au temps t. Les cas d'un Brownien, d'un Brownien fractionnaire, ou d'un bruit blanc comme données initiales ont notamment été étudiés. Ici encore on ne dispose que d'informations partielles, sauf dans un cas particulier complètement élucidé par J.Bertoin: Si $f(u) = u^2/2$ (équation de Burgers), et si la condition initiale est un Brownien issu de 0 sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$, alors la solution au temps t est un processus de Lévy (c'est-à-dire un processus à accroissements indépendants et stationnaires) dont on connait toutes les caractéristiques. La solution a un ensemble dense de sauts, et l'on peut montrer que c'est une *fonction multifractale*. Nous allons maintenant nous intéresser à ce type de fonctions.

1.4 Fonctions multifractales et formalisme multifractal

Le *formalisme multifractal* est un autre exemple typique de situation où l'on veut utiliser la connaissance simultanée de tous les espaces fonctionnels auquels appartient une fonction. Mais rappelons tout d'abord le contexte dans lequel cette méthode a été introduite. Les données expérimentales captées sur un écoulement turbulent montrent que sa vitesse a une régularité très variable d'un point à un autre. La régularité d'une fonction en un point x_0 est mesurée par son exposant de Hölder

$$h(x_0) = \liminf_{t \to 0} \frac{\log(|f(x_0+t) - f(x_0)|}{\log|t|}$$

(du moins pour des exposants de Hölder inférieurs à 1, ce qui est pertinent pour la turbulence). U.Frisch et G.Parisi, deux physiciens spécialisés dans l'étude de la turbulence, ont conjecturé que les ensembles de points où la vitesse d'un écoulement turbulent a un exposant de Hölder donné sont des ensembles fractals, et ils ont proposé de déterminer leur dimension. Un argument classique de thermodynamique fournit cette dimension à l'aide d'une formule remarquable et très intriguante, cf [6]: Supposons que nous sachions à quels espaces de Besov $B_p^{s,p}$ appartient une fonction f. On peut alors définir pour chaque p un exposant de régularité globale

$$\eta(p) = \sup\{s : \quad f \in B_p^{s/p,p}\}$$

(la formulation de Frisch et Parisi, comme celle proposée depuis par Arneodo, Bacry et Muzy dans [1], est équivalente, mais ne fait pas explicitement référence aux espaces de Besov). La formule proposée pour déterminer la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où l'exposant de Hölder vaut h est

$$d(h) = \inf_p (ph - \eta(p) + 1). \tag{4}$$

La fonction $d(h)$ s'appelle le *spectre des singularités* (ou *spectre de Hölder*) de f, et l'on fait référence à la formule (4) sous le nom de formalisme multifractal. L'intérêt d'une telle formule est évident; autant il est impossible de déterminer numériquement l'exposant de Hölder d'une fonction en chaque point, et a fortiori les dimensions de Hausdorff de tous les ensembles de niveau de cet exposant, autant la détermination de la fonction $\eta(p)$ est (relativement) aisée: notamment à cause de la caractérisation très simple en ondelettes de l'espace $B_p^{s,p}$ (cf (2)). On voit ici le rôle clé que vont jouer les décompositions en ondelettes pour l'analyse de fonctions multifractales: En effet ce type de décomposition est le seul qui permette de résumer toute l'information d'appartenance aux espaces de Besov par des conditions portant sur les coefficients dans une *même* base. Ici s'ajoute une propriété supplémentaire des décompositions en ondelettes: Si f a une régularité uniforme minimale, alors l'exposant de Hölder de f en un point x_0 peut aussi être calculé à partir de ses coefficients d'ondelette; si les coefficients $|C_{j,k}|$ sont de l'ordre de grandeur de $2^{-j/2}(2^{-hj} + |k2^{-j} - x_0|^h)$ au voisinage de x_0, alors l'exposant de Hölder en x_0 est h. Signalons ici que l'étude de la régularité ponctuelle des fonctions a été complètement transformée par l'introduction des méthodes d'ondelettes, et notamment l'étude de comportement très oscillatoires locaux, comme ceux présentés par la fonction $\sin(1/x)$ au voisinage de l'origine (on consultera [8] et [14], pour les descriptions les plus complètes de ces résultats). On ne sera pas étonné que les principaux progrès sur l'analyse des fonctions multifractales, et en particulier la vérification de la validité du formalisme multifractal, aient été effectués en opérant au préalable cette traduction en termes de coefficients d'ondelettes. Cette technique permet immédiatement de montrer que l'on n'a pas en général égalité dans

(4) mais que la fonction $d(h)$ est toujours majorée par le terme de droite. L'égalité ne peut avoir lieu que si les grands coefficients d'ondelettes sont géométriquement disposés à travers les échelles de façon particulière, par exemple sur des sortes de 'cascades' [1] et [48]. On rejoint alors des modèles assez proches des modèles classiques de turbulence. Revenons à l'équation de Burgers avec donnée initiale brownienne. Puisque la solution au temps t est un processus de Lévy, on peut affirmer, en utilisant des résultats généraux sur les processus de Lévy, que si t est strictement positif, la solution est presque surement une fonction multifractale dont le spectre de singularités est

$$d(h) = h/2 \quad \text{pour} \quad h \in [0, 2].$$

Voici donc une solution de l'équation de Burgers avec donnée initiale *monofractale* (le mouvement Brownien a partout le même exposant de Hölder $h = 1/2$) dont la solution devient multifractale. Si l'on se souvient que l'équation de Burgers est considérée comme un modèle (monodimensionnel et très simplifié) de la turbulence, ce résultat tend à conforter l'hypothèse de Frisch et Parisi. Insistons toutefois sur le manque de généralité de ce résultat: c'est le seul exemple que nous connaissions d'équations aux dérivées partielles qui développe dans certains cas des solutions multifractales. Notre compréhension du formalisme multifractal (4) est aujourd'hui encore très fragmentaire. Voici par exemple un problème mystérieux: Arneodo, Bacry et Muzy ont développé des méthodes numériques de calcul de la fonction $\eta(p)$ qui donnent un résultat même lorsque p est négatif (au moyen d'une sorte de renormalisation dans (2) qui permet de définir la fonction η et que nous décrirons à la fin de cet article). Ce calcul, qui n'a aujourd'hui aucune justification mathématique, permet dans de nombreux cas d'obtenir effectivement le spectre $d(h)$. Il est difficile de croire que ceci est une coïncidence; il existe sans doute une 'bonne définition' des espaces de Besov pour des p négatifs.

1.5 Espaces de Besov et décomposition de Littlewood-Paley

Il est vraiment étonnant que les espaces de Besov, introduits modestement à la fin des années 50 pour décrire les traces des espaces de Sobolev, aient pris ces dernières années une place importante en analyse. Nous avons donné quelques exemples de leur utilisation. Ils sont également devenus un outil courant dans l'étude des EDP non linéaires, à travers l'utilisation de la décomposition de Littlewood-Paley. Cette décomposition préfigure les ondelettes. Historiquement elle est l'une des alternatives possibles à l'un des problèmes résolus par la base de Haar: caractériser l'appartenance d'une fonction à L^p. Nous avons vu que les e^{inx} ne sont pas une base inconditionnelle des espaces $L^p([0, 2\pi])$ pour $p \neq 2$. Par contre Littlewood et Paley ont montré dans les années 30 que l'on peut estimer la norme L^p d'une fonction périodique par des conditions sur les blocs dyadiques

$$\Delta_j(f) = \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} c_k e^{ik\xi}.$$

Plus généralement, si l'on choisit ψ telle que $\hat{\psi}$ soit C^∞ à support dans la couronne $1/2 \leq \xi \leq 2$, et $\sum \hat{\psi}(2^j \xi) = 1$. La décomposition de Littlewood-Paley d'une fonction f

définie sur $\mathbb{R}$ est la donnée des $\Delta_j(f) = f * \psi(\,.2^{-j})$. La décomposition en ondelettes de f apparaît donc comme une discrétisation des $\Delta_j(f)$ aux points $k2^{-j}$. L'un des résultats qui a le plus mis en évidence la pertinence des méthodes de Littlewood-Paley pour les EDP nonlinéaires est le suivant [41]: Si u et v appartiennent à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors le Jacobien

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

appartient à l'espace de Hardy réel $\mathcal{H}^1$. Le fait de passer de L^1 à $\mathcal{H}^1$ est capital car il permet d'utiliser des propriétés de compacité. De même, en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley, F.Ribaud a obtenu des résultats optimaux concernant la détermination de la régularité Sobolev de $f(u)$ lorsqu'on sait à quel espace de Sobolev appartient u (et si l'on contrôle la régularité et la croissance de f) [52]. Un dernier exemple est fourni par la recherche de solutions autosimilaires de l'équation de Navier-Stokes en dimension 3. Une telle solution vérifie

$$\forall\lambda > 0 \quad v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}v(\lambda^2 t, \lambda x).$$

Le cadre des espaces de Sobolev est mal adapté à la recherche de telles solutions. Par contre M.Cannone, Y.Meyer et F.Planchon ont exhibé des solutions autosimilaires appartenant aux espaces de Besov $B_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$ (cf [2]).

1.6 Autres exemples

Pour effectuer certains calculs de renormalisation en théorie quantique des champs, Guy Battle et Paul Federbush avaient besoin d'une base orthonormée de L^2 qui soit simultanément une base de L^4. Aussi ont-ils construit en 1987 une base orthonormée d'ondelettes telle que la fonction ψ soit à décroissance exponentielle (l'ondelettes construite par Yves Meyer est "seulement" à décroissance rapide, et ne pouvait convenir; par ailleurs, ils n'avaient pas connaissance des bases de Strömberg qui, elles, auraient convenu). Le lecteur pourra consulter l'article 'Quantum field theory in 90 minutes' [22] pour une introduction très simple aux problèmes de la renormalisation et l'utilisation qui y est faite des bases d'ondelettes.

Un autre exemple d'utilisation des bases d'ondelettes est l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund. Ces sont des opérateurs d'intégrale singulière continus sur L^2 et du type

$$T(f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

où la distribution $K(x,y)$ est pour $x \neq y$ une fonction vérifiant des estimations du type

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|}, \quad \text{et, par exemple, } |\nabla K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^2}.$$

Sans décrire en détails l'histoire de ces opérateurs, ce qui nous demanderait en fait de retracer tout un chapitre de l'histoire de l'analyse harmonique, signalons seulement que l'on doit étudier leur action simultanément sur les espaces L^p, et sur les espaces 'limites' $\mathcal{H}^1$ et BMO. On voit encore ici l'intérêt d'une base sur laquelle se caractérisent simultanément ces espaces, et sur laquelle on peut également caractériser la matrice d'un opérateur de Calderón-Zygmund. Le deuxième tome de la monographie d'Yves Meyer [11] présente cette théorie simplifiée par l'utilisation systématique des bases d'ondelettes. Cependant, les derniers problèmes ouverts importants 'au delà des opérateurs de Calderón-Zygmund' ne semblent pas avoir réellement tiré profit de l'utilisation des décompositions en ondelettes, à deux exceptions près:

- Le problème du calcul symbolique: L'inverse d'un opérateurs de Calderón-Zygmund inversible sur L^2 est-il encore un opérateur de Calderón-Zygmund? P.Tchamitchian puis P.G.Lemarié ont construit deux contre-exemples simples et élégants à cette conjecture qui utilisent spécifiquement des bases d'ondelettes.

- Les progrès en direction de la 'Conjecture de Kato' effectuées par P.Auscher et P.Tchamitchian [37].

Pourquoi la grande synthèse simplificatrice développée par Yves Meyer pour les opérateurs de Calderón-Zygmund n'a pas joué un rôle de point de départ, à l'instar du premier tome sur les espaces fonctionnels? Peut-être parce que cette théorie ne nécessite pas spécifiquement l'utilisation de bases. Dès lors, la décomposition de Littlewood-Paley est un outil tout aussi efficace que les bases d'ondelettes. Les ondelettes apportent des simplifications d'écriture: On peut considérer la matrice de l'opérateur dans une telle base, et estimer explicitement la taille des coefficients matriciels; les calculs similaires utilisant la décomposition de Littlewood-Paley ne sont pas de nature très différente, mais sont plus malaisés.
L'utilisation des bases d'ondelettes s'avère par contre prometteuse pour étudier les opérateurs intégraux avec un point de vue un peu différent, développé par G.Beylkin, R.Coifman et V.Rohklin en 1991 (cf [38]). Ils considèrent le noyau distribution $k(x,y)$ de l'opérateur comme une image, et le décomposent donc comme une fonction bidimensionelle (ou $2n$ dimensionelle si l'opérateur considéré agit sur des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$). De nombreux opérateurs intégraux ont un noyau régulier hors de la diagonale. En stockant les coefficients d'ondelette de la distribution $k(x,y)$, on est conduit à effectuer les calculs sur une matrice creuse; or le coût d'inversion de ces opérateurs est très élevé par les méthodes classiques car les matrices correspondantes sont pleines. Cette méthode séduisante ne s'est pas encore imposée en analyse numérique; à cela plusieurs raisons:

- Les méthodes d'ondelettes sont assez proches dans leur esprit des méthodes multigrilles et des bases hiérarchiques; elles peuvent apporter une amélioration, mais non un révolution par rapport à ces dernières.

- Enfin l'emploi des ondelettes, pour être pleinement efficace, nécessite l'utilisation de beaucoup d'échelles, ce qui signifie des maillages très fins et donc un nombre d'inconnues à gérer beaucoup plus important que celui utilisé par les calculateurs actuels. Cette dernière remarque laisse un espoir pour le futur. Les méthodes d'ondelettes pourraient s'imposer en analyse numérique avec l'avènement des futurs super-calculateurs.

Une image est définie sur un carré ou un rectangle, or nous n'avons jusqu'à présent mentionné que des bases d'ondelettes définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. Il est en fait possible de construire, à partir des ondelettes à support compact, des bases d'ondelettes adaptées à l'intervalle $[0, 1]$ (et en déduire par une technique de tensorisation classique une base adaptée au carré). Une telle base contient toutes les ondelettes à support compact dont le support est inclus dans l'intervalle, auquelles on ajoute quelques nouvelles ondelettes localisées au deux bords, dont le rôle est de prendre en compte la contribution des ondelettes sur $\mathbb{R}$ dont le support intersectait le bord de l'intervalle. La première idée de cette construction a été trouvée par Y.Meyer, puis améliorée par Cohen, Daubechies et Vial [40]. C'est en fait ces bases qui sont maintenant utilisées en analyse d'image. Cette construction nous apparaît maintenant comme le 'bon substitut' de la base de Franklin; cette dernière était aussi adaptée à l'intervalle, mais l'utilisation du procédé de Gram-Schmidt empêchait une structure algorithmique simple: on constatait seulement un comportement asymptotique pour les fonctions localisées loin du bord (à l'échelle 2^{-j}); les éléments de la base de Franklin se rapprochent asymptotiquement des ondelettes de Strömberg. La situation est similaire pour les bases d'ondelettes sur l'intervalle, mais l'asymptotique est atteint immédiatement, d'où leur intérêt algorithmique. Il existe par contre encore peu de résultats concernant la construction d'ondelettes sur des domaines plus généraux. Ainsi, les fonctions auquelles s'appliquent les opérateurs intégraux sont généralement définies sur des variétés, sur lesquelles on ne dispose pas de bases d'ondelettes algorithmiquement simples. Construire de telles bases est certainement l'un des problèmes ouverts les plus importants concernant les bases d'ondelettes. Signalons ici un premier résultat encourageant en direction d'algorithmes de construction plus souples: Cohen, Dahmen et DeVore ont obtenu des bases d'ondelettes adaptées à un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ exactement au sens où nous avons parlé d'ondelettes sur un intervalle: seules les ondelettes dont le support intersecte le bord du domaine sont modifiées.

2 Codage de l'information

2.1 Filtrage en sous-bandes

Les remarquables résultats théoriques obtenus par Donoho et Johnstone n'auraient pu aboutir à des méthodes efficaces implémentées sur ordinateur sans l'existence d'algorithmes rapides de décomposition sur les bases d'ondelettes. Ces algorithmes existaient en fait avant l'introduction des bases orthonormées d'ondelettes, et c'est eux qui ont fourni à Stéphane Mallat l'idée d' *analyse multirésolution*, qu'il a développée avec Yves Meyer. Cette idée est à la base de toutes les techniques de construction de bases d'ondelettes actuellement utilisées. Le point de départ de ces algorithmes date du milieu des années 70. A cette époque, se posait le problème du passage de la transmission analogique des signaux téléphoniques à leur transmission numérique. Dans ce dernier cas, le signal est discrétisé et sa valeur moyenne sur chaque intervalle de discrétisation est codée. Il peut s'ensuivre un *bruit de quantification* désagréable qui est perçu au passage des discontinuités. Esteban et Galand ont proposé de réduire ce bruit de quantification en effectuant d'abord un filtrage en bandes fréquentielles puis en codant ensuite indépendamment de façon temporelle les différentes bandes ainsi obtenues. Ils proposèrent un filtrage particulièrement économique puisqu'il n'utilisait que deux filtres (un filtre *passe haut* qui sélectionne les hautes fréquences, et un filtre *passe bas* qui sélectionne les basses fréquences); on obtiendrait une sélectivité fréquentielle arbitrairement grande en itérant l'application de ces deux filtres. On part donc d'un signal numérisé, c'est-à-dire d'une suite discrète $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$; l'opération de filtrage est simplement une convolution discrète: on utilise une suite finie $H = (h_k)$ et l'on obtient le signal filtré

$$b_k = \sum_l a_l h_{k-l};$$

Un filtre H_0 est 'passe-bas' si la fonction $\hat{H}_0(\xi) = \sum h_k^0 e^{ik\xi}$ est grande au voisinage de 0 et s'annule au voisinage de π et un filtre H_1 est 'passe-haut' dans le cas contraire. On applique donc deux tels filtres à la suite a_k, que l'on a ainsi remplacée par deux suites b_k et c_k. On a a priori deux fois trop d'information en effectuant cette substitution (on a remplacé une suite par deux). Aussi opère-t-on une 'décimation': on ne garde que les b_{2k} et c_{2k}. Des choix particuliers de H_0 et H_1 permettent d'avoir la même quantité d'information qu'au départ, et en fait d'obtenir une isométrie:

$$\sum |a_k|^2 = \sum |b_{2k}|^2 + \sum |c_{2k}|^2$$

Ce qui permet de reconstituer la suite initale à partir des deux suites décimées. L'opération de filtrage peut être ensuite itérée. On est alors en face de plusieurs possibilités:

1. Appliquer l'opération sur les deux nouvelles suites b_{2k} et c_{2k} pour chercher à obtenir la meilleure résolution fréquentielle possible.

2. Chercher à obtenir une décomposition optimale au sens ou l'on garde la décomposition où l'on a le moins de coefficients non négligeables à stocker.

3. Ne pas chercher à améliorer la résolution fréquentielle sur la partie haute fréquence et itérer la décomposition sur la partie basse-fréquence.

La première approche, qui était pourtant la motivation initiale des travaux de Galand, ne peut aboutir; en effet E.Séré et A.H.Fan ont démontré que ces décompositions ont une très mauvaise localisation temps-fréquence, [47].
La deuxième approche que nous avons signalée conduit aux *paquets d'ondelettes*. Dans cet algorithme, on choisit de remplacer la suite (a_k) par les suites (b_{2k}) et (c_{2k}) si la représentation obtenue à l'aide de ces deux suites est plus 'économique'. Quel critère peut-on appliquer pour décider de ce choix? Si l'on se réfère à notre discussion sur l'approximation non linéaire, on pourrait comparer les normes l^p des deux suites pour des valeurs de p inférieures à 1. Victor Wickerhauser a proposé de minimiser plutôt un critère d'entropie: Les deux suites sont normalisées à 1, et on calcule pour chacune la quantité

$$-\sum |a_k|^2 \log |a_k| \tag{5}$$

qui est d'autant plus petite que la suite est bien concentrée (en effet (5) mesure la quantité d'information nécessaire à stocker la suite (a_k)). Ce critère permet de décider si l'on créè deux nouvelles suites en appliquant les filtres H_0 et H_1 ou non. Cela revient à monter ou non sur les branches d'un arbre dyadique. L'algorithme s'arrête lorsque l'entropie ne peut plus être diminuée nulle part. La mauvaise localisation simultanée en espace et en fréquence des bases ainsi obtenues fait qu'il est difficile d'interpréter le résultat de cet algorithme. On pourra cependant consulter [21] pour les applications à la detection de structures cohérentes dans les simulations numériques d'écoulements de fluides. R.Coifman, J.Berger et M.Goldberg ont également utilisé une méthode de débruitage basée sur les paquets d'ondelettes pour débruiter de très anciens enregistrements musicaux [19].
Nous savons déjà que la troisième approche suit une bonne heuristique, puisqu'elle consiste à ne pas chercher à raffiner l'information fréquentielle contenue dans des paquets dyadiques. Elle est dans l'esprit des décompositions de Littlewood-Paley et conduit en fait aux décompositions en ondelettes. En effet, si une fonction est discrétisée sur un maillage arbitrairement fin, et si l'on applique les filtrages proposés à cette suite discrète, on obtient une décomposition qui, lorsque la finesse du maillage tend vers 0, converge vers la décomposition sur une base orthonormée d'ondelettes de la fonction initiale. Les conditions que doivent vérifier les filtres H_0 et H_1 ont été explicitées par A.Cohen, S.Mallat et Y.Meyer (cf [4]). Ce lien remarquable entre filtres discrets et bases d'ondelettes, mis a jour par S.Mallat, a plusieurs conséquences: Le calcul de la décomposition en ondelettes d'une fonction peut s'effectuer au moyen de filtrages discrets. On a ainsi la *décomposition rapide en ondelettes* qui est un algorithme plus rapide que la FFT. La recherche des bases d'ondelettes ayant des propriétés particulières se ramène à la détermination des bons filtres numériques correspondants. Cela a permis à Ingrid Daubechies de construire ses fameuses bases d'ondelettes à support compact. Par un juste retour des choses, ces bases se sont à leur tour imposées dans le monde de l'analyse du signal et de l'image. Pourquoi les analystes du signal ont-ils été conquis par les bases d'ondelettes alors qu'ils disposaient déjà des filtres correspondants? En fait, rester dans le cadre purement discret du filtrage numérique ne permet pas de déterminer quels sont les meilleurs filtres pour l'analyse du signal. Par contre, l'interprétation continue fournie par les ondelettes le permet. Ainsi, par exemple, il est nécessaire d'effectuer l'analyse du signal avec une ondelette ayant plusieurs moments nuls pour avoir une bonne compression dans les zones régulières, et d'effectuer la reconstruction avec une ondelette régulière, pour avoir une meilleure reconstruction à l'oeil. On sélectionne les filtres qui conduisent à de telles propriétés pour les ondelettes correspondantes; les propriétés de régularité et de moments nuls ne sont pas nécessairement partagées par la même ondelette; on peut avoir une ondelette d'analyse différente de l'ondelette de reconstruction, ce qui conduit à des *systèmes biorthogonaux d'ondelettes* pour lesquels toute fonction f de L^2 s'écrit

$$f = \sum \langle f|\psi_{j,k}\rangle \tilde{\psi}_{j,k},$$

où $\psi_{j,k} \neq \tilde{\psi}_{j,k}$ mais $\langle \psi_{j,k}|\tilde{\psi}_{j',k'}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$. Ceci n'a pas d'inconvénient et laisse plus de latitude sur le choix des filtres. Les rapports précis entre propriétés des filtres numériques et propriétés correspondantes des ondelettes sont un thème de recherche très actif. Les résultats de base (convergence des algorithmes discrets vers la décomposition en ondelettes et régularité des ondelettes) sont décrits en détails dans [4]. Signalons quelques avantages des décompositions biorthogonales. La latitude supplémentaire autorisée pour les filtres permet d'obtenir des ondelettes symétriques, ce qui est préféré en analyse d'image. On peut imposer aux ondelettes de vérifier des relations d'orthogonalité pour d'autres produits scalaires que L^2; Fabrice Sellan a ainsi construit des analyses multirésolution et des ondelettes adaptées au Brownien fractionnaire, c'est-à-dire telles que les coefficients de ce processus soient des gaussiennes indépendantes. Cette décomposition est actuellement la meilleure pour simuler les corrélations à longue distance du Brownien fractionnaire, [36]. Le succès des ondelettes en analyse du signal est aussi dû au grand impact du livre 'Ten lectures on wavelets' d'Ingrid Daubechies [5]. Il offrait un panorama de l'ensemble des résultats mathématiques obtenus sur les ondelettes, dans un language mathématique accessible aux ingénieurs et, de ce fait, il a ouvert à beaucoup d'entre eux l'accès à ces techniques. Les travaux d'Esteban et Galand n'ont pas trouvé l'utilisation que ceux-ci espéraient pour le codage des signaux téléphoniques. Mais ces idées ont finalement trouvé leur emploi dans d'autres domaines. Ainsi le FBI s'est trouvé confronté au début des années 90 à un gigantesque problème de compression d'information: Comment stocker sur ordinateur 200 millions d'empreintes digitales, et y avoir un accès suffisamment rapide pour pouvoir comparer en quelques secondes les empreintes d'un suspect avec celles contenues dans ce fichier. Le FBI utilisait jusqu'alors l'algorithme de codage JPEG (*'Joint Photographic Expert Group'*) qui consiste à découper l'image en carrés de 8×8 pixels et à effectuer sur chaque carré une transformation en cosinus. Cette méthode permettait un taux de compression égal à 5. Au taux de 20 qui était désiré, les lignes formant les empreintes digitales n'apparaissent plus de façon suffisamment précise pour qu'on puisse les suivre d'un carré à l'autre. Le FBI a organisé un test de comparaison pour toutes les méthodes de compression, afin de déterminer laquelle serait la plus efficace pour stocker ce fichier. Ce sont des systèmes biorthogonaux d'ondelettes, construits par A.Cohen, I.Daubechies, et J.C.Fauveau qui ont fourni le meilleur résultat et ont été adoptés. Le lecteur pourra consulter [18] où les raisons de ce choix sont expliquées.

2.2 Principe d'incertitude et Frames temps-fréquence

Le soucis de Galand de trouver une représentation qui dégage les structures fréquentielles locales d'un signal apparaît en fait dès 1946 dans les travaux de D.Gabor. Celui-ci construisit une transformation de Fourier locale en décomposant toute fonction sur les translatées d'une gaussienne modulée en fréquence, c'est-à-dire sur les fonctions

$$g_{a,\omega}(x) = g(x-a)\sin(\omega x) \tag{6}$$

où g est une gaussienne. S'il est possible de décomposer une fonction arbitraire à l'aide de toutes les fonctions $g_{a,\omega}$, il n'est en revanche pas possible de discrétiser l'ensemble des paramètres (a, ω) pour obtenir une base de L^2. Ceci est dû à la trop bonne localisation de la gaussienne en espace et en fréquence. Seules des fonctions g très mal localisées en espace ou en fréquence pourraient conduire à des bases, qui, de ce fait, ne sont pas utiles. T.Steger a montré que, de façon beaucoup plus générale, il n'existe pas de base (e_n) de $L^2(\mathbb{R})$ pour laquelle on pourrait trouver x_n et ξ_n tels que

$$\int |\ x - x_n\ |^p|\ e_n(x)\ |^2\ dx \leq C \quad \text{et} \quad \int |\ \xi - \xi_n\ |^p|\ \hat{e}_n(\xi)\ |^2\ d\xi \leq C$$

uniformément sur les éléments de la base, pour $p > 2$ (cf [39]). Cette impossibilité a été un soucis constant en analyse du signal, et également en physique théorique. On peut la contourner de deux façons: Une solution est d'abandonner la notion de bases, et d'accepter que les fonctions utilisées pour la décomposition présentent une certaine redondance. Ceci conduit aux *Frames*. Un frame d'un espace de Hilbert est une famille de vecteurs e_n telle que

$$\sum |\langle f|e_n\rangle|^2 \sim \| f \|^2 .$$

Cette notion a été introduite par R.Duffin et A.Schaeffer en 1952, et ils ont étudié les frames d'exponentielle complexes. Ingrid Daubechies a fourni des conditions pour que les fonctions $(g_{\alpha k,\beta l})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ soient un frame, cf [5]. (Le 'Journal of Fourier Analysis and Applications' va consacrer un numéro spécial sur les frames en 1997, dédié à la mémoire de Duffin.) Si l'on souhaite conserver une base, il faut perdre la double localisation en espace et en fréquence. La perte de localisation la moins gênante pour les applications est de construire des bases localisées autour de deux fréquences de même amplitude et de signes opposé. On a alors le choix entre deux type de décompositions: Les décompositions adaptatives en temps ou les décompositions adaptatives en fréquence. Ces deux familles de bases ont d'abord été introduites dans des cadres non adaptatifs puis généralisées à des découpages arbitraires de l'axe des temps ou des fréquences.

2.3 Bases de Fourier locales

Enrique Malvar proposa en 1990 l'utilisation de bases de Fourier à fenêtre de la forme

$$u_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} w(t - 2\pi j) \cos\left(\frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})t\right)$$

où w est une fonction 'bosse' localisée au voisinage de $[0, 2\pi]$ (cf [13]). On peut choisir w C^∞ à support compact. On voit ici que le blocage dû au théorème de Steger est tourné par l'introduction du cosinus qui a pour conséquence une localisation de $u_{j,k}$ dans le plan temps-fréquence autour de deux bosses symétriques situées autour de deux fréquences opposées. Les fenêtres sont de taille fixe (ici égale à 2π). R.Coifman et Y.Meyer ont redécouvert cette analyse et l'ont adaptée à une partition arbitraire de la droite réelle. Si l'on a une suite croissante a_j, la base qu'ils construisent, adaptée aux segments $I_j = [a_j, a_{j+1}]$ est de la forme

$$u_{j,k}(t) = w_j(t) \cos\left(\frac{\pi}{a_{j+1} - a_j}(k + \frac{1}{2})(t - a_j)\right)$$

où w_j est une bosse localisée sur l'intervalle I_j. De telles bases présentent un intérêt pour l'analyse de signaux dont le comportement fréquentiel varie au cours du temps;

l'exemple le plus naturel est l'analyse de la parole: La difficulté de son codage tient, grossièrement, à ce que les signaux vocaux se composent de parties courtes mal localisées en fréquence, les consonnes, et de parties plus longues mieux localisées en fréquence, les voyelles. Le problème est différent de celui posé par le téléphone digital; on peut se permettre de conserver beaucoup plus d'information, mais la reconstitution doit être parfaite à l'oreille (on souhaite une qualité de son 'audio'). Comment trouver la base adaptée, c'est-à-dire la base dont les points de segmentation a_j seront justement disposés aux points où l'on a passage d'un type de son à un autre? V.Wickerhauser a proposé une méthode hiérarchique d'optimisation fondée ici encore sur un critère d'entropie. On part de la segmentation uniforme la plus fine, que l'on supposera, pour fixer les idées de pas 1, et on calcule la décomposition sur la base correspondante (donc $a_j = j$). Puis, pour chaque couple de deux segments adjacents, $[2j, 2j+1]$ et $[2j+1, 2j+2]$ on compare les coefficients sur la famille de fonctions $(u_{2j,k}) \bigcup (u_{2j+1,k})$ avec les coefficients sur les fonctions correspondant à l'intervalle de longueur double $[2j, 2j+2]$. On garde alors la représentation la plus compacte au sens de l'entropie. On réunit ainsi deux par deux les intervalles de départ pour créer certains intervalles dyadiques de longueur 2. Puis on recommence en s'autorisant à réunir deux intervalles adjacents dont la réunion est un nouvel intervalle dyadique, en utilisant toujours le critère d'entropie. L'algorithme s'arrête lorsque aucune réunion d'intervalles ne permet de faire diminuer l'entropie. On obtient ainsi une segmentation en intervalles dyadiques adaptée au signal. L'algorithme revient donc à remonter les branches d'un arbre dyadique en s'arrêtant à certains embranchements. On remarquera que, a priori, les intervalles naturels de segmentation du signal n'ont aucune raison d'être dyadiques. Ainsi l'intervalle naturel correspondant à la durée d'une voyelle peut se retrouver coupé en plusieurs morceaux par l'algorithme, car ils ne peuvent pas, par construction, être réunis. Un second algorithme permet de réunir ensuite certains intervalles adjacents en suivant un critère de *voisage* spécifique à l'analyse de la parole: le signal est dit voisé sur l'intervalle I_j si ses grands coefficients ne correspondent pas aux premières valeurs de k. On constate que les intervalles correspondants à la partition d'une voyelle doivent être voisés, et ce second algorithme pallie effectivement les inconvénients inhérents au premier cf [55].

2.4 Autres décompositions adaptatives temps-fréquence

Les algorithmes adaptatifs en fréquence sont fondés sur la même idée, mais le découpage en intervalles arbitraires s'effectue sur l'axe des fréquences. La variante de la base de Malvar qui convient a été découverte indépendamment des travaux de Malvar par I.Daubechies, S.Jaffard et J-L.Journé, [5]. La motivation de ce travail n'était d'ailleurs absolument pas l'analyse du signal, mais un problème de renormalisation en mécanique quantique posé par K.Wilson qui nécessitait la construction d'une base à localisation exponentielle en temps, et dont les transformée de Fourier soient également à localisation exponentielle (autour de deux fréquences opposées). Enrico Laeng a généralisé cette construction à une segmentation arbitraire de l'axe des fréquences et a ainsi proposé une base duale de celle de Coifman et Meyer [50]. Le choix entre décompositions adaptatives en temps ou en fréquence repose sur la connaissance a priori que l'on a du signal. Ainsi, si l'on sait que le signal a été bruité uniformément, mais à des fréquences bien localisées, le second choix s'imposera. Est-il posible de gagner sur les deux tableaux et d'effectuer des décompositions adaptatives simultanément en temps et en fréquence? On ne sait pas construire actuellement de bases orthonormées de L^2 adaptées à un pavage arbitraire du plan temps-fréquence, et les algorithmes qui effectuent ce type de décomposition sont basés sur des idées très différentes de celles des bases adaptatives: Ce sont les algorithmes de 'Matching Pursuit' introduits par S.Mallat. On part d'une fonction g de norme L^2 égale à 1, dont on prend toutes les dilatations et translations en temps et en fréquence, soit la famille des

$$g_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g(\frac{t-u}{s}) e^{it\xi};$$

on notera γ le triplet (s, u, ξ). On va utiliser ce système très redondant pour décomposer f. Pour cela on fixe un paramètre $\alpha < 1$ mais proche de 1. Il existe alors γ_0 tel que

$$|\langle f | g_{\gamma_0} \rangle| \geq \alpha \sup_\gamma |\langle f | g_\gamma \rangle|;$$

f est donc fortement corrélée avec g_{γ_0}. On soustrait la composante de f sur g_{γ_0}, à savoir $\langle f | g_{\gamma_0} \rangle g_{\gamma_0}$ et l'on obtient un premier reste $f_1 = f - \langle f | g_{\gamma_0} \rangle g_{\gamma_0}$ qui est plus petit que f en norme L^2. Puis on recommence avec la nouvelle fonction f_1... Il existe plusieurs variantes de cet algorithme, cf [43], qui a notamment été testé sur des signaux de parole. La reconstruction du signal en ne gardant que les premiers termes du développement fournit un algorithme de débruitage assez similaire en esprit au wavelet shrinkage.

2.5 Transformée continue en ondelettes

Nous commencions cet article en signalant que le point de cristallisation des recherches que nous avons décrites s'est situé au début des années 80, dans l'entourage de Jean Morlet. Celui-ci, géophysicien à Elf-Aquitaine, eût l'idée d'analyser des signaux sismiques, non plus à l'aide de la transformée de Fourier, mais en intégrant le signal contre les translatées dilatées d'une 'ondelette' bien localisée en temps et en fréquence, afin de décorréler les informations temporelles et fréquentielles localement contenues dans le signal. Il calculait donc les quantités

$$C(a,b) = \int f(t) \psi(\frac{t-b}{a}) \frac{dt}{a},$$

et il remarqua que f peut être reconstituée par la formule

$$f(t) = \int \int C(a,b) \psi(\frac{t-b}{a}) \frac{db\, da}{a^2}.$$

Ce travail pouvait apparaître comme un retour en arrière: Ces formules étaient explicitement connues de Calderón qui les avaient utilisées dans les anné 60 pour ses travaux sur l'interpolation. Des version discrètes existaient au sein des mathématiques (Strömberg) ou en analyse du signal (Galand) ou d'images (algorithmes pyramidaux).

Quel a donc été le rôle joué par Morlet? Chacun est tour a tour venu confronter ses connaissances à cet algorithme et a reconnu quelque chose de familier. Alex Grossmann, le premier, y reconnut une formule classique de représentation des groupes; mais ce que Morlet lui apprit, c'est que cette formule peut être utile en analyse du signal. De même, Meyer reconnut la formule de Calderón, mais cela lui posa le problème de sa discrétisation, et donc de la recherche des bases orthonormées. Dans la décomposition continue et les bases orthonormées, Mallat reconnut les algorithmes pyramidaux de filtrage... Chacun reconnaissait des choses connues, et apportait savoir faire et problèmes. La transformée continue en ondelettes est un point de départ qui semble avoir été immédiatement dépassé. Cependant elle est encore utilisée; remarquons que les bases orthonormées d'ondelettes peuvent s'interpréter comme une discrétisation de la transformée continue sur un réseau $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$. Cette discrétisation peut masquer certaines informations contenues dans le signal. Ainsi, dans l'analyse de la turbulence, on cherche a mettre en évidence les 'autosimilarités', mais les échelles dyadiques n'ont aucune raison de jouer un rôle privilégié. Aussi Stéphane Mallat a proposé de discrétiser plutôt la transformée en ondelettes en suivant ses valeurs le long des lignes de maxima locaux (on calcule les maxima de $b \to C(a, b)$ et on les suit en fonction du paramêtre a). Ici encore le signal est codé d'une façon adaptative, qui, de plus, est invariante par translation et qui ne privilégie aucune échelle. Cette technique est utilisée par Arneodo, Bacry et Muzy pour l'étude de la turbulence. Ils travaillent sur un enregistrement monodimensionnel de la vitesse, obtenu en la mesurant en un point d'une soufflerie (on cherche donc des informations sur une fonction de 4 variables à partir d'une coupe monodimensionnelle, ce qui est peut être jusitifié en faisant des hypothèses d'ergodicité sur la vitesse, mais pose de gros problèmes mathématiques). On calcule le spectre des singularités à partir du formalisme multifractal en remplacant dans (2) la somme sur les coefficients d'ondelette par la somme sur les maxima locaux. Notons que les petits coefficients n'apparaissent plus, ce qui permet de calculer $\eta(p)$ pour des valeurs de p négatives. La turbulence a souvent été modélisée par des cascades multiplicatives fondées sur des géométries rigides. Arneodo et ses collaborateurs ont montré qu'il est plus pertinent de les étudier le long des lignes de maxima de la transformée en ondelettes [53]. En analyse mathématique, il arrive également que la transformée en ondelettes continue de certaines fonctions soient calculables explicitement. C'est le cas par exemple pour la série trigonométrique

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Cette fonction a été proposé par Riemann comme exemple probable d'une fonction continue nulle part dérivable. L'étude de sa régularité a attiré l'intérêt de nombreux mathématiciens, dont Hardy; elle est considérablement simplifiée par l'utilisation de l'ondelette $(x-i)^{-2}$, car alors, la transformée en ondelettes correspondante est la fonction Théta de Jacobi (au point $z = b + ia$). L'étude de la croissance de cette fonction théta au voisinage de l'axe réel fournit la régularité de la fonction de Riemann $R(x)$ en chaque point, et permet de montrer que $R(x)$ est un nouvel exemple de fonction multifractale [49].

Bibliographie

.

Monographies

References

[1] A.Arneodo, F.Argoul, E.Bacry, J.Elezgaray, J.F.Muzy *Ondelettes, multifractales et turbulence.* Diderot Editeur, Arts et Sciences (1995).

[2] M.Cannone *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes.* Diderot Editeur, Arts et Sciences (1995).

[3] C.K.Chui *An introduction to Wavelets.* Academic Press, New-York (1992).

[4] A.Cohen, R.Ryan *Wavelets and multiscale signal processing.* Chapman and Hall, London (1995)

[5] I.Daubechies *Ten Lectures on Wavelets.* S.I.A.M., Philadelphia (1992).

[6] U.Frisch *Turbulence.* Cambridge University Press (1995).

[7] E.Hernandez and G.Weiss *A first course on wavelets.* CRC Press, New-York (1996).

[8] S.Jaffard, Y.Meyer *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. Vol.123 N.587 (1996).

[9] J.P.Kahane, P.G.Lemarié *Fourier series and Wavelets ,* Gordon Breach, New-York (1996).

[10] S.Mallat *A wavelet tour of signal processing ,* Academic Press, New-York à paraitre (1997).

[11] Y.Meyer *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes, II: Opérateurs de Calderon-Zygmund, III: Opérateurs multilinéaires* Hermann, Paris (1990).

[12] Y.Meyer *Ondelettes et algorithmes concurrents.* Hermann, Paris (1992).

[13] Y.Meyer *Wavelets, Algorithms and applications.* S.I.A.M., Philadelphia (1993).

[14] Y.Meyer *Wavelets, vibrations and scalings.* Presses de l'Université de Montréal (CRM Series of the A.M.S.) à paraitre (1997).

[15] M.Vetterli et J.Kovacevic *Wavelets and subband coding.* Prentice Hall, New-York (1995).

[16] V.Wickerhauser *Adapted wavelet Analysis: from theory to software.* A.K.Peters, Wellesley, Mass. (1994).

Articles introductifs

[17] A.Bijaoui *Wavelets and astrophysical applications.* soumis à 'wavelets in Physics, ed. H.Vandenberg, CUP 97.

[18] C.M.Brislawn *Fingerprints go digital.* Notices of the Amer. Math. Soc. 42 N.11 p.1278-1283 Nov. 1995

[19] A.Bruce, D.Donoho et D.Y.Gao *Wavelet analysis.* IEEE Spectrum (Octobre 1996) p.26-35.

[20] D. Donoho I.M.Johnstone, G.Kerkiacharian and D.Picard *Wavelet shrinkage: Asymptopia?* J.Roy.Stat. Soc. B 57 (1995) 301-369

[21] M.Farge N.Kevlahan, V.Perrier and E.Goirand *Wavelets and turbulence.* Proceedings of the IEEE V.84 N.4 (1996) p.639-669

[22] P.Federbush *Quantum Field Theory in ninety minutes.* Bulletin of the Amer. Math. Soc. p.93-103 (1987).

[23] G.Strang *Wavelets and dilation equations: a brief introduction.* SIAM Review 31 (1989) 614-627

Proceedings et volumes spéciaux consacrés aux ondelettes

[24] A.Antoniadis et G.Oppenheim ed. *Wavelets and statistics.* Lecture Notes in Stat. Springer, New-York (1995).

[25] J.Benedetto et M.Frazier ed. *Wavelets: Mathematics and applications.* CRC Press, New-York (1994).

[26] J.M.Combes A.Grossmann et Ph. Tchamitchian. ed. *Wavelets Time-frequency methods and Phase space.* Springer, New-York (1989).

[27] C.K.Chui ed. *Wavelets: A tutorial in theory and applications.* Academic Press, New-York (1992).

[28] C.K.Chui L.Montefusco and L.Puccio ed. *Wavelets: theory, Algorithms and applications.* Academic Press, New-York (1994).

[29] I.Daubechies Ed. *Different perspectives on wavelets.* AMS Short course lecture notes (1993)

[30] E.Foufoula-Georgiou and P.Kumar ed. *Wavelets in geophysics.* Academic Press (1994).

[31] P.G.Lemarié ed. *Les ondelettes en 1989.* Lect. Notes in Math. n.1438 Springer-Verlag, New-York (1990).

[32] Y.Meyer ed. *Wavelets and applications.* Proceedings of the international Conference on Wavelets, Masson, Paris (1992).

[33] Y.Meyer and S.Roques ed. *Wavelets and applications.* Progress in wavelet analysis and applications, Editions Frontières, Paris (1993).

[34] M.B.Ruskai et al. ed. *Wavelets and their applications* Jones and Bartlett, Boston (1992)

[35] L.Schumaker and G.Webb *Topics in the theory and applications of wavelets* Academic Press, New-York (1994)

Quelques articles de recherche

[36] P.Abry and F.Sellan *The wavelet based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F.Sellan and Y.Meyer: remarks and fast implementation.* Applied and Comp. Harm. Anal. 3 (1996) p.377-383

[37] P.Auscher et Ph.Tchamitchian *Conjecture de Kato sur les ouverts de* $\mathbb{R}$. Rev Mat. Iberoamer. 8 N.2, p.149-199 (1992)

[38] G.Beylkin , R. Coifman, V. Rokhlin *The fast wavelet transform and numerical Algorithms.* Comm. Pure and Appl. Math. 44 (1991) pp. 141-183

[39] J.Bourgain *A remark on the uncertainty principle for Hilbertian basis* J. Funct. Anal. 79 pp.136-143 (1988).

[40] A.Cohen, I.Daubechies, Vial *Wavelets on the interval and fast wavelet transforms.* App. and Comp. Harm. Anal. V.1 pp 157-188 (1993).

[41] R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer, S.Semmes *Compensated compactness and Hardy spaces.* J. Math. Pures et Appl. 72 247-286 (1992).

[42] I.Daubechies *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis.* I.E.E.E. on information theory (1989).

[43] G.Davis, S.Mallat and Z.Zhang *Adaptive Time-Frequency decompositions.* Optical Engineering V.33, N.7, pp. 2183-2191 (July 1994).

[44] R.DeVore, B.Jawerth, V.Popov *Compression and wavelet decomposition.* Amer. J. Math. V;114 pp.737-785 (1992).

[45] R.DeVore and B.Lucier. *On the size and smoothness of solutions to nonlinear hyperbolic conservations laws* Preprint (1993).

[46] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer. *A class of nonharmonic Fourier series,* Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1952), 141-154.

[47] A.H.Fan L^1 *estimates for frequency localization of stationary and non-stationary wavelet packets.* Preprint (1996).

[48] S.Jaffard *Multifractal formalism for functions.* A paraître dans S.I.A.M. Journal of Mathematical Analysis.

[49] S.Jaffard *The spectrum of singularities of Riemann's function*, Rev. Math. Iberoamer. Vol.12 N.2 p.441-460 (1996).

[50] E.Laeng *Nouvelles bases orthonormées de* L^2. C.R.Acad.Sci.Paris 311 pp.677-680 (1990).

[51] H.Malvar *Lapped transforms for efficient transform-subband coding* IEEE on acoustic speech and signal processing T.38 n6 p.969-978 (1990).

[52] Francis Ribaud *Cauchy problem for semilinear parabolic equations with initial data in* $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *spaces.* A paraitre dans la Rev. Mat. Iberoamer.

[53] Stéphane Roux *Analyse en ondelettes de l'autosimilarité de signaux en turbulence pleinement développée.* Thèse, CRPP Bordeaux, (Novembre 1996).

[54] J.O.Strömberg, *A modified Franklin system and higher order spline systems on* $\mathbb{R}^n$ *as unconditional bases for Hardy spaces,* Conference in honor of Antoni Zygmund, Vol.2 p.475-493, W.Beckner ed., Wadsworth Math series.

[55] E.Wesfred, V.Wickerhauser, *Adapted local trigonometric transforms and speech processing.* IEEE trans. on Signal Proc. 41 N.12 p.3596-3600 (1993)