

Analyse de Fourier - Ondelettes

Support de cours, CS4 Master Pro 2ème année

Jean-Pol Guillement
Département de Mathématiques

Nantes 2010/2011

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 7 |
| 1 Présentation | 9 |
| 1.1 Introduction | 9 |
| 1.2 Description des images numériques - Formats | 9 |
| 1.3 Compression des images | 10 |
| 1.4 Filtrage des images | 11 |
| 1.5 Filtrage 1D | 12 |
| 1.6 Description du son numérisé - Formats | 15 |
| 1.7 Filtrage d'un passage musical | 15 |
| 1.8 Notion générale de Représentation et d'Approximation | 17 |
| 2 Décomposition en Séries de Fourier | 19 |
| 2.1 Introduction | 19 |
| 2.2 Décomposition en série de Fourier - Théorème de Fourier | 19 |
| 2.3 Les $e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$ forment une base de $L^2[0, T]$ | 19 |
| 2.4 Décomposition - Reconstruction | 19 |
| 2.5 Approximation - Lissage - Filtrage | 19 |
| 2.6 Vocabulaire - Fréquence - Spectre | 20 |
| 2.7 Filtre - Fonction de Transfert | 21 |
| 2.8 Le Noyau de Dirichlet | 21 |
| 2.9 Régularité de f et décroissance des coefficients de Fourier | 22 |
| 2.10 Échantillonnage - Théorème de Whittaker-Shannon pour l'intervalle $[0, T]$ | 22 |
| 2.11 Série de Fourier d'une fonction définie sur un intervalle | 22 |
| 3 Transformation de Fourier | 25 |
| 3.1 Introduction | 25 |
| 3.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ | 25 |
| 3.2.1 \hat{f} est une fonction définie pour tout ω , bornée, continue, qui tend vers 0 à l'infini | 25 |
| 3.2.2 Si f et xf sont dans L^1 , alors \hat{f} est dérivable et $\frac{d\hat{f}}{d\omega} = \mathcal{F}((-2i\pi x)f)_\omega$ | 25 |
| 3.2.3 Si $f \in L^1$ est dérivable et si $f' \in L^1$, alors $\mathcal{F}(f')_\omega = (2i\pi\omega)\hat{f}$ | 25 |
| 3.2.4 $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\omega^2}$ | 25 |
| 3.2.5 Avec $h_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}e^{-\pi x^2/\epsilon^2}$, si f est intégrable et continue en 0 alors $\int h_\epsilon f \rightarrow f(0)$. . | 26 |
| 3.2.6 $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$ | 26 |
| 3.2.7 $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ | 26 |
| 3.2.8 Théorème d'inversion de Fourier $\mathcal{F}\hat{f} = f$ | 26 |
| 3.2.9 Si f et g sont dans $L^1 \cap L^2$, alors $\ \hat{f}\ _2 = \ f\ _2$ et $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$ | 26 |
| 3.2.10 $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ | 26 |
| 3.2.11 $f * h_\epsilon \rightarrow f$ dans L^1 ou L^2 | 26 |
| 3.3 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ | 26 |
| 3.3.1 Théorème de Plancherel | 26 |
| 3.3.2 Égalité de Parseval | 26 |
| 3.4 Régularité de f et décroissance de \hat{f} | 27 |
| 3.5 Masses et Peigne de Dirac - Transformation de Fourier des Distributions Tempérées . | 27 |
| 3.5.1 Les espaces de fonctions tests \mathcal{D}, \mathcal{S} | 27 |
| 3.5.2 Les fonctions localement intégrables sont des distributions | 27 |
| 3.5.3 Les fonctions à croissance lente sont des distributions tempérées | 27 |
| 3.5.4 Les fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ sont des distributions tempérées | 28 |
| 3.5.5 Les masses de Dirac δ_a | 28 |
| 3.5.6 Convergence dans \mathcal{D}' et dans \mathcal{S}' | 28 |
| 3.5.7 Le peigne de Dirac $\Delta_a = \sum \delta_{na}$ | 28 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.5.8 | Derivee au sens des distributions, produit par une fonction, translation | 28 |
| 3.5.9 | Transformation de Fourier des distributions tempérees | 28 |
| 3.5.10 | $\frac{d}{dw^k}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^k T)$ | 28 |
| 3.5.11 | $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dw^k}T\right) = (2i\pi\omega)^k \hat{T}$ | 28 |
| 3.5.12 | $\tau_a \hat{T} = \mathcal{F}(e^{2i\pi a\omega} T)$ | 28 |
| 3.5.13 | $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi a\omega} \hat{T}$ | 28 |
| 3.5.14 | $\mathcal{F}(\delta) = 1, \quad \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi a\omega}$ | 29 |
| 3.5.15 | $\mathcal{F}(e^{2i\pi ax}) = \delta_a$ | 29 |
| 3.5.16 | $\mathcal{F}(\Delta_a) = \frac{1}{a}\Delta_{1/a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n a\omega}$ | 29 |
| 3.5.17 | Si f est à croissance lente, $\mathcal{F}(f\Delta_a)$ est une distribution $\frac{1}{a}$ périodique | 29 |
| 3.6 | Formules de Poisson | 29 |
| 3.6.1 | Transformée de Fourier d'une fonction a -périodique | 29 |
| 3.6.2 | Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$ | 29 |
| 3.6.3 | Formule de Poisson dans $L^2(\mathbb{R})$ | 29 |
| 3.6.4 | Formule de Poisson au sens des distributions | 29 |
| 3.7 | Le Principe d'incertitude d'Heisenberg | 30 |
| 3.8 | Échantillonnage - Théorème de Shannon | 30 |
| 3.8.1 | Théorème d'interpolation de Shannon - Critère de Nyquist | 30 |
| 3.9 | Problème du recouvrement du spectre | 30 |
| 3.10 | Transformation de Fourier 2D | 31 |
| 4 | Transformation de Fourier discrète | 33 |
| 4.1 | Introduction | 33 |
| 4.2 | La TFD | 33 |
| 4.3 | Propriétés de la TFD | 33 |
| 4.3.1 | F_N est un opérateur linéaire inversible | 33 |
| 4.3.2 | $\ X\ _2 = \sqrt{N}\ x\ _2$ | 34 |
| 4.4 | La FFT | 34 |
| 4.4.1 | Principe "diviser pour régner" | 34 |
| 4.4.2 | La décomposition Cooley-Tukey base 2 | 34 |
| 4.4.3 | Remarques | 36 |
| 4.5 | Les signaux discrets | 36 |
| 4.5.1 | Propriétés | 36 |
| 4.5.2 | Produit de convolution | 36 |
| 4.6 | TFD et Décomposition en Série de Fourier | 37 |
| 4.6.1 | Coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique | 37 |
| 4.6.2 | Approximation des coefficients de Fourier | 37 |
| 4.7 | TFD et Transformation de Fourier continue | 37 |
| 4.7.1 | Réponse A1 | 37 |
| 4.7.2 | Réponse A2 | 38 |
| 4.7.3 | Réponse B1 | 38 |
| 4.7.4 | Réponse B2 | 38 |
| 4.7.5 | Cas d'un polynôme trigonométrique | 39 |
| 4.7.6 | En résumé | 40 |
| 4.7.7 | Exemples | 40 |
| 4.8 | Le problème du recouvrement revisité | 42 |
| 4.9 | Le fenêtrage | 42 |
| 4.10 | Le Zéro-Padding | 42 |
| 4.10.1 | Sur-échantillonnage | 42 |
| 4.10.2 | Effet de zoom | 43 |
| 5 | Filtrage | 45 |
| 6 | Décomposition en Ondelettes | 49 |
| 6.1 | Localisation temps-fréquence | 49 |
| 6.2 | Les Ondelettes | 49 |
| 6.3 | Analyse Multirésolution | 49 |
| 6.3.1 | Analyse Multirésolution (à fonction d'échelle) orthogonale | 51 |
| 6.4 | Décomposition en ondelettes orthogonales | 53 |
| 6.4.1 | Exemple de décomposition avec l'ondelette de Haar | 54 |
| 6.5 | Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales | 54 |
| 6.5.1 | Décomposition | 55 |
| 6.5.2 | Reconstruction | 56 |
| 6.5.3 | Exemple | 56 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6.6 | Moments nuls. Régularité. Taille des supports | 56 |
| 6.7 | Quelques ondelettes orthogonales | 57 |
| 6.7.1 | Haar | 57 |
| 6.7.2 | Daubechies | 57 |
| 6.7.3 | Shannon | 57 |
| 6.7.4 | Battle-Lemarié | 58 |
| 6.8 | Bases d'ondelettes biorthogonales | 58 |
| 6.9 | Visualisation des ondelettes | 59 |
| 6.9.1 | Méthode des itérations successives | 59 |
| 6.9.2 | Utilisation de l'algorithme de décomposition-reconstruction | 59 |
| 6.10 | Ondelettes en dimension 2 | 60 |
| 7 | Compression des images | 61 |
| 7.1 | Principe général | 61 |
| 7.2 | La Compression JPEG | 61 |
| 7.2.1 | Décomposition fréquentielle | 61 |
| 7.2.2 | Découpage en blocs 8×8 | 62 |
| 7.2.3 | Quantification | 63 |
| 7.2.4 | Compression de Huffman | 64 |
| 7.2.5 | Conclusions | 64 |
| 7.3 | La Compression JPEG2000 | 64 |
| 7.3.1 | Décomposition en ondelettes | 64 |
| 7.3.2 | Quantification et codage entropique | 66 |
| 8 | Formulaire | 67 |
| | Bibliographie | 67 |
| | Index | 71 |

Introduction

Le but de ce cours intitulé "Traitement du signal", est de décrire les techniques mathématiques de base utilisées en traitement du signal et de présenter des applications. Les rubriques suivantes sont énumérées dans la maquette du Master :

- Analyse de Fourier
- Filtrage
- Analyse multi-résolution
- Analyse temps-fréquence et temps-échelles
- Exemples concrets en traitement d'images et de signaux

On va présenter les mathématiques communes aux thèmes suivants :

- Représentation et approximation.
- Filtrage des signaux et des images.
- Compression des images.

en s'attachant essentiellement à l'analyse de Fourier et à l'analyse par ondelettes.

Mais qu'entend-on par "traitement du signal" ?

D'abord le mot signal est synonyme de fonction numérique définie sur un espace à une ou plusieurs dimensions.

On peut dire que la théorie du signal est l'art de détecter dans les signaux peu compréhensibles, peu lisibles, confus, les informations qui intéressent.

Bien souvent il faut éliminer des parasites qui corrompent la lecture, bien souvent les informations recherchées ne sont pas visibles. C'est le cas par exemple quand elles correspondent à un phénomène vibratoire de haute fréquence. Un tracé en fonction de t est rarement informatif.

Il arrive que les informations recherchées nécessitent la résolution d'un problème inverse. C'est le cas de la RMN où les temps de relaxation sont à extraire du signal, et de la tomographie où le signal lu correspond à la transformée de Radon de l'information recherchée.

Mais traditionnellement on ne considère pas que la RMN et la tomographie relèvent directement de la théorie du signal. cette discipline concerne de façon privilégiée, l'étude des signaux vibratoires, ceux pour lesquels on s'intéresse à rechercher les composantes oscillatoires. Le son est l'exemple majeur. Mais on va voir, notamment avec les images, que cette catégorie est vaste.

Il y a lieu de distinguer les signaux analogiques (fonctions continues), ceux qui proviennent d'une mesure physique continue (électrique) et les signaux numériques (fonctions échantillonnées, discrètes) qui proviennent d'un convertisseur analogique-numérique, correspondant à la valeur moyenne d'un signal continu sur un petit espace de temps, de surface ou de volume.

Pour en savoir plus, consulter par exemple

http://fr.wikipedia.org/wiki/Traitement_du_Signal

Pré-requis :

- Espaces de Hilbert séries de Fourier.
- Intégration, espaces L^1 , L^2 .
- Distributions, masses de Dirac.

Note : Concernant l'analyse de Fourier, on pourra trouver dans [7] les nombreux développements insuffisamment présentés dans le cours. Concernant la théorie des ondelettes on regardera [10] [9] [4].

Chapitre 1

Présentation

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente pêle-mêle et très sommairement des opérations de compression et de filtrage sur des images et sur du son. Les explications détaillées seront vues ultérieurement.

1.2 Description des images numériques - Formats



lena en 512x512, réduite en 32x32, agrandie en 512x512 avec `convert -scale`, agrandie avec `-geometry`

Les images numériques sont obtenues par les scanners, les appareils photographiques numériques ou par des dispositifs analogues. Elles sont aussi produites par calcul. Une image numérique est un tableau rectangulaire de pixels. Un pixel représente la couleur d'un point ou plutôt la couleur moyenne d'un petit élément de surface de l'image. Selon le système de couleur choisi (monochrome, nuances de gris, systèmes RGB, YCbCr, HSV) il faut plus ou moins de bits ou d'octets pour coder une image.

Les images numériques peuvent subir des traitements mathématiques et informatiques. On les visualise à l'écran d'un ordinateur ou sur papier en sortie d'imprimante.

Lors de la visualisation ou de l'impression, elles subissent généralement un traitement pour les adapter à la résolution et aux dimensions de l'écran ou du papier de l'imprimante.

La caractéristique la plus importante d'une image est sa dimension. Il s'agit de la dimension du tableau des pixels, 512x512 par exemple. On parle aussi de résolution 512x512, bien qu'en principe l'image ne contienne aucune référence à une distance réelle entre des pixels voisins. La résolution concerne la visualisation ou l'impression de l'image.

On stocke les images sur disque ou en mémoire selon différents formats de codage et d'organisation. Il y a des formats sans compression (pgm par exemple), des formats avec compression sans perte (gif ou tiff par exemple) et des formats de compression avec perte (jpeg par exemple).

Le format pgm est très élémentaire. Les images pgm sont constituées de deux types de données. D'abord quelques lignes de caractères Ascii (mode texte) indiquant le type du fichier (P5 par exemple), contenant éventuellement des commentaires (# CREATOR ... par exemple), indiquant les dimensions de l'image (900 600 par ex) et le nombre de nuances de gris (255). Ensuite figurent les pixels (les 900 x 600 pixels) codés en binaire sur 1 octet. Voici un dump de lena.pgm où on voit "P5\n512 512\n255\n" constituant les trois premières lignes.

```
0000: 50 35 0A 35 31 32 20 35 - 31 32 0A 32 35 35 0A A2 P5.512 512.255..
000F: A2 A2 A1 A2 9D A3 A1 A6 - A2 A2 A0 9B A3 A0 9B 9D .....
001F: 9C A1 A1 9A 9C 9A 9D 99 - 9D 9A 98 9C 9A 9A 9C 9A .....
002F: 9E 9B A0 9E A7 A0 A6 A6 - A5 A6 AC AB AF AD AA AC .....
003F: AC A7 AF A8 A7 A2 A1 93 - 94 99 8C 82 77 76 6A 61 .....wvja
004F: 61 5E 5C 58 61 67 60 68 - 65 69 69 69 69 68 6E 6E a^\Xag'heiiihnn
005F: 6C 6B 69 68 6D 6D 6D 6C - 6A 6A 6C 6E 6D 6B 6D 6D lkihmmmljllnmkmm
006F: 6E 6E 6C 68 6A 6A 6C 6D - 6F 76 6F 71 76 79 77 70 nnlhjllmovoqvywp
007F: 7A 79 7A 7D 7A 79 7C 7B - 82 81 7B 7A 7F 84 83 84 zyz}zy|{.z....
008F: 81 87 81 80 83 83 7F 87 - 89 84 86 83 83 80 82 86 .....
009F: 7E 81 7E 85 82 81 83 80 - 83 81 80 87 85 88 86 80 ~.~.....
00AF: 86 82 87 85 85 86 87 84 - 87 84 88 86 84 85 85 88 .....
00BF: 85 86 86 84 85 83 84 85 - 87 89 86 85 83 85 83 87 .....
00CF: 88 84 87 88 89 85 8A 88 - 87 85 89 87 88 84 85 8C .....
00DF: 84 83 8B 86 83 81 84 83 - 7E 83 83 84 83 81 84 83 .....~.....
00EF: 80 87 85 85 87 83 84 85 - 85 83 85 82 83 83 85 88 .....
```

Dump de lena.pgm

1.3 Compression des images

Voici diverses compressions opérées sur l'image "lena". Il s'agit d'une image en niveau de gris 512x512 au format pgm. (Cette image est utilisée depuis les années 70 par toute la communauté du traitement d'image, voir <http://fr.wikipedia.org/wiki/Lenna>)



Compression jpeg avec convert de ImageMagick



Compression jpeg2000 avec LastWave et pantojpeg2k

(jasper et convert avec l'option -compress JPEG2000 permettent aussi de faire de la compression en jpeg2000)

1.4 Filtrage des images

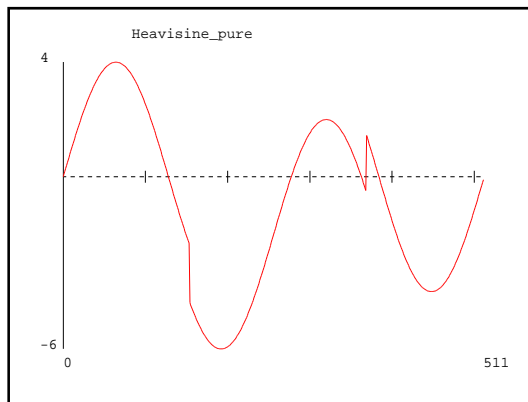


Bruitage avec ipo/brgauss, filtrage avec convert -noise et filtrage fréquentiel par ipo/f2dfreq

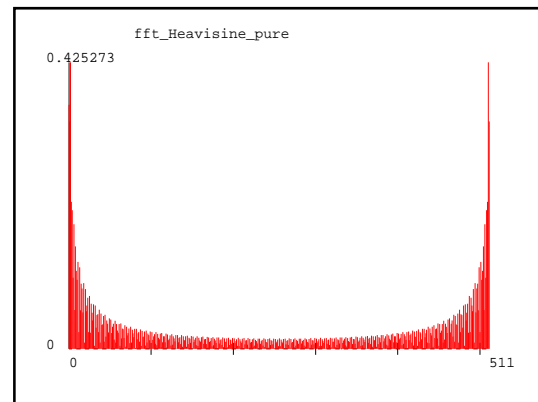


Filtrage avec décomposition en ondelettes par ipo/dwtseuil et avec ipo/f2dfreq

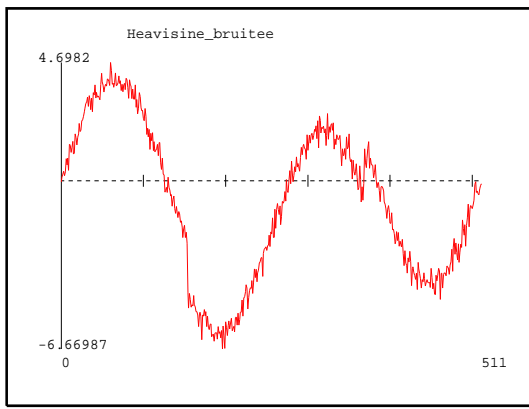
1.5 Filtrage 1D



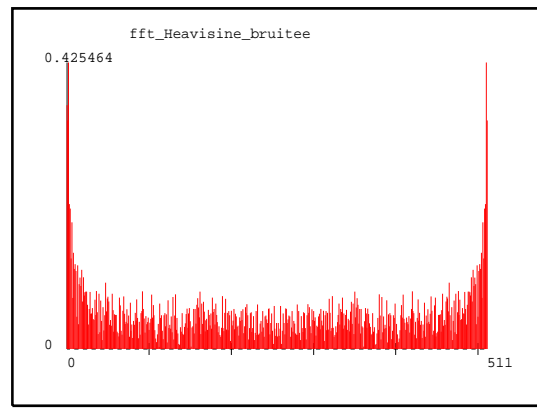
Fonction HeaviSine(Donoho)
 $4 \sin(4\pi x) - sg(x - 0.3) - sg(0.72 - x)$



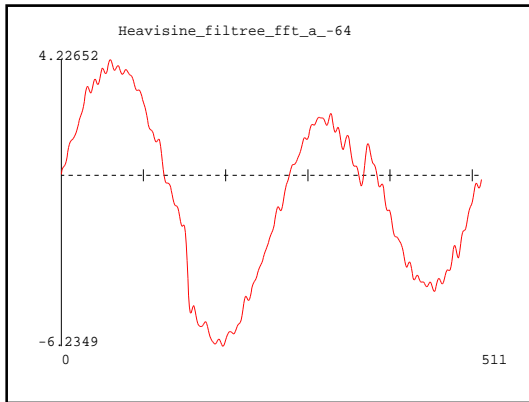
Spectre (ech loglog)



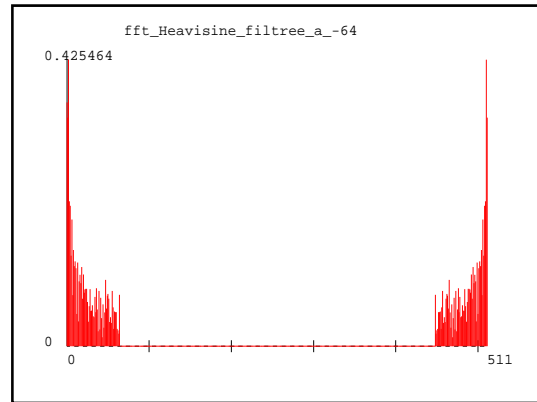
Signal bruité à 10 %
 $(\frac{\|bruit-orig\|_2}{\|orig\|_2} = 0.10)$



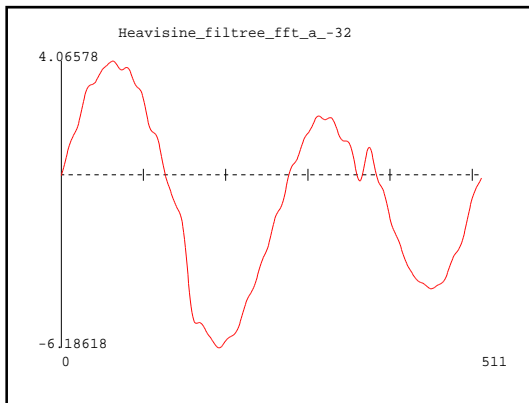
Spectre (ech loglog)



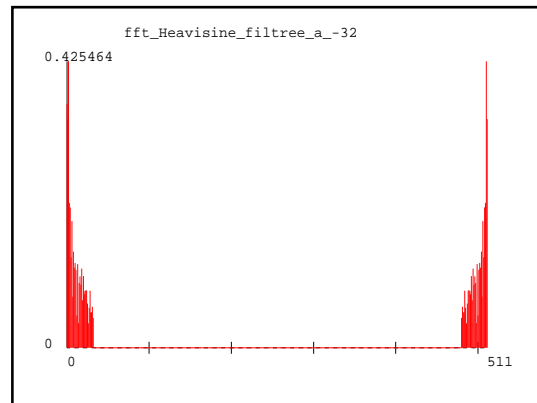
Signal filtré passe-bas à 64



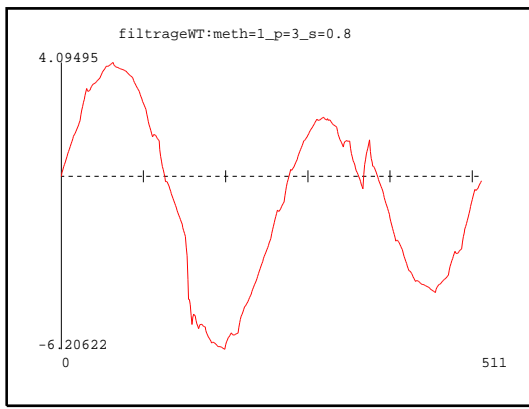
Spectre (ech loglog)



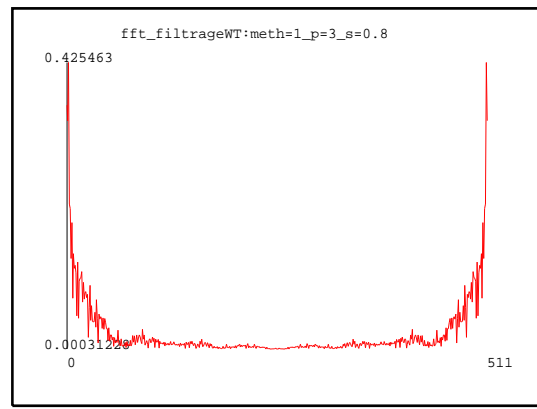
Signal filtré passe-bas à 32



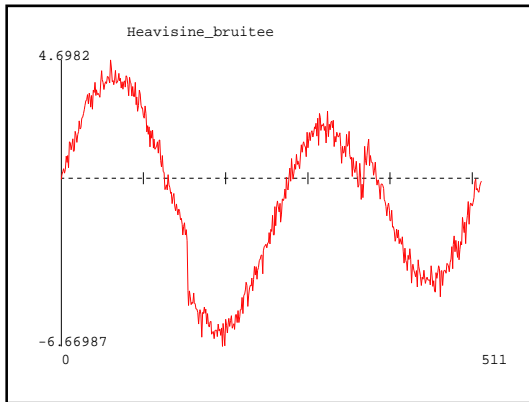
Spectre (ech loglog)



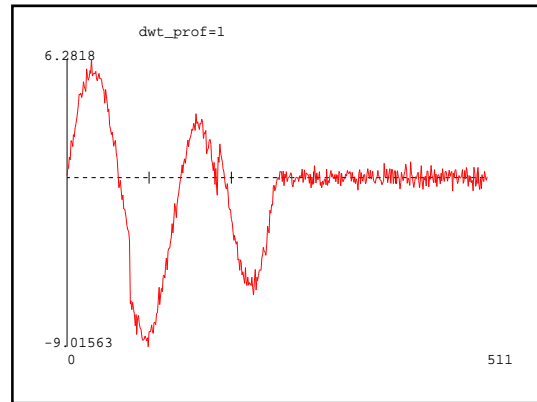
Signal filtré par l'ondelette de Daubechies D2
(ipo/filtreWT)



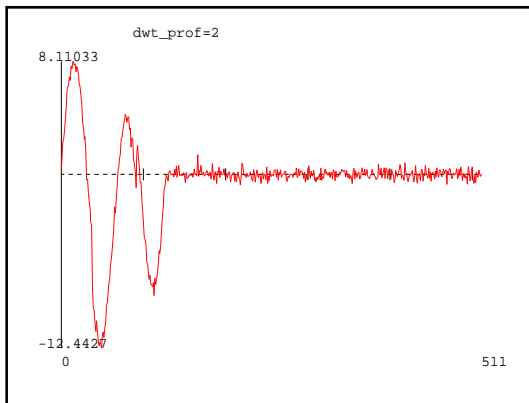
Spectre (ech loglog)



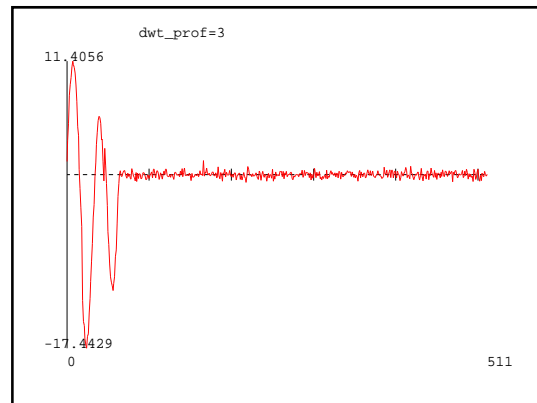
Signal bruité



Analyse par l'ondelette de Daubechies D2
à la profondeur 1 (ipo/dwtH)



Analyse à la profondeurs 2



Analyse à la profondeurs 3

1.6 Description du son numérisé - Formats

Le son est un ensemble de phénomènes compliqués. Il est difficile d'en décrire la chaîne complète qui comprend l'émission, la transmission, la réception, le rôle de l'oreille et du cerveau.

La théorie des signaux sonores ne se préoccupe que du courant électrique, obtenu par prise de son (microphone). Ce courant permet de restituer plus ou moins fidèlement le son d'origine par excitation des haut-parleurs. C'est ce courant qu'on appelle signal sonore, c'est sur lui que portent les traitements. Ce signal est analogique.

La numérisation du son consiste à relever à intervalles réguliers la moyenne du potentiel du courant électrique. En hifi par exemple, on utilise 44100 Hz comme fréquence d'échantillonnage, ce qui signifie que le relevé est réalisé 44100 fois par seconde, que les moyennes portent sur des intervalles de longueur $\frac{1}{44100}$ seconde.

Un fichier numérique sonore est constitué d'un ensemble de telles données, rassemblées selon un certain format d'organisation. Il existe un grand nombre de formats. Certains sont bruts (raw, wav, pcm, sun-audio), les données ne sont pas compressées. Ils sont volumineux. Une heure de musique stéréo numérisée à la fréquence de 44100 Hz, dont les données sont codées sur 16 bits, occupe

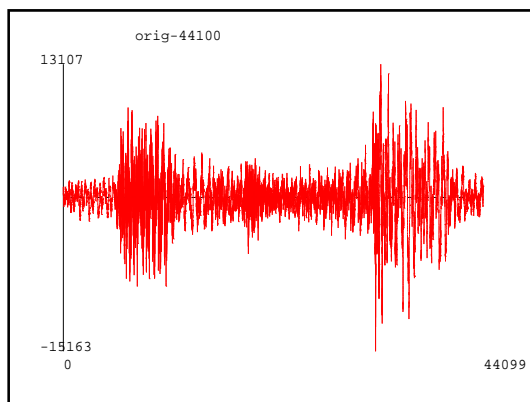
$$2 \times 60 \times 60 \times 44100 \times \frac{16}{8} = 635\,040\,000 \text{ Octets} = 605.6 \text{ Mo} \simeq 1 \text{ Cdrom}$$

D'autres formats permettent la compression, avec ou sans perte. Le format Mp3 est un format de compression avec perte, permettant selon les options, de diviser la taille des fichiers par 4, 10 ou même 20, tout en garantissant une qualité acceptable.

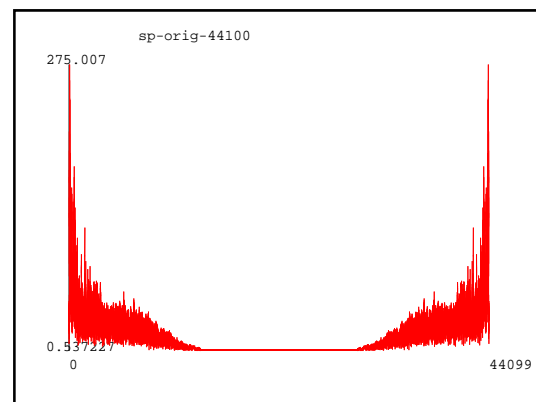
La restitution de la musique par ordinateur passe par les étapes suivantes :

- Un logiciel transforme les données du fichier musical en données brutes,
- Ces données brutes, ainsi que la fréquence, sont communiquées à un périphérique de transformation numérique vers analogique (séquenceur - carte son),
- Le périphérique maintient à une prise de sortie un potentiel électrique capable d'exciter les haut-parleurs ou les casques.

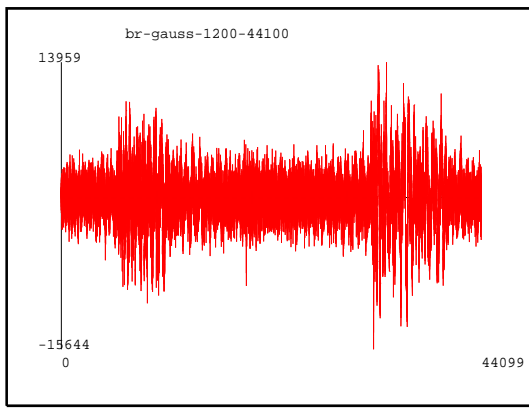
1.7 Filtrage d'un passage musical



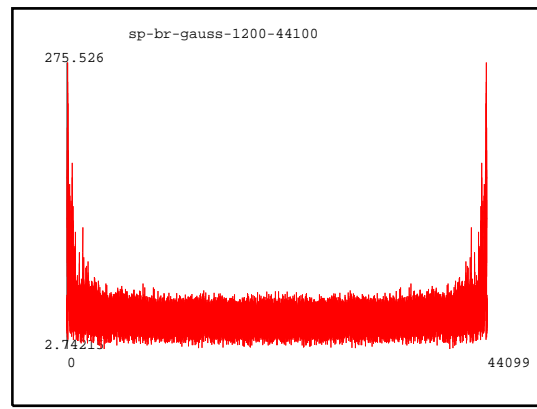
Passage d'1 sec de Tom's Diner (S.Vega-Remix)



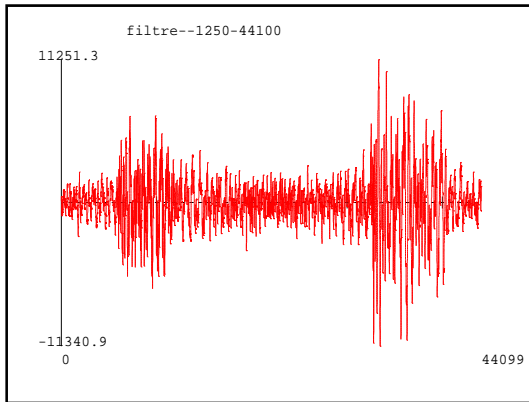
Spectre (ech \sqrt{y})



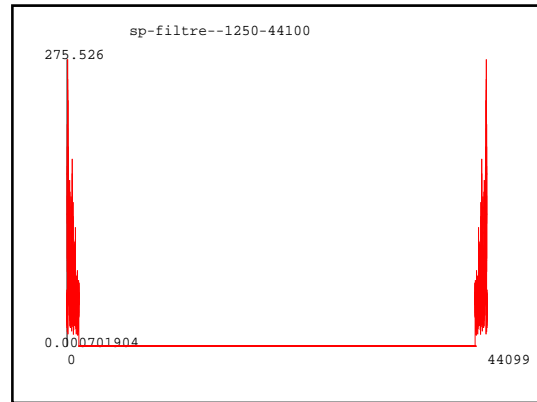
Signal bruité à 30%
 $(\frac{\|bruit-orig\|_2}{\|orig\|_2} = 0.30)$



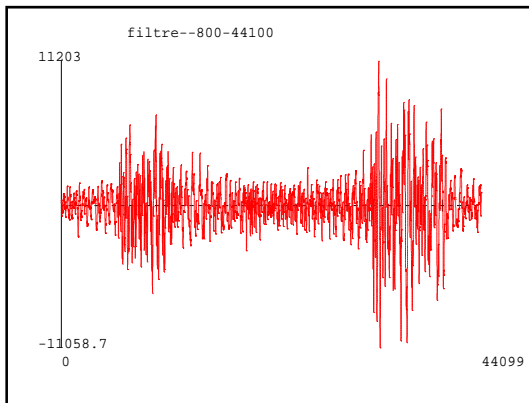
Spectre (ech \sqrt{y})



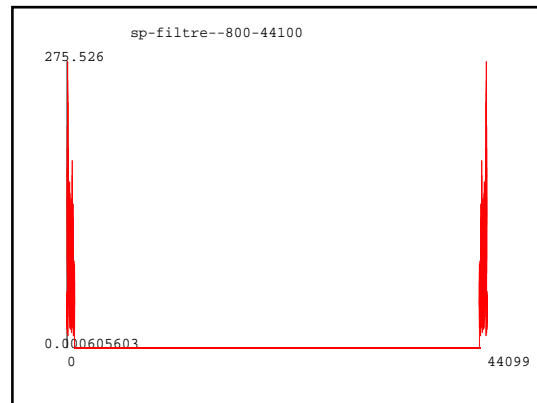
Signal filtré passe-bas à 1250



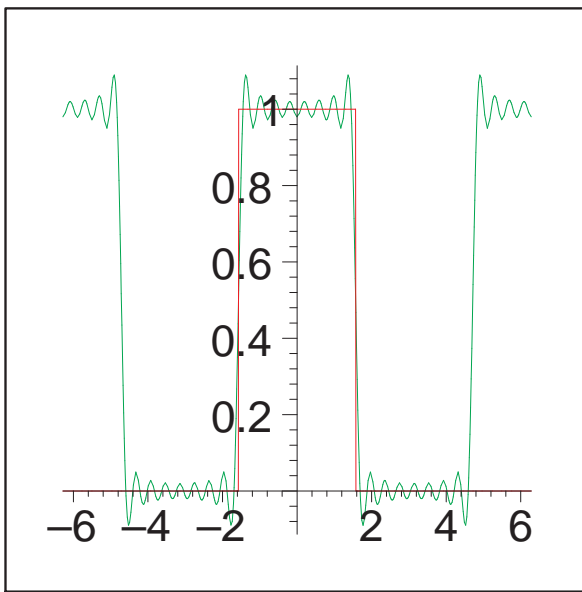
Spectre (ech \sqrt{y})



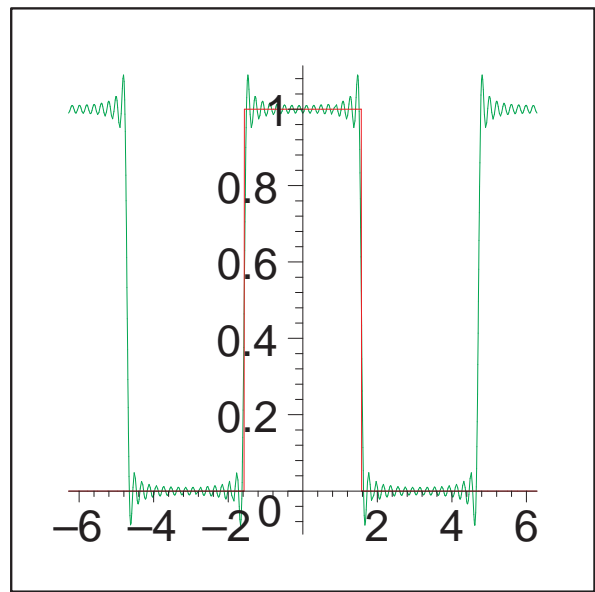
Signal filtré passe-bas à 800



Spectre (ech \sqrt{y})



Fonction porte $\chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$ et son approximation trigonométrique de degré 16 (sur $[-\pi, \pi]$)



Approximation de degré 32

Chapitre 2

Décomposition en Séries de Fourier

2.1 Introduction

2.2 Décomposition en série de Fourier - Théorème de Fourier

Toute fonction T-périodique, ayant une régularité raisonnable, est égale, en un certain sens, à la somme de la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

où c_n , le n^{eme} coefficient de Fourier de f , est donné par $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\pi n \frac{x}{T}} f(x) dx$

Il y a deux type de convergence de la série de Fourier, la convergence ponctuelle et la convergence en moyenne. Les hypothèses à imposer à f sont différentes et les techniques à mettre en œuvre aussi. Pour la convergence ponctuelle le résultat majeur est le théorème de Dirichlet [7, p40]. Pour la convergence en moyenne quadratique, indiquons

2.3 Les $e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$ forment une base de $L^2[0, T]$

[6, p440], [14, p89], [7, p27,p36,p125]

L'ensemble des $\{e^{2i\pi n \frac{x}{T}}, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthogonale de $L^2[0, T]$, $\|e^{2i\pi n \frac{x}{T}}\|^2 = T$.

Il en découle que si $f \in L^2[0, T]$, si $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T (f, e^{2i\pi n \frac{x}{T}}) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\pi n \frac{x}{T}} f(x) dx$, alors

- (i) $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$, qui est la projection orthogonale de f sur l'espace des polynômes trigonométriques de degré N , converge au sens de $L^2[0, T]$ vers f
- (ii) $\|f\|_2^2 = T \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ (égalité de Parseval)
- (iii) $|c_n| \rightarrow 0$
- (iv) Il existe une sous suite de S_N qui converge presque partout vers f .

2.4 Décomposition - Reconstruction

On entend par décomposition de f en série de Fourier, la transformation

$$f \rightarrow \{c_n\}$$

et par reconstruction, l'opération inverse

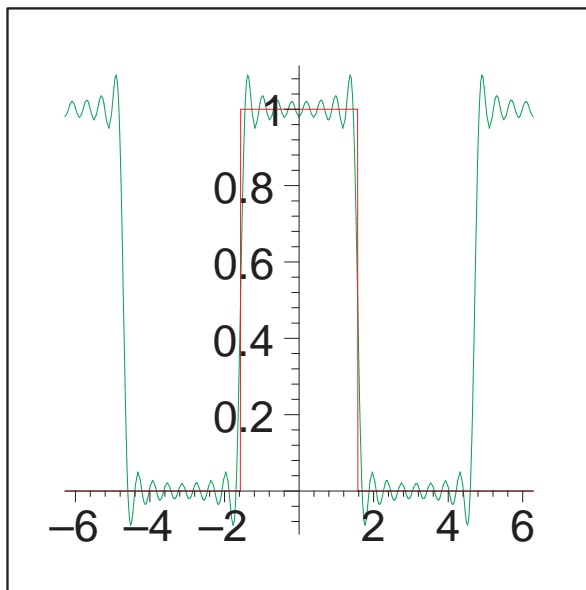
$$\{c_n\} \rightarrow f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

2.5 Approximation - Lissage - Filtrage

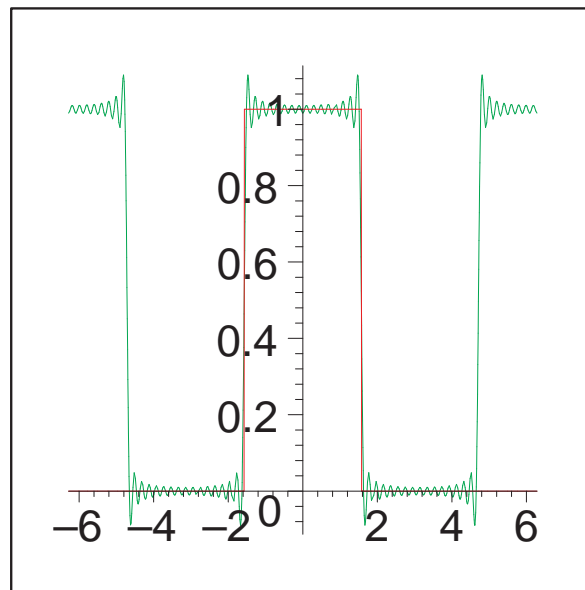
Quand on ne retient qu'un nombre fini de coefficients de Fourier, $\{c_n, n = -N \dots N\}$, la reconstruction ne redonne pas exactement f . Elle en donne une approximation. Cette approximation est un polynôme trigonométrique, plus régulier, plus lisse que f .

Cette opération consiste en fait à supprimer les hautes fréquences contenues dans f , il s'agit d'un

filtrage, un filtrage passe-bas. On ne laisse passer que les fréquences en dessous de N/T . Pour N fixé, cette approximation est d'autant plus voisine de f que f est elle-même plus régulière.



Fonction porte $\chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$ et son approximation trigonométrique de degré 16 (sur $[-\pi, \pi]$)



Approximation de degré 32

Approximation de degré 16 avec 9 coefficients :

$$P = .5000000000 + 0.6366197722 \cos(x) - 0.2122065908 \cos(3x) + 0.1273239545 \cos(5x) - 0.09094568176 \cos(7x) + .07073553024 \cos(9x) - .05787452474 \cos(11x) + .04897075170 \cos(13x) - .04244131814 \cos(15x).$$

Dist=.199342

Approximation de degré 32 avec 17 coefficients :

$$P = .5000000000 + .6366197722 \cos(x) - .2122065908 \cos(3x) + .1273239545 \cos(5x) - .09094568176 \cos(7x) + .07073553024 \cos(9x) - .05787452474 \cos(11x) + .04897075170 \cos(13x) - .04244131814 \cos(15x) + .03744822190 \cos(17x) - .03350630380 \cos(19x) + .03031522726 \cos(21x) - .02767912054 \cos(23x) + .02546479090 \cos(25x) - .02357851008 \cos(27x) + .02195240594 \cos(29x) - .02053612168 \cos(31x).$$

Dist=.141024

2.6 Vocabulaire - Fréquence - Spectre

[7, p49]

Si f , T -périodique, est développée en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

on dit que f contient les fréquences n/T , $n \in \mathbb{N}$, que $1/T$ est la fréquence fondamentale, que les fréquences n/T sont les multiples de la fréquence fondamentale, que

$$c_{-n} e^{-2i\pi n \frac{x}{T}} + c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}} = a_n \cos 2\pi n \frac{x}{T} + b_n \sin 2\pi n \frac{x}{T} = A_n \cos(2\pi \frac{x}{T} - \varphi_n)$$

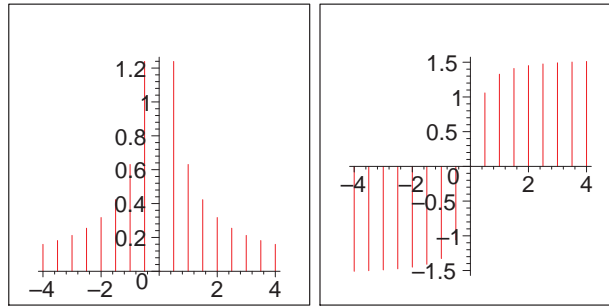
est l'harmonique de rang n . Les relations entre le c_n et les a_n , b_n sont données par

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), n \geq 0, c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), n \geq 0, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

L'harmonique fondamentale est le terme de rang 1

$$c_{-1} e^{-2i\pi \frac{x}{T}} + c_1 e^{2i\pi \frac{x}{T}}$$

Le Spectre de f est l'ensemble des couples $(n/T, c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ que l'on représente graphiquement selon le Spectre d'amplitude en considérant les $|c_n|$ et le Spectre de Phase en considérant les $Arg(c_n)$.



Spectre d'amplitude et spectre de phase de x^3 vu sur $[0, 2]$, fondamentale = $1/2$

2.7 Filtre - Fonction de Transfert

[7, p18]

Le filtrage consiste à modifier les amplitudes des fréquences contenues dans un signal. C'est une opération

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n/T) c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

Les fréquences ne sont pas changées, seules les amplitudes sont modifiées, et cela, indépendamment de c_n , uniquement en fonction de n , linéairement.

Un filtre A est un opérateur

- linéaire,
- continu (en un certain sens),
- invariant par translation, c'est à dire vérifiant

$$Af_h = A(f)_h$$

où

$$f_h(x) = f(x - h)$$

On démontre [7, p19] que tout filtre est de la forme indiquée ci-dessus, c'est-à-dire que pour tout filtre A , il existe une fonction H , appelée fonction de transfert du filtre A , telle que

$$A(e^{2i\pi n \frac{x}{T}}) = H(n/T) e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

2.8 Le Noyau de Dirichlet

On peut exprimer l'approximation trigonométrique de degré N ,

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}$$

par

$$S_N(x) = \int_0^T D_N(t-x) f(t) dt$$

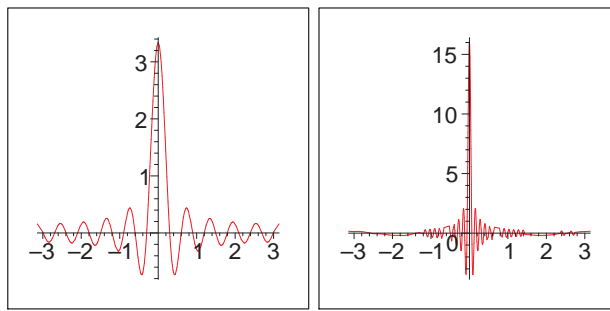
avec

$$D_N(u) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{-2i\pi n \frac{u}{T}} = \frac{1}{T} \frac{\sin 2\pi(N + 1/2) \frac{u}{T}}{\sin \pi \frac{u}{T}} \quad (2.1)$$

La fonction $D_N(u)$ s'appelle le Noyau de Dirichlet de degré N .

Les valeurs de $D_N(u)$ sont concentrées vers 0 et $\int D_N(u) du = 1$.

Cette expression de $S_N(x)$ à l'aide du noyau de Dirichlet est très utile, notamment pour étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier.



Le Noyau de Dirichlet $N=10$ et $N=50$

2.9 Régularité de f et décroissance des coefficients de Fourier

[7, p43]

Si f , T -périodique, est \mathcal{C}^p sur $[0, T]$, alors les coefficients de Fourier de f décroissent en $\frac{1}{|n|^p}$

2.10 Échantillonnage - Théorème de Whittaker-Shannon pour l'intervalle $[0, T]$

Si f , T -périodique, ne contient pas de fréquences au delà de N/T , c'est-à-dire en fait, si f est un polynôme trigonométrique de degré N , alors f peut s'exprimer par

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}} = \sum_{k=0}^{2N} f(ka) \frac{T}{2N+1} D_N(x - ka) \quad (2.2)$$

avec $a = \frac{T}{2N+1}$.

Ceci est un résultat d'interpolation qui précise comment f peut être reconstituée à l'aide des échantillons $f(ka)$. On y reviendra de façon plus intéressante au chapitre suivant.

2.11 Série de Fourier d'une fonction définie sur un intervalle

Soit f définie sur $[0, T]$. Supposons que f soit dans $L^2[0, T]$. On peut calculer les coefficients de Fourier de f et considérer

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{T}}.$$

Cette fonction g définie sur \mathbb{R} tout entier est T -périodique et on a

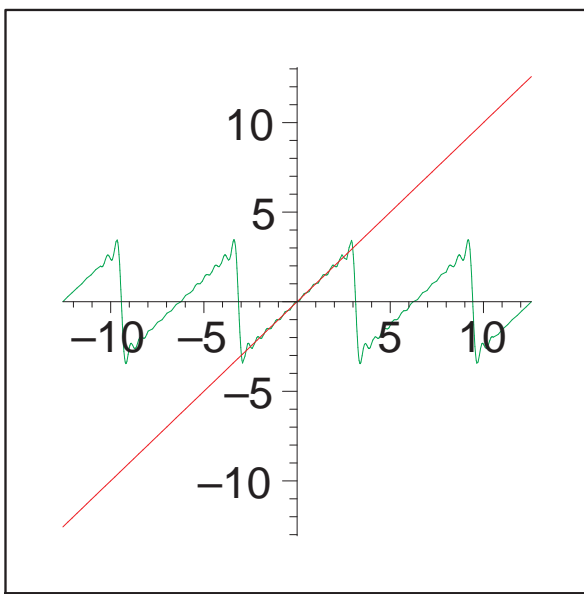
$$g(x) = f(x) \text{ pp sur } [0, T]$$

Tout se passe comme si on avait prolongé f T -périodiquement.

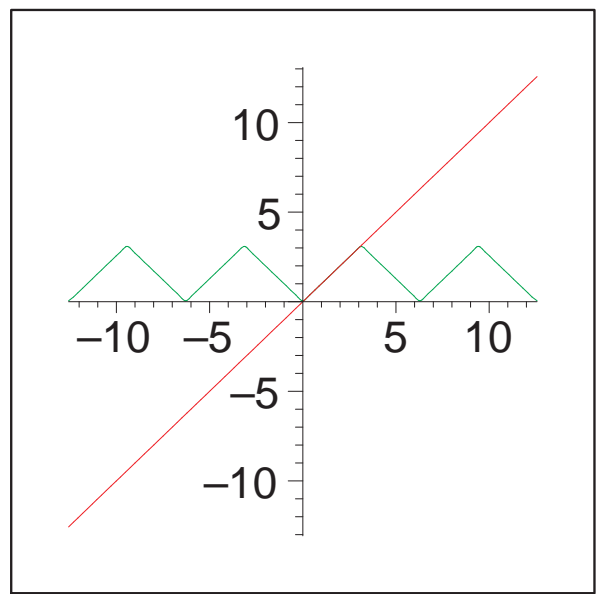
Il y a d'autres prolongements possibles, on peut considérer que f est une fonction paire, regarder son prolongement par parité sur $[-T, 0]$ et prolonger le résultat $2T$ -périodiquement.

On peut aussi penser que f est impaire, et procéder de façon analogue.

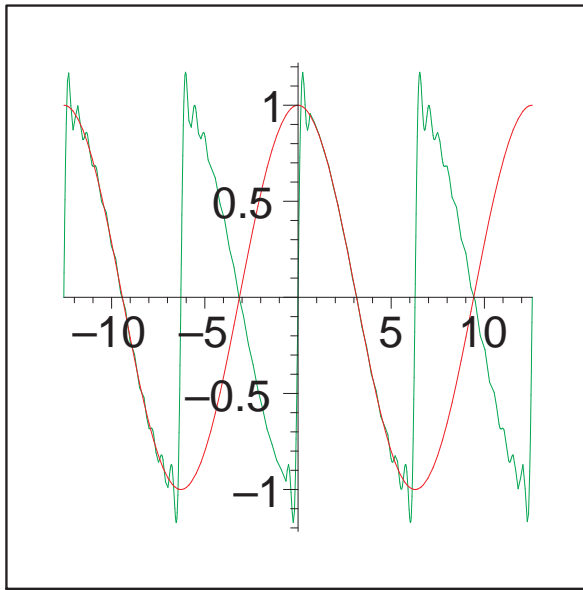
On remarquera que dans les trois cas les coefficients de Fourier sont différents, et que f coïncide (pp) sur $[0, T]$ avec la série de Fourier des prolongements. Ceci donne l'exemple de séries de Fourier différentes, qui coïncident sur un sous intervalle. (Ceci ne peut pas arriver avec les séries entières).



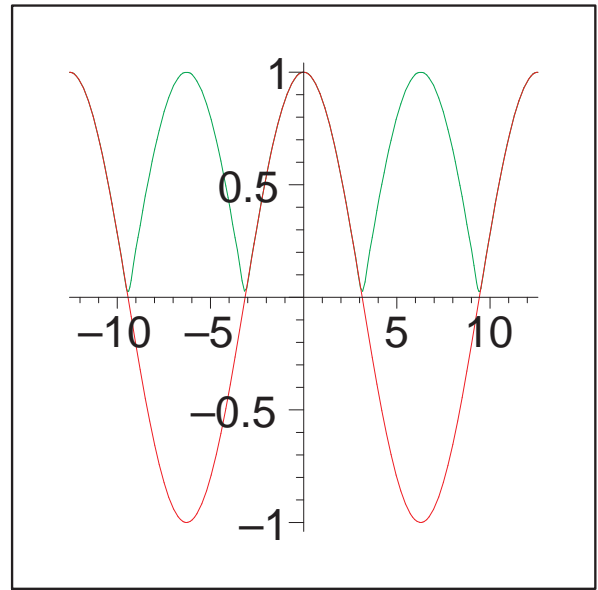
Développement à l'ordre 12 de $f(x) = x$
sur $[-\pi, \pi]$



Développement de f préalablement prolongée
par parité sur $[-\pi, 0[$



Développement à l'ordre 12 de $f(x) = \cos x/2$
préalablement prolongée par parité impaire sur $[-\pi, \pi]$



Développement à l'ordre 12 de $f(x) = \cos x/2$
sur $[-\pi, \pi[$

$\cos x/2$ est une fonction 4π -périodique, mais n'est pas 2π -périodique. Son développement en série de Fourier sur $[-2\pi, 2\pi]$ n'a qu'un seul terme, sur $[-\pi, \pi]$, il en a une infinité. L'égalité

$$\cos x/2 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin nx, \quad x \in]0, \pi[$$

correspond au développement en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction 2π -périodique (non continue en 0) obtenue en prolongeant $\cos x/2$ par parité impaire sur $[-\pi, 0[$. L'égalité

$$\cos x/2 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos nx \right], \quad x \in [-\pi, \pi]$$

correspond au développement en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction (paire, continue en 0) obtenue par prolongement 2π -périodique.

Note : On retrouvera lors de l'étude de la compression Jpeg, l'intérêt de pratiquer un prolongement symétrique, afin d'obtenir une meilleure convergence de la série de Fourier.

Chapitre 3

Transformation de Fourier

3.1 Introduction

On ne peut pas faire de décomposition en série de Fourier sur l'intervalle $[-\infty, \infty]$ comme sur l'intervalle $[0, T]$, notamment parce que les ondes pures $e^{2i\pi\omega x}$ ne sont pas intégrables. C'est pourtant ce désir qui est à la base de la transformation de Fourier où en remplaçant la série par une intégrale on fait apparaître les fonctions comme superposition continue d'ondes pures.

La transformation de Fourier a des usages nombreux et variés, dans des domaines très différents. Elle a une signification "physique" : $\hat{f}(\omega)$ mesure la "présence" de l'onde pure de fréquence ω dans f . On verra par exemple, que si $f = e^{2i\pi ax}$, on peut donner un sens à \hat{f} et vérifier que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega \neq a$ et $\hat{f}(a) \neq 0$.

La transformation de Fourier est également utilisée de façon purement formelle en calcul symbolique. Le calcul symbolique permet par exemple de transformer radicalement une équation aux dérivées partielles.

Pour les calculs numériques, ce n'est pas la transformation de Fourier "continue" présentée dans ce chapitre qui est utilisée, c'est la transformation de Fourier Discrète. Cette dernière est calculable numériquement, différente de la transformation continue, elle possède des propriétés analogues.

Il faut noter que la formule servant à définir la transformation de Fourier varie avec les auteurs. Ici, contrairement à l'usage en mathématiques, mais conformément à l'usage général en théorie du signal, les éléments de base sont $e^{-2i\pi\omega x}$ et non $e^{-i\omega x}$. Ce choix a des répercussions inévitables et gênantes dans beaucoup de formules.

La transformation de Fourier se définit par étapes, successivement, sur L^1 , puis sur L^2 par prolongement fonctionnel, puis sur les distributions tempérées par dualité.

3.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

\mathcal{F} est une application linéaire définie sur $L^1(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{F}(f)_\omega = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\omega x} f(x) dx$$

On définit de la même façon $\tilde{\mathcal{F}}$ en remplaçant i par $-i$. On verra que \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre.

3.2.1 \hat{f} est une fonction définie pour tout ω , bornée, continue, qui tend vers 0 à l'infini

[7, p129]

3.2.2 Si f et xf sont dans L^1 , alors \hat{f} est dérivable et $\frac{d\hat{f}}{d\omega} = \mathcal{F}((-2i\pi x)f)_\omega$

3.2.3 Si $f \in L^1$ est dérivable et si $f' \in L^1$, alors $\mathcal{F}(f')_\omega = (2i\pi\omega)\hat{f}$

3.2.4 $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\omega^2}$

[10, p27]

3.2.5 Avec $h_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} e^{-\pi x / \epsilon}$, si f est intégrable et continue en 0 alors $\int h_\epsilon f \rightarrow f(0)$

3.2.6 $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$

[7, p129]

Si f et g sont dans L^1 alors $f \hat{g}$ et $\hat{f} g$ sont dans L^1 et $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$

3.2.7 $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

[7, p164]

Si f et g sont dans L^1 alors

(i) $f * g \in L^1$

(ii) $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$

3.2.8 Théorème d'inversion de Fourier $\tilde{\mathcal{F}} \hat{f} = f$

[6, p402]

Si f et \hat{f} sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $f(x)$ est égale presque partout à $\tilde{\mathcal{F}}(\hat{f})$ qui est une fonction continue.

3.2.9 Si f et g sont dans $L^1 \cap L^2$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ et $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$

[6, p405]

3.2.10 $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

[7, p164]

Si f et g sont dans L^1 et si \hat{f} et \hat{g} sont dans L^1 alors $\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$

3.2.11 $f * h_\epsilon \rightarrow f$ dans L^1 ou L^2

[14, p186]

3.3 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

3.3.1 Théorème de Plancherel

[14, p187]

Il existe un et un seul opérateur linéaire appelé transformation de Fourier, noté \mathcal{F} , de $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$, ayant les propriétés suivantes :

(i) Si $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{F} f$ coïncide avec la transformée de Fourier de f au sens de L^1 .

(ii) $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2$.

(iii) \mathcal{F} est un isomorphisme de L^2 sur L^2 .

(iv) Pour toute $f \in L^2$, en posant

$$\phi_A(x) = \int_{-A}^A e^{-2i\pi\omega x} f(x) dx, \quad \psi_A(\omega) = \int_{-A}^A e^{2i\pi x \omega} \hat{f}(\omega) d\omega,$$

alors

$$\|\phi_A - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0, \quad \|\psi_A - f\|_2 \rightarrow 0$$

qui précise la formule de réciprocity de \mathcal{F} .

3.3.2 Égalité de Parseval

Si f et g sont dans L^2 alors $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$

3.4 Régularité de f et décroissance de f

[7, p130]

- (i) Si $f \in L^1$ alors $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$
- (ii) Si $x^k f \in L^1$, $k = 0 \dots n$, alors \hat{f} est n fois dérivable.
- (iii) Si $f \in \mathcal{C}^n \cap L^1$, et si les $f^{(k)} \in L^1$, $k = 0 \dots n$, alors
 - (a) $\mathcal{F}(f^{(k)}) = (2i\pi\omega)^k \hat{f}(\omega)$
 - (b) $|\omega|^k \hat{f}(\omega) \rightarrow 0$

Ainsi plus f est dérivable, plus \hat{f} est décroissante.

- (iv) Si $f \in L^1$ est à support compact, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty$
- (v) Si $f \in L^1$ et si $\hat{f} \in L^1$ est à support compact, alors $f \in \mathcal{C}^\infty$

Note : si $0 \neq f \in L^1$, f et \hat{f} ne peuvent pas être toutes les 2 à support compact. (Ceci peut se voir comme une conséquence du théorème de Shannon (voir plus loin), ou comme une conséquence du fait que $\hat{f}(\omega)$ peut se prolonger sur \mathbb{C} en une fonction entière ([14, p367]) qui s'annule sur tout un intervalle)

3.5 Masses et Peigne de Dirac - Transformation de Fourier des Distributions Tempérées

La théorie des distributions est très commode pour manipuler des objets comme les masses de Dirac qui ne sont pas des fonctions usuelles, mais qui se comportent comme telles quand on regarde leur action sur des fonctions "tests".

[13, p119] [7, p193]

3.5.1 Les espaces de fonctions tests \mathcal{D}, \mathcal{S}

\mathcal{D} est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, muni de la topologie suivante :

(φ_n) converge vers 0 dans \mathcal{D} si les supports des φ_n sont contenus dans un compact K et si les φ_n ainsi que toutes leurs dérivées, convergent uniformément vers 0.

T , un opérateur linéaire de \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{C} , est une distribution si T est continue. On note \mathcal{D}' l'ensemble des distributions.

\mathcal{S} est l'espace des fonctions φ , $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide, c'est-à-dire [7, p142] telles que

$$\forall p, \forall k, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p \varphi^{(k)}(x)| = 0$$

On peut aussi énoncer cette propriété en disant que pour tout m

$$N_m(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}, k, p \leq m} |x^p \varphi^{(k)}(x)| < +\infty$$

On munit \mathcal{S} de la topologie suivante :

(φ_n) converge vers 0 dans \mathcal{S} si pour tout m

$$N_m(\varphi_n) \rightarrow 0$$

T , un opérateur linéaire de \mathcal{S} à valeurs dans \mathbb{C} , est une distribution tempérée si T est continue. On note \mathcal{S}' l'ensemble des distributions tempérées.

Remarque : $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

3.5.2 Les fonctions localement intégrables sont des distributions

[7, p203]

3.5.3 Les fonctions à croissance lente sont des distributions tempérées

[7, p233]

f est à croissance lente si $|f(x)| \leq C(1+x^2)^N$

[7, p233]

3.5.5 Les masses de Dirac δ_a

L'opérateur δ_a , qui à φ associe $\varphi(a)$, est une distribution tempérée appelé masse de Dirac en a . La masse de Dirac en 0 est notée δ .

3.5.6 Convergence dans \mathcal{D}' et dans \mathcal{S}'

On dit qu'une suite de distributions (tempérées) T_n converge vers T dans \mathcal{D}' (\mathcal{S}') si, pour toute φ de \mathcal{D} (\mathcal{S})

$$T_n(\varphi) = (T_n, \varphi) \rightarrow T(\varphi) = (T, \varphi)$$

Par exemple, les gaussiennes h_ϵ convergent vers δ .

3.5.7 Le peigne de Dirac $\Delta_a = \sum \delta_{na}$

La suite des distributions tempérées $\sum_{n=-N}^N \delta_{na}$ converge dans \mathcal{S}' vers une distribution tempérée appelée peigne de Dirac, notée $\sum \delta_{na}$ ou Δ_a .

3.5.8 Dérivée au sens des distributions, produit par une fonction, translation

On démontre que si T est une distribution, T' définie par

$$(T', \varphi) = -(T, \varphi')$$

est aussi une distribution. C'est la dérivée de T .

De même, si f est \mathcal{C}^∞ , fT et $\tau_h T$ définies par

$$(fT, \varphi) = (T, f\varphi)$$

$$(\tau_h T, \varphi) = (T_x, \varphi(x+h))$$

sont des distributions.

3.5.9 Transformation de Fourier des distributions tempérées

On peut étendre la transformation de Fourier à \mathcal{S}' de la façon suivante :

Après avoir démontré [7, p142] que la transformation de Fourier usuelle envoie \mathcal{S} dans lui-même, continûment, on voit facilement que pour tout $T \in \mathcal{S}'$, on peut définir $\mathcal{F}(T) = \hat{T} \in \mathcal{S}'$ par

$$(\hat{T}, \varphi) = (T, \hat{\varphi})$$

\mathcal{F} est un opérateur continu de \mathcal{S}' dans lui-même.

On fait de même pour $\tilde{\mathcal{F}}$ et on démontre que \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont des opérateurs inverses l'un de l'autre qui prolongent les transformations de Fourier dans L^1 et dans L^2 .

3.5.10 $\frac{d}{dw^k}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^k T)$

[7, p235]

3.5.11 $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dw^k} T\right) = (2i\pi\omega)^k \hat{T}$

[7, p235]

3.5.12 $\tau_a \hat{T} = \mathcal{F}(e^{2i\pi a\omega} T)$

[7, p235]

3.5.13 $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi a\omega} \hat{T}$

[7, p235]

$$3.5.14 \quad \mathcal{F}(\delta) = 1, \quad \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi a\omega}$$

$$3.5.15 \quad \mathcal{F}(e^{2i\pi ax}) = \delta_a$$

$$3.5.16 \quad \mathcal{F}(\Delta_a) = \frac{1}{a}\Delta_{1/a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi na\omega}$$

3.5.17 Si f est à croissance lente, $\mathcal{F}(f\Delta_a)$ est une distribution $\frac{1}{a}$ périodique [7, p278]

3.6 Formules de Poisson

3.6.1 Transformée de Fourier d'une fonction a -périodique

[7, p274]

Si f est une fonction a -périodique, localement intégrable, alors

(i) f est une distribution tempérée

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum c_n e^{2i\pi nx/a} && \text{dans } \mathcal{S}' \\ \hat{f}(\omega) &= \sum c_n \delta_{n/a} && \text{dans } \mathcal{S}' \\ \text{avec } c_n &= \frac{1}{a} \int_0^a e^{-2i\pi nx/a} f(x) dx && \text{coefficient de Fourier de } f \text{ sur } [0, a] \end{aligned}$$

3.6.2 Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$

[7, p282]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, au sens de \mathcal{S}' ,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}},$$

(la série de gauche converge aussi dans $L^1[0, a]$)

Si en plus f est dérivable et si $f' \in L^1(\mathbb{R})$, l'égalité a lieu pour tout x .

Cette formule indique

- que quand on périodise f par le procédé

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na)$$

on obtient une fonction périodique dont les coefficients de Fourier sont

$$\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right)$$

- que si la contribution de $f(x - 0)$ est isolée dans la somme $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na)$, f peut s'exprimer à l'aide des seuls coefficients $\hat{f}\left(\frac{n}{a}\right)$

3.6.3 Formule de Poisson dans $L^2(\mathbb{R})$

[10, p63]

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et si $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na)$ converge dans $L^2[0, a]$, alors, au sens de $L^2[0, a]$ (et de tous les $L^2[ka, (k+1)a]$),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

3.6.4 Formule de Poisson au sens des distributions

[7, p281]

La formule de Poisson

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

a un sens et est vraie dans \mathcal{S}' pour certaines distributions f , en particulier pour les distributions à support compact.

3.7 Principe d'incertitude de Heisenberg

Ce principe précise ce qui a déjà été vu avec

- les fonctions f à support compact,
- $f = \delta$,
- $f = h_\epsilon$

à savoir, que si f est concentré en 0, sa transformée de Fourier est très étalée. Plus précisément

Principe d'Incertainité.

[7, p162]

Si $f, xf, \omega \hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\sigma_f \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{E_f}{4\pi}$$

où $\sigma_f^2 = \int |xf|^2$, $\sigma_{\hat{f}}^2 = \int |\omega \hat{f}|^2$, $E_f = \|f\|_2^2$

3.8 Échantillonnage - Théorème de Shannon

On sait que si f est un polynôme de degré n , f est entièrement déterminée par $n + 1$ valeurs. Il en est de même si f est un polynôme trigonométrique de degré N , on peut exprimer f à l'aide de $2n + 1$ valeurs par la formule (2.2).

Le théorème de Shannon montre que cette propriété d'interpolation s'étend aux fonctions f dont le spectre est à bande limitée.

3.8.1 Théorème d'interpolation de Shannon - Critère de Nyquist

Soit f continue, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ne contenant pas de fréquences au delà de ω_m (le support de \hat{f} est inclus dans $[-\omega_m, \omega_m]$). On dit que f est à bande limitée. Soit $a > 0$ un pas d'échantillonnage. Alors

- (i) f est \mathcal{C}^∞ .
- (ii) Si le critère de Nyquist

$$a \leq \frac{1}{2\omega_m} \tag{3.1}$$

est vérifié, alors

- (a) on a, au sens de $L^2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(na) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{a}(x - na) \tag{3.2}$$

et, au sens de $L^2([-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}])$,

$$\hat{f}(\omega) = a \sum_{-\infty}^{\infty} f(na) e^{-2i\pi n\omega a} \tag{3.3}$$

$$(\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x})$$

- (b) $\sum_{-\infty}^{\infty} |f(na)|^2 < +\infty$

- (c) Si en plus $\sum_{-\infty}^{\infty} |f(na)| < +\infty$, l'égalité (3.2) a lieu au sens de la norme uniforme.

Notes :

- (i) On peut se libérer de la contrainte $f \in L^1(\mathbb{R})$, voir [7, p290].
- (ii) La formule (3.2) est une formule d'interpolation et la formule (3.3) indique aussi que, sous la condition de Nyquist, la transformée de Fourier peut être approchée très correctement par la formule des trapèzes, voir [11, p56].

3.9 Problème du recouvrement du spectre

On a vu précédemment qu'échantillonner f sur tout \mathbb{R} revient à remplacer f par le peigne de Dirac

$$af\Delta_a = a \sum f(na)\delta_{na}$$

dont la transformée de Fourier est la distribution périodique

$$a \sum f(na) e^{-2i\pi na\omega}$$

qui s'écrit aussi grâce à la formule de Poisson

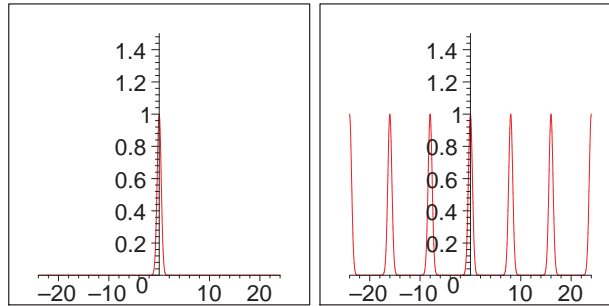
$$\sum \hat{f}(\omega - n/a)$$

Autrement dit, le spectre de l'échantillonnage de f est la fonction obtenue par périodisation de période $1/a$ à partir du spectre de f .

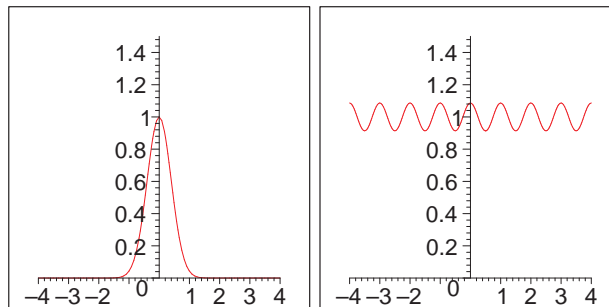
Et alors

- ou bien le spectre de f a un support assez petit pour être inclus dans $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$, le critère de Nyquist est satisfait et le spectre de l'échantillonnage coïncide avec \hat{f} dans $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$,
- ou bien ce n'est pas le cas, et le calcul du spectre de l'échantillonnage ne permet pas de retrouver \hat{f} . Il y a **recouvrement du spectre**.

On reverra plus concrètement ce problème au chapitre suivant. Illustrons le simplement avec $e^{-\pi x^2}$ dont la transformée de Fourier est $e^{-\pi \omega^2}$



$e^{-\pi \omega^2}$ périodisé avec un pas de 8, vu sur $[-24, 24]$



$e^{-\pi \omega^2}$ périodisé avec un pas de 1, vu sur $[-4, 4]$

3.10 Transformation de Fourier 2D

[10, p37]

Chapitre 4

Transformation de Fourier discrète

4.1 Introduction

La transformation de Fourier discrète est un objet mathématique différent de la transformation de Fourier continue. C'est une transformation que l'on calcule de façon exacte, avec un nombre fini d'opérations élémentaires. Elle est liée au développement en série de Fourier et à la transformation de Fourier continue. On peut la voir comme un moyen d'approcher la transformation continue ou comme une transformation à part entière. Elle possède des propriétés de calcul symbolique analogue à celles de la transformation continue. Tous les calculs effectifs de spectre se font par cette transformation qui, de fait, est très utilisée ; surtout depuis que l'on connaît un moyen rapide de la calculer. On va

- la définir,
- décrire quelques unes de ses propriétés mathématiques, dont la réciprocity,
- montrer qu'elle peut se programmer efficacement grâce à la FFT,
- voir ses liens avec les coefficients de Fourier, avec la transformation de Fourier continue, et voir comment on l'utilise.

4.2 La TFD

La transformation de Fourier discrète, TFD en français, DFT en anglais, est l'application F_N de \mathbb{C}^N à valeurs dans \mathbb{C}^N , qui à $x = (x_0 \dots x_{N-1})$ fait correspondre $X = (X_0 \dots X_{N-1})$ définie par

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-2i\pi jk/N}$$

C'est une application linéaire de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C}^N dont la matrice est

$$F_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

où $w = e^{-2i\pi/N}$ est une racine N^{ieme} de l'unité.

En principe, une fois les coefficients de la matrice tabulés, le calcul de $X = F_N(x)$ demande N^2 multiplications complexes et $n(n-1)$ additions, c'est-à-dire environ $2N^2$ opérations complexes.

On va voir plus loin que l'on peut faire beaucoup mieux.

4.3 Propriétés de la TFD

4.3.1 F_N est un opérateur linéaire inversible

Son inverse est donné par

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi kj/N}$$

Pour le voir, il est intéressant de remarquer que les vecteurs φ_p définis par $\varphi_p[j] = w^{-jp} = e^{2i\pi jp/N}$ forment une base orthogonale de \mathbb{C}^N muni du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \overline{v_j}$$

et que F_N envoie cette base sur la base canonique.

Note : la bibliothèque NAG fournit des routines de calcul de la transformation discrète. Il faut tenir compte du fait que ces routines calculent $\frac{1}{\sqrt{N}}F_N(x)$ et non $F_N(x)$. Cela permet, à la conjugaison près, d'utiliser les mêmes routines pour calculer la transformée et son inverse.

4.3.2 $\|X\|_2 = \sqrt{N}\|x\|_2$

Vient de la propriété indiquée ci-dessus.

4.4 La FFT

4.4.1 Principe "diviser pour régner"

Il s'agit d'un principe qui fait des miracles en informatique : Supposons qu'un calcul demande n^2 opérations pour traiter un jeu de taille n . Supposons qu'on sache le séparer en deux paquets de taille $n/2$, qu'on sache traiter les jeux de taille $n/2$ et regrouper les résultats. Supposons enfin que la séparation et le regroupement demandent $cte \times n$ opérations.

Alors, avec cette technique, il faut en fait

$$(n/2)^2 + (n/2)^2 + cte \times n = n^2/2 + cte \times n$$

opérations, ce qui, pour n assez grand, donne un gain appréciable.

En plus, on réalise récursivement la même procédure sur les jeux de taille $n/2$.

En supposant par exemple que $cte = 4$, qu'on arrête les divisions par 2 lorsque $n = 1$, qu'il faille 4 opérations pour traiter un jeu de taille 1, alors, $Nb(n)$, le nombre d'opérations nécessaires au traitement d'un jeu de taille n avec cette technique, est une fonction de n qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\begin{cases} Nb(n) = 2Nb(n/2) + 4n \\ Nb(1) = 4 \end{cases}$$

dont la solution est

$$Nb(n) = 4n(\log_2 n + 1)$$

Ce principe, appliqué depuis les années soixante est la clé de la FFT et de la méthode du tri rapide.

4.4.2 La décomposition Cooley-Tukey base 2

(i) On va voir, en utilisant les propriétés arithmétiques des w^k , que l'on peut écrire, pour N pair,

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = F_{N/2}x^{pair} + D_w F_{N/2}x^{impair}$$

$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = F_{N/2}x^{pair} - D_w F_{N/2}x^{impair}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } x^{pair} &= (x_0, x_2 \dots x_{N-2}) \\ x^{impair} &= (x_1, x_3 \dots x_{N-1}) \\ D_w &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & w^{N/2-1} \end{bmatrix} \\ w &= e^{-2i\pi/N} \end{aligned}$$

permettant, grâce au principe "diviser pour régner", de calculer $X = F_N(x)$ en $O(N \log N)$ opérations au lieu de $O(N^2)$. Le gain est très important.

(ii) Complexité :

On suppose que N est une puissance de 2, $N = 2^p$, $p = \log_2(N)$. On suppose que $x, X \in \mathbb{C}^N$, que les w^k sont déjà calculés, que l'on décompose jusqu'à $N = 2$. Alors, $Nb(N)$, le nombre d'additions et multiplications réelles nécessaires vérifie

$$\begin{cases} Nb(N) = 2Nb(N/2) + (6 + 4)N/2 \\ Nb(2) = 4 \end{cases}$$

dont la solution est $Nb(N) = N \times (5 \log_2 N - 3)$.

Note : sauf astuce que l'on utilise quand les multiplications sont beaucoup plus coûteuses que les additions (opérations sur des entiers), 1 addition complexe = 2 additions réelles, 1 multiplication complexe = 2 additions et 4 multiplications.

(iii) La décomposition $N = 2 N/2$.

Soit donc à exprimer $X = F_N(x)$ à l'aide de $F_{N/2}$.

Dans la matrice F_N , il n'y a en fait que N termes, $1, w \dots w^{N-1}$. Et même moins, car il y a des symétries :

$$\begin{aligned} w^{N/2} &= e^{-i\pi} = -1 \\ w^{N/2+1} &= -w \\ &\vdots \\ w^{N-1} &= -w^{N/2-1} \end{aligned}$$

Pour exploiter cette propriété, remarquons que

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j w^{jk}$$

peut se réécrire, en posant

$$\begin{aligned} N' &= 2 \\ N'' &= N/2 \\ j &= j' + N'j'' \\ k &= N''k' + k'' \\ kj &= N''k'j' + N'k''j'' + k''j' + \lambda N \\ w^{kj} &= w^{N''k'j'} w^{N'k''j''} w^{k''j'} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j' &= 0, 1 \quad j'' = 0 \dots N/2 - 1 \\ k' &= 0, 1 \quad k'' = 0 \dots N/2 - 1 \end{aligned}$$

selon

$$X_k = X_{N''k'+k''} = \sum_{j'=0}^{N'-1} w^{N''k'j'} [w^{k''j''} \sum_{j''=0}^{N''-1} w^{N'(k''j'')} x_{j'+N'j''}]$$

et alors, pour $k' = 0$

$$X_k = X_{k''} = \sum_{j''=0}^{N/2-1} (w^2)^{k''j''} x_{2j''} + w^{k''} \sum_{j''=0}^{N/2-1} (w^2)^{k''j''} x_{1+2j''}$$

et pour $k' = 1$

$$X_k = X_{N/2+k''} = \sum_{j''=0}^{N/2-1} (w^2)^{k''j''} x_{2j''} - w^{k''} \sum_{j''=0}^{N/2-1} (w^2)^{k''j''} x_{1+2j''}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} &= F_{N/2} x^{pair} + D_w F_{N/2} x^{impair} \\ \begin{bmatrix} X_{N/2} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} &= F_{N/2} x^{pair} - D_w F_{N/2} x^{impair} \end{aligned}$$

4.4.3 Remarques

- (i) Quand N n'est pas une puissance de 2, on complète parfois avec des 0. Voir la section 4.10.
- (ii) Il y a d'autres décompositions possibles. Par exemple la décomposition Cooley-Tukey base 4 qui correspond à $N = 4N/4$.
- (iii) Pour certaines valeurs de N , ayant des propriétés arithmétiques particulières, il y a d'autres types de calculs. Comme par exemple les algorithmes de Winograd qui sont basés sur le fait que
 - (a) Si $N = pq$, $\{(w^p)^l\}$ ne comporte que q éléments

$$1, w^p, w^{2p} \dots w^{(q-1)p}$$

et $\{(w^q)^l\}$ ne comporte que p éléments.

Si p et q sont premiers entre eux, grâce à l'égalité de Bezout

$$1 = lp + hq$$

$$w = (w^p)^l (w^q)^h$$

tous les w^m peuvent s'exprimer à l'aide des w^p et w^q .

On peut alors écrire F_N en fonction de F_p et F_q plus petites.

- (b) Ensuite, si N est petit et premier ou de la forme p^α , des considérations algorithmiques très fines permettent de calculer $X = F_N(x)$ sous la forme d'un produit de convolution que l'on traite comme un produit de polynômes modulo $t^N - 1$. Voir par exemple [2] pour en savoir plus.

4.5 Les signaux discrets

[10, p41] [7, p55]

On appelle signal discret une suite $(y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, ou ce qui revient au même, les valeurs échantillonnées aux points $j \frac{T}{N}$ d'un signal continu f

$$y_j = f\left(j \frac{T}{N}\right)$$

Si f est T -périodique, la suite $(y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est N -périodique, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$y_{j+N} = y_j$$

Quand cela est le cas, et que l'on calcule la transformée de Fourier discrète de la suite $y_0 \dots y_{N-1}$, on peut remarquer que l'on peut prendre les indices sur n'importe quel intervalle d'entiers de longueur N , en particulier, on peut considérer $\sum_{-N/2}^{N/2-1}$.

On remarque aussi que l'image $Y_k = \sum_0^{N-1} y_j e^{-2i\pi jk/N}$ peut être regardée pour d'autres valeurs de k que les valeurs entre 0 et $N-1$, et que ces Y_k forment une suite N -périodique.

On dit que (y_j) est paire si $y_{-j} = y_j$, qu'elle est impaire si $y_{-j} = -y_j$.

4.5.1 Propriétés

On suppose que (y_j) est N -périodique. Alors, si (Y_k) est l'image de (y_j) par la transformation de Fourier discrète

- (i) (Y_{-k}) est l'image de (y_{-j}) .
- (ii) $(\overline{Y_{-k}})$ est l'image de $(\overline{y_j})$.
- (iii) $(\overline{Y_k})$ est l'image de $(\overline{y_{-j}})$.
- (iv) (Y_k) est paire (impaire) si et seulement si (y_j) est paire (impaire).
- (v) (y_j) est réelle si et seulement si $Y_{-k} = \overline{Y_k}$
- (vi) (y_j) est réelle paire si et seulement si (Y_k) est réelle paire.
- (vii) (y_j) est réelle impaire si et seulement si (Y_k) est imaginaire pure et impaire.

4.5.2 Produit de convolution

On suppose que (x_j) et (y_j) sont deux suites N -périodiques.

- (i) La suite $z = x * y$ définie par

$$z_j = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{j-q}$$

a pour transformée $Z_k = NX_k Y_k$

- (ii) La suite $z_j = x_j y_j$ a pour transformée $Z = X * Y$.

4.6.1 Coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique

Soit f une fonction T -périodique qui ne contient pas de fréquences au delà de k_0 , c'est-à-dire en fait (voir Théorème de Shannon-Whittaker 2.10), soit f le polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k e^{2i\pi kx/T}$$

Alors, si $N > 2k_0$ (Condition de Nyquist), c_k , les coefficients de Fourier de f , peuvent se calculer de la façon suivante :

- on échantillonne f aux points $x_j = j \frac{T}{N}$, $y_j = f(x_j)$, $j = 0 \dots N - 1$,
- on calcule la transformée de Fourier discrète Y de $y = (y_j)$,
- et alors

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} Y_k, & k &= 0 \dots k_0 \\ c_k &= \frac{1}{N} Y_{N+k}, & k &= -k_0 \dots -1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Note : Ici le pas d'échantillonnage est $a = \frac{T}{N}$, et la plus grande fréquence est $\frac{k_0}{T}$. Contrairement au théorème de Shannon (3.2), la condition de Nyquist $a < \frac{1}{2\frac{k_0}{T}}$, est ici une inégalité stricte. Cela est lié au fait que l'on calcule $2k_0 + 1$ coefficients de Fourier avec une TFD à N points.

4.6.2 Approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction T -périodique qui n'est pas un polynôme trigonométrique. On peut calculer des approximations des coefficients de Fourier de f , c_k , $k = -k_0 \dots k_0$, de la façon suivante :

- on choisit $N > 2k_0$,
- on échantillonne f aux points $x_j = j \frac{T}{N}$, $y_j = f(x_j)$, $j = 0 \dots N - 1$,
- on calcule la transformée de Fourier discrète Y de $y = (y_j)$,
- et alors

$$\begin{aligned} c_k &\simeq \frac{1}{N} Y_k, & k &= 0 \dots k_0 \\ c_k &\simeq \frac{1}{N} Y_{N+k}, & k &= -k_0 \dots -1 \end{aligned}$$

En fait, les coefficients calculés c_k sont ceux du polynôme trigonométrique $g(x)$ de degré k_0 qui interpole f aux points x_j . C'est la raison pour laquelle ils sont, sauf exception, voisins de ceux de f . Ils correspondent aussi aux résultats du calcul des coefficients de Fourier de f par la méthode des rectangles.

4.7 TFD et Transformation de Fourier continue

Il s'agit d'essayer de répondre aux deux questions suivantes :

Question A : On considère une suite $y_0 \dots y_{N-1}$. On calcule $Y_0 \dots Y_{N-1}$. Que représentent ces Y_k ?

Question B : On considère une fonction f que l'on échantillonne aux points $x_j = j \frac{T}{N}$, $j = 0 \dots N - 1$, d'un intervalle $[0, T]$ (ou aux points x_j de l'intervalle $[-T/2, T/2]$). On considère les échantillons $y_j = f(x_j)$ et $Y = (Y_k)$, $k = 0 \dots N - 1$, leur transformée de Fourier discrète. Qu'est-ce que l'on obtient ? Quelle est la relation entre ces Y_k et la transformée de Fourier de f ?

On remarque que l'on a opéré deux manipulations sur f

- un fenêtrage en regardant f sur l'intervalle $[0, T]$ et pas ailleurs,
- un échantillonnage.

Il s'agit d'évaluer l'impact de ces deux manipulations sur la transformée de Fourier de f .

4.7.1 Réponse A1

On considère $T > 0$ quelconque et on pose $a = \frac{T}{N}$.

Les Y_k sont les valeurs en $\omega = k \frac{1}{T}$ du polynôme trigonométrique qui est la transformée de Fourier \hat{f}_d de la distribution tempérée

$$f_d = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \delta_{ja}$$

4.7.2 Réponse A2

On suppose que $N = 2k_0 + 1$.

Les Y_k sont liés (comme en (4.1)) aux coefficients de Fourier du polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2k_0} y_j \frac{2\pi}{N} D_{k_0}(x - x_j)$$

où $D_{k_0}(x)$ est le noyau de Dirichlet (2.1) avec $T = 2\pi$ et où $x_j = j \frac{2\pi}{N}$.

4.7.3 Réponse B1

Si f est une fonction régulière à support (ou approximativement à support) dans $[0, T]$, sa transformée de Fourier $\hat{f}(\omega)$ peut être approchée par la formule des trapèzes selon

$$\hat{f}(\omega) \simeq a \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2i\pi x_j \omega} \quad (4.2)$$

avec le pas $a = \frac{T}{N}$ et $x_j = j a$. La qualité de l'approximation est liée au critère de Nyquist (3.1).

Pour $\omega_k = \frac{k}{T}$, $k = 0 \dots N - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_k) &\simeq a \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2i\pi j a \frac{k}{T}} \\ &= a \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2i\pi j k / N} \\ &= a Y_k \end{aligned}$$

Le membre droit de (4.2) étant périodique en ω , de période $\frac{1}{a} = \frac{N}{T}$, les $\hat{f}(\omega)$ pour $\omega < 0$ figurent dans les $a Y_k$, $k = N/2, \dots, N - 1$.

Ainsi, dans le cas d'une fonction à support dans $[0, T]$, la transformation de Fourier discrète donne une approximation de la transformée de Fourier continue aux points $w = \frac{k}{T}$ (pas $\frac{1}{T}$) selon

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(-\frac{N}{2} \frac{1}{T}\right) &\simeq a Y_{\frac{N}{2}} \\ \dots & \\ \hat{f}\left(-\frac{1}{T}\right) &\simeq a Y_{N-1} \\ \hat{f}\left(0 \frac{1}{T}\right) &\simeq a Y_0 \\ \dots & \\ \hat{f}\left(\frac{N}{2} - 1 \frac{1}{T}\right) &\simeq a Y_{\frac{N}{2}-1} \end{aligned}$$

Note : Pour une fonction à support dans $[-T/2, T/2]$ il convient d'effectuer une translation de $T/2$ et de prendre en compte le fait que la transformée de Fourier subit une multiplication par $e^{-2i\pi\omega \frac{T}{2}}$.

4.7.4 Réponse B2

On fait subir à f deux manipulations : troncature et échantillonnage. Notons

$$f_e = a \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j \delta_{ja}$$

le résultat de l'échantillonnage de pas $a = \frac{T}{N}$ sur \mathbb{R} , où $y_j = f(ja)$.

On notera la présence de a devant la somme. Celle-ci est motivée par le fait que sur chaque intervalle $[ja - a/2, ja + a/2]$, la masse de $y_j \delta_{ja}$ doit "coïncider" avec celle de f . Cela passe par la prise en compte de la longueur de l'intervalle.

Dans la suite on ne reprend pas cette fonction f_e déjà étudiée à la section 3.5.7 - peigne de Dirac et on ne remettra pas le facteur a devant les fonctions échantillonnées.

Pour faciliter l'exposé, on suppose que la troncature se fait sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et non sur $[0, T]$. Cela occasionne des modifications peu importantes.

Nommons f_t la fonction tronquée

$$f_t(x) = f(x) \chi_{[-T/2, T/2]}(x)$$

f_d la fonction correspondant à l'échantillonnage de f sur $[-T/2, T/2]$ (sans facteur a)

$$f_d = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} y_j \delta_{ja}$$

f_s la fonction en escalier

$$f_s(x) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} y_j \chi_{[ja-a/2, ja+a/2]}(x)$$

et enfin $S(\omega)$ la périodisée, de période $\frac{1}{a}$ de \hat{f}_s

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_s(\omega - \frac{n}{a}) \quad (4.3)$$

Alors, avec (la modification) $Y_k = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} y_j e^{-2i\pi jk/N}$, on a

- (i) $Y_k = \hat{f}_d(\omega = \frac{k}{T})$
- (ii) $\hat{f}_s(\omega) = a \operatorname{sinc}(\pi\omega a) \hat{f}_d(\omega)$,
- (iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\pi(x - \frac{n}{a})a) = 1$,
- (iv) $S(\omega) = a \hat{f}_d(\omega)$,
- (v) Et finalement

$$Y_k = \frac{N}{T} S(\frac{k}{T}) \quad (4.4)$$

C'est-à-dire que les Y_k sont à un coefficient près, les valeurs en $\omega = \frac{k}{T}$ de la périodisée de la transformée de Fourier de la fonction en escalier qui approche f sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$.

Ces formules restent valables quand on échantillonne sur $[0, T]$, et alors les Y_k correspondent exactement à la transformée de Fourier discrète de $y = (y_0 \cdots y_{N-1})$.

Remarques :

- Il découle de ces résultats, que si le spectre de f_s est concentré dans $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$, on retrouve \hat{f}_s dans sa périodisée $S(\omega)$.
- et alors, si en plus f est voisine de f_s , c'est \hat{f} lui-même que l'on retrouve approximativement dans $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$.

4.7.5 Cas d'un polynôme trigonométrique

Considérons un polynôme trigonométrique de période T ,

$$f(x) = \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k e^{2i\pi kx/T},$$

dont la plus grande fréquence est $\frac{k_0}{T}$. On l'échantillonne sur $[0, T]$ avec le pas $a = \frac{T}{N}$. On suppose que le critère de Nyquist pour le cas trigonométrique, $a = \frac{T}{N} < \frac{1}{2\frac{k_0}{T}}$, c'est-à-dire $2k_0 < N$, est satisfait.

On sait

- (i) que le spectre de f est

$$\hat{f} = \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k \delta_{k/T},$$

- (ii) que les c_k , à la fois coefficients de Fourier de f et amplitudes des masses de Dirac de \hat{f} , sont liés aux Y_k par les formules (4.1)

$$\begin{aligned} Y_k &= N c_k, & k = 0 \dots k_0 \\ Y_{N+k} &= N c_k, & k = -k_0 \dots -1 \end{aligned}$$

- (iii) que les Y_k vérifient également les formules (4.4)

$$Y_k = \frac{N}{T} S(\frac{k}{T})$$

S étant la périodisée définie par (4.3).

Considérons

$$\tilde{S}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{n}{a}\right)$$

$\tilde{S}(w)$ n'est pas une fonction. C'est la distribution obtenue par périodisation à partir de la distribution \hat{f} . Comme les masses de Dirac $\delta_{k/T}$ de \hat{f} sont internes à $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$, \hat{f} reste isolé dans cette somme sur l'intervalle $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$ et dans chacun des intervalles $[\frac{j}{a} - \frac{1}{2a}, \frac{j}{a} + \frac{1}{2a}]$.

Il n'est pas légitime de parler de la valeur de la distribution \tilde{S} en un point $\frac{k}{T}$, mais si on s'y autorise néanmoins en considérant (ce qui n'est pas correct) que la valeur en un point est l'amplitude de la masse de Dirac correspondante, on constate alors que l'on a

$$Y_k = N \tilde{S}\left(\frac{k}{T}\right)$$

Le dénominateur T du terme $\frac{N}{T}$ de la formule (4.4) a disparu. D'où provient la différence ?

Explication : La formule (4.4) concerne implicitement le cas où $S(w)$ est une fonction, elle-même évaluée sur $[0, \frac{N}{T}]$ avec le pas $\frac{1}{T}$. En terme de distribution, $((S, \varphi) = \int S\varphi)$, chaque contribution de $S(\frac{k}{T})$ est à pondérer avec la longueur $\frac{1}{T}$ de l'intervalle élémentaire $[\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}]$. La masse de $S(\frac{k}{T})$ est donc en fait $\frac{1}{T}S(\frac{k}{T}) = \frac{1}{N}Y_k$. Ainsi les deux formules coïncident quand on les interprète "au sens des distributions".

4.7.6 En résumé

Les N points $y_j = f(ja)$ d'une fonction peuvent être vus de différentes façons :

- (i) On peut considérer que ce sont les valeurs en ja d'un polynôme trigonométrique de période T . Alors les Y_k obtenus par TFD sont N fois les coefficients de Fourier de ce polynôme trigonométrique, et aussi N fois les amplitudes des masses de Dirac de sa transformée de Fourier.
- (ii) On peut aussi voir les y_j comme les amplitudes des masses de Dirac de la distribution

$$f_d = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \delta_{ja}$$

Alors les Y_k sont les valeurs en $\omega = \frac{k}{T}$ de la transformée de Fourier de f_d qui est un polynôme trigonométrique (formule (i) réponse B).

- (iii) Et si on considère que ces y_j sont les valeurs en ja d'une fonction en escalier sur $[0, T]$, f , nulle en dehors de cet intervalle, les Y_k sont $\frac{N}{T}$ fois les valeurs en $\frac{k}{T}$ de la périodisée $S(\omega)$ de \hat{f} de période $\frac{1}{a} = \frac{N}{T}$.

4.7.7 Exemples

Illustrons cela. Dans les exemples qui suivent on considère $T = 1$, $N = 256$, $a = T/N = 1/256$. On échantillonne les fonctions f aux points $x_j = ja$ de $[0, 1]$, $y_j = f(x_j)$ sont les échantillons, Y est la transformée de Fourier discrète de $y = (y_j)$.

Note : Comme indiqué en début de chapitre, les Y_k calculés sont en fait $\frac{Y_k}{\sqrt{N}}$.

- (i) On considère

$$f_0 = 8 \sin(2\pi x) + 4 \sin(2\pi 16x) + 2 \sin(2\pi 64x)$$

et le polynôme trigonométrique

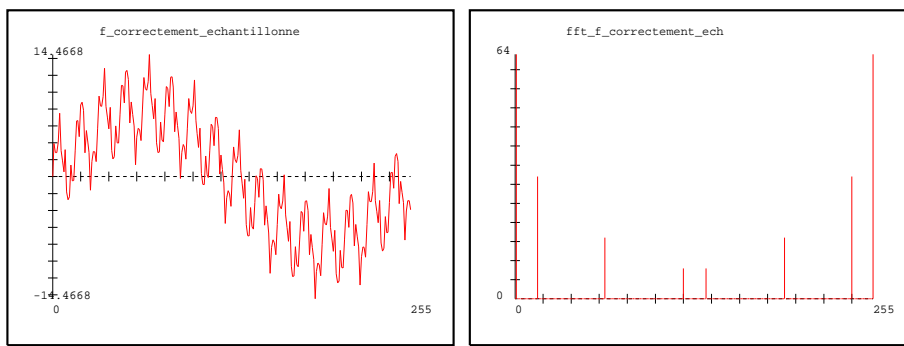
$$f_1 = f_0 + \sin(2\pi 120x)$$

qui contient les fréquences $\pm 1, \pm 16, \pm 64, \pm 120$. Le critère de Nyquist $a \leq \frac{1}{2 \times 120}$ est satisfait. Selon les explications données pour le cas trigonométrique, on doit retrouver dans les Y_k les fréquences de f_1 .

Ici l'interprétation est simplifiée du fait que $T = 1$.

On observe aux points 1, 16, 64, 120, 136, 192, 240, 255 les amplitudes 64, 32, 16, 8, 8, 16, 32, 64.

Cela correspond bien (au facteur \sqrt{N} près) aux résultats attendus. Aussi bien en termes de coefficients de Fourier, qu'en termes de la formule $Y_k = N \tilde{S}(\frac{k}{T})$.

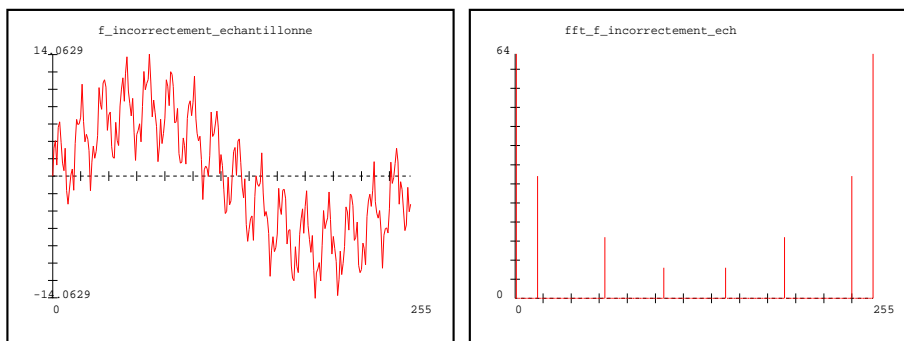


$f_0 + \sin(2\pi 120x)$ et son spectre

(ii) On considère maintenant

$$f_2 = f_0 + \sin(2\pi 150x)$$

Le critère de Nyquist n'est pas satisfait. Les calculs ne reproduisent pas correctement la fréquence ± 150 de f_2 à cause du phénomène de recouvrement.



$f_0 + \sin(2\pi 150x)$ et son spectre

(iii) Considérons

$$f_3(x) = e^{-\pi(x-1/2)^2}$$

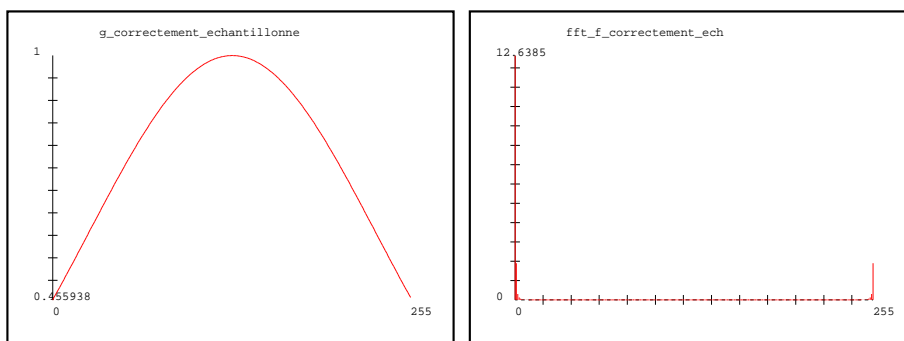
et

$$f_4(x) = e^{-\pi(200(x-1/2))^2}$$

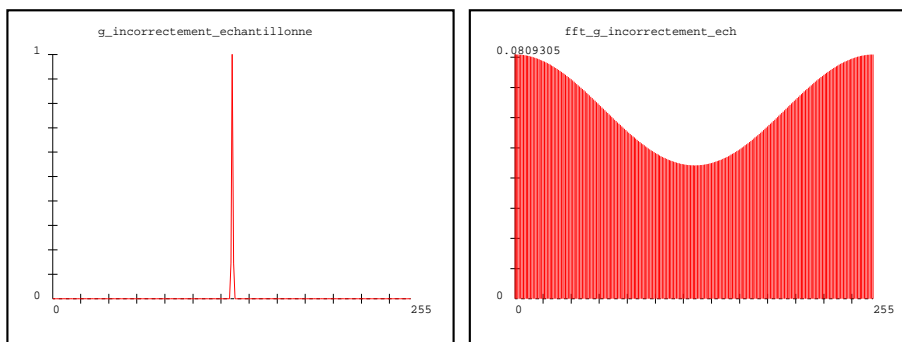
Il n'y a pas de recouvrement du spectre de f_3 . Pour cette fonction le pas d'échantillonnage est convenable. Par contre il n'est pas suffisamment petit pour f_4 .

En contre partie, pour f_3 , Y_0, Y_1, Y_2 , sont des approximations grossières de \hat{f}_3 en $0, 1/1, 2/1$, tandis que ces approximations sont très bonnes pour f_4 .

Cela vient du fait que pour f_3 l'intervalle d'échantillonnage est visiblement trop petit pour prendre en compte toute l'information contenue dans f_3 , alors que ce n'est pas le cas pour f_4 .



$e^{-\pi(x-1/2)^2}$ et son spectre



$e^{-\pi(200(x-1/2))^2}$ et son spectre

4.8 Le problème du recouvrement revisité

Il résulte de ce qui vient d'être vu, que la TFD retourne certains points d'une fonction périodisée. Pour qu'on puisse en retirer le spectre de f (une approximation) il est nécessaire que celui-ci ait un support de longueur inférieure à la période $1/a = N/T$. C'est la condition de Nyquist

$$\omega_{\max} \leq \frac{N}{2T}$$

où ω_{\max} désigne la plus grande fréquence contenue dans f .

Faute de quoi, dans l'intervalle $[-\frac{N}{2T}, \frac{N}{2T}]$ on trouve plusieurs occurrences de \hat{f}_s . C'est le problème du recouvrement du spectre.

D'autre part, pour obtenir une approximation correcte du spectre, la fenêtre doit être suffisamment grande pour prendre en compte suffisamment d'information sur f .

Il faut noter qu'à N constant, ces deux exigences sont contradictoires. Grande fenêtre implique grand pas T/N , petite période N/T et impossibilité d'atteindre le critère de Nyquist, et inversement.

Une recette pour obtenir un résultat correct consiste à filtrer préalablement la fonction à traiter, de manière à abaisser ω_{\max} pour satisfaire le critère de Nyquist.

4.9 Le fenêtrage

On a vu que le calcul de la TFD nécessite de tronquer et d'échantillonner préalablement le signal. On a vu que la troncature revient à le multiplier par une fonction porte $\chi_{[-T/2, T/2]}$ dont la transformée de Fourier $T \text{sinc}(\pi\omega T)$ n'approche pas la fonction δ de façon idéale.

Il existe d'autres fonctions que la fonction porte dont la transformée de Fourier approche mieux δ . Il y a par exemple les fenêtres triangulaires, les fenêtres de Hamming, les fenêtres gaussiennes.

L'art du fenêtrage consiste à faire le bon choix ... (voir [8, p 284])

4.10 Le Zéro-Padding

Le Zéro-Padding est une technique qui consiste à rajouter des zéros à un ensemble d'échantillons. Soit pour obtenir un nombre d'échantillons adéquat, une puissance de 2 par exemple, soit pour obtenir un effet de zoom, de sur-échantillonnage ou d'extrapolation.

Illustrons les deux premières applications :

4.10.1 Sur-échantillonnage

Supposons que f soit une fonction périodique, de période T , échantillonnée avec $N = 128$ points sur $[0, T]$. Supposons que l'on rajoute 128 zéros après les 128 vrais échantillons y_j et que l'on calcule la TFD des 256 échantillons z_j ainsi obtenus. Appelons $Z = (Z_k)$ le résultat.

Les échantillons z_j correspondent en fait à une nouvelle fonction g , $2T$ périodique, égale à la première sur $[0, T]$ et nulle sur $[T, 2T]$. La relation entre les coefficients de Fourier de f sur $[0, T]$ et ceux de g sur $[0, 2T]$ est

$$c_k(f) = 2 c_{2k}(g)$$

En rapprochant cette relation de (4.1), on voit que

$$Y_k = Z_{2k}$$

et que Z_{2k} correspond aux mêmes fréquences que Y_k . Tout se passe comme si on avait calculé des fréquences intermédiaires (Z_{2k+1}), c'est-à-dire réalisé un sur-échantillonnage dans le domaine des fréquences.

4.10.2 Effet de zoom

Supposons qu'un signal f soit représenté par $N = 128$ échantillons y_j . Supposons que l'on réalise une TFD sur les y_j . Appelons $Y = (y_k)$ le résultat. Supposons que l'on effectue un zéro-padding de 128 zéros sur Y , en mettant les zéros aux indices correspondant aux hautes fréquences (négatives et positives). Appelons Z le résultat. Supposons que l'on effectue enfin une TFD inverse sur Z . On obtient un signal discret z_j de 256 points correspondant à un effet zoom de facteur 2 sur les y_j .

La justification est identique à celle donnée ci-dessus, en échangeant f et \hat{f} .



Zoom 2X par Zéro-padding

Note : Dans cet exemple, on a en fait redimensionné l'image. Pour obtenir un effet de zoom proprement dit il faudrait conserver les dimensions de l'image originale et focaliser sur une zone.

Chapitre 5

Filtrage

Filtrer un signal, c'est en extraire les informations pertinentes, et de fait, c'est aussi retirer ce qui l'est moins, le bruit par exemple, ou des détails non significatifs. Le bruit est constitué de petites et brusques variations indésirables. Les hautes fréquences contenues dans un signal qui ne devrait pas en contenir proviennent du bruit.

Il y a un grand nombre de techniques de filtrage. La plus simple consiste à faire une moyenne glissante sur quelques points voisins. Cette technique fait partie des méthodes de convolution par un noyau (fenêtre) régularisant.

On peut aussi opérer dans le domaine des fréquences. Par exemple, en éliminant les fréquences au dessus d'un certain seuil on obtient un signal plus régulier, plus lisse. (voir la section 2.7).

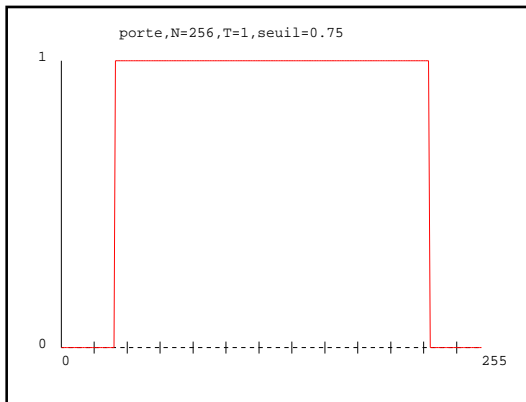
Les filtrages fréquentiels consistent à altérer les amplitudes dans le domaine des fréquences selon le schéma

$$Signal_filtre = Fourier^{-1}[\Phi(\omega)Fourier(Signal_bruite)(\omega)]$$

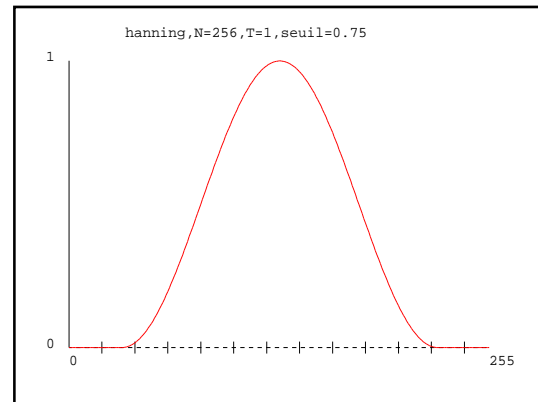
où $\Phi(\omega)$ est la fonction de lissage (on dit aussi fenêtre de lissage).

$\Phi(\omega) = \chi_{[-seuil,seuil]}$ est un exemple de filtre, appelé filtre passe-bas.

$\Phi(\omega) = \chi_{[-seuil,seuil]} \times 0.5(1 + \cos(\pi x/seuil))$ en est un autre appelé fenêtre ou filtre de Hanning.



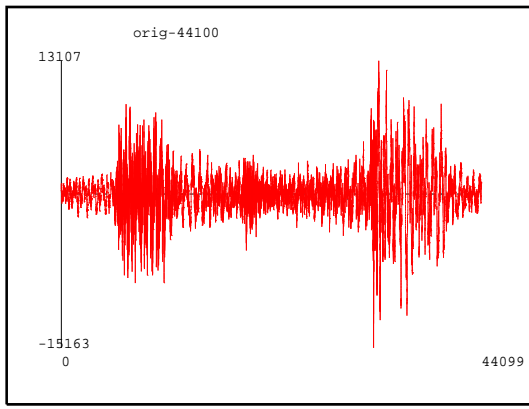
Filtre passe-bas, $seuil = 0.75 \times \frac{N}{2}$
($\omega = 0$ au centre des abscisses)



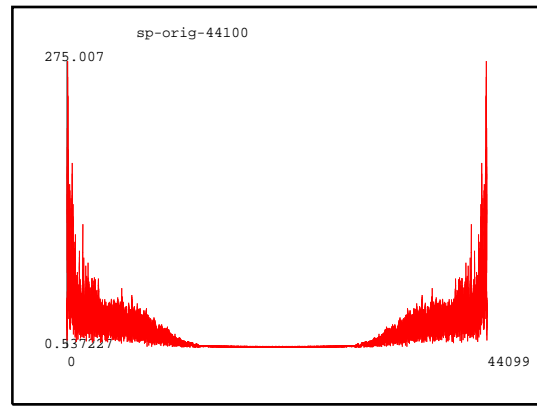
Filtre de Hanning, $seuil = 0.75 \times \frac{N}{2}$
($\omega = 0$ au centre des abscisses)

Numériquement cela s'organise de la façon suivante : en supposant que le signal soit échantillonné selon une suite $y = (y_j)$, on calcule sa transformée de Fourier discrète $Y = (Y_k)$, on multiplie Y_k par $\Phi(\omega_k)$ et on effectue une transformation de Fourier inverse. On récupère ainsi un signal $z = (z_j)$ plus régulier que ne l'était $y = (y_j)$.

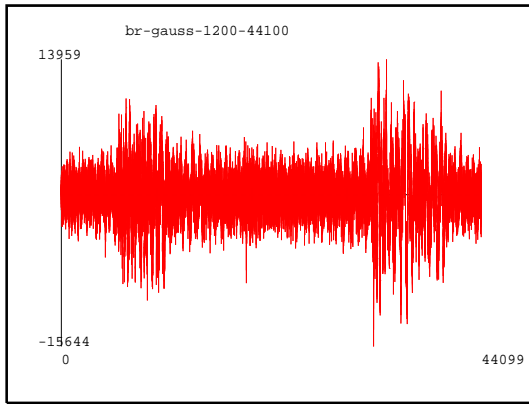
Voir les exemples de filtrage de la section 1.5.



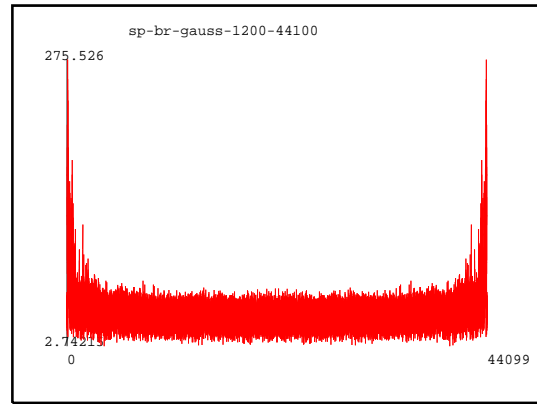
Passage d'1 sec de Tom's Diner (S.Vega-Remix)



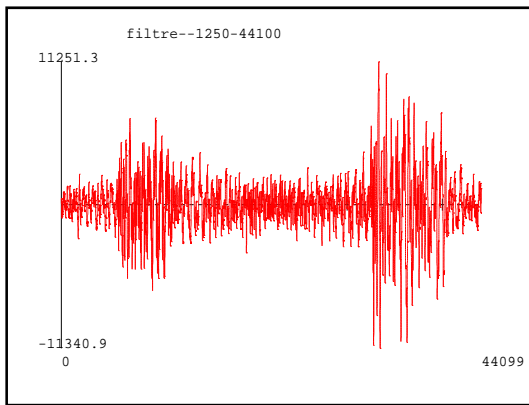
Spectre (ech \sqrt{y})



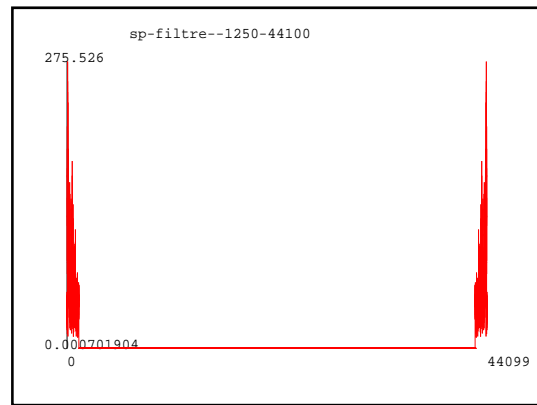
Signal bruité à 30%
 $(\frac{\|bruit-orig\|_2}{\|orig\|_2} = 0.30)$



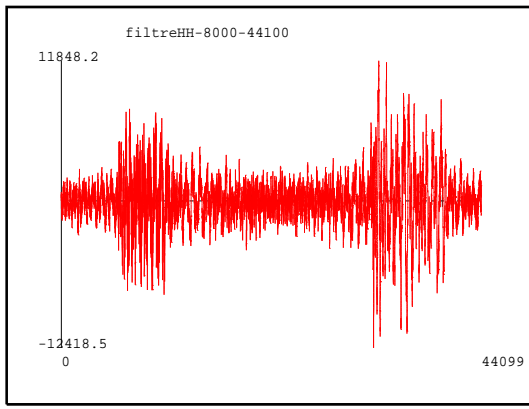
Spectre (ech \sqrt{y})



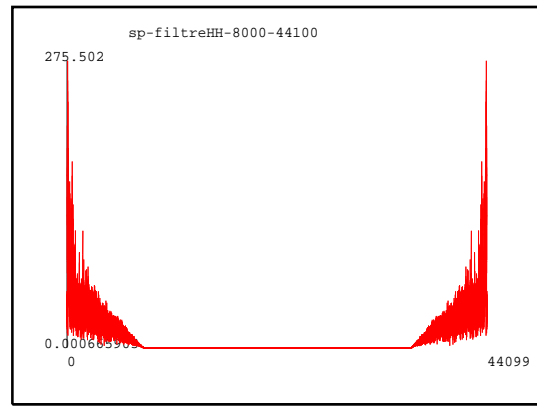
Signal filtré passe-bas à 1250



Spectre (ech \sqrt{y})



Signal filtré avec fenêtre de Hanning
seuil à 8000



Spectre (ech \sqrt{y})

Chapitre 6

Décomposition en Ondelettes

6.1 Localisation temps-fréquence

Une des insuffisances de la transformation de Fourier est la suivante : Supposons que l'on veuille détecter une fréquence élevée dans un signal confus. Supposons que le signal corresponde aux temps $[0, T]$, que la fréquence à étudier apparaisse au temps $T_1 > 0$ et disparaisse au temps $T_2 < T$. Supposons que l'on soit intéressé par ces temps inconnus d'apparition et d'extinction.

Si le signal est très vibratoire, un simple regard sur le signal en temps ne montre pas l'information. Le spectre quant à lui, bien qu'il contienne toute l'information du signal, ne montre pas davantage les dates recherchées. Il faudrait faire un certain nombre de transformations de Fourier avec des petites fenêtres glissantes. Selon les fenêtres, le phénomène pourrait être présent ou absent. En jouant sur la taille des fenêtres on pourrait ainsi déceler l'information recherchée. Ce type d'analyse a été étudié et mis en oeuvre, conduisant à la transformée de Fourier à fenêtre glissante et aux "Gaborites".

Les ondelettes unifient et formalisent ces idées. Elles fournissent l'équivalent des fenêtres glissantes et apportent en plus la flexibilité de leur taille.

6.2 Les Ondelettes

Les ondelettes sont en gros des fonctions oscillantes, comme les $e^{-2i\pi ux}$, mais dépendant de deux paramètres, l'un concerne la disposition de l'ondelette sur l'axe des x , l'autre mesure sa concentration autour de cette disposition, à la manière des gaussiennes $e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (qui ne sont pas oscillantes) où m indique la position de la gaussienne sur l'axe des x et σ mesure sa concentration.

En effectuant le produit scalaire d'un signal avec une ondelette, on va obtenir une information sur le comportement du signal au voisinage du point où se concentre l'ondelette. Un signal constant dans ce voisinage donnera 0, un signal très lisse ou beaucoup plus irrégulier que l'ondelette donnera une petite valeur, un signal ayant un comportement analogue à celui de l'ondelette donnera une valeur maximale.

Les ondelettes vont former une base hilbertienne où l'on va décomposer les signaux, de la même manière que les signaux périodiques le sont dans la base des ondes pures $e^{-2i\pi nx/T}$.

Elles obéissent à un formalisme qui cache beaucoup les objectifs recherchés. On va l'exposer dans le cadre de la multirésolution, en dimension un. Il est à noter que ce cadre est restrictif, les ondelettes sont souvent présentées de façon plus générale. Le sujet est plutôt complexe. Les références [9] et [10] sont très différentes. [9] va à l'essentiel, mais il manque des maillons. [10] est complet, très complet, ne convient pas vraiment aux débutants. Ce qui suit n'est qu'une introduction.

6.3 Analyse Multirésolution

[9, p3] [10, p217]

On dit qu'une fonction ϕ définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} est une fonction d'échelle s'il existe une suite de coefficients h_k , $k \in \mathbb{Z}$, tels que

$$\phi(x/2) = \sqrt{2} \sum_{k=k_0}^{k=k_1} h_k \phi(x - k)$$

Note : Le facteur $\sqrt{2}$ varie de $\sqrt{2}$ à $1/\sqrt{2}$, ainsi que la possibilité pour k_0 et/ou k_1 de prendre des valeurs infinies. Pour pouvoir calculer il faudra que k_0 et k_1 soient finis et que ϕ soit à support compact, comme dans les exemples suivants.

Exemple 1. La fonction de Haar, $\chi_{[0,1]}$, est une fonction d'échelle ($h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) qui vérifie

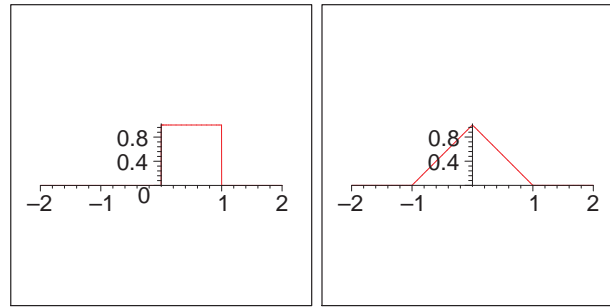
$$\phi(x/2) = \phi(x) + \phi(x-1) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x-1)\right)\right)$$

Exemple 2. La fonction Chapeau,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 < x \leq 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est une fonction d'échelle ($h_{-1} = h_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) qui vérifie

$$\phi(x/2) = \frac{1}{2}\phi(x+1) + \phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x-1)$$



Fonction de Haar et fonction Chapeau

On dit qu'une suite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ forme une Analyse Multirésolution si

- (i) $\dots \subset V_{j+1} \subset V_j \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \subset L^2$
- (ii) $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans L^2
- (iii) $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (iv) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x/2) \in V_{j+1}$
- (v) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in V_j$
- (vi) Il existe une fonction d'échelle $\phi \in L^2$ telle que $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_0 (non nécessairement orthogonale)

Notes :

- Attention, selon les auteurs la suite des V_j croît avec j ou l'inverse. Pour les uns ([10]), que l'on suit ici, un grand j positif indique un niveau de dilatation élevé (faible résolution, détails grossiers, approximation grossière), pour les autres c'est l'inverse ([9]).
- La condition (vi) signifie que toute fonction f de V_0 s'exprime comme

$$f(x) = \sum_k c_k \phi(x - k)$$

la convergence ayant lieu dans L^2 , et qu'en plus, il existe $0 < A \leq B$, indépendants de f , tels que

$$A \sum |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \leq B \sum |c_k|^2$$

- La condition (iv) exprime la propriété importante de l'analyse multirésolution, à savoir que les V_j sont constitués des fonctions de V_0 "dilatées" au facteur 2^j ou c'est la même chose, "comprimées" au facteur 2^{-j} .
- Les $\phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$ forment une base de V_j , ils ont même norme que ϕ . Si $\phi_{j,k}$ a un support de longueur L , celui de $\phi_{j+1,k}$ est de longueur $2L$.
- Comme $V_1 \subset V_0$, et comme les $\phi(x - k)$ forment une base de V_0 , $\phi(x/2) \in V_1$ est nécessairement la somme d'une série de termes en $\phi(x - k)$. Mais en indiquant que ϕ est une fonction d'échelle on a déjà précisé cela.

6.3.1 Analyse Multirésolution (a échelle) orthogonale

On dit que l'analyse multirésolution est orthogonale si la fonction d'échelle ϕ est orthogonale, c'est-à-dire si la base des $\phi(x - k)$ est orthonormée, c'est-à-dire si

$$(\phi(x), \phi(x - k)) = \int \phi(x) \overline{\phi(x - k)} dx = \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Notes :

- Deux fonctions ϕ différentes peuvent engendrer la même analyse multirésolution.
- On peut démontrer ([9, p 12]) que si elles sont orthogonales elles se déduisent l'une de l'autre par un décalage k et un facteur constant de module 1.
- On peut démontrer aussi ([10, p 222]) que pour toute analyse multirésolution on peut trouver une fonction d'échelle orthogonale (théorique). Cette propriété rend la définition ci-dessus assez impropre. Il faut comprendre qu'elle porte sur la fonction d'échelle et non sur la suite des V_j proprement dite.
- Comme la base des $\phi(x - k)$ est orthonormée, c'est une base hilbertienne de V_0 . Il en résulte aussi que les $\phi_{j,k}$ forment une base hilbertienne de V_j .

On note P_j la projection orthogonale de L^2 sur V_j , $Q_j = P_{j-1} - P_j$, W_j l'image de Q_j .

Propriétés.

- (i) Q_j est la projection orthogonale sur $W_j = Q_j L^2$.
- (ii) $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$.
- (iii) Pour $f \in L^2$ on a
 - (a) $P_j f = \sum_k (f, \phi_{j,k}) \phi_{j,k}$
 - (b) $P_j f \rightarrow f$ dans L^2 quand $j \rightarrow -\infty$

Note : $P_{j-1} f$ représente une approximation "grossière" de f (à l'ordre $j - 1$). $P_j f$ représente une approximation plus grossière. $Q_j f$ mesure le niveau de détails entre les deux approximations.

Théorème de la multirésolution. [9, p23]

Pour toute analyse multirésolution à fonction d'échelle orthogonale ϕ ,

- (i) V_j et W_j sont deux sous espaces orthogonaux complémentaires de V_{j-1} , $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$
- (ii) $V_n = \bigoplus_{j=n+1}^{\infty} W_j$
- (iii) $\bigoplus_j W_j$ est dense dans L^2
- (iv) $W_i \perp W_j$ si $i \neq j$
- (v) $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x/2) \in W_{j+1}$
- (vi) $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) \in W_j$
- (vii) Il existe une fonction (non unique) $\psi \in L^2$ telle que $\{\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de W_0 et telle que $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de L^2 .
- (viii) $\psi \in V_{-1}$, $\psi(x/2) \in V_0$. On peut exprimer $\psi(x/2)$ par

$$\psi(x/2) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(x - k) \quad \text{avec} \quad g_k = (-1)^k h_{N-k}$$

où N est un entier impair, par exemple $N = k_0 + k_1$.

On dit que ψ est l'ondelette mère associée à la fonction d'échelle ϕ et que les fonctions

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$$

sont les ondelettes d'indices j, k .

Pour j fixé, $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de W_j .

Si ψ a un support de longueur l , les supports des $\psi_{j,k}$ sont de longueur $2^j l$. L'indice j indique le niveau de détail que l'ondelette $\psi_{j,k}(x)$ permet d'analyser, et l'indice k indique la "position" de l'ondelette sur l'axe des x .

Ondelette de Haar.

Soit ϕ la fonction d'échelle de Haar. On vérifie facilement ([10]) qu'elle engendre une analyse multirésolution orthogonale. V_0 étant le sous espace (fermé) de L^2 constitué des fonctions constantes sur les intervalles $[k, (k+1)]$ (longueur 1, basés sur les entiers), V_j étant le sous espace (fermé) de L^2 constitué des fonctions constantes sur les intervalles $[k2^j, (k+1)2^j]$.

$$(h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi(x/2) = \sqrt{2}(h_0\phi(x) + h_1\phi(x-1)))$$

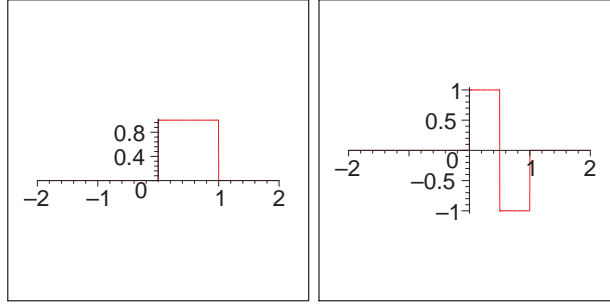
L'ondelette associée est

$$\psi(x/2) = \sqrt{2}(g_0\phi(x) + g_1\phi(x-1))$$

avec $g_0 = h_0$ et $g_1 = -h_1$ c'est-à-dire

$$\psi(x/2) = \phi(x) - \phi(x-1)$$

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$$



Ondelette de Haar, ϕ et ψ

Ondelette de Daubechies D2.

La donnée des coefficients h_k suffit pour définir la fonction d'échelle. En effet en transformant par Fourier l'équation d'échelle on obtient

$$\mathcal{F}(\phi(x/2)) = \sqrt{2} \sum h_k \mathcal{F}(\phi(x-k))$$

c'est-à-dire

$$2\hat{\phi}(2\omega) = \sqrt{2} \sum h_k e^{-2i\pi\omega k} \hat{\phi}(\omega)$$

qui conduit à

$$\hat{\phi}(\omega) = h(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$$

avec

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} h_k e^{-2i\pi\omega k}$$

qui donne (formellement)

$$\hat{\phi}(\omega) = [\prod_{k=1}^{\infty} h(2^{-k}\omega)] \hat{\phi}(0)$$

et qui définit donc ϕ à un facteur près.

On démontre que si ϕ est orthogonale alors

$$\sum h_k \overline{h_{k-2l}} = \delta_{0,l} \quad \text{et} \quad |h(\omega)|^2 + |h(\omega + 1/2)|^2 = 1$$

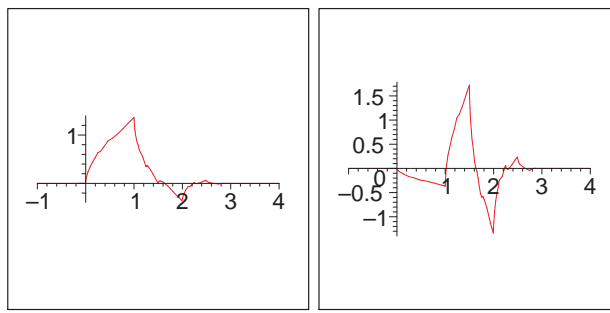
L'ondelette de Daubechies D2 est conçue pour être orthogonale, à support compact, et avoir des moments nuls (voir 6.6 et 6.7.2). Les quatre coefficients de la fonction d'échelle sont

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

ce qui donne pour ψ

$$\{g_0, g_1, g_2, g_3\} = \{h_3, -h_2, h_1, -h_0\}$$

On ne peut exprimer ni ϕ ni ψ par une formule (analytiquement), mais on peut en calculer des approximations (voir plus loin 6.9).



Daubechies D2, ϕ et ψ

6.4 Décomposition en ondelettes orthogonales

Soit f un élément de L^2 . D'après le point (vii) du théorème de la multirésolution, f peut se décomposer dans la base $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)\}$. On peut écrire

$$f = \sum_{k,j} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}$$

et encore

$$f = \sum_j Q_j f$$

car les projections Q_j sont données par

$$Q_j f = \sum_k (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}$$

Pour un niveau n fixé, on peut écrire

$$f = \sum_{j=-\infty}^{j=n} Q_j f + \sum_{j=n+1}^{\infty} Q_j f$$

où on peut remplacer $\sum_{j=n+1}^{\infty} Q_j f$ par $P_n f$ grâce au (ii) du théorème de la multirésolution. On obtient finalement

$$f = P_n f + \sum_{j=-\infty}^{j=n} Q_j f$$

qui constitue une décomposition de f en ondelettes.

La décomposition est formée de deux types d'éléments : une approximation au niveau n , c'est $P_n f \in V_n$, et une suite de détails de plus en plus fins, ce sont les $Q_j f \in W_j$. (plus j va vers $-\infty$ plus $Q_j f$ est fin, plus j va vers ∞ plus $Q_j f$ est grossier)

Pour un calcul effectif, on partira nécessairement d'une fonction f qui est déjà dans un V_n , donnée par ses coefficients dans la base des $\phi_{n,k}$, c'est-à-dire telle que $P_n f = f$.

Décomposer f en ondelettes jusqu'au niveau d'approximation (de détails) $l = n + p$ consiste alors à effectuer p projections des V_j sur ses composantes $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ selon

$$f = P_n f = s_n + d_n, \quad s_n \in V_n, \quad d_n = 0 \in W_n$$

$$f = P_{n+1} s_n + Q_{n+1} s_n = s_{n+1} + d_{n+1}, \quad s_{n+1} \in V_{n+1}, \quad d_{n+1} \in W_{n+1}$$

$$f = P_{n+2} s_{n+1} + Q_{n+2} s_{n+1} + d_{n+1} = s_{n+2} + d_{n+2} + d_{n+1}, \quad s_{n+2} \in V_{n+2}, \quad d_{n+2} \in W_{n+2}$$

...

$$f = s_l + d_l + d_{l-1} + \dots + d_{n+1}, \quad s_l \in V_l, \quad d_l \in W_l$$

Dans ces décompositions successives, à chaque étape on extrait les détails les plus fins que l'on puisse trouver. d_{n+1} contient les détails de niveau $n + 1$ qui sont les plus fins, qui s'expriment avec les $\psi_{n+1,k}$ qui sont fines. On n'y touche plus. Puis on extrait de $s_{n+1} \in V_{n+1}$ les détails de niveau $n + 2$ qui sont plus grossiers, qui s'expriment à l'aide des $\psi_{n+2,k}$ moins fines. Et ainsi de suite. On s'arrête au niveau $l = n + p$. A ce stade $s_l \in V_l$ est l'approximation la plus grossière de f ; on dispose de tous les niveaux de détails, du plus grossier d_l au plus fin d_{n+1} , permettant une reconstitution sans perte de f .

La décomposition conserve toute l'information contenue dans f , dont on a ordonné les niveaux de détails. De cette façon on obtient une représentation de f à partir de laquelle on peut opérer du filtrage, de la compression, ou d'autres manipulations. On peut éliminer, arrondir, ...

Pour illustrer cela, regardons l'exemple de l'ondelette de Haar.

6.4.1 Exemple de décomposition avec l'ondelette de Haar

La fonction d'échelle de l'ondelette de Haar est $\phi = \chi_{[0,1]}$, l'ondelette mère est $\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$. V_{-2} est engendré par les fonctions portes de largeur $1/4$, V_{-1} par celles de largeur $1/2$, V_0 par celles de largeur 1 , V_1 par celles de largeur 2 .

$$V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2}$$

Soit à décomposer jusqu'au niveau 2

$$f = \chi_{[0,2]} - 2\chi_{[1,5/4]} = \sqrt{2}\phi_{1,0} - \phi_{-2,4} \in V_{-2}$$

On part donc du niveau $n = -2$.

On commence par décomposer dans $V_{-2} = V_{-1} \oplus W_{-1}$.

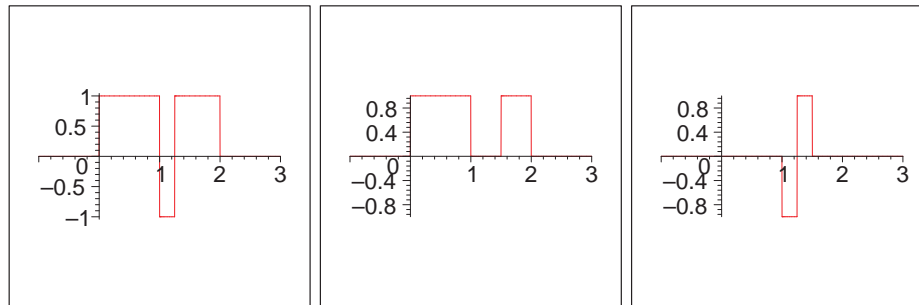
Les produits scalaires avec les $\phi_{-1,k}$ vont produire $s_{n+1} = s_{-1}$ et les produits scalaires avec les $\psi_{-1,k}$ vont produire $d_{n+1} = d_{-1}$.

On trouve

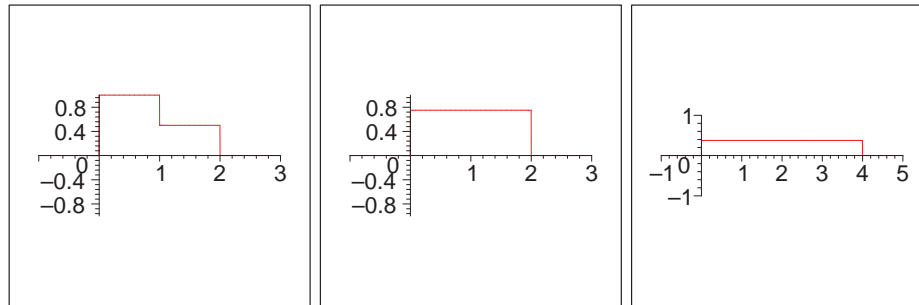
$$\begin{aligned} s_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,3} & d_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1,2} \\ s_0 &= \phi_{0,0} + \frac{1}{2}\phi_{0,1} & d_0 &= -\frac{1}{2}\psi_{0,1} \\ s_1 &= \frac{3}{4}\sqrt{2}\phi_{1,0} & d_1 &= \frac{1}{4}\sqrt{2}\psi_{1,0} \\ s_2 &= \frac{3}{4}\phi_{2,0} & d_2 &= \frac{3}{4}\psi_{2,0} \end{aligned}$$

$$s_2 + d_2 + d_1 + d_0 + d_{-1} = f$$

d_{-1} contient les plus fins détails, d_2 les plus grossiers, s_2 est l'approximation de f au niveau 2.



$s_{-2} = f, \quad s_{-1}, \quad d_{-1}$



$s_0, \quad s_1, \quad s_2$

6.5 Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales

Le passage des ondelettes continues aux calculs concrets posent les mêmes délicats problèmes que pour la transformation de Fourier. Il conviendrait ici aussi d'étudier les décompositions en ondelettes discrètes, les décompositions avec un nombre fini d'ondelettes, les liens avec la décomposition continue, comme on l'a fait pour la transformation de Fourier discrète. Il s'agit d'objets mathématiques différents. Voir [4] pour une étude complète.

On va se contenter de présenter les algorithmes de calculs dans le cas discret fini, sans étudier précisément les liens avec le cas continu.

Les calculs en cascade sont basés sur les formules de récurrences suivantes :

Théorème. [10, p251] [9, p41]

On considère une ondelette orthogonale (ϕ, ψ) connue par les coefficients (h_k, g_k) . Soit $f \in L^2$. En notant $s_j[k]$ et $d_j[k]$ les composantes de f dans la base des V_j et W_j , c'est-à-dire

$$s_j[k] = (f, \phi_{j,k}) \quad \text{et} \quad d_j[k] = (f, \psi_{j,k})$$

on a

(Décomposition)

$$s_{j+1}[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{p-2k} s_j[p] = s_j \star h^- [2k]$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_{p-2k} s_j[p] = s_j \star g^- [2k]$$

(Reconstruction)

$$s_j[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{k-2p} s_{j+1}[p] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{k-2p} d_{j+1}[n] = \tilde{s}_{j+1} \star h[k] + \tilde{d}_{j+1} \star g[k]$$

où \star dénote le produit de convolution de deux suites, x^- est la suite $x^- [p] = x[-p]$, \tilde{x} est la suite dont tous les termes de rang impair ont été mis à zéro.

Ce théorème donne un moyen de calcul. Mais à la condition que, partant d'un niveau n , on dispose des coefficients $s_n[k]$, que ces $s_n[k]$ soient en nombre fini, et que les formules ne fassent intervenir qu'un nombre fini de termes.

Passage au cas fini.

On part d'une suite finie de N valeurs y_k , $k = 0 \cdots N-1$. Ces valeurs sont sensées être les coefficients des $\phi_{n,k}$ représentant une fonction $f \in V_n$, à un certain niveau n .

On ne dit pas si on peut les calculer (de façon approximative) par échantillonnage (voir plus loin la note de 6.9.2 pour voir comment cela est possible). On suppose que f est correctement représentée par ces N y_k .

On veut décomposer f jusqu'au niveau $n+p$, c'est-à-dire calculer les coefficients des ondelettes dans chacun des niveaux intermédiaires en utilisant les formules de récurrence du théorème.

On suppose que les coefficients h_k et g_k non nuls sont en nombre fini K .

Premier problème : A l'exception de l'ondelette de Haar, pour calculer les $s_{n+1}[k]$ et les $d_{n+1}[k]$ pour k voisin de 0 ou de $N-1$, les formules de convolution font intervenir des $s_n[p]$ avec des $p \notin \{0 \cdots N-1\}$. Il faut donc prolonger les $s_n[p]$. Il y a pour cela en gros trois possibilités, conduisant de fait à trois algorithmes et à trois résultats de décomposition différents : on prolonge par 0 ou on prolonge par périodicité ou on prolonge par symétrie.

Deuxième problème : On souhaite travailler sur un vecteur de longueur constante. Le nombre total des coefficients $s_{n+1}[k]$ et des $d_{n+1}[k]$ doit rester constant, égal à N ; $\frac{N}{2} s_{n+1}[k]$ et $\frac{N}{2} d_{n+1}[k]$; $\frac{N}{4} s_{n+2}[k]$ et $\frac{N}{4} d_{n+2}[k]$...

Ceci est possible. En effet si N ondelettes de niveaux n dont la longueur des supports est L , suffisent pour caractériser f , comme les supports des ondelettes de niveau $n+1$ sont deux fois plus grands, ils sont de longueur $2L$. Et alors seuls $N/2$ produits scalaires avec les $\phi_{n+1,k}$ et $N/2$ produits scalaires avec les $\psi_{n+1,k}$ seront non nuls.

Ceci conduit à ce que N soit une puissance de 2 (ou un multiple d'une puissance de 2) et que, n étant le niveau de départ, on ait $N \geq 2^{-n}$.

6.5.1 Décomposition

Les calculs de la décomposition se déroulent de la manière suivante :

On reprend les notations précédentes. On part de

- $s_n[0], s_n[1] \cdots s_n[N-1]$ qui décrivent f au niveau n selon $f = s_n = s_n[0]\phi_{n,0} + \cdots + s_n[N-1]\phi_{n,N-1}$, (avec éventuellement un décalage dans les k).
- Au niveau $n+1$, grâce aux formules de récurrence, avec traitement adapté des valeurs aux bords, on obtient $s_{n+1}[0] \cdots s_{n+1}[N/2-1]$, $d_{n+1}[0] \cdots d_{n+1}[N/2-1]$ correspondant à

$$s_{n+1} = s_{n+1}[0]\phi_{n+1,0} + \dots + s_{n+1}[N/2-1]\phi_{n+1,N/2-1}$$

$$d_{n+1} = d_{n+1}[0]\psi_{n+1,0} + \dots + d_{n+1}[N/2-1]\psi_{n+1,N/2-1}$$

...

- Au niveau $n+p$ on calcule $s_{n+p}[0] \dots s_{n+p}[N/2^p-1]$, $d_{n+p}[0] \dots d_{n+p}[N/2^p-1]$ correspondant à s_{n+p} et d_{n+p}

Nombre d'opérations.

Mis à part éventuellement un traitement particulier pour les bords, compte tenu du fait que les h_k et g_k non nuls sont au nombre de K , pour décomposer du niveau n au niveau $n+p$ il faut $2(NK + \frac{N}{2}K + \dots + \frac{N}{2^p}K)$ opérations, c'est-à-dire moins de $4NK$. C'est un algorithme rapide.

6.5.2 Reconstruction

C'est le même principe, à l'envers. On remonte grâce au fait qu'à chaque niveau, $s_j = s_{j+1} + d_{j+1}$, grâce au fait que les coefficients des s_{j+1} et d_{j+1} sont disponibles et grâce aux formules de récurrences permettant de calculer les coefficients de s_j en fonction de ceux de s_{j+1} et d_{j+1} .

6.5.3 Exemple

Reprenons l'exemple de la décomposition dans la base de Haar de

$$f = \chi_{[0,2]} - 2\chi_{[1,5/4]}$$

Comme f a un support de longueur 2, comme f contient des détails de niveau -2, comme les supports des $\phi_{-2,k}$ sont de longueur $\frac{1}{4}$, il convient de choisir $N \geq 8$. Prenons $N = 16$, il y aura dès le départ un certain nombre de coefficients nuls inutiles. Peu importe.

Les formules de décomposition sont

$$s_{j+1}[k] = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_j[2k] + s_j[2k+1]), \quad d_{j+1}[k] = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_j[2k] - s_j[2k+1])$$

Les s_j sont des moyennes, les d_j des différences.

On part de la décomposition de f dans V_{-2} avec 16 coefficients. Cette décomposition peut être calculée ici, au facteur $\frac{1}{2}$ près, par échantillonnage de f aux 16 points de $[0, 2]$ (voir plus loin la note de 6.9.2). Le tableau suivant montre les s_j et d_j aux niveaux $j = -2 \dots 2$

| j | s_j | d_j | d_{j-1} | d_{j-2} | d_{j-3} |
|-----|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| -2 | $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \dots 0$ | | | | |
| -1 | $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} 0 \frac{\sqrt{2}}{2} 0 0 0 0$ | $0 0 \frac{-\sqrt{2}}{2} 0 0 0 0 0$ | | | |
| 0 | $1 \frac{1}{2} 0 0$ | $0 \frac{-1}{2} 0 0$ | $0 0 \frac{-\sqrt{2}}{2} 0 0 0 0 0$ | | |
| 1 | $\frac{3\sqrt{2}}{4} 0$ | $\frac{\sqrt{2}}{4} 0$ | $0 \frac{-1}{2} 0 0$ | $0 0 \frac{-\sqrt{2}}{2} 0 0 0 0 0$ | |
| 2 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1\sqrt{2}}{4} 0$ | $0 \frac{-1}{2} 0 0$ | $0 0 \frac{-\sqrt{2}}{2} 0 \dots 0$ |

6.6 Moments nuls. Régularité. Taille des supports

Comme dans tout développement en série, il est intéressant que le terme général converge rapidement vers 0, qu'il y ait peu de coefficients significatifs. On démontre [10, p238] que la vitesse de convergence est liée aux nombre de moments nuls de l'ondelette.

On dit qu'une ondelette ψ telle que $x^k \psi \in L^1$, $k = 0 \dots p-1$, a p moments nuls si

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0 \dots p-1$$

Ceci conduit à rechercher des ondelettes ayant un grand nombre de moments nuls. L'ondelette de Haar a un moment nul, c'est peu. Les ondelette Daubechies D2, ..., D10 ont 2, ..., 10 moments nuls et 4, ..., 20 coefficients. C'est mieux.

Note : Le fait que les $\psi_{j,k}$ soient d'intégrale nulle pourrait sembler un peu incompatible avec le fait qu'elles forment une base de L^2 . Ce n'est pas incompatible.

Taille du support.

Il y a tout intérêt à ce que le support des ondelettes soit compact et le plus petit possible. En effet, si f a une grande variation au voisinage de x_0 , pour que cette singularité intervienne dans le moins de coefficients, il est nécessaire que le support des ondelettes soit le plus petit possible. Malheureusement, en ce qui concerne les ondelettes orthogonales, ceci est incompatible avec la possibilité d'avoir de nombreux moments nuls. On démontre [10, p247] que si ψ a p moments nuls son support est de taille au moins $2p - 1$.

6.7 Quelques ondelettes orthogonales

6.7.1 Haar

L'ondelette de Haar est la plus simple des ondelettes. C'est celle qui a le plus petit support. Le problème avec cette ondelette, c'est que les approximations qui sont des fonctions constantes par morceaux approchent mal les fonctions régulières.

6.7.2 Daubechies

Les ondelettes de Daubechies D_p sont conçues pour avoir p moments nuls et le support le plus petit possible, à savoir de longueur $2p - 1$. On démontre [10, p238] que pour que ψ ait p moments nuls il faut et il suffit que $h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2i\pi\omega k}$ s'annule en $\omega = 1/2$ ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, c'est-à-dire, compte tenu du fait que $h(\omega)$ est un polynôme en $e^{-2i\pi\omega}$, que $h(\omega)$ s'écrive

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-2i\pi\omega})^p R(e^{-2i\pi\omega})$$

R étant un polynôme à coefficients réels.

On souhaite qu'il y ait le moins de coefficients possible, c'est-à-dire que R soit de degré minimal.

D'une part, on a déjà indiqué que pour que l'ondelette soit orthogonale il est nécessaire que

$$|h(\omega)|^2 + |h(\omega + 1/2)|^2 = 1$$

D'autre part, les coefficients h_k cherchés étant réels, $|h(\omega)|^2$ est pair, on peut l'exprimer comme un polynôme en $\cos(2\pi\omega)$, ou, grâce aux formules $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$, comme une expression polynomiale en $\cos^2(\pi\omega)$ ou en $\sin^2(\pi\omega)$. On choisit de tester la condition d'orthogonalité sur

$$|h(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \cos^{2p}(\pi\omega) P(\sin^2(\pi\omega))$$

ce qui donne

$$(1 - y)^p P(y) + y^p P(1 - y) = 2$$

avec $y = \sin^2(\pi\omega)$.

Il s'agit d'une équation polynomiale genre décomposition de Bezout où 2 apparaît comme le pgcd de $(1 - y)^p$ et de y^p . Le fait que les multiplicateurs $P(y)$ et $P(1 - y)$ aient cette forme particulière vient de la forme particulière des polynômes $(1 - y)^p$ et y^p . Regardons le cas $p = 2$.

En utilisant l'algorithme d'Euclide qui fournit les coefficients de la décomposition de Bezout, on trouve

$$\begin{aligned} (1 - y)^2 (4y + 2) + y^2 (6 - 4y) &= 2 \\ (1 - y)^2 (4y + 2) + y^2 (4(1 - y) + 2) &= 2 \end{aligned}$$

et donc

$$|h(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \cos^4(\pi\omega) (4 \sin^2(\pi\omega) + 2)$$

De cette équation on tire plusieurs possibilités pour h_0, h_1, h_2, h_3 dont celle indiquée plus haut.

6.7.3 Shannon

On considère

$$\begin{aligned} V_j &= \{f \in L^2, \hat{f}(\omega) = 0, \omega \notin [-2^{-j-1}, 2^{-j-1}]\} \\ V_0 &= \{f \in L^2, \hat{f}(\omega) = 0, \omega \notin [-2^{-1}, 2^{-1}]\} \end{aligned}$$

On démontre comme conséquence du théorème de l'échantillonnage de Shannon du chapitre 3, que les V_j forment une analyse multirésolution orthogonale de fonction d'échelle $\phi = \text{sinc}(\pi x) \notin L^1$, dont les h_k sont liés aux coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2i\pi\omega k}$$

égale à $\chi_{[-1/4, 1/4]}$ sur $[-1/2, 1/2]$ et prolongée par 1-périodicité.

Pour trouver l'ondelette (non unique) on transforme par Fourier l'équation

$$\psi(x/2) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(x - k)$$

où on choisit $g_k = (-1)^{1-k} h_{1-k}$. Cela donne

$$\hat{\psi}(\omega) = g(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

avec

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-2i\pi\omega k}$$

En remplaçant les g_k par leur expression en h_k on obtient

$$g(\omega) = e^{-2i\pi\omega} h(\omega + 1/2)$$

Puis en reportant dans la formule donnant $\hat{\psi}(\omega)$, on obtient

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\pi\omega} h(\omega/2 + 1/2) \chi_{[-1, 1]}(\omega)$$

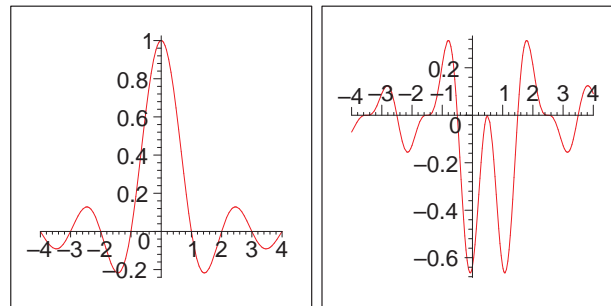
d'où on déduit

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\pi\omega} (\chi_{[-1, 1]}(\omega) - \chi_{[-1/2, 1/2]}(\omega))$$

et

$$\psi(x) = 2 \operatorname{sinc}(2\pi(x - 1/2)) - \operatorname{sinc}(\pi(x - 1/2))$$

Attention : $\psi \notin L^1$. Cette ondelette est source de calculs paradoxaux. En particulier quand on affirme que tous ses moments sont nuls, c'est dans le domaine de Fourier qu'il faut le voir. Le calcul avec les intégrales non convergentes n'est pas significatif.



Ondelette de Shannon, ϕ et ψ

6.7.4 Battle-Lemarié

On considère pour un degré donné $m \in \mathbb{N}$

$$V_j = \{f \in L^2 \cap \mathcal{C}^{m-1}, f = \text{poly de deg } m \text{ sur les } [k2^j, (k+1)2^j]\}$$

$$V_0 = \{f \in L^2 \cap \mathcal{C}^{m-1}, f = \text{poly de deg } m \text{ sur les } [k, k+1]\}$$

Les V_j , constitués de fonctions splines de degré m , forment une analyse multirésolution orthogonale. Voir dans [10, p245] la fonction d'échelle ϕ et l'ondelette ψ . ψ est une ondelette de classe \mathcal{C}^{m-1} , elle décroît exponentiellement, elle a $m + 1$ moments nuls.

6.8 Bases d'ondelettes biorthogonales

Il existe beaucoup de types d'ondelettes, aucun ne surpasse tous les autres. Les ondelettes orthogonales sont les plus simples à présenter et les moins difficiles à programmer. Elles ont l'inconvénient de ne pas être à la fois compactes, régulières, symétriques. Les ondelettes biorthogonales ne sont pas orthogonales comme leur nom pourrait le faire croire. Elles forment un couple d'ondelettes duales, qui apporte plus de souplesse, permettant d'avoir à la fois régularité, compacité, symétrie. Elles sont utilisées dans la compression JPEG2000 [15].

Les formules de décomposition et de reconstruction sont quasiment les mêmes, au lieu des deux suites de coefficients, h_k et g_k , il y a quatre suites $h_k, g_k, \tilde{h}_k, \tilde{g}_k$. Voir [9, p41] [10, p264].

6.9 Visualisation des ondelettes

Bien que cela ne soit pas nécessaire on peut être intéressé par la visualisation du graphe des ondelettes, par le calcul d'un certain nombre de ses valeurs. Il y a (au moins) deux méthodes.

On suppose que l'ondelette est connue par la suite h_k des coefficients de l'équation d'échelle.

6.9.1 Méthode des itérations successives

On part d'une estimation de la fonction d'échelle ϕ . On itère l'équation d'échelle

$$\phi^{(n)}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi^{(n-1)}(2x - k)$$

Si les itérés convergent, c'est vers une fonction ϕ qui vérifie l'équation d'échelle.

C'est la méthode qui a été utilisée pour obtenir le graphe de $D2$ du paragraphe 6.3.1 où on est parti de

$$\phi^{(0)}(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{pour } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

6.9.2 Utilisation de l'algorithme de décomposition-reconstruction

La méthode que l'on va décrire est utilisable pour les ondelettes à support compact vérifiant $\hat{\phi}(0) = \int \phi = 1$. C'est le cas de l'ondelette $D2$. Le support de ϕ est inclus dans $[0, 3] \subset [0, 4]$. Expliquons la méthode sur cet exemple.

(i) Soit une fonction $f \in V_n$ avec $n = -8$.

On suppose que le support de f est inclus dans $[0, 4]$.

D'une part, comme les $\phi_{n,k}$ ont un support de longueur inférieure à $4 \times 2^n = 4/256$, et qu'ils sont basés sur les points $k \times 2^n = k/256$, la décomposition $f = \sum_k s_n[k] \phi_{n,k}$ ne fait intervenir que des $k \in \{0 \cdots 4 \times 2^{-n} = 4 \times 256\}$.

D'autre part si f est assez régulière, f est à peu près constante sur les supports des $\phi_{n,k}$ qui sont très petits. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} s_n[k] &= (f, \phi_{n,k}) \\ &= \int f(x) \phi_{n,k} \\ &\simeq f(k 2^n) \int \phi_{n,k} \\ &\simeq f(k 2^n) \int 2^{-n/2} \phi(2^{-n}x - k) \\ &\simeq 2^{n/2} f(k 2^n) \end{aligned}$$

Il en résulte que les $s_n[k]$ fournissent, au facteur multiplicatif $2^{-n/2}$ près, une approximation des valeurs de f aux points $k \times 2^n$.

Note : cette propriété marche aussi dans l'autre sens : Pour connaître les $s_n[k]$, approximativement, il suffit d'échantillonner f .

(ii) On s'intéresse maintenant plus particulièrement à $f = \phi \in V_0 \subset V_n$, $n = -8$.

On recherche les $s_n[k]$ de la décomposition de $f = \phi$ dans la base des $\phi_{n,k}$.

Supposons qu'ils soient connus. L'algorithme de décomposition conduit, au terme de n itérations à

$$\phi = s_0 + d_0 + d_{-1} + \cdots + d_n$$

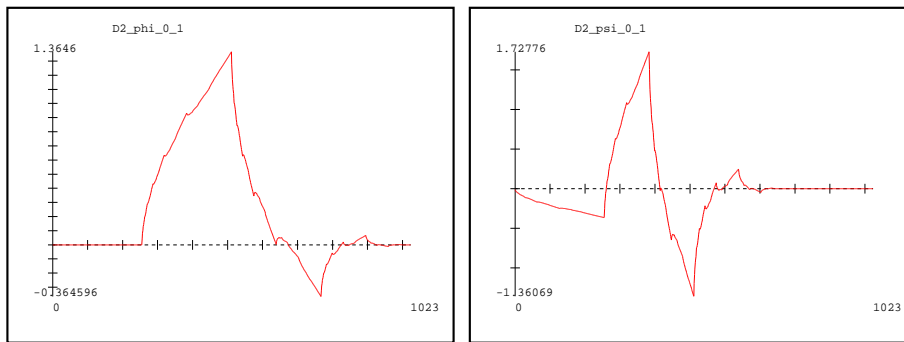
où tous les d_j sont nuls et où s_0 est nécessairement ϕ . En terme de coefficients, cela donne $s_0[0] = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

Ainsi, en utilisant l'algorithme de reconstruction à partir de la suite dont tous les termes sont nuls, excepté le premier égal à 1, on récupère au bout de n itérations de reconstruction les coefficients $s_n[k]$ de la décomposition de ϕ dans la base des $\phi_{n,k}$.

(iii) En résumé, le point (i) ci-dessus montre que pour connaître ϕ en des points $k \times 2^n$, il suffit de connaître les $s_n[k]$. Le point (ii) montre comment obtenir ces $s_n[k]$.

A cause du problème du traitement des extrémités, il convient d'adapter légèrement cette explication et de rechercher, selon le même principe, plutôt $\phi_{0,1}$ par exemple, dont le support est mieux localisé à l'intérieur de l'intervalle d'échantillonnage.

On calcule ψ ou $\psi_{0,1}$ de la même façon.



Daubechies D2, $\phi_{0,1}$ et $\psi_{0,1}$ obtenues par reconstruction

6.10 Ondelettes en dimension 2

Chapitre 7

Compression des images

7.1 Principe général

Le but de ce chapitre est de montrer une utilisation intéressante des techniques présentées précédemment. Mais il n'est pas question d'entrer dans les détails des compressions Jpeg et Jpeg2000 qui sont extrêmement nombreux et sophistiqués, notamment en ce qui concerne Jpeg2000 dont les objectifs sont multiples et ambitieux. Ces deux modes de compression offrent un grand nombre d'options qu'il est difficile de résumer. Ce n'est pas pour rien que la référence [15] contient 773 pages. On va se contenter d'exposer les traits spécifiques.

Ces deux modes de compression sont du type "transformation" : l'image (ou une partie de l'image) est décomposée dans une base, elle est représentée par ses coefficients dans la base. L'opération (la transformation) mathématique produisant cette décomposition doit présenter des propriétés remarquables et une simplicité de traitement. Les coefficients sont d'importance et d'amplitude décroissante. Ils sont quantifiés (arrondis) de façon que ceux qui sont moins importants puissent être codés avec moins de bits. C'est la phase de quantification qui est responsable du fait que ces compressions ne sont pas réversibles (sauf option), c'est-à-dire que la décompression ne redonne pas l'image initiale. L'importance accordée aux différents coefficients est à la disposition du programmeur. Dans le cas des images photographiques, ce sont les coefficients correspondants aux hautes fréquences, aux brusques variations, qui sont sacrifiés, l'oeil humain y étant assez peu sensible.

Une fois quantifiés les coefficients sont ensuite eux-mêmes compressés avec une méthode de compression sans perte, analogue à celles utilisées par les programmes genre "gunzip", l'algorithme de Huffman étant la méthode la plus connue.

On ne décrit ici que la compression des images en nuances de gris. Pour les images couleurs, on traite séparément les trois plans de couleurs. On peut aussi opérer un traitement préalable. Chaque pixel est en principe codé sur trois octets représentant l'intensité de chacune des trois couleurs fondamentales RGB. Compte tenu du fait que l'oeil est plus sensible aux différences de quantité de lumière qu'aux différences entre les couleurs, on code chaque pixel en trois octets (YCbCr) ayant une autre signification [15, p11], permettant d'en compresser un des trois plus fortement que les deux autres.

7.2 La Compression JPEG

La norme Jpeg découpe l'image en blocs 8x8. Les blocs incomplets sont complétés. Les blocs sont compressés indépendamment les uns des autres (à un détail près). C'est ce traitement par blocs qui est responsable du fait que la compression Jpeg n'est pas adaptée aux forts taux de compression. Les blocs 8x8 deviennent très visibles, c'est gênant.

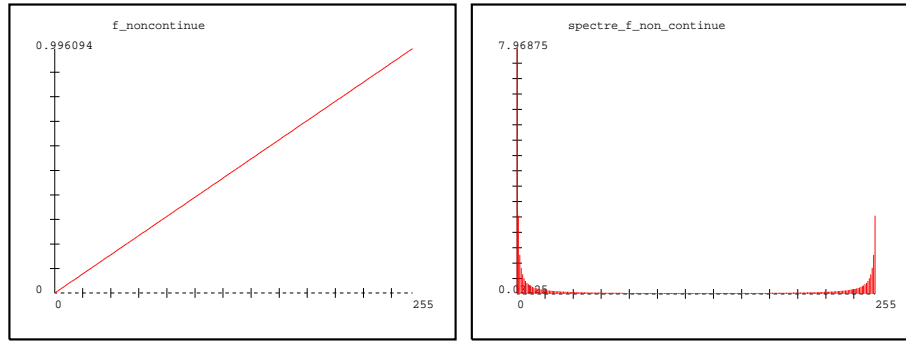
La compression Jpeg2000 est très supérieure à Jpeg pour les forts taux de compression, alors qu'elle n'est que modestement supérieure pour les faibles taux.

7.2.1 Décomposition fréquentielle

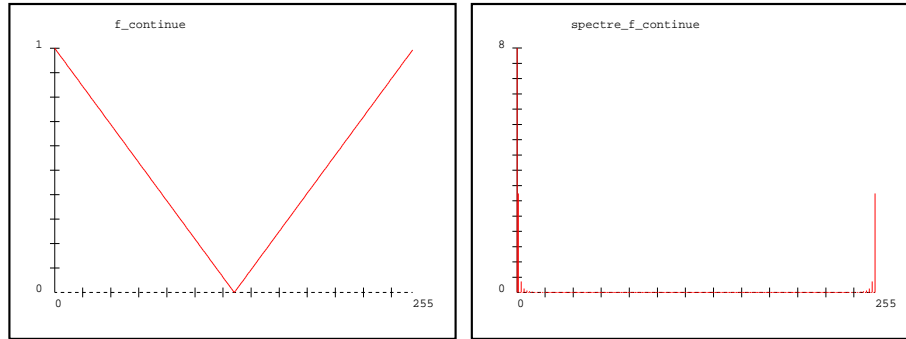
Jpeg décompose dans la base des cosinus qui est préférée à la base de Fourier pour la raison suivante : le développement en série de Fourier d'une fonction f sur $[0, T]$, même régulière, telle que $f(0) \neq f(T)$ contient nécessairement des hautes fréquences non négligeables, puisque la série tronquée $S_N(x)$, qui est T -périodique, doit passer très rapidement de $f(T_-)$ à $f(0_+)$ au voisinage de 0.

Si préalablement on prolonge f par symétrie sur $[-T, 0]$ et que l'on décompose la symétrisée en série

de Fourier sur $[-T, T]$ ce phénomène disparaît ainsi qu'on peut le constater ci-dessous avec l'exemple $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.



$f(x) = x$ sur $[0, 1]$ et son spectre



$f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ et son spectre

Opérer la décomposition en série de Fourier sur $[-T, T]$ avec la base des $e^{2i\pi kx/2}$, après l'exécution de cette symétrie, revient en fait à décomposer sur $[0, T]$ dans la base des $\cos(\pi kx)$.

Ce qui vient d'être dit pour le cas "continu" est vrai aussi pour le cas discret. La compression JPEG utilise la décomposition en cosinus, appelée DCT, pour "discrete cosine transform". De façon précise la base normalisée utilisée en dimension un est

$$C_k[j] = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2j+1)k\pi}{2N}, \quad k = 0 \dots N, \quad j = 0 \dots N$$

avec $\lambda_k = 1$ sauf $\lambda_0 = 1/\sqrt{2}$, conduisant à la transformation $(x_j) \rightarrow (X_k)$

$$X_k = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cos \frac{(2j+1)k\pi}{2N}$$

Cette transformation possède des propriétés analogues à la transformation de Fourier discrète. On peut la programmer avec un algorithme rapide, [10, p346].

En dimension deux, sur des blocs $N \times N$, elle s'écrit

$$X_{k,l} = \frac{2}{N} \lambda_k \lambda_l \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x_{i,j} \cos \frac{(2i+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)l\pi}{2N}$$

et la transformation inverse est

$$x_{i,j} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_k \lambda_l X_{k,l} \cos \frac{(2i+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)l\pi}{2N}$$

7.2.2 Découpage en blocs 8×8

C'est après avoir effectué de multiples tests que le groupe Jpeg a décidé que la décomposition fréquentielle serait pratiquée par blocs 8×8 , indépendamment les uns des autres.

La raison de ce choix n'est pas davantage motivée dans [16], l'article de référence du sujet. Une explication souvent avancée est que si on calcule la DCT sur des blocs $N \times N$, que ce soit avec l'algorithme

rapide en $O(N^2 \log(N))$ opérations, avec les calculs en N^3 , on a tout intérêt, en terme de nombre d'opérations, à le faire sur des blocs de plus petite taille.

Préalablement au découpage, les pixels subissent une translation : en principe chaque pixel est un entier positif codé sur un octet. Il est préférable de les transformer en entiers signés ($\in [-128, 127]$) avant de réaliser la DCT.

Dans les transformées de Fourier, le terme $\hat{f}(0) = \int f$ est généralement très prépondérant. Dans les images, les blocs 8x8 ont généralement une intensité moyenne voisine. Pour cette raison, Jpeg ne code pas les $\hat{f}(0)$ de chaque bloc tels quels, mais il code la différence (plus petite) entre les $\hat{f}(0)$ consécutifs.

7.2.3 Quantification

Pour arrondir les coefficients fréquentiels, Jpeg utilise une table de quantification que chaque programmeur peut définir et qu'il inclut dans le fichier Jpeg pour effectuer la décompression. La quantification s'exerce sur chaque coefficient $X_{k,l}$ obtenu par la DCT. Elle consiste à le remplacer par l'arrondi entier de son quotient avec le terme correspondant $Q_{k,l}$ de la table de quantification, selon

$$X_{k,l} = \text{arrondi}(X_{k,l}/Q_{k,l})$$

C'est la quantification qui exploite la décomposition fréquentielle, c'est en jouant sur la table de quantification que l'on fait varier le taux de compression.

Voici un exemple tiré de [16].

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 139 | 144 | 149 | 153 | 155 | 155 | 155 | 155 |
| 144 | 151 | 153 | 156 | 159 | 156 | 156 | 156 |
| 150 | 155 | 160 | 163 | 158 | 156 | 156 | 156 |
| 159 | 161 | 162 | 160 | 160 | 159 | 159 | 159 |
| 159 | 160 | 161 | 162 | 162 | 155 | 155 | 155 |
| 161 | 161 | 161 | 161 | 160 | 157 | 157 | 157 |
| 162 | 162 | 161 | 163 | 162 | 157 | 157 | 157 |
| 162 | 162 | 161 | 161 | 163 | 158 | 158 | 158 |

Bloc 8x8 avant soustraction de 128

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 16 | 11 | 10 | 16 | 24 | 40 | 51 | 61 |
| 12 | 12 | 14 | 19 | 26 | 58 | 60 | 55 |
| 14 | 13 | 16 | 24 | 40 | 57 | 69 | 56 |
| 14 | 17 | 22 | 29 | 51 | 87 | 80 | 62 |
| 18 | 22 | 37 | 56 | 68 | 109 | 103 | 77 |
| 24 | 35 | 55 | 64 | 81 | 104 | 113 | 92 |
| 49 | 64 | 78 | 87 | 103 | 121 | 120 | 101 |
| 72 | 92 | 95 | 98 | 112 | 100 | 103 | 99 |

Table de quantification

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 144 | 146 | 149 | 152 | 154 | 156 | 156 | 156 |
| 148 | 150 | 152 | 154 | 156 | 156 | 156 | 156 |
| 155 | 156 | 157 | 158 | 158 | 157 | 156 | 155 |
| 160 | 161 | 161 | 162 | 161 | 159 | 157 | 155 |
| 163 | 163 | 164 | 163 | 162 | 160 | 158 | 156 |
| 163 | 164 | 164 | 164 | 162 | 160 | 158 | 157 |
| 160 | 161 | 162 | 162 | 162 | 161 | 159 | 158 |
| 158 | 159 | 161 | 161 | 162 | 161 | 159 | 158 |

Bloc reconstitué

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| 235.6 | -1.0 | -12.1 | -5.2 | 2.1 | -1.7 | -2.7 | 1.3 |
| -22.6 | -17.5 | -6.2 | -3.2 | -2.9 | -0.1 | 0.4 | -1.2 |
| -10.9 | -9.3 | -1.6 | 1.5 | 0.2 | -0.9 | -0.6 | -0.1 |
| -7.1 | -1.9 | 0.2 | 1.5 | 0.9 | -0.1 | 0.0 | 0.3 |
| -0.6 | -0.8 | 1.5 | 1.6 | -0.1 | -0.7 | 0.6 | 1.3 |
| 1.8 | -0.2 | 1.6 | -0.3 | -0.8 | 1.5 | 1.0 | -1.0 |
| -1.3 | -0.4 | -0.3 | -1.5 | -0.5 | 1.7 | 1.1 | -0.8 |
| -2.6 | 1.6 | -3.8 | -1.8 | 1.9 | 1.2 | -0.6 | -0.4 |

Coefficients obtenus par la DCT

| | | | | | | | |
|----|----|----|---|---|---|---|---|
| 15 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Coefficients quantifiés

Cet exemple, opéré sur un bloc assez homogène, montre bien comment avec peu de bits on peut espérer coder les 64 octets du bloc source. On comprend aussi que si le bloc est plus irrégulier, la situation ne peut être aussi favorable.

7.2.4 Compression de Huffman

La compression de Huffman est une opération purement "algorithmique". Elle est sans perte. Elle traite un paquet d'octets que l'on peut voir comme les caractères d'un texte. Dans un texte tous les caractères n'ont pas la même fréquence et les 256 caractères potentiellement utilisables ne sont pas tous présents. Pourtant les caractères du texte sont tous codés sur 8 bits.

En comptant le nombre d'occurrences de chacun des caractères du texte, on dresse une table des fréquences. L'algorithme construit alors un arbre permettant de coder les caractères les plus fréquents avec moins de bits, quitte à ce que certains caractères peu fréquents le soient avec un nombre de bits supérieur à 8. L'arbre de Huffman sert au codage et au décodage.

C'est sur des textes dont la fréquence des caractères est très hétérogène que l'on obtient les plus forts taux de compression.

Voir [10, p530] ou [15, p47] pour une étude plus complète.

7.2.5 Conclusions

Le codage Jpeg basique présente les caractéristiques suivantes :

- Traitement par blocs 8x8
- DCT sur chaque bloc
- Quantification ajustable
- Codage sans perte genre Huffman

Le décodage est exactement l'opération inverse. Il nécessite quelques informations dont la table de quantification et l'arbre de Huffman qu'il trouve dans l'en-tête du fichier Jpeg.

Jpeg est très utilisé pour la transmission des images photographiques sur le Web. Il est beaucoup moins intéressant pour d'autres types d'images.

7.3 La Compression JPEG2000

La norme Jpeg2000 (2000) est plus récente que la norme Jpeg (1991). Les deux normes sont issues du même groupe d'experts associant grandes entreprises et universités. Jpeg2000 utilise les ondelettes à la place de la DCT, mais ce n'est pas la seule différence. La norme Jpeg2000 a pour objectif d'apporter des améliorations importantes par rapport à Jpeg, dans de nombreuses directions [15, p402], dont

- Meilleur taux de compression à qualité égale.
- Qualité acceptable aux très forts taux de compression.
- Bon comportement sur les nuances de gris et sur les images n'ayant que quelques couleurs.
- Possibilité de décodage progressif pour les transmissions lentes.
- Possibilité de compression avec et sans perte.
- Possibilité de décodage d'une partie seulement de l'image (Region Of Interest Access)
- Robustesse aux erreurs de transmission.

La norme est extrêmement souple, elle présente de très nombreuses options. C'est ce qui en fait sa complexité, autant pour le programmeur que pour l'utilisateur. Cela explique pourquoi en 2006, elle est encore peu programmée et peu utilisée. Par ailleurs si on la compare à Jpeg dans le domaine des photographies courantes, sa supériorité n'est pas spectaculaire.

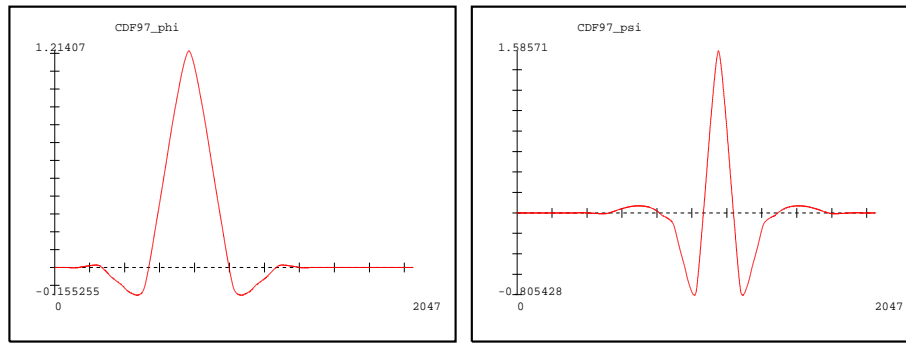
7.3.1 Décomposition en ondelettes

Il n'est pas nécessaire de découper l'image en blocs, mais c'est possible. Il y a une notion de tiles (=tuiles=rectangles), [15, p449].

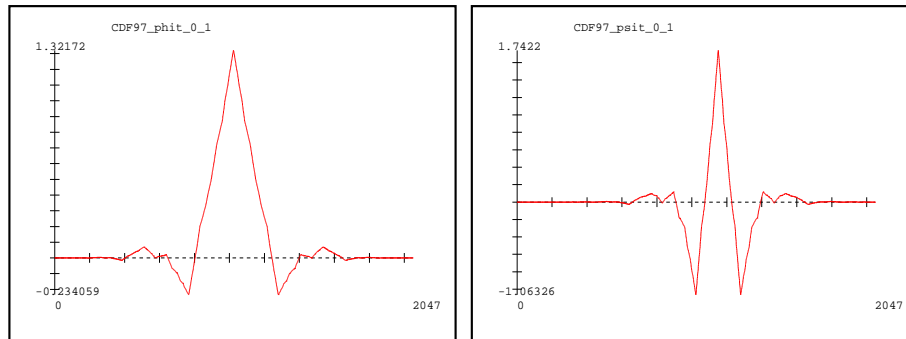
L'image est préparée comme pour Jpeg, le transcodage des couleurs en YCbCr est possible [15, p420], les intensités sont décalées de 128, éventuellement ramenées à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, [15, p418].

L'image est transformée par une décomposition en ondelettes qui s'avère beaucoup plus souple que la DCT.

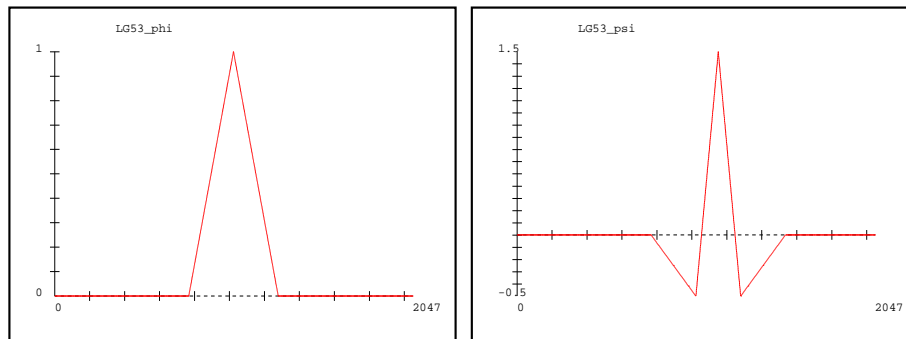
Le programmeur peut choisir l'ondelette de son choix, mais doit offrir deux ondelettes de base, l'ondelette biorthogonale CDF 9/7 de Cohen-Daubechies-Feauveau [15, p278] et une approximation de l'ondelette biorthogonale spline 5/3 de Le Gall [15, p276] qui travaille en nombres "entiers", mieux



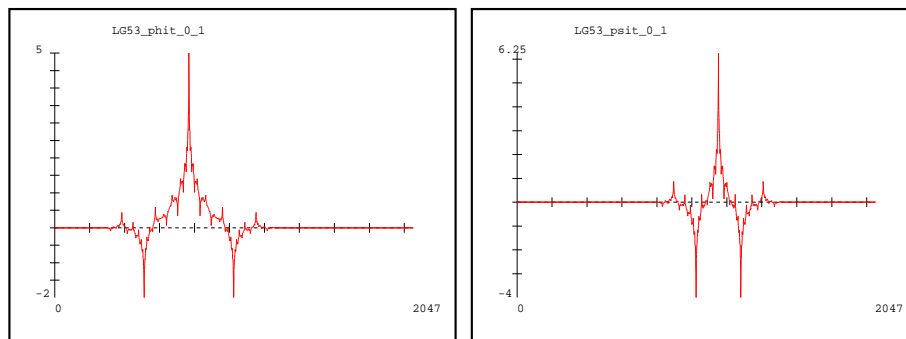
Fonctions ϕ et ψ de CDF 9/7



Fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ de CDF 9/7



Fonctions ϕ et ψ de Le Gall 5/3



Fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ de Le Gall 5/3

La norme prévoit une profondeur maximale de 32. Dans les cas courants on va jusqu'aux profondeurs 4 ou 5, éventuellement on reste à la profondeur 0, comme par exemple pour les images en noir et blanc pour lesquelles la décomposition en ondelettes n'est pas souhaitable [15, p429].

7.3.2 Quantification et codage entropique

La quantification est pratiquée dans chaque sous-bande, le taux de quantification Δ_b peut varier avec la sous-bande, il est constant dans chaque sous-bande, [15, p349], [10, p557]

$$X_b[k, l] = \begin{cases} 0 & \text{si } |X_b[k, l]| < \Delta_b \\ \text{sign}(X_b[k, l]) \text{ arrondi}(\frac{|X_b[k, l]|}{\Delta_b})[[\Delta_b]] & \text{si } |X_b[k, l]| \geq \Delta_b \end{cases}$$

C'est en faisant varier Δ_b que l'on fait varier le taux de compression.

(Note : Pour filtrer par ondelettes, c'est une manipulation analogue qui est pratiquée)

Le codage final genre Huffman est amélioré. Il s'agit d'un codage entropique très sophistiqué basé sur l'algorithme EBCOT de D.Taubman, un des deux auteurs de [15, p348].

Chapitre 8

Formulaire

| Propriété | Domaine temporel | Domaine de Fourier |
|-----------------|--|---|
| Transf directe | $f = f(x)$ | $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\omega x} f(x) dx$ |
| Transf inverse | $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x\omega} \hat{f}(\omega) d\omega$ | $\hat{f}(\omega)$ |
| Signal réel | $f(x) = \overline{f(x)}$ | $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ |
| Chang échelle | $g(x) = f(ax)$ | $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ |
| Translation | $g(x) = f(x - h)$ | $\hat{g}(\omega) = e^{-2i\pi\omega h} \hat{f}(\omega)$ |
| Chang fréquence | $g(x) = e^{-2i\pi\omega_0 x} f(x)$ | $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$ |
| Dérivation | $g(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ | $\hat{g}(\omega) = (2i\pi\omega)^n \hat{f}$ |
| Multiplication | $g(x) = (-2i\pi x)^k f(x)$ | $\hat{g} = \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}$ |
| Multiplication | $h(x) = f(x)g(x)$ | $\hat{h} = \hat{g} \star \hat{f}$ |
| Convolution | $h = f \star g$ | $\hat{h} = \hat{g} \hat{f}$ |
| Parseval | $e = \ f\ _2$ | $e = \ \hat{f}\ _2$ |
| Poisson | $e = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x - na)$ | $e = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$ |
| Dirac | δ_a | $e^{-2i\pi\omega a}$ |
| Onde pure | $e^{2i\pi a x}$ | δ_a |
| Peigne de Dirac | Δ_a | $\frac{1}{a} \Delta_{1/a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n a \omega}$ |
| Sinus | $\sin(2\pi a x)$ | $\frac{i}{2} (\delta_{-a} - \delta_a)$ |
| Cosinus | $\cos(2\pi a x)$ | $\frac{1}{2} (\delta_{-a} + \delta_a)$ |
| Porte | $\chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}$ | $a \operatorname{sinc}(\pi\omega a) = a \frac{\sin(\pi\omega a)}{\pi\omega a}$ |
| Sinc | $\operatorname{sinc}(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ | $\chi_{[-1/2, 1/2]}(\omega)$ |
| Gaussienne | $e^{-\pi x^2}$ | $e^{-\pi\omega^2}$ |
| Exponentielle | $e^{-a x }$ | $\frac{2a}{a^2 + (2\pi\omega)^2}$ |

Bibliographie

- [1] J.Bass. *Cours de Mathématiques, t2*. Masson, (1968).
- [2] R.E.Blahut. *Fast algorithms for digital signal processing*. Addison-Wesley, (1985).
- [3] Y.Choquet-Bruhat. *Distributions. Théorie et problèmes*. Masson, (1973).
- [4] A.Cohen. *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal*. Masson, (1992).
- [5] I.Daubechies. *Ten lectures on Wavelets*. Siam, (1992).
- [6] H.G.Garnir. *Fonctions de variables réelles II*. Gauthier-Villars, (1965).
- [7] C.Gasquet, P.Witomski. *Analyse de Fourier et Applications, Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. Dunod, (2000).
- [8] A.Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall, (1989).
- [9] F.Keinert. *Wavelets and Multiwavelets*. Chapman & Hall, (2004).
- [10] S.Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. École polytechnique, (2000).
- [11] F.Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, (1986).
- [12] W.H.Press. *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, (1989).
- [13] H.Reinhard. *Éléments de mathématiques du signal Tome 1 - Signaux déterministes*. Dunod, (1995).
- [14] W.Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, (1970).
- [15] D.S.Taubman, M.W.Marcellin. *Jpeg2000, image compression, fundamentals, standards, practice*. Kluwer Academic Publishers, (2004).
- [16] G.K. Wallace. *The JPEG Still Picture Compression Standard* Communications of the ACM, (1991).

Index

- Algorithme rapide, 34, 56
- Analyse multirésolution, 50
 - orthogonale, 50
- Bande limitée, 30
- Base orthogonale, 19
- Bezout, 36, 57
- Coefficient de Fourier, 19
- Convert, 10
 - compress jpeg2000, 10
 - geometry, 9
 - noise, 11
 - scale, 9
- Cooley-Tukey, 34
- Critère de Nyquist, 30, 37, 39, 42
- Décomposition en ondelettes orthogonales, 53
- Décomposition-reconstruction, 54
- Dirac, 28
- Distribution, 27
 - dérivée, 28
 - tempérée, 27
- EBCOT, 66
- Echantillonnage, 22, 30
- Echelle, 49
- Euclide, 57
- Fenêtrage, 42
- FFT, 34
- Filtre, 21
 - Hanning, 45
 - passe-bas, 19
- Fonction
 - d'échelle, 49
 - de transfert, 21
 - porte, 17
- Formulaire de Fourier, 67
- Formule d'interpolation de Shannon, 22, 30
- Formule de Poisson, 29
- Fréquence, 20
- Fréquence d'échantillonnage, 15
- Haar, 50
- Hamming, 42
- Harmonique, 20
- Heisenberg, 29
- Huffman, 64
- ImageMagick, 10
- Ipo
 - brgauss, 11
 - dwtseuil, 11
 - f2dfreq, 11
- Jasper, 10
- Jpeg2000, 10
- LastWave, 10
- Lena, 10
- Masse de Dirac, 28
- Moments, 56
- Noyau de Dirichlet, 21
- Ondelette
 - Battle-Lemarié, 58
 - biorthogonales, 58
 - CDF 9/7, 64
 - Daubechies, 52, 57
 - Haar, 51
 - Le Gall 5/3, 64
 - mère, 51
 - Shannon, 57
- Pamtojpeg2k, 10
- Parseval, 19
- Peigne de Dirac, 28
- Pgm, 10
- Principe d'incertitude, 29
- Produit de convolution, 36
- Projection orthogonale, 19
- Quantification, 63, 66
- Recouvrement, 42
- Shannon, 22, 30
- Spectre, 20
- Taubman, 66
- Théorème
 - d'inversion de Fourier, 26
 - de Dirichlet, 19
 - de Parseval, 26
 - de Plancherel, 26
 - de Shannon, 30
 - de Whittaker-Shannon, 22
- Visualisation des ondelettes, 59
- Whittaker, 22
- Winograd, 36
- YCbCr, 61
- Zéro-padding, 42