

Modélisation statistique multivariée des images dans le domaine de la transformée de curvelet

Larbi BOUBCHIR, Jalal M. FADILI

GREYC UMR CNRS 6072

ENSICAEN, 06 Bd Maréchal Juin, 14050 Caen, France

Larbi.Boubchir@greyc.ensicaen.fr, Jalal.Fadili@greyc.ensicaen.fr

Résumé – Dans cet article, nous proposons une étude théorique et statistique pour caractériser les dépendances inter- et intra- individuelle en position, échelle et orientation des coefficients de la transformée de curvelet des images. Notre étude a été basée sur les estimées des distributions marginales et conjointes pour étudier les propriétés statistiques des coefficients, et sur la mesure de l’information mutuelle pour mesurer le niveau de dépendance entre ces coefficients. Enfin, en vue de caractériser les dépendances des coefficients de curvelet nous avons proposé un modèle statistique multivarié, à savoir le modèle multivarié gaussien généralisé anisotrope (AMGGD) que nous avons pleinement caractérisé.

Abstract – In this paper, we propose a theoretical and statistical study to characterize the inter- and intra- scale dependencies of the curvelet coefficients of images across position, scale and orientation. Our study was based on estimated histograms of the marginal and joint distributions to study the statistical properties of coefficients, and on the mutual information measure to assess the level of dependence between these coefficients. Finally, towards characterization of the dependencies between the curvelet coefficients a novel multivariate statistical model namely the anisotropic multivariate generalized gaussian (AMGGD) was proposed and fully characterized.

1 Introduction

Au cours des dix dernières années, les ondelettes ont eu un immense succès dans le domaine du traitement d’images, et ont été utilisées pour de nombreux problèmes tels que la compression et la restauration d’images [1]. Ces problèmes ont souvent pour préalable la recherche d’une représentation de l’image qui soit la plus parcimonieuse possible, au sens où un petit nombre de paramètres permet d’obtenir une approximation précise de l’image.

Cependant, il apparaît aujourd’hui clairement que les ondelettes ne sont pas optimales pour l’analyse d’objets anisotropes dans l’image (les lignes, les contours...), mais restent efficaces pour la détection de structures isotropes à différentes échelles. Depuis quelques années, de nouvelles transformées multi-échelles ont été développées -comme les curvelets, contourlets et bandlets- qui intègrent de notion de directionnalité et qui permettent de rechercher des objets de manière optimale dont l’efficacité en traitement d’image reste encore à confirmer.

Dans cet article, on présente une analyse statistique des dépendances individuelle en position, échelle et orientation des coefficients des images dans le domaine de curvelet [2, 3, 4, 5], basée sur les histogrammes estimés de distributions marginales et conjointes, et sur la mesure de l’information mutuelle[8] pour caractériser ces dépendances. Ceci afin de pouvoir modéliser ces interactions entre les coefficients de façon simple à travers un modèle statistique multivarié, à savoir l’AMGGD, que nous caractérisons pleinement.

2 Curvelets et Notation

Les curvelets ont été proposées par E. Candès et D. Donoho [2], constituent une nouvelle famille de frames d’onde-

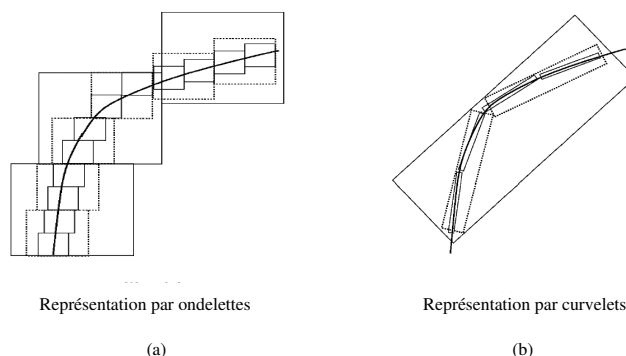


FIG. 1: Comparaison de l’approximation non-linéaire des ondelettes et des curvelets.

lettes géométriques plus efficaces que les transformées traditionnelles, et qui sont conçues pour représenter de façon parcimonieuse les contours. Par exemple, sur la Fig. 1(a), les ondelettes prendraient beaucoup de coefficients pour représenter précisément un tel contour. Comparées aux ondelettes, les curvelets peut représenter un contour lisse avec moins de coefficients pour la même précision (Fig.1(b)).

La transformée de curvelet est une transformée multi-échelles multi-directionnelles avec des atomes indexés par un paramètre de position, d’échelle et de direction [2, 4]. La Fig.2(a) montre une représentation de la transformée de curvelets pour l’image ”Bateau”, en employant la transformée de curvelets discrète (TCD) de Demanet [5]. Trois niveaux d’échelles et six orientations ont été montrés. Dans la Fig.2(b) on montre le partitionnement spectral engendré par la TCD [4, 5]. Une curvelet est montrée dans la Fig.2(c).

Pour chaque coefficient de curvelet X , on définit ces voisins (VX) dans la même orientation, qui représentent les huit coefficients adjacents. Ensuite, le coefficient à la même locali-

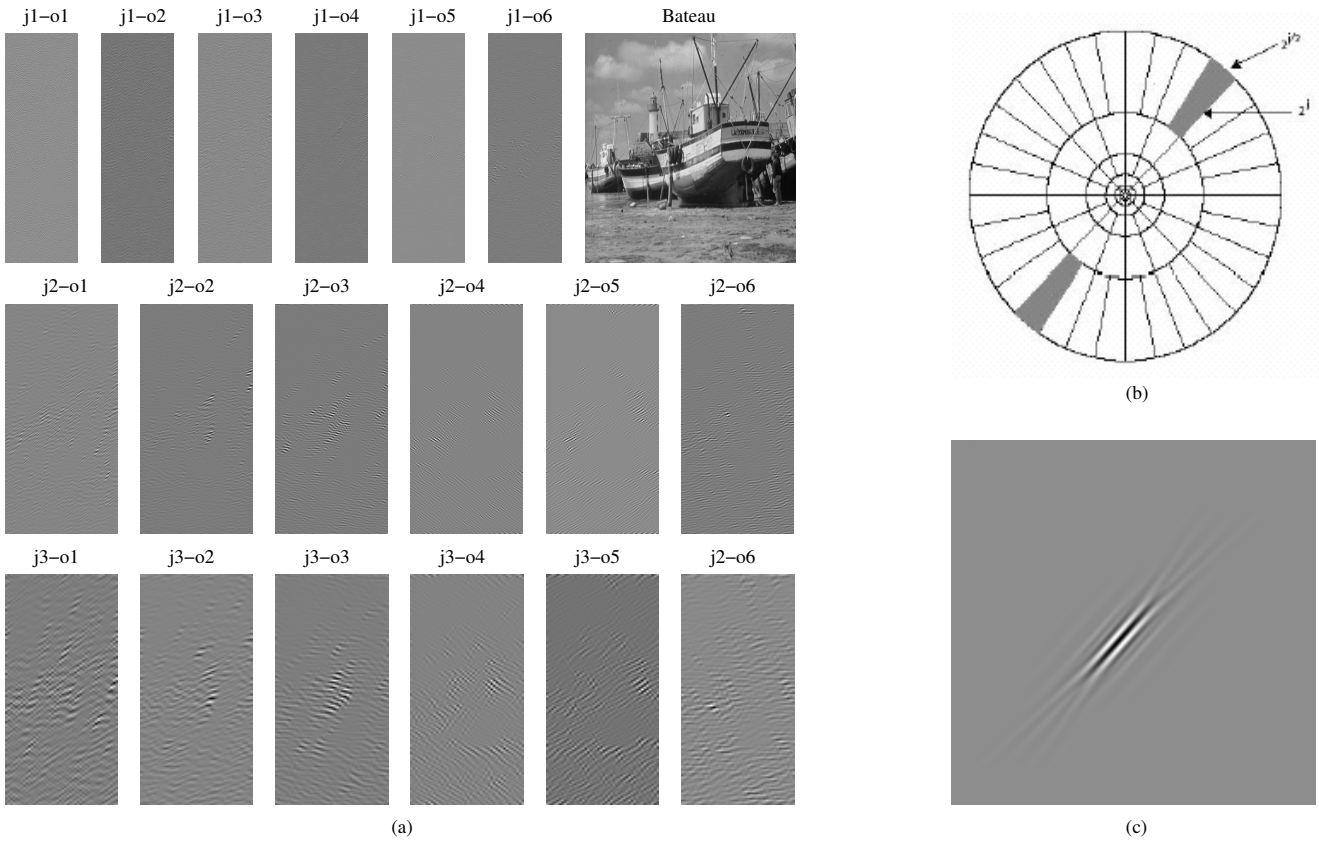


FIG. 2: (a) Transformée de curvelet discrète (TCD) de l'image "Bateau". Trois niveaux d'échelles et six orientations ont été montrés (j : indique l'échelle, o : indique l'orientation). (b) Partitionnement spectral engendré par la TCD. (c) Une curvelet.

sation spatiale dans l'échelle supérieure correspond à son père (PX), et les coefficients à la même localisation spatiale et à la même échelle mais dans une autre orientation correspondent à ces cousins (CX). Aussi, il y a plus d'orientations dans la représentation de curvelet comparée à la représentation en ondelette séparable où il y a seulement trois directions cardinales (horizontale, verticale et diagonale). La Fig.3 récapitule ces importantes relations entre coefficients.

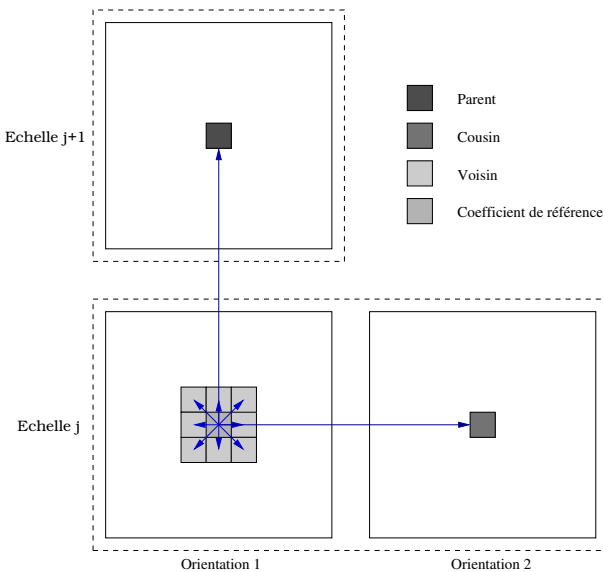


FIG. 3: Dépendances inter- et intra- individuelle en position, échelle et orientation entre les coefficients de curvelet.

3 Etude et Analyse statistique

Nous présentons ici une étude statistique pour apprécier les propriétés des coefficients de curvelet d'images et caractériser les dépendances inter- et intra- échelles de ces derniers.

3.1 Distribution marginale

Premièrement, nous étudions les statistiques marginales des coefficients de curvelet d'images. La Fig.4(a) montre les histogrammes de distributions marginales des coefficients de curvelet de l'image "bateau", à deux orientations et à deux échelles successives. Ces lois marginales sont clairement non gaussiennes, caractérisées par des densités symétriques centrées en zéro avec des queues relevées (leptokurtiques). Ce comportement leptokurtique est observé sur tous les histogrammes à toutes les orientations, échelles pour toutes les images analysées. Ceci trouve son origine dans le fait que la transformée de curvelet est une transformée parcimonieuse où la majorité de coefficients ont des amplitudes nulles. Les kurtosis de ces distributions ont été estimés et ont des valeurs significativement plus élevées que la valeur gaussienne de 3. Ainsi, les distributions marginales des images dans le domaine des curvelets sont fortement non gaussiennes.

3.2 Distribution conjointe

Deuxièmement, nous étudions les statistiques conjointes des coefficients de curvelet. Dans Fig.2(a), nous observons que les coefficients ayant une valeur élevée tendent à se grouper au-

tour des bords des objets dans l'image "Bateau". Ceci persiste également à d'autres orientations et à d'autres échelles. La Fig.4(b) montre les distributions conjointes des coefficients de curvelets pour l'image "Bateau" dans le cas bivarié et trivarié, $p(X, \cdot)$ et $p(X, \cdot, \cdot)$, où (\cdot) veut dire parent, voisins ou cousins.

3.3 Information Mutuelle

On propose une étude quantitative des distributions conjointes pour comparer les interactions entre les coefficients de curvelet. Ceci est quantifié par le biais de l'information mutuelle [8], qui est une mesure quantitative des dépendances entre les coefficients [6, 7]. L'information mutuelle (IM) est l'entropie relative $D(\cdot||\cdot)$ entre la distribution conjointe et le produit des distributions, et est définie par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} IM(X; Y) &= D(p(x, y)||p(x)p(y)) \\ &= \int_x \int_y p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

TAB. 1: L'information mutuelle moyennée sur une base d'images (100 images) [9], calculée pour deux échelles successives J et $J - 1$ où J est l'échelle la plus grossière.

	échelle J	échelle $J - 1$
IM(X;PX)	0.164	0.194
IM(X;VX)	0.374	0.555
IM(X;CX)	0.142	0.151

Le Tab.1 montre l'information mutuelle moyennée sur une base de 100 images [9]. Nous observons que les dépendances les plus significatives proviennent des voisins, suivis des parents et ensuite des cousins. L'influence des voisins est plus prépondérante compte tenu que les coefficients de TCD ont tendance à ce regrouper. La dépendance entre échelles (parent) est révélatrice d'une persistance des coefficients significatifs à travers les échelles.

Finalement, il semble que les dépendances entre orientations (cousin) soient la moins importante du fait du partitionnement spectral illustré dans la Fig.2(b). Cependant, le système des curvelets ne forme pas une base orthogonale mais plutôt un frame, il subsiste des dépendances entre orientations.

4 Modèle multivarié analytique

Ici nous introduisons une classe de PDFs marginales à queues lourdes (AMGGD) pour le cas multivarié afin de modéliser les dépendances inter- et intra-échelles entre les coefficients de curvelet.

4.1 Modèle proposé

Définition 1 Si un vecteur de VAs $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ dans \mathbb{R}^d suit une loi multivariée gaussienne généralisée **anisotrope centrée**, alors sa PDF s'écrit:

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \alpha, \Sigma) = \frac{\det \Sigma^{-1/2}}{(Z(\alpha)B(\alpha))^d} \exp \left(- \left\| \frac{\Sigma^{-1/2} \mathbf{x}}{B(\alpha)} \right\|_{\alpha}^{\alpha} \right) \quad (2)$$

où

$$Z(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha} \right), \alpha > 0 \quad (3)$$

et

$$B(\alpha) = \sqrt{\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\alpha} \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right)}} \quad (4)$$

α est le paramètre de forme et Σ une matrice symétrique définie positive. Pour rappel, $\|\mathbf{x}\|_{\alpha} = \sum_{i=1}^d |x_i|^{\alpha}$ est la norme L_{α} du vecteur \mathbf{x} .

Cette définition englobe le cas particulier $d = 1$ (une VA) et le cas des distributions normales multivariées ($\alpha = 2$). Ce modèle de PDF jouit de plusieurs propriétés intéressantes que nous avons établies.

4.2 Estimation des hyperparamètres

Pour mettre en application notre modèle multivarié de PDF, nous avons proposé des estimateurs (moments et maximum de vraisemblance) des hyperparamètres associés: α et Σ .

L'intérêt de la paramétrisation de l'Eq. 2 est que

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma \quad (5)$$

Ainsi, sachant \mathbf{X} (estimé par la méthode des moments) comme indiqué ci-dessus, nous pouvons mettre en place l'estimateur du maximum du vraisemblance (MV) pour obtenir α . L'équation de vraisemblance correspond à α (sachant Σ) est dans ce cas,

$$\hat{\alpha}_{MV} = \arg \min_{\alpha > 0} LL(\alpha) = \arg \min_{\alpha > 0} - \sum_{i=1}^n \log p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i; \alpha, \Sigma) \quad (6)$$

où α est la racine de l'équation suivante:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha \partial LL(\alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{i,j} \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^{\alpha} \cdot \log \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^{\alpha} \cdot \left(\Psi \left(\frac{1}{\alpha} \right) - 3\Psi \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right) \\ &\quad - nd - \frac{3nd}{2\alpha} \left(\Psi \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \Psi \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$y_{i,j} = \Sigma_j^{-1/2} \mathbf{x}_i \quad (8)$$

j représente la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{y}_i où $\mathbf{y}_i = \Sigma^{-1/2} \mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i, \{i=1, \dots, n\}}$ sont les réalisations de \mathbf{X} et Ψ est la fonction Digamma (pour rappel, $\Psi(z) = \frac{d \ln(\Gamma(z))}{dz}$).

Le résultat suivant établit l'existence de l'estimateur du MV de α .

Proposition 1 Existence d'une solution

- (i) $f(\alpha)$ a au moins une racine sur \mathbb{R}^{+*} , et donc il existe au moins une solution (non nécessairement unique) $\hat{\alpha}_{MV}$ à l'estimateur du MV sachant Σ .
- (ii) si $M = \max_{i,j \in \mathbb{N}} |y_{i,j}| \leq \sqrt{3}$ alors au minimum global $\hat{\alpha}_G$ de $LL(\alpha)$ on aura toujours $LL(\hat{\alpha}_G) < \frac{nd \log(3)}{2}$.

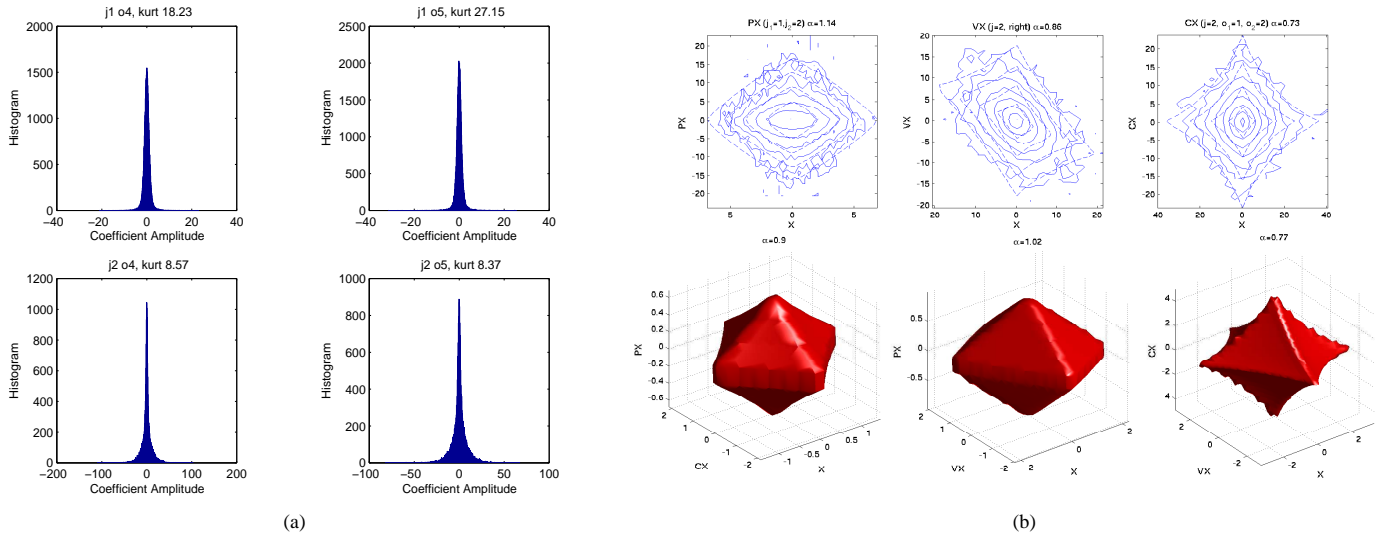


FIG. 4: (a) Distributions marginales des coefficients de curvelet de l'image "bateau", à deux orientations et à deux échelles successives. (b) Distributions conjointes (en log) des coefficients de curvelet pour l'image "Bateau" dans le cas bivarié et trivarié, $p(X, \cdot)$ et $p(X, \cdot, \cdot)$, avec leurs parents PX , voisins VX et cousins CX .

L'intérêt du résultat Prop.1-(ii) réside dans le fait que nous pouvons rejeter adaptativement certains minima locaux de $LL(\alpha)$ (en l'occurrence ceux placés au dessus du $\frac{nd \log(3)}{2}$).

D'après l'Eq. 5 et la Proposition 1, nous suggérons l'algorithme d'estimation des hyperparamètres suivant:

Algorithm 1 Estimation des hyperparamètres

1: Estimé de Σ

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (9)$$

2: Estimé de α

obtenir $\hat{\alpha}$ en résolvant numériquement l'Eq. 7 par une descente de gradient. Cette descente tirera profit de la Prop.1-(ii) de façon à éviter d'être piégé dans un minimum local.

4.3 Ajustement sur des images: simulées et réelles

Sur la Fig.4(b), ce modèle de PDF a été ajusté (trait en pointillé) à la PDF jointe observée (trait plein) dans la cas bivarié. On peut apprécier l'adéquation de ce modèle aux statistiques observées.

5 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés des coefficients de curvelet d'images. Et on a montré que les coefficients ayant des valeurs élevées tendent à se grouper autour des bords des objets dans l'image, ce qui est intuitif car les coefficients dépendent de leurs parents et voisins, aussi bien que leurs cousins à différentes échelles et orientations. Ces dépendances ont été vérifiées quantitativement en mesurant l'information mutuelle, où on a constaté que le niveau le plus élevé de la dépendance des coefficients est à l'égard des leurs voisins, suivi des leurs parents, qui sont suivis des cousins. Le modèle multivarié analytique de PDF, que nous avons pleinement caractérisé, a été proposé pour cap-

turer ces dépendances entre coefficients.

Après cette phase de modélisation des dépendances, notre futur travail se focalisera sur leur mise à profit d'un tel modèle de PDF comme a priori pour des tâches de restauration dans un contexte bayésien.

Références

- [1] S. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing*. San Diego, CA: Academic Press, 1999.
- [2] E. Candès et D. Donoho. *Curvelets: A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation of Objects with Edges*. Curves and Surface, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, pp. 123–143, 1999. Addison-Wesley, 1994.
- [3] J. Starck, E. Candès et D. Donoho. *The curvelet transform for image denoising*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 11(6), pp. 670–684, June 2002.
- [4] E. Candès et D. Donoho. *New Tight Frames of Curvelets and Optimal representations of Objects with C^2 Singularities*. Department of Statistics, Stanford University, USA, November 2002.
- [5] E. Candès et L. Demanet. *The Curvelet Representation of Wave Propagators is Optimally Sparse*. Applied and Computational Mathematics, California Institute of Technology, USA, 2004.
- [6] J. Liu et P. Moulin. *Information-Theoretic Analysis of Interscale and Intrascale Dependencies Between Image Wavelet Coefficients*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 10(10), pp. 1647–1658, November 2001.
- [7] D. D. -Y. Po et M. N. Do. *Directional multiscale statistical modeling of images X*. Proc. of SPIE conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing, Vol. 5207, pp. 69–79, August 2003.
- [8] T. M. Cover et J. A. Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991.
- [9] "<http://sipi.usc.edu/services/database/Database.html>".