Cours électif CET42

Initiation au traitement du signal et applications

Séance 6: analyse temps-fréquence

Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

www.loria.fr/∼sur/enseignement/signal/

Séance 6

1 Limite de l'analyse de Fourier
2 Les fenêtres
- Les fenêtres
- Théorème d'incertitude

3 L'idée de Dennis Gabor
- Transformée de Fourier à fenêtre
- Le cas discret
- Quelques applications

4 Introduction aux ondelettes
- Limite de la STFT
- Transformée continue en ondelettes
- Transformée discrète en ondelettes

5 Conclusion

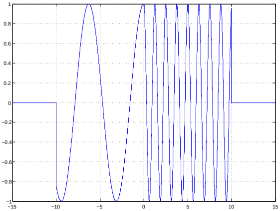
Limite de l'analyse de Fourier

But : extraire d'un signal des informations.

- signal analogique L^2 : transformée de Fourier, spectre $\widehat{f}(\lambda)$;
- signal analogique périodique L^2 : série de Fourier, coefficients $c_n(f)$;
- signal numérique : transformée de Fourier discrète.

Limite : analyse globale, perte de l'information temporelle.
exemples : début et fin du signal, apparition d'une singularité - et nécessité de connaître l'intégralité du signal pour l'analyser. . .
car $\widehat{f}(\lambda)$ ou $c_n(f)$ se calculent sur tout le signal.

Exemple



Problème avec les signaux non-stationnaires : on peut (à peu près) retrouver les fréquences des composantes, mais pas leur localisation.

Séance 6

1. Limite de l'analyse de Fourier
2. Les fenêtres
   - Les fenêtres
   - Théorème d'incertitude
3. L'idée de Dennis Gabor
   - Transformée de Fourier à fenêtre
   - Le cas discret
   - Quelques applications
4. Introduction aux ondelettes
   - Limite de la STFT
   - Transformée continue en ondelettes
   - Transformée discrète en ondelettes
5. Conclusion

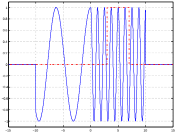
Localisation temporelle

Problème de la transformée de Fourier d'un signal f :

- excellente résolution fréquentielle (cas d'un signal trigo.)
- mais résolution temporelle nulle (intégration sur le domaine de f).

Idée pour améliorer la résolution temporelle : analyser le spectre sur des morceaux du signal.

Exemple : analyse sur intervalle $[-A, A] \longrightarrow f$ multipliée par le créneau χ_A (indicatrice de $[-A, A]$).

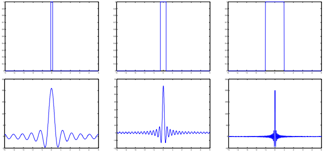


Localisation par un créneau

Soit $g(t) = \chi_A(t)f(t)$.

Que devient le spectre $\widehat{g} = \widehat{\chi_A \cdot f}$?

$$\widehat{g}(\lambda) = \frac{\sin 2\pi A\lambda}{\pi\lambda} * \widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\mu) \frac{\sin 2\pi A(\mu - \lambda)}{\pi(\mu - \lambda)} \mathrm{d}\mu.$$



A petit : bonne résolution en temps, faible résolution en fréquence ;
A grand : faible résolution en temps, bonne résolution en fréquence.

Exemple : signal trigonométrique

Cas où $f(t) = e^{2i\pi\omega t}$ est un signal trigonométrique. (donc parfaitement localisé en fréquence)

Alors $\widehat{f} = \delta_\omega$.

Comme : $\widehat{g}(\lambda) = \frac{\sin 2\pi A\lambda}{\pi\lambda} * \widehat{f}(\lambda)$
on a : $\widehat{g}(\lambda) = \frac{\sin 2\pi A(\lambda - \omega)}{\pi(\lambda - \omega)} \dots$

Interprétation : pour estimer correctement la fréquence d'un signal trigonométrique, il faut l'observer sur un intervalle de temps suffisamment long.

Les fenêtres

Même raisonnement si on remplace le créneau χ_A par une fonction réelle w_A jouant le même rôle.
$\rightarrow$ recherche des w_A bien localisés en temps **et** en fréquence.

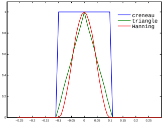
Définition - fenêtres

On appelle *fenêtres* de telles fonctions.

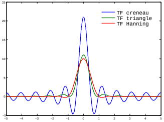
Idée : pour améliorer la localisation en fréquence de la fenêtre, il faut prendre une fenêtre plus régulière que le créneau. ($\widehat{w_A}$ décroît alors plus vite)

Exemples de fenêtres

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion



différentes fenêtres...



et leurs transformées de Fourier

Fenêtre idéale : bonne localisation (concentration) en temps **et** en fréquence.

$\rightarrow$ Impossible d'après le *théorème d'incertitude...*

"Principe" d'incertitude (dit de Heisenberg)

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{||f||_2^2} \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \quad \textit{(dispersion d'énergie en temps)}$$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{||f||_2^2} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda \quad \textit{(dispersion d'énergie en fréquence)}$$

Théorème d'incertitude

On ne peut pas localiser un signal simultanément en temps et en fréquence car :

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_f^2 \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Preuve : cf poly.

Remarque : peut-on trouver des fonctions à support compact dont la transformée de Fourier (ou la TF inverse) est encore à support compact ?
(intérêt : ex. conversion digital $\rightarrow$ analogique, cf séance 5)
$\rightarrow$ **Non**... (cf Mallat chap. 2, th. de Paley-Wiener)

Conséquence du principe d'incertitude

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

On ne peut pas trouver de fenêtre possédant une bonne localisation en temps et en fréquence...

Mais les gaussiennes réalisent l'optimum dans le théorème d'incertitude, i.e.

Proposition

Si $f = \alpha e^{-ct^2}$ avec $c > 0$, alors :

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_f^2 = \frac{1}{4\pi}.$$

Conclusion : les fenêtres gaussiennes réalisent le "meilleur" compromis entre localisation temporelle et fréquentielle.

Séance 6

1. Limite de l'analyse de Fourier
2. Les fenêtres
   - Les fenêtres
   - Théorème d'incertitude
3. L'idée de Dennis Gabor
   - Transformée de Fourier à fenêtre
   - Le cas discret
   - Quelques applications
4. Introduction aux ondelettes
   - Limite de la STFT
   - Transformée continue en ondelettes
   - Transformée discrète en ondelettes
5. Conclusion

Transformée de Fourier à fenêtre

ou STFT (Short Time Fourier Transform)
introduit par Dennis Gabor
(1900-1979, prix Nobel 71, inventeur de l'holographie).

Rappel : transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$

$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-2i\pi\lambda t)\mathrm{d}t.$

Définition - Transformée de Fourier à fenêtre

Soit $W_f(\lambda, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t-b)\exp(-2i\pi\lambda t)\mathrm{d}t.$

W_f s'appelle la *transformée de Fourier à fenêtre* de f.

Remarque : bien sûr, dépend du choix de w.

Théorème

$$W_f(\lambda, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t-b)\exp(-2i\pi\lambda t)\mathrm{d}t.$$

Théorème

Si $w \in L^1 \cap L^2$ réelle et $||w||_2 = 1$ alors

1. Conservation de l'énergie :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(\lambda, b)|^2 \,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

2. Formule de reconstruction :

$$f(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\lambda, b)w(t-b)e^{2i\pi\lambda t} \,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}b \quad (\text{dans } L^2)$$

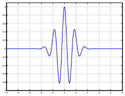
Preuve : cf Gasquet-Witomski chap. 41 ou Mallat chap. 4.

Remarque : “bases” des décompositions

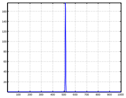
Fourier : $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\omega_\lambda(t)\mathrm{d}t$
où $\omega_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}$.

Fourier à fenêtre : $f(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\lambda, b)w_{\lambda,b}(t)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}b$
où $w_{\lambda,b}(t) = w(t-b)e^{2i\pi\lambda t}$
et $W_f(\lambda, b) = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \overline{w}_{\lambda,b} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{w_{\lambda,b}}}$ (Parseval)

Cas de la fenêtre Gaussienne ($\rightarrow$*Gaborettes*) :



$\mathrm{Re}(w_{\lambda,b})$
(autour de b)



$|\widehat{w_{\lambda,b}}|$
(autour de λ)

...à comparer à ω_λ et $\widehat{\omega_\lambda}$ dans le cas de Fourier classique.

Spectrogramme

De la même manière que l'on considérait le *module* des coefficients de Fourier pour caractériser les fréquences présentes dans le signal, on définit :

Définition - spectrogramme

Le *spectrogramme* d'un signal f est :

$$(\lambda, t) \mapsto \mathcal{S}_f(\lambda, t) = |W_f(\lambda, t)|^2.$$

Transformée de Fourier discrète à fenêtre

On considère un signal discret $(f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$, et une fenêtre discrète $(w_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ (tous deux *périodisés*).

Définition - Discrete STFT

La transformée de Fourier discrète à fenêtre de f est la famille des N^2 coefficients :

$$W_{m,l} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_{n-m} e^{\frac{-2i\pi ln}{N}} \quad \text{avec } 0 \leqslant m, l \leqslant N-1.$$

Complexité algorithmique : $\mathcal{O}\left(N^2 \log(N)\right)$.
(en fait dépend de la taille du support de (w_n)...)

Comme dans le cas continu, si $||w||_2 = 1$ on a une formule de reconstruction. (admis)

Application 1 : compression

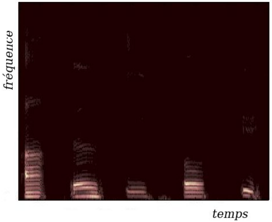
1. compression MP3 : DCT à fenêtre.

   cf cours compression avec perte :
   annulation des coefficients en-dessous d'un certain seuil + modèle psycho-acoustique.

2. compression JPEG.

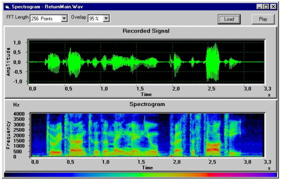
   idem, mais fenêtres décorrélées...

Application 2 : analyse de la parole



$\rightarrow$ *a e i o u*

Application 3 : effets spéciaux sonores

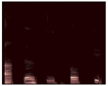


- filtrage, *equalization*
- *vocoder* (voice-encoder)

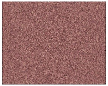
Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Application 4 : débruitage

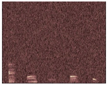
Donnée : signal sonore bruité par un bruit blanc gaussien.
Modélisation : $s(t) = s_0(t) + b(t)$ où $b(t)$ i.i.d.$\sim \mathcal{N}(0, \sigma)$.



spectre de s_0



spectre de b



spectre de s

Deux méthodes de débruitage :

- *linéaire* : filtre passe-bas ($\Leftrightarrow$ convolution en temps) ;
- *non-linéaire* : *e.g.* mise à zéro des coefficients en dessous d'un seuil donné.

Basé sur la remarque : le spectre du signal décroît avec la fréquence et contribue davantage que celui du bruit.

Remarque : bruit non-stationnaire compatible avec STFT.

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Séance 6

1 Limite de l'analyse de Fourier
2 Les fenêtres
- Les fenêtres
- Théorème d'incertitude
3 L'idée de Dennis Gabor
- Transformée de Fourier à fenêtre
- Le cas discret
- Quelques applications
4 Introduction aux ondelettes
- Limite de la STFT
- Transformée continue en ondelettes
- Transformée discrète en ondelettes
5 Conclusion

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Limite de la transformée de Fourier à fenêtre

STFT : analyse des signaux par une sinusoïde de fréquence λ restreinte à une fenêtre translatée en temps de b.

Inconvénient : la taille de la fenêtre est fixée *a priori*.
Problème pour analyser un signal présentant des variations à des échelles très différentes.

C'est en fait le cas de beaucoup de signaux, par exemple :

- modélisation d'une note de musique : attaque, maintien, chute ;
- image présentant des textures ;

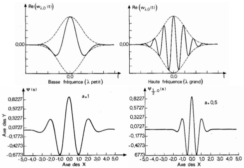
$\rightarrow$ une réponse : la théorie des ondelettes.

Où l'on joue de l'accordéon

Ondelettes / *Wavelets* : géophysicien Jean Morlet (Elf-Aquitaine) + physicien Alex Grossmann, 1984.
À partir de ψ (ondelette-mère) on construit les fonctions :

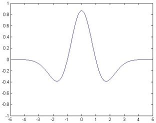
$$\psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad \text{avec } s \neq 0, u \in \mathbb{R}.$$

Comparaison gaborettes / ondelettes : (source : Gasquet-Witomski)

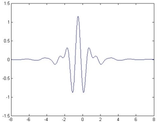


Exemples d'ondelettes-mères

Vérifie les *conditions d'admissibilité*, si possible régulière. . .



Mexican Hat



Ondelette d'Yves Meyer

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Transformée continue en ondelettes

Théorème - Calderòn 1964 / Grossmann Morlet 1984

Soit $\psi \in L^1 \cap L^2$ (ondelette-mère) telle que :

1. $||\psi||_2 = 1$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda = K < +\infty$ (condition d'admissibilité)

Soient $\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ et : $W_f(s,u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi}_{s,u}(t)dt$.

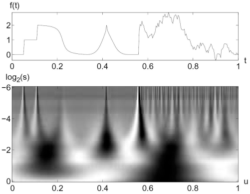
Alors :

1. $\displaystyle\frac{1}{K}\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(s,u)|^2 \frac{dsdu}{s^2} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ (conserv. énergie)
2. $\displaystyle f(t) = \frac{1}{K}\iint_{\mathbb{R}^2} W_f(s,u)\psi_{s,u}(t)\frac{dsdu}{s^2}$ (reconstruction L^2)

Remarque : la condition d'admissibilité implique $\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, soit ψ *oscillante*.

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Exemple de transformée en ondelettes $W_f(s,u)$



source : Mallat.

- échelle s petite $\rightarrow$ singularités "microscopiques".
- échelle s grande $\rightarrow$ singularités "macroscopiques".

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Transformée discrète en ondelettes

Idée : transformée en ondelettes redondante, on doit pouvoir se contenter de garder "moins" de coefficients.

→ on cherche donc des *bases orthonormées d'ondelettes* de L^2 : $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ (où ψ est une ondelette) avec :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k).$$

On a alors

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} W_f(j,k)\psi_{j,k}(t).$$

Autrement écrit :

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \quad \text{où } f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} W_f(j,k)\psi_{j,k}.$$

f_j représente les détails à l'échelle 2^{-j} (ou à la résolution j) du signal f

On peut approcher f par $F_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} f_j$ $(F_n \to f$ dans $L^2)$.

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

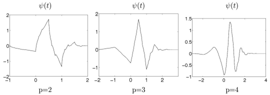
Exemple de bases d'ondelettes orthonormées

1) L'ondelette d'Yves Meyer (1985) fournit une b.o.n.

2) La remarque précédente permet de construire "automatiquement" des b.o.n. d'ondelettes à partir d'*analyses multirésolutions* de L^2.

Dans ce cadre, Ingrid Daubechies (1988) propose des ondelettes :

- à support compact (intérêt : localisation temporelle)
- et à p moments nuls (intérêt : coefficients des échelles fines négligeables là où f est régulier).



source : Mallat.

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Exemples / applications (1)

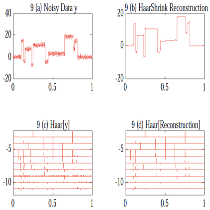
Analyse d'un électrocardiogramme.

(source : http://pagesperso-orange.fr/michel.hubin/physique/signal/chap_si1.htm)

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Exemples / applications (2)

Débruitage, "déclicage".



(source : Donoho & Johnstone *wavelet shrinkage*, 1993)

Exemples / applications (3)

Compression : JPEG 2000.

TIFF
65ko

JPEG
4 ko

JPEG2000
4 ko

Block effect ? Ringing ? Dérive des couleurs ?

Bonne introduction :
`http://en.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000`

Séance 6

1. Limite de l'analyse de Fourier
2. Les fenêtres
   - Les fenêtres
   - Théorème d'incertitude
3. L'idée de Dennis Gabor
   - Transformée de Fourier à fenêtre
   - Le cas discret
   - Quelques applications
4. Introduction aux ondelettes
   - Limite de la STFT
   - Transformée continue en ondelettes
   - Transformée discrète en ondelettes
5. Conclusion

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion

Conclusion

Problème de l'analyse de Fourier "standard" :

- bien adaptée aux signaux stationnaires...
- mais ne permet pas d'obtenir d'information temporelle.

Solution : transformée de Fourier à fenêtre.

Mais :

- compromis précision temporelle / fréquentielle,
- fenêtre d'analyse fixée *a priori*.

"Mieux" : les ondelettes permettent une décomposition multi-échelle.

Initiation au traitement du signal - Séance 6
F. Sur - ENSMN
Limite de l'analyse de Fourier
Les fenêtres
Les fenêtres
Théorème d'incertitude
L'idée de Dennis Gabor
Transformée de Fourier à fenêtre
Le cas discret
Quelques applications
Introduction aux ondelettes
Limite de la STFT
Transformée continue en ondelettes
Transformée discrète en ondelettes
Conclusion