

Thèse de doctorat
Ondelettes et problèmes mal posés : la mesure
du flot optique et l'interpolation irrégulière

Christophe BERNARD

Version finale

R U W m R O I m M u N - S

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance pour mon directeur de thèse Stéphane MALLAT, qui a consacré à l'encadrement de ma thèse un temps et une disponibilité d'esprit considérables, auxquels j'ai été d'autant plus sensible que son emploi du temps est très chargé. J'ai ainsi largement pu profiter de sa grande acuité scientifique et de son enthousiasme indéfectible et communicatif pour le travail de ses étudiants. Je lui suis donc redevable d'avoir pu faire une thèse dans des conditions exceptionnelles.

Je remercie également Jean-Jacques SLOTINE, qui m'a accompagné tout au long de ce travail de thèse, au cours de longues et fructueuses discussions à Paris ou à Boston, où il m'a reçu de nombreuses fois.

Je tiens à remercier Albert BENVENISTE, Patrick BOUTHÉMY et Ronald DEVORE d'avoir accepté la tâche ingrate de lire ma thèse et d'écrire un rapport. Albert COHEN a très tôt manifesté un grand intérêt pour l'ensemble de ma thèse, et a pris la peine de la lire en détail et de me faire part de ses commentaires. Je lui en suis très reconnaissant. Jean SERRA a également montré son intérêt pour les divers volets de mon travail et m'a donné l'occasion de le présenter au centre de morphologie mathématique, dont il est le fondateur.

Je remercie enfin Patrick BOUTHÉMY, Ronald DEVORE et Ingrid DAUBECHIES de m'avoir donné l'occasion de présenter mon travail à différents séminaires qu'ils organisent.

J'ai eu la chance de faire ma thèse au CMAP, un centre de recherches accueillant et vivant, où règne une ambiance conviviale et dynamique. Parmi les artisans de ce bel équilibre, je dois d'abord citer Geo BOLÉAT, d'un abord bourru, mais qui a un cœur d'or, ainsi que Jeanne BAILLEUL, toujours gaie, active et ardente défenseuse de la veuve et de l'orphelin. Je dois également parler de Liliane DOARÉ, pilier du CMAP et de Nathalie LIMONTA, une nouvelle recrue.

Je remercie Jean-Claude NÉDÉLEC, directeur au long cours du centre, qui gère ses troupes avec la bienveillance d'un père de famille. Pierre-Arnaud RAVIART qui a régné sur le CMAP avec une voix de stentor, Vincent GIOVANGIGLI.

Je salue Carl GRAHAM, grand spécialiste de la bible, qui élève heureusement le niveau de la discussion que François JOUVE amène périodiquement au-dessous de la ceinture, Eric BONNETIER, qui se pique d'aimer le bon vin et les bons mots, Marc SCHOENAUER, Pedro FERREIRA, Josselin GARNIER, Aldjia MAZARI, qui m'a spontanément proposé de faire une répétition de soutenance qui m'a été extrêmement utile. Je salue également Habib AMMARI, Kamel HAMDACHE, Toufic ABBOUD, Frédéric NATAF, Robert "Bob" BRIZZI et Geneviève ALLAIN. Je remercie Jean-François COLONNA qui m'a consacré du temps et de la patience pour réaliser un film de présentation, malgré un emploi du temps chargé.

Je salue les autres membres de l'équipe ondelettes, Emmanuel BACRY, Maureen CLERC, Jérôme KALIFA qui vient de convoler en justes noces, Rémi Gribonval, Erwan LE PENNEC, Jérôme FRALEU, Yann Samuelides, ainsi que tous les autres membres du CMAP qui ont ajouté leur pierre à l'harmonie de l'équipe, à savoir Shiraz LATIRI qui nous a souvent conduits, Rita et moi, dans sa shirazmobile, Sofiane OUSSEDIK, Daniel DELAHAYE, Annalisa AMBROSO, Paul SEIGNOUREL, Florence BAILLY, Natacha VIALLE, Rama CONT et ses plaisanteries homéopathiques, Erik BURMÁN et Jonàs RIBBE, Denis BARBIER et Snorre CHRISTIANSEN sans oublier mes collègues de bureau Alain RACINE, Sana BEN HAMIDA et Jean-Philippe AYANIDÈS.

Je dédie cette thèse à Rita, et à mes parents.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	La mesure du mouvement	2
1.1.1	La mesure du mouvement est un problème mal posé	3
1.1.2	Aliasage en temps et localisation de la mesure	4
1.1.3	Plan de la première partie	7
1.2	Interpolation multidimensionnelle irrégulière	8
1.2.1	Choix d'une représentation. Approximation linéaire et non-linéaire	10
1.2.2	Méthode proposée pour construire un interpolant	12
1.2.3	Contrôle a posteriori de la stabilité et régularisation locale	15
2	Les ondelettes	17
2.1	Fréquence locale	17
2.2	Représentations temps–fréquence et temps–échelle	18
2.3	Transformée en ondelettes continue	20
2.4	La transformée en ondelettes discrète	21
2.5	Analyses multi-résolutions	22
2.5.1	Cadre théorique	22
2.5.2	Les bases d'ondelettes	24
2.5.3	Transformée en ondelettes	24
2.5.4	Filtres duaux, ondelettes duales	25
2.5.5	L'algorithme de la transformée en ondelettes rapide	26
2.5.6	Les ondelettes orthogonales	28
2.6	Décroissance des coefficients, régularité et approximation	29
2.7	Création d'ondelettes régulières et choix de filtres	30
2.7.1	Conditions suffisantes dans le cas orthogonal	32
2.7.2	Condition suffisante de régularité	32
1	Mesure du flot optique	37
3	Le flot optique	39
3.1	Estimation différentielle projetée du flot optique	40
3.2	<i>Aliasing</i> temporel et échelle des fonctions de mesure	45

4	Présentation de la méthode	51
4.1	Les ondelettes sont un outil d'analyse multi-échelles naturel	51
4.1.1	Bases et <i>frames</i> d'ondelettes	52
4.1.2	Convergence de l'estimation	53
4.1.3	Résolution de systèmes sur-déterminés	56
4.1.4	Raffinement progressif des mesures	57
4.2	Ondelettes analytiques	59
4.2.1	Stabilité de l'estimation	60
4.2.2	Décentrement de la gamme de déplacements mesurables avec des ondelettes analytiques	64
4.3	Ondelettes en bancs de filtres	67
4.3.1	Ondelettes analytiques en bancs de filtres	68
4.3.2	Conception des filtres	68
5	Preuves de convergence	75
5.1	<i>Frame</i> analytique	75
5.2	Consistance de l'estimation du flot optique	79
5.2.1	Erreur d'approximation d'un flot non uniforme par un flot uniforme	79
5.2.2	Erreur d' <i>aliasing</i>	84
6	Expérimentations numériques. Perspectives.	93
6.1	Expérimentations numériques	93
6.1.1	Coût de calcul	94
6.1.2	Séquences réelles	94
6.1.3	Séquences synthétiques	94
6.1.4	Changement d'illumination	98
6.2	Compression vidéo	100
6.3	Introduction de l'éclairage comme variable explicative supplémentaire	101
6.4	Modèles non constants du flot optique	103
6.4.1	Modèle de projection stéréographique d'éléments plans	103
6.4.2	Cas d'un modèle de caméra à projection orthogonale	105
6.4.3	Estimation d'un flot non localement constant avec des ondelettes	105
A	Bases et <i>frames</i> d'ondelettes dérivées	109
A.1	Ondelettes et filtres dérivés	109
A.2	<i>Frames</i> d'ondelettes dérivées	113
II	Apprentissage et interpolation	119
7	L'apprentissage	121
7.1	Les problèmes d'apprentissage	121
7.1.1	Quelle solution choisir?	121
7.1.2	Quel problème choisir?	122
7.1.3	Mesure d'erreur et fonction objectif	123
7.1.4	Les différentes approches	123

7.2	Les réseaux de neurones	124
7.2.1	Le perceptron multi-couches	124
7.2.2	Capacité d'expression	124
7.2.3	La règle d'apprentissage supervisé	125
7.2.4	Les trois étapes de la conception d'un réseau de neurones	126
7.2.5	Le perceptron de ROSENBLATT	127
7.3	Des ondelettes comme fonctions de transfert neuronales	128
7.4	Le contrôle adaptatif	128
7.4.1	Contrôle adaptatif en dimension finie	129
7.4.2	Apprentissage de fonctions	132
7.5	La régularisation et les fonctions radiales	133
7.5.1	Le problème régularisé	133
7.5.2	Résolution du problème régularisé	134
7.5.3	Noyaux auto-reproduisants de régression	135
7.5.4	Fonctions définies positives	136
7.5.5	Modèle bayésien	137
7.5.6	Limite de l'approche régularisée	139
7.6	Extension à des semi-normes	139
7.6.1	Théorème du représentant	139
7.6.2	Ordre d'approximation	142
7.6.3	Calcul rapide avec des noyaux radiaux	143
7.7	Les machines à vecteurs support de VAPNIK	147
7.7.1	Dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS	148
7.7.2	Majoration de l'erreur d'estimation	149
7.7.3	Mise en œuvre du principe de minimisation de l'erreur structurelle: les machines à vecteurs support	151
8	Approches multi-résolutions	157
8.1	Le choix d'une représentation	157
8.1.1	Approximation linéaire	158
8.1.2	Approximation non-linéaire et espaces de BESOV	159
8.1.3	Structure et approximation en arbres	163
8.1.4	Limites de l'approximation en ondelettes	166
8.1.5	Arbres d'ondelettes d'interpolation	169
8.1.6	Apprentissage pour les réseaux d'ondelettes	171
8.2	Ondelettes d'interpolation et grilles d'approximation	172
8.3	Schéma d'allocation	174
8.3.1	Quasi unicité et existence d'un optimum	175
8.3.2	Schéma d'allocation itératif	176
8.3.3	Comportement asymptotique	178
8.4	Allocation dans une base de SCHAUDER	179
8.4.1	Conditionnement des matrices à diagonale dominante	180
8.4.2	La base de SCHAUDER	181
8.4.3	La relocalisation	182
8.5	Généralisation en dimension supérieure	189

8.5.1	Conditions de stabilité	191
8.5.2	Stabilité de l'interpolation en cas de bon placement relatif	192
8.5.3	Vitesse de convergence de l'approximation	195
8.5.4	Théorèmes d'approximation non uniforme	198
8.6	Exemples	206
8.6.1	Décroissance de l'erreur avec le nombre de points de mesure	206
8.7	Commentaires et perspectives	209
8.7.1	Comparaison avec les autres méthodes	209
8.7.2	Le cas des mesures bruitées	210
8.7.3	Densité de points de mesure non uniforme	211
9	Interpolation incrémentale. Perspectives.	215
9.1	Implémentation incrémentale de l'algorithme d'interpolation	215
9.1.1	Structure d'arbre	216
9.1.2	Calculs de mise à jour des matrices	217
9.2	Contrôle a posteriori de la stabilité	219
9.2.1	Vue d'ensemble	220
9.2.2	Remplacement de mesures	220
9.2.3	Contrôle de croissance	220
9.3	Régularisation partielle	221
9.3.1	Expériences numériques et perspectives	223
B	Ondelettes d'interpolation	227
B.1	Fonctions d'échelle d'interpolation	227
B.2	Ondelettes d'interpolation	228
B.3	Ondelettes de DESLAURIERS–DUBUC	229
B.4	Ondelettes sur l'intervalle	230
B.4.1	Périodisation	230
B.4.2	Ondelettes de bords et bases de fonctions sur l'intervalle	231
B.4.3	Ondelettes d'interpolation sur l'intervalle	232
B.5	Théorèmes d'approximation uniforme	235
B.6	Ondelettes de DESLAURIERS–DUBUC triadiques	236

Tout événement est écrit dans les astres et les phénomènes cycliques de la nature. Il faut chercher ceux de ces phénomènes qui y participent, et dans quelle mesure chacun influe sur l'événement. Cette tâche est difficile, mais possible car le destin de chaque chose est étroitement liée à une conjugaison de ces cycles.

Fu-Hi,
Traité d'astrologie apocryphe,
28^e siècle av JC.

Il résulte [...] que si l'on propose une fonction $f(x)$, dont la valeur est représentée dans un intervalle déterminé, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = X$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus, ou les cosinus, ou les sinus et les cosinus des arcs multiples ou les seuls cosinus des multiples impairs.

Joseph FOURIER,
Théorie analytique de la chaleur,
Chap III, Section VI, Art. 235 (1822).

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse traite deux problèmes distincts qui sont reliés par deux points communs : ce sont deux problèmes mal posés, et pour chacun de ces problèmes nous proposons une solution qui repose sur l'usage d'ondelettes. Le premier problème est celui de la mesure du flot optique. Le deuxième est le problème de l'interpolation à grille irrégulière. On peut donc voir cette thèse comme deux illustrations différentes de la résolution de problèmes mal posés avec des ondelettes.

Qu'est-ce qu'un problème inverse ou mal posé? C'est le problème qui consiste à résoudre une équation

$$Ax = y$$

où A est un opérateur qui n'est pas inversible. Nous considérons ici que A sera un opérateur linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F .

Une méthode générale de résolution de ce type de problème est la régularisation. Elle consiste à reformuler le problème d'inversion comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'adéquation quadratique

$$x = \arg \min_{x'} \|Ax' - y\|^2$$

tout aussi mal posé que le précédent, car la fonctionnelle est positive, mais n'est pas définie. La méthode consiste ensuite à supposer que la solution se trouve dans un espace de HILBERT $\mathcal{H} \subset E$ et à pénaliser la fonctionnelle d'adéquation par un terme supplémentaire dit de régularisation qui est lui coercif.

$$x = \arg \min_{x'} \|Ax' - y\|^2 + \lambda \|x'\|_{\mathcal{H}}^2$$

La fonctionnelle obtenue est donc par construction coercive, et le nouveau problème ainsi construit a une solution unique, pourvu que l'opérateur A soit continu au sens de la norme hilbertienne de \mathcal{H} .

La régularisation est donc un moyen systématique de transformer un problème mal posé en un problème bien posé. Cet avantage a un prix considérable. Régulariser ainsi un problème mal posé revient à faire des hypothèses fortes sur le signal, à savoir que :

- le signal est dans l'espace de HILBERT \mathcal{H}

- la solution du problème est un optimum bayésien qui consiste à voir le signal x comme une réalisation d'un processus aléatoire centré et dont la matrice de covariance est la matrice du produit scalaire qui définit \mathcal{H} .

Ces hypothèses sont parfois difficiles à justifier. Par ailleurs le choix d'un espace de HILBERT \mathcal{H} précis est souvent arbitraire, alors qu'il a une influence déterminante sur la forme de la solution. Dans les deux problèmes que nous allons aborder, nous allons également faire une sorte de régularisation locale. La différence est que la nature de la régularisation que nous allons effectuer ne sera pas fixée à l'avance, mais s'adaptera en fonction des caractéristiques locales de l'information dont nous disposons.

1.1 La mesure du mouvement

Le problème qui fait l'objet de la première partie de la thèse est celui de la mesure du mouvement dans une séquence d'images vidéo. En général, l'évolution de l'image au cours du temps est due principalement à deux facteurs

- des sauts entre deux séquences successives, qui sont rares et ponctuels,
- le déplacement relatif des objets filmés et de la caméra.

Le mouvement relatif des objets et de la caméra est un champ de vecteurs à trois composantes des vitesses des objets filmés dans le référentiel de la caméra, que nous appellerons mouvement réel. La scène est projetée sur le plan du film de la caméra, et nous pouvons donc définir sur ce plan du film un deuxième champ de vitesse qui est le champ de vitesses projeté. On note p l'opérateur de projection (qui peut être linéaire ou projectif). Pour chaque point \mathbf{x} de l'image, qui est le projeté $p(\mathbf{X})$ d'un point réel \mathbf{X} de vitesse \mathbf{V} , le flot optique en \mathbf{x} est alors le vecteur $\mathbf{v} = dp(\mathbf{X})\mathbf{V}$.

L'objet de la mesure du flot optique est d'estimer le flot optique sur la base d'une séquence d'images filmées $I(t; \mathbf{x})$. Ce problème est déjà en soi un problème mal posé. Un deuxième problème est le prolongement naturel de ce premier problème: il consiste à reconstituer le champ de déplacement tridimensionnel à partir du flot optique, mais nous ne l'étudierons pas ici.

La mesure du flot optique a un certain nombre d'applications possibles. Elle peut servir en tant que telle pour faire de la compression de séquences d'images vidéo par compensation de mouvement (prédiction d'images sur la base d'un champ de déplacement). La mesure du flot optique sert également pour l'analyse de scènes: le mouvement apparent des objets d'une scène peut permettre de reconstruire un scène tridimensionnelle si on dispose d'informations supplémentaires sur la nature du mouvement réel. Ces techniques servent donc pour la construction de modèles tridimensionnels d'objets réels (acquisition tridimensionnelle) pour la réalité virtuelle, ou encore en robotique, pour construire une représentation de l'environnement d'un robot qui se déplace.

Une séquence d'images (en noir et blanc) est représentée par une fonction de niveaux de gris $I(t; x_1, x_2)$. Pour mesurer le flot optique, il est courant de faire une hypothèse d'illumination constante. Un point réel visible par la caméra aura la même couleur ou intensité de gris au cours du temps.

La dérivée de cette valeur de gris s'écrit

$$\frac{d}{dt}I(t; \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I$$

et l'hypothèse d'illumination constante se traduit donc par l'équation

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0 \quad (\text{OF})$$

dite équation du flot optique.

Ce mouvement n'est pas toujours mesurable (ni visible par l'œil). Si notamment nous considérons une zone homogène de l'image invariante par translation, plusieurs mouvements différents donneront (au moins localement) la même séquence. Notre problème n'a alors pas de solution unique. C'est le problème *d'ouverture*.

1.1.1 La mesure du mouvement est un problème mal posé

Si on considère l'équation du flot optique donnée ci-dessus, on voit que la valeur du vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)$, un vecteur de dimension supérieure à 1, n'est contrainte que par une unique équation scalaire linéaire. Dans ces conditions, la seule information sur le champ \mathbf{v} que l'on peut extraire est sa composante dans la direction du gradient I , et non pas toutes les composantes du vecteur \mathbf{v} .

Comme le problème n'est pas soluble en l'état, les approches qui ont été proposées par différents auteurs reposent toutes sur une hypothèse supplémentaire faite sur le flot.

La régularisation

Une méthode de régularisation a été proposée en 1980 par HORN et SCHUNCK. Elle consiste à rechercher la solution \mathbf{v} pour un instant t donné comme minimum de la fonctionnelle

$$\mathbf{v} = \arg \min \left(\iint \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I \right)^2 dx_1 dx_2 + \lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 \right)$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ désigne une norme hilbertienne régularisante (par exemple de SOBOLEV). Ceci revient à considérer que la meilleure solution de ce problème est la solution la plus régulière. En pratique, la résolution numérique de ce problème régularisé se fait par inversion d'un système symétrique défini positif dont les inconnues sont toutes les composantes du champ de vecteurs \mathbf{v} à un instant donné. La matrice est très grande (à $2NM$ inconnues si l'image est de taille $N \times M$) et son inversion se fait par une méthode itérative.

Méthode d'appariement

Une autre approche (dite d'appariement par fenêtre ou *block matching*) consiste à chercher une correspondance entre des fenêtres d'images de deux instants consécutifs. Si $W + \{\mathbf{x}_0\}$

est une fenêtre spatiale placée autour du point \mathbf{x}_0 , les méthodes d'appariement consistent à rechercher $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)$ comme le déplacement fini \mathbf{v} tel que l'erreur quadratique

$$\iint_{W+\{\mathbf{x}_0\}} (I(t+1; \mathbf{x} + \mathbf{v}) - I(t; \mathbf{x}))^2 d^2\mathbf{x}$$

soit minimale. Il faut pour cela supposer que le champ de déplacement réel est constant sur un fenêtre $W + \{\mathbf{x}_0\}$. Ce genre de méthode est coûteuse, car la fonctionnelle à minimiser est susceptible d'avoir des minima locaux. Il faut donc rechercher le déplacement qui la minimise dans une gamme de valeurs discrètes $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$.

Spectre spatio-temporel local

Une autre famille d'approches a été proposée sur la base d'observations de ADELSON et BERGEN. Elles consistent à faire une analyse fréquentielle locale sur des portions d'espace-temps de la séquence d'images. Si sur une petite portion d'espace-temps le déplacement est uniforme :

$$I(t; x_1, x_2) = P(x_1 - v_1 t, x_2 - v_2 t)$$

la transformée de FOURIER de cette portion est une nappe de DIRAC pondérée dont le support est un plan orthogonal à la vitesse :

$$\hat{I}(\tau; \xi_1, \xi_2) \propto \hat{P}(\xi_1, \xi_2) \delta(v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \tau)$$

En identifiant l'inclinaison du plan d'équation $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \tau = 0$, on peut retrouver les composantes (v_1, v_2) du vecteur vitesse. Des variantes de ces méthodes existent, suivant que le module ou la phase de la sortie des filtres spatio-temporels sont utilisés. Ces méthodes reposent sur l'hypothèse que le flot optique est constant sur des portions spatio-temporelles parallélépipédiques de la séquence d'image.

Méthode différentielle filtrée

WEBER et MALIK ont proposé d'appliquer l'équation du flot optique non pas à l'image I , mais à l'image filtrée avec différents filtres spatio-temporels $f_n(\mathbf{x}, t)$. Si on peut faire l'hypothèse que le flot optique est constant sur le support d'un filtre f_n , alors on peut écrire

$$I_n(\mathbf{x}, t) = I * f_n(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial I_n}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I_n(\mathbf{x}, t) = 0 \quad n = 1 \dots N$$

et obtenir ainsi un jeu de N équations soluble par la méthode des moindres carrés.

1.1.2 Aliasage en temps et localisation de la mesure

En pratique, les séquences d'images vidéo sont échantillonnées suivant les trois variables x_1 , x_2 et t . Comme l'image est échantillonnée en temps, et n'est connue que sur des intervalles de temps discrets, on ne mesure en pratique pas des vitesses, mais des déplacements finis.

C'est ce qu'on appelle l'aliasage en temps. La plupart des méthodes décrites ci-dessus sont des méthodes locales. Pour estimer le déplacement en un point donné \mathbf{x}_0 , elles ne prennent en compte des valeurs de l'image que sur une fenêtre spatiale $W + \{\mathbf{x}_0\}$, où W est

- le support de l'analyse de FOURIER locale pour les méthodes spatiotemporelles,
- le support des filtres pour la méthode de WEBER et MALIK,
- le support des filtres de dérivation spatiale pour la méthode de HORN et SCHUNCK (qui est elle aussi sensible à l'aliasage en temps, malgré sa formulation globale).

Si le déplacement $|\mathbf{d}|$ entre deux images consécutives est plus grand que les dimensions de la fenêtre W , alors les portions d'image considérées qui sont

$$\begin{array}{ll} [I(t; \mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in W} & \text{pour le temps } t \\ [I(t+1; \mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in W} = [I(t; \mathbf{x} - \mathbf{d})]_{\mathbf{x} \in W} & \text{pour le temps } t+1 \end{array}$$

correspondent à des portions *disjointes* de l'image d'origine $I(t)$, et ne permettent pas d'identifier le déplacement sous-jacent. Dans les méthodes d'appariement, où la fenêtre est mobile, ce problème apparaît également, car la complexité algorithmique de la méthode est proportionnelle au nombre des déplacements possibles parmi lesquels on recherche le vecteur \mathbf{v} et la gamme des déplacements explorée doit donc être limitée. L'aliasage en temps limite donc la précision de la mesure du flot optique en bornant la gamme des vitesses mesurables.

À l'inverse, on ne peut pas travailler avec des fenêtres de l'image indéfiniment grandes, car les mesures obtenues sont alors très corrélées spatialement (très lissées). On doit donc trouver un compromis entre deux contraintes antagonistes :

- la contrainte d'aliasage, qui impose que la mesure soit faite sur des fenêtres de taille suffisamment grande en comparaison du déplacement entre deux images consécutives
- le besoin d'avoir un champ de déplacement à la plus haute résolution spatiale possible, ce qui impose d'avoir des fenêtres les plus petites possibles.

Approches multi-résolutions

Cette constatation a motivé le choix de variantes multi-résolutions dans les méthodes de mesure du flot optique. Elles consistent généralement à effectuer une mesure de déplacement sur la base de fenêtres de différentes tailles, et à combiner les mesures obtenues à ces différentes échelles par des techniques d'arbitrage ou de raffinement.

La méthode proposée par WEBER et MALIK est une méthode multi-résolutions. Les filtres f_n sont dilatés sur une gamme d'échelle géométrique de raison 1,8. WEBER et MALIK obtiennent ainsi des cartes de déplacement plus ou moins lissées suivant les échelles de dilatation des filtres, et, par une technique d'arbitrage, sélectionnent les mesures les plus fines pour lesquelles l'erreur d'aliasage soit acceptable.

Étienne MÉMIN et Patrick PÉREZ ont décrit une variante multirésolution de la méthode de HORN et SCHUNCK. De plus, les fonctionnelles de régularisation et d'appariement qu'ils utilisent ne sont plus convexes, afin que les discontinuités du flot optiques soient tolérées. Leur méthode est très précise (avec une erreur d'estimation d'environ 20% inférieure à celle décrite dans cette thèse), mais avec une structure de calcul plus complexe et un temps de calcul plus élevé.

Les méthodes d'appariement par fenêtres ont aussi une déclinaison multi-résolutions. Les appariements sont effectués sur des images filtrées à différentes échelles (par une pyramide laplacienne, par exemple). Des mesures de déplacements à grande échelles sont réutilisées à une échelle plus fine pour choisir une gamme de déplacements \mathcal{G} centrée autour du déplacement mesuré à une échelle plus grossière. Le gain de l'approche multi-résolutions est de réduire le coût de calcul pour une gamme de déplacements totale fixée, ou encore d'augmenter la gamme de déplacements possibles pour un coût de calcul fixé.

Notre approche : méthode différentielle projetée

L'approche que nous proposons et défendons dans cette thèse s'apparente à la méthode de WEBER et MALIK. Elle consiste à choisir comme filtres spatiaux des ondelettes. En partant d'une famille de N ondelettes mères $(\psi^n)_{n=1\dots N}$, nous construisons une famille indexée par $n \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$

$$\psi_{j\mathbf{k}}^n = 2^j \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

De la même manière que WEBER et MALIK, nous projetons l'équation du flot optique sur les différentes ondelettes

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle = 0$$

Si nous supposons que le déplacement \mathbf{v} est uniforme sur le support des ondelettes $\psi_{j\mathbf{k}}^n$ pour $n = 1 \dots N$ (hypothèse dite de séparation d'échelles) ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \langle \nabla I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle = 0$$

et après une intégration par parties

$$\frac{\partial \langle I, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle}{\partial t} = v_1 \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle + v_2 \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle$$

Pour des indices j et \mathbf{k} donnés, nous avons donc un système de N équations dont les inconnues sont v_1 et v_2 . Ce système est cette fois surdéterminé, et nous pouvons en extraire une solution unique (de régression). v_1 et v_2 désignent la valeur du déplacement uniforme sur un domaine centré en $2^{-j}\mathbf{k}$ et de rayon 2^{-j} . Jusque là, cette méthode est proche de celle de WEBER et MALIK.

Elle a cependant des avantages considérables :

1. l'algorithme de calcul est extrêmement rapide. Le temps de calcul pour estimer le flot optique entre deux images successives est de l'ordre de nombre de pixels de l'image. En effet, les différents systèmes construits sont moins nombreux à échelle grossière qu'à échelle fine. Nous tirons ainsi parti de la corrélation des estimations obtenues à échelle grossière en ne produisant qu'une carte de déplacement sous-échantillonnée. Enfin, tous les coefficients du système ci-dessus sont des coefficients d'ondelettes de l'image et de sa dérivée temporelle. Ces coefficients d'ondelettes peuvent être calculés par des cascades de filtrages et de sous-échantillonnages en temps proportionnel au nombre de points de l'image.

2. l'algorithme est prouvable. Sous certaines hypothèses (de régularité du flot et de richesse de la texture qui se déplace), on peut montrer que l'estimation de flot donne une estimation asymptotiquement exacte du flot optique.
3. nous montrons enfin comment notre approche peut être adaptée à différents modèles locaux du flot optique. Nous montrons notamment en détail comment mesurer localement les changements d'illumination et ainsi obtenir une mesure du flot optique très robuste vis-à-vis de ces changements.

1.1.3 Plan de la première partie

Dans le chapitre 2, nous introduisons quelques notions sur les ondelettes qui nous serviront dans la suite de la thèse. Dans le chapitre 3, nous détaillons les spécificités du problème de la mesure du flot optique. Nous décrivons dans le chapitre 4 notre méthode en la comparant aux méthodes existantes. Nous décrivons notamment plus en détail les diverses approches possibles auxquelles nous pouvons recourir pour combiner les mesures obtenues aux différentes échelles. Quelle que soit l'approche choisie, notre algorithme complet ne requiert qu'un nombre d'opérations de l'ordre du nombre de pixels de l'image. Il est de ce point de vue plus rapide que celui de WEBER et MALIK. Cette méthode de calcul a des points communs avec deux autres méthodes : une première développée par SIMONCELLI, et une deuxième par MAGAREY et KINGSBURY. Nous détaillerons les différences entre notre méthode et ces deux autres méthodes dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 5, nous prouvons la convergence de notre schéma d'estimation. Plus précisément :

- si le conditionnement des matrices de mesure construites est suffisant (ce qui revient à dire que l'image contient suffisamment de détails pour extraire un déplacement visuel)
- si le champ de déplacement est suffisamment régulier
- si l'image est d'un degré de régularité exact fixé (LIPSCHITZ- α) en \mathbf{x}_0

alors l'erreur d'estimation du mouvement tend asymptotiquement vers 0 quand

- l'échelle de mesure 2^{-j} tend vers 0
- l'intervalle de temps entre deux images successives tend vers 0 en étant asymptotiquement négligeable devant l'échelle de mesure (dominé par un certain $2^{-(1+\theta)j}$).

Ce résultat est important car il montre que dans certains cas, on peut estimer asymptotiquement sans erreur le déplacement qui a permis d'obtenir une image en fonction de la précédente, alors qu'a priori ce problème était mal posé. « Dans certains cas » signifie que l'image déplacée doit être suffisamment riche en détails pour que le déplacement soit mesurable. Cette condition se conçoit bien dans la mesure où il n'est clairement pas possible d'estimer localement le déplacement d'un motif qui est par exemple uniforme ou invariant par translation.

Le chapitre 6 contient des expérimentations numériques qui montrent que notre méthode soutient la comparaison avec les méthodes concurrentes, et permet de mesurer les changements locaux d'illumination tout en étant plus robuste vis-à-vis de ces changements et plus rapide. Ce chapitre aborde aussi l'application de la mesure du mouvement à la compression vidéo (par le biais de projets d'élèves encadrés au cours de cette thèse), et propose des extensions et d'autres applications de cette méthode.

1.2 Interpolation multidimensionnelle irrégulière

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons au problème de l'interpolation de fonctions sur la base de points placés irrégulièrement, parfois aussi appelé problème d'apprentissage. Nous cherchons une fonction f définie de E vers F qui passe par un nombre donné N de points de mesure $(x_n, y_n)_{n=1\dots N}$ où $x_n \in E$ et $y_n \in F$:

$$f(x_n) = y_n \quad \text{pour tout } n = 1 \dots N$$

Quand l'espace fonctionnel $\mathcal{H} \subset F^E$ dans lequel nous cherchons l'interpolant est de dimension infinie, ce problème est mal posé, car la donnée d'un nombre fini de points de mesure d'une fonction ne permet en aucun cas de la déterminer entièrement.

De telles méthodes de représentation de fonctions sur la base de mesures ponctuelles ont des applications très diverses. Nous n'en citerons que quelques unes, comme la simulation de systèmes dynamiques complexes, la reconstruction de surfaces en synthèse d'images et plus particulièrement en imagerie médicale, la résolution d'équations aux dérivées partielles, etc.

Ces problèmes sont très différents suivant la dimension de l'espace de départ E dans lequel évoluent les points x_n . Quand cette dimension est petite (de l'ordre de quelques unités) il s'agit d'approximation de fonction ou d'interpolation. Quand à l'inverse la dimension de l'espace est très élevée, il s'agit de problèmes d'apprentissage, pour lesquels les approches les plus répandues sont les réseaux de neurones et les réseaux de fonctions radiales. Nous passons en revue ces quelques méthodes dans le chapitre 7.

La régularisation

Une approche de régularisation consiste à prendre comme solution de ce problème la fonction f dans un espace de HILBERT \mathcal{H} qui satisfait les contraintes interpolatrices et qui est de norme $\|f\|_{\mathcal{H}}$ minimale. La solution s'écrit alors sous la forme d'une combinaison linéaire de noyaux d'interpolation

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n K(x_n, x)$$

Quand la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est invariante par translation et isotrope, les noyaux $K(x_n, x)$ s'écrivent sous la forme

$$K(x_n, x) = g(\|x_n - x\|)$$

et nous obtenons des réseaux de fonctions radiales.

Cette méthode a un grand nombre d'avantages

- le problème qui définit f est bien posé, et la solution dépend de manière continue des mesures y_n ;
- la complexité de la solution f est bornée (par le nombre de mesures) ;
- ce cadre de calcul s'applique quelle que soit la dimension de l'espace de départ E , grâce aux théorèmes de SCHOENBERG et MICCHELLI.

- ce modèle a une justification bayésienne : la solution f régularisée est un maximum de densité a posteriori, si on fait l'hypothèse statistique a priori sur f suivante : f est une réalisation d'un processus aléatoire gaussien centré de covariance $E(f(x)f(x')) = K(x, x')$, et les mesures sont perturbées par des réalisations indépendantes d'un bruit gaussien centré de variance fixée.

Cette méthode a aussi quelques inconvénients :

- En l'état, la solution f n'est pas représentée sous une forme très compacte. Si les points sont placés avec une densité uniforme, les coefficients c_n ont des ordres de grandeur comparables. La complexité de la représentation de la solution f croît en pratique exactement comme le nombre de points de mesure. De plus, quand le nombre de fonctions de base croît, le coût de calcul pour évaluer la valeur de la fonction apprise en un point augmente presque proportionnellement (parce que le vecteur $[K(x, x_n)]_{n=1\dots N}$ est plein).
- le modèle de régularisation et l'hypothèse statistique sous-jacente sur f ont une influence déterminante sur la forme de la solution. Cette hypothèse détermine également la vitesse de convergence de la méthode. Si \mathcal{H} est par exemple un espace de SOBOLEV H^s , l'ordre de convergence de l'approximation par des fonctions radiales sera s si la fonction f est plus régulière, et la méthode sera instable si la fonction à apprendre est d'un ordre de régularité inférieur. On a donc intérêt à prédire au mieux la régularité de la fonction inconnue. Ce cadre d'approximation ne permet pas de faire une interpolation où l'ordre d'approximation dépend localement de la régularité de la fonction à apprendre.

Récemment, les travaux de VAPNIK sur les machines à vecteurs support ont permis une amélioration considérable des réseaux de fonctions radiales. Elles permettent de sélectionner parmi les fonctions de base le sous-ensemble de celles qui sont les plus pertinentes pour représenter une fonction. Ces méthodes s'appuient sur des résultats théoriques de VAPNIK et CHERVONENKIS qui ont proposé une mesure explicite de la capacité de généralisation d'une famille de fonctions approchantes.

Par ailleurs, des travaux de BEATSON et NEWSAM, inspirés de travaux de GREENGARD et ROKHLIN permettent d'effectuer rapidement certains calculs sur des développements en réseaux de fonctions radiales (méthodes multipolaires).

Néanmoins, les décompositions en fonctions radiales souffrent de quelques défauts intrinsèques que ces derniers raffinements n'effacent pas, comme leur manque d'adaptativité dû à une hypothèse a priori sur la fonction inconnue qui est très forte.

Méthodes de maillage irrégulier

Les méthodes de triangulation sont utilisées pour construire des interpolations linéaires par morceaux de fonctions sur la base d'échantillons ponctuels. NIRA DYN *et coll.* ont étudié des méthodes de triangulation dans lesquelles le maillage s'adapte en fonction des valeurs de la fonction à estimer. La triangulation est modifiée pour réduire la taille de la représentation sans réduire significativement la précision d'approximation.

DAUBECHIES, GUSKOV et SWELDENS ont proposé des méthode d'interpolation sur grille irrégulière d'ordre supérieur à 2.

La difficulté de ces approches de maillage réside dans la triangulation qui devient formellement complexe quand la dimension croît, et dans les contraintes sur la géométrie des triangles qui deviennent difficiles à gérer quand l'ordre d'approximation augmente.

Les réseaux de neurones

Un réseau de neurones est le suivant : on choisit une classe de fonctions paramétrée $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ qui se construisent par combinaison de fonction élémentaires (les neurones) et qui sont en général assez riches. Les paramètres α sont les coefficients synaptiques à ajuster. Le réglage de ces coefficients se fait par une méthode de gradient

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (y_n - f(x_n)) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_n)$$

La dépendance de la sortie $f_\alpha(x)$ en fonction des paramètres α étant complexe et non linéaire, rien ne garantit qu'on peut atteindre un minimum absolu d'erreur d'estimation.

Les réseaux de neurones à une couche ont été largement étudiés. Des auteurs ont donné des résultats de densité (CYBENKO) ou des ordres d'approximation (BARRON). Des variantes avec des fonctions de transfert en ondelettes ont également été proposées (PATI et KRISHNA-PRASAD, ZHANG et BENVENISTE, CANDÈS et DONOHO) et sont décrits plus en détail dans le chapitre 7.

1.2.1 Choix d'une représentation. Approximation linéaire et non-linéaire

Notre démarche, que nous décrivons en détail dans le chapitre 8, est basée sur le choix d'un mode de représentation des fonctions à estimer. Les fonctions que nous utilisons pour estimer la fonction inconnue sont des combinaisons linéaires finies de fonctions de base d'une base \mathcal{G} . Par ce premier choix, nous prenons une voie analogue aux méthodes de régularisation et aux méthodes de maillage, mais différente des réseaux de neurones multi-couches.

Le choix de la famille de fonctions de base \mathcal{G} est un point crucial et est lié à l'hypothèse faite a priori sur la régularité de la fonction à estimer : les fonctions parmi lesquelles la fonction à apprendre est susceptible de se trouver doivent être approchées avec une erreur faible sur une sous famille de \mathcal{G} de cardinal fixé.

L'approximation avec des sous-familles d'une base peut se faire de deux manières différentes : par approximation linéaire ou non linéaire.

Approximation linéaire Les méthodes de régularisation sont basées sur l'hypothèse que les fonctions à estimer sont dans un espace de SOBOLEV. Des fonctions d'un espace de SOBOLEV $W^s([0, 2\pi])$ sont par exemple représentées de manière économique par un développement en série de FOURIER tronqué. Si on définit la base de FOURIER

$$g_m(x) = e^{imx}$$

une bonne approximation d'une fonction de W^s à $2N + 1$ coefficients est

$$f_{2N+1} = \sum_{m=-N}^N \langle f, g_m \rangle g_m$$

Si les coefficients ont une décroissance en $|m|^{-s}$, i.e.

$$|\langle f, g_m \rangle| \leq A|m|^{-s}$$

ce qui est par exemple le cas si $f \in W^s$, alors l'erreur d'approximation a la décroissance suivante

$$\|f_N - f\|_{L_2} = \mathcal{O}(N^{1/2-s})$$

Les fonctions de FOURIER sont donc de bonnes fonctions de base pour représenter des fonctions de régularité uniforme (SOBOLEV). Ce choix de fonction ne dépend pas de l'indice de régularité s choisi.

Cette approximation à $2N + 1$ termes est une approximation linéaire, car on choisit systématiquement les mêmes $2N + 1$ coefficients pour un nombre N fixé, et que l'approximation de la fonction f n'est rien d'autre qu'une projection de cette fonction sur un sous-espace.

Approximation non linéaire Une autre approche consiste à effectuer un choix des N coefficients qui dépend de la fonction f à représenter. L'approximation f_N ne dépend plus linéairement de la fonction f , puisqu'elle est obtenue par projection de f sur un sous-espace qui dépend de f . C'est ce qu'on appelle de l'approximation non linéaire. Si la famille \mathcal{G} est une base orthogonale, la meilleure approximation en norme L_2 dans \mathcal{G} est celle obtenue en sélectionnant les N plus grands coefficients de la décomposition de f dans \mathcal{G} .

Supposons que \mathcal{G} soit une base hilbertienne. Les fonctions qui sont bien approchées de cette manière sont celles dont la décomposition sur la base \mathcal{G} est creuse, c'est à dire que la décomposition contient peu de coefficients importants et beaucoup de coefficients négligeables. En termes mathématiques, il faut que si les fonctions de base g_m sont réordonnées en (g_{m_k}) de telle manière que la suite des modules de coefficients $|\langle f, g_{m_k} \rangle|$ soit décroissante, alors la décroissance des termes réordonnés est de la nature suivante :

$$|\langle f, g_{m_k} \rangle| \leq Ak^{-s} \tag{1.1}$$

Dans ce cas, la décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire sur N termes est

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \langle f, g_{m_k} \rangle g_{m_k} \right\|_{L_2} = \mathcal{O}(N^{1/2-s})$$

On peut montrer que si pour une fonction donnée f , l'erreur d'approximation non-linéaire est de cet ordre, alors ses coefficients réordonnés vérifient également (1.1).

L'approximation non-linéaire permet d'approcher efficacement des classes de fonctions plus larges que l'approximation linéaire. Si nous prenons une base d'ondelettes orthogonale

$$\psi_{j\mathbf{k}}^n = 2^{dj/2} \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

les classes de fonctions bien approchées par approximation non-linéaire sont les classes de BESOV. Ces classes sont plus riches que les classes de SOBOLEV, parce qu'elles contiennent également des fonctions qui peuvent avoir des singularités.

Structure d'arbre Une approximation non-linéaire ne peut pas en pratique être réalisée sous sa forme la plus générale, car il n'est pas possible de parcourir tous les vecteurs de base, et un codage d'une approximation non linéaire inclut également le codage des indices des vecteurs de base retenus. Si aucune structure n'est imposée, les codes correspondants peuvent être arbitrairement grands.

Pour cette raison, l'approximation non linéaire sur des bases d'ondelettes utilise parfois une structure d'arbre. Une ondelette à une échelle j a 2^d fils (pour des ondelettes à d variables) qui sont d'échelle $j + 1$ et qui sont placées en des positions proches.

Cette construction est motivée par les considérations suivantes

- pour des fonctions f régulières par morceaux, un coefficient d'ondelette est en généralement grand seulement si le coefficient de l'ondelette parente l'est aussi.
- selon un théorème prouvé par COHEN, DEVORE *et coll.*, restreindre le choix de N coefficients à des jeux de coefficients qui constituent des sous-arbres de l'arbre des coefficients d'ondelettes n'est pas très coûteux: la nouvelle classe d'approximation ainsi obtenue est incluse dans un espace de BESOV aux indices arbitrairement proches de l'espace de BESOV original.

1.2.2 Méthode proposée pour construire un interpolant

La méthode de construction d'un interpolant que nous proposons est la suivante. Nous recherchons l'interpolant $f_{\mathcal{X}}$ d'une fonction f sur la base de mesures $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$ comme combinaison linéaire d'une sous-famille d'ondelettes de la base qui constitue un sous-arbre (ou presque) de l'arbre des coefficients d'ondelettes :

$$f_{\mathcal{X}} = \sum_{(j, \mathbf{k}, s) \in T} c_{j\mathbf{k}}^s \psi_{j\mathbf{k}}^s$$

Les coefficients d'ondelettes sont calculés par inversion d'un système de contraintes interpolatrices :

$$\sum_{(j, \mathbf{k}, n) \in T} c_{j\mathbf{k}}^n \psi_{j\mathbf{k}}^n(x_m) = y_m \quad m = 1 \dots$$

Nous décrivons plusieurs méthodes toutes composées de trois étapes.

Allocation La première étape consiste à choisir une sous-famille d'une base d'ondelettes en construisant une correspondance entre les points de mesure et les ondelettes. La méthode utilisée pour cela est appelée *allocation*. Elle fournit pour un jeu de n mesures un choix d'un sous-ensemble de n ondelettes de la base.

Contrôle de stabilité La deuxième étape a pour objet de modifier ce choix initial pour obtenir un système linéaire de contraintes d'interpolation *stable*. Elle peut être menée de plusieurs manières différentes. Dans le chapitre 8, nous décrivons une règle de sélection

des paires ondelette/mesure obtenues par un critère géométrique dit de *bon placement relatif* (BPR). Dans le chapitre suivant, nous décrivons deux autres approches dites de *contrôle de stabilité a posteriori* et de *régularisation locale*.

Inversion du système La troisième étape consiste simplement à résoudre le système linéaire des contraintes d'interpolation.

La première étape du choix des coefficients d'ondelettes que nous décrivons dans la suite repose exclusivement sur des critères géométriques (de positions relatives des points de mesure \mathbf{x} et des centres des ondelettes $2^{-j}\mathbf{k}$). Nous l'appelons « méthode d'allocation » parce qu'elle repose sur la construction d'une correspondance biunivoque entre les mesures et les ondelettes choisies.

La méthode d'allocation

La méthode d'allocation a pour fonction de sélectionner un sous-famille de N d'une base d'ondelettes pour un jeu de N points de mesure. Elle consiste à placer des mesures dans l'arbre des ondelettes par une descente d'arbre guidée par les position relatives des ondelettes et de la mesure à placer.

Ce choix se justifie de diverses manières. Tout d'abord, on privilégie ainsi un placement de chaque mesure le plus près possible du centre de l'ondelette à laquelle elle est allouée. Par ailleurs, des ondelettes de haute résolution ne seront sélectionnées qu'aux endroits où la densité de points de mesure est suffisante, ce qui paraît naturel.

La définition exacte de ce schéma et ses propriétés (existence d'un critère d'optimalité pour définir une meilleure allocation qui est presque unique, etc.) sont données dans la section 8.3.

Le contrôle de stabilité par bon placement relatif (BPR) : propriétés de convergence

Avec un schéma d'allocation, on peut construire un système de contraintes linéaires sur un jeu de coefficients choisis qui a autant d'inconnues que de contraintes. Cependant, ce procédé ne garantit pas à lui seul que le problème d'interpolation (c'est à dire le système linéaire des contraintes) a une solution unique.

Nous proposons alors un critère purement géométrique qui sélectionne un sous-ensemble de paires ondelette/mesure : le critère de bon placement relatif. Ce critère est facile à vérifier en pratique, et cette opération de sélection prend au plus $\mathcal{O}(N)$ opérations.

L'algorithme composé des trois étapes ci-dessus est alors convergent, et nous sommes de plus en mesure de fournir des estimations relativement fines de la vitesse de convergence. On définit la maille maximale h de l'ensemble \mathcal{X} des points de mesure dans un domaine borné D par

$$h = \max_{x \in D} \min_{n=1 \dots N} |x_n - x|$$

on est alors en mesure de prouver les résultats suivants.

Stabilité L'interpolant $f_{\mathcal{X}}$ obtenu par interpolation sur des échantillons $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$ vérifie l'inégalité de stabilité suivante :

$$\|f_{\mathcal{X}}\|_{\infty} \leq M \|f\|_{\infty}$$

Ce résultat de stabilité est le résultat central de cette analyse. Les estimations de vitesses de convergence en sont une conséquence relativement immédiate.

Vitesse de convergence Si une fonction f est uniformément LIPSCHITZ- α et que les ondelettes utilisées ont β moments nuls, on a la borne d'erreur suivante :

$$\|f_{\mathcal{X}} - f\|_{\infty} \leq Mh^{\min(\alpha, \beta)}$$

On peut même montrer que si f est seulement continue, alors on a

$$\|f_{\mathcal{X}} - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

Cette méthode d'approximation n'échoue pas quand la fonction f est trop peu régulière, ce en quoi cette approche diffère donc de la régularisation. Pour la régularisation, si β est l'ordre d'approximation du schéma, la convergence n'a lieu que si $\beta < \alpha$.

Bon conditionnement On peut définir la distance de séparation de l'ensemble des points de mesure

$$q = \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

Alors, la norme de la matrice inverse du système est majorée par un multiple de $|\log q|$. Dans le cas de la régularisation, la majoration est de la forme $q^{-\beta}$, c'est à dire que la matrice obtenue est sensiblement plus mal conditionnée. Il faut aussi noter que dans notre cas, la matrice du système est creuse.

Approximation adaptative Si la fonction f a un degré de régularité non uniforme, et qu'elle est par exemple uniformément LIPSCHITZ- α , sauf sur le support S d'une singularité dans un voisinage de laquelle est LIPSCHITZ- β , avec $\beta < \alpha$, on a alors la majoration locale d'erreur

$$|f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq Mh^{\alpha} + M'h^{\beta} e^{-M''d(\mathbf{x}, S)/h}$$

où $d(\mathbf{x}, S)$ désigne la distance du point \mathbf{x} à l'ensemble S . Ceci signifie que l'influence néfaste d'une singularité sur le taux de convergence est locale (décroissante exponentiellement, et d'autant plus vite que la maille maximale est petite).

Approches incrémentales

Dans certaines situations, on peut vouloir tout à la fois demander au réseau construit d'affiner sa représentation de la fonction estimée, sur la base de nouvelles mesures, tout en l'utilisant pour faire de la prédiction. Ce genre d'utilisation trouve son intérêt dans des applications de temps réel, comme le contrôle.

L'algorithme d'allocation est incrémental, et les matrices des systèmes mis en jeu étant creuses, on peut réaliser un schéma d'interpolation incrémental dont chaque itération aura un temps d'exécution court. Le coût de calcul à chaque étape est de l'ordre de $(\log N)^2$ où N est le nombre de mesures.

1.2.3 Contrôle a posteriori de la stabilité et régularisation locale

L'inconvénient de l'approche basée sur le critère de sélection BPR est que certaines mesures sont conservées et d'autres sont rejetées par l'algorithme. Le taux de mesures rejetées augmente avec la dimensionalité de l'espace. De plus, si les points de mesure sont placés dans une sous-variété d'intérieur vide du domaine de prédiction, cette approche échoue, et aucune convergence ne peut être prouvée. Pour cette raison, nous avons ébauché deux autres approches où le critère de contrôle de stabilité n'est plus le critère BPR. La première consiste à effectuer un *contrôle a posteriori* de la stabilité du système, et la deuxième consiste à faire de la *régularisation locale*.

Avec la description d'une version incrémentale de la méthode d'interpolation basée sur la sélection BPR, la description de ces deux autres approches est faite dans le chapitre un peu prospectif 9.1. Des exemples d'expérimentations numériques sont donnés. Leur stabilité est en l'état insuffisante mais nous indiquons comment nous pensons remédier à leur défauts de jeunesse.

Chapitre 2

Les ondelettes

Résumé

L'objet de ce premier chapitre est de présenter les ondelettes que nous allons utiliser dans la suite de ce travail. Nous les situons dans le panorama plus large de l'analyse temps-fréquence, puis nous rappellerons leurs propriétés fondamentales.

2.1 Fréquence locale

Les ondelettes ont été introduites il y a presque 50 ans pour combler une lacune entre deux modes extrêmes de représentation du signal : la représentation d'une fonction par son graphe classique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ce qui correspond à une décomposition sur la base continue des distributions de DIRAC :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t - u)du$$

et la représentation dans la base de FOURIER :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

La première représentation donne une information précise en temps : la valeur $f(t)$ indique l'intensité du signal au temps t . En revanche l'information fréquentielle est nulle. La valeur en un point de f ne donne aucune information sur le « contenu fréquentiel » du signal f . À l'inverse, la représentation de FOURIER donne une information très précise en fréquence, mais ne donne aucune information temporelle. Pour prendre une analogie musicale, supposons que la courbe f représente un son. La représentation temporelle f permet de lire la localisation temporelle du signal, c'est-à-dire : ici on entend un son, là on n'entend rien, sans que l'on puisse savoir quelle est la hauteur du son, ou bien les notes qui composent un accord. En revanche, la représentation fréquentielle permet de dire : cet air de musique contient un la, un si, un ré ♭ et pas de sol, mais cette représentation ne permet de dire quand ces notes (de durée finie) sont jouées.

Naturellement, chacune de ces représentations contient les informations de l'autre, puisque la transformation de FOURIER permet de passer de l'une à l'autre. Néanmoins, à chaque fois, seul un type d'information est explicitée.

On peut reformuler les observations ci-dessus en disant que les distributions $\delta(\cdot - t)$ sont très localisées en espace et très peu en fréquence, et qu'à l'inverse les $t \mapsto e^{i\omega t}$ ont des résolutions spatiale et fréquentielle respectivement nulle et infinie. La question qui vient naturellement est la suivante : existe-t-il une représentation dans laquelle on puisse lire une information mixte, comme « à tel instant, on entend un la et un do »? MORLET et GABOR ont cherché à concevoir des fonctions de base qui se situent à mi-chemin entre ces extrêmes, c'est-à-dire qui ont à la fois une bonne localisation fréquentielle et une bonne localisation spatiale.

Une limite théorique dans cette perspective est bien connue : c'est l'inégalité de HEISENBERG. Soit une fonction de base f , qu'on suppose de norme L_2 égale à 1 :

$$\int |f(t)|^2 dt = 1.$$

On définit le centre $c(f)$ et la largeur $\Delta(f)$ d'une telle fonction par

$$c(f) = \int t|f(t)|^2 dt$$

$$\Delta(f) = \sqrt{\int (t - c(f))^2 |f(t)|^2 dt}$$

L'inégalité de HEISENBERG est une inégalité fondamentale qui s'écrit pour toute fonction f de norme 1 :

$$\Delta(f)\Delta(\hat{f}) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{H})$$

Si on appelle largeur fréquentielle d'une fonction f la largeur de sa transformée de FOURIER \hat{f} , cette inégalité interdit donc d'avoir une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petites que l'on veut.

On connaît également les fonctions qui réalisent le minimum de cette limite théorique : ce sont les fonctions gaussiennes translatées et modulées :

$$Ae^{-(t-t_0)^2/2\Delta t^2} e^{i\omega_0 t}$$

où A est un coefficient de normalisation tel que la fonction ait une norme L_2 égale à 1, qui dépend de Δt . Pour de telles fonctions, et seulement pour ces fonctions-là, l'inégalité (H) devient une égalité. Ces fonctions ont été appelées ondelettes de GABOR.

2.2 Représentations temps-fréquence et temps-échelle_____

À une telle fonction, on associe un pavé temps-fréquence, c'est-à-dire un rectangle dans le plan (t, ω) centré en $(c(f), c(\hat{f}))$ et de dimensions $\Delta(f) \times \Delta(\hat{f})$. Ce pavé est une représentation

intuitive de la couverture en temps et en fréquence d'une fonction. On associe également à une base un pavage du plan temps-fréquence, qui est un recouvrement du plan (t, ω) par des rectangles de couverture des fonctions de base. Si le centre des boîtes de HEISENBERG est fixé comme le point des centre spatial et fréquentiel de la fonction, leurs dimensions sont en général choisies de telle manière que les boîtes forment une partition du plan temps-fréquence. Cette représentation a un aspect arbitraire, d'autant qu'aucun résultat ne lie le fait qu'une famille soit une base au fait que les pavés temps-fréquence de la famille recouvrent le plan.

Le pavage temps-fréquence correspondant par exemple aux bases de fonctions de DIRAC et de fonctions de FOURIER sont des pavages par des rectangle infiniment fins et allongés qui sont représentées schématiquement dans la figure 2.1.

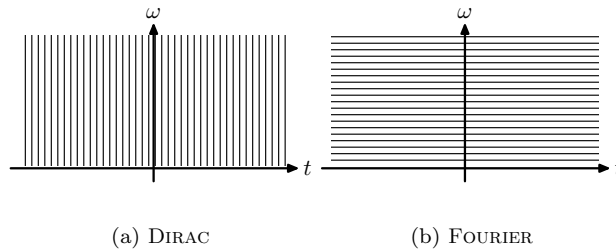


FIG. 2.1 – Pavages temps-fréquences associés aux représentations de DIRAC et de FOURIER

Pour représenter un signal comme combinaison de telles fonctions, il est très redondant de laisser varier indépendamment les trois paramètres t_0 , ω_0 et Δt . Deux approches différentes ont prévalu :

- la première approche est l'approche *temps-fréquence*, dans laquelle la largeur spatiale Δt des fonctions g est indépendante de la fréquence. Les fonctions s'écrivent sous la forme

$$g_{t_0, \omega_0}(t) = e^{i\omega_0 t} g_0(t - t_0)$$

où $g_0(t) = A_0 e^{-t^2/2\Delta t^2}$. Ce mode d'approximation est également appelé analyse de FOURIER à fenêtre.

- Une deuxième approche est l'approche *temps-échelle*, dans laquelle la largeur spatiale des fonctions g est inversement proportionnelle à la fréquence (le produit $\omega_0 \Delta t$ est constant et égal à c). On obtient alors, à un facteur de module 1 près, une forme relativement simple pour les différentes ondelettes :

$$g_{t_0, \Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} g_0\left(\frac{t - t_0}{\Delta t}\right)$$

où $g_0(t) = A_0 e^{-t^2/2\Delta t^2} e^{ict}$.

Les pavages du plan temps–fréquence donnent une idée de la différence des deux approches. Dans le cas de l’analyse temps–fréquence, le pavage obtenu est un pavage par des domaines rectangulaires qui se déduisent les uns des autres par translation dans le plan temps–fréquence. Dans le cas de l’analyse temps–échelle, les domaines sont également de surface constante, mais ont une résolution fréquentielle relative $\Delta\omega/\omega_0$ constante.

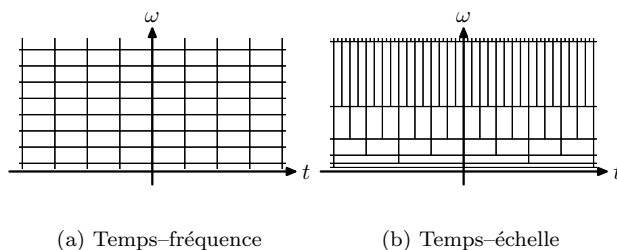


FIG. 2.2 – Pavages du plan temps–fréquence pour la représentation temps–fréquence et la représentation temps–échelle

Les ondelettes que nous allons utiliser dans la suite correspondent à l’analyse temps–échelle. Les avantages de ce mode de décomposition sont multiples. On dispose de moyens efficaces pour construire des bases discrètes pour lesquelles les calculs de transformation sont très rapides. L’analyse multi–échelles repose sur une forme de fonction unique. Enfin, dans l’analyse temps–échelle, les fonctions de base ont une taille de support proportionnelle à la résolution spatiale liée à leur fréquence par l’inégalité de Heisenberg.

2.3 Transformée en ondelettes continue

On choisit une fonction de base ψ appelée ondelette qui vérifie la condition d’admissibilité :

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2.1)$$

On remarque que si transformée de FOURIER de ψ est régulière, elle doit nécessairement s’annuler en 0, ce qui exclut d’office la fonction de GABOR que nous avons indiquée ci-dessus. En pratique, on considérera que la fonction de GABOR satisfait presque la condition d’admissibilité, dans la mesure où sa transformée de FOURIER prend une valeur très petite (mais non nulle) en 0.

On définit la transformée en ondelettes continue $\mathcal{W}f$ de la fonction f par la formule suivante :

$$\mathcal{W}f(t,s) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} d\tau \quad (2.2)$$

La transformée inverse s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (2.3)$$

De même que dans le cas de la transformée de FOURIER, la transformation est quasi isométrique :

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}f(t, s)|^2 dt \frac{ds}{s^2}. \quad (2.4)$$

En revanche, la représentation d'une fonction f par sa transformée en ondelettes n'est pas biunivoque, mais redondante, car une transformée en ondelettes vérifie une équation aux noyaux reproduisants :

$$\mathcal{W}f(t, s) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}(\tau, \sigma) K(\tau, t, \sigma, s) dt \frac{d\sigma}{\sigma^2}$$

avec un noyau K défini par

$$K(\tau, t, \sigma, s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\sigma s}} \psi\left(\frac{t'-t}{s}\right) \overline{\psi\left(\frac{t'-\tau}{\sigma}\right)} dt'$$

2.4 La transformée en ondelettes discrète

MORLET a proposé de construire des bases ou des *frames* de fonctions construits sur le modèle suivant :

$$g_{t_0, \Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} g\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)$$

où les valeurs possibles de Δt sont pris sur une échelle géométrique et les paramètres de translation sont proportionnels à Δt :

$$\begin{aligned} \Delta t &= b^j \\ t_0 &= k\Delta t \end{aligned}$$

Une gamme d'échelles Δt couramment utilisée est la gamme des échelles dyadiques 2^j , et on obtient des familles constituées de fonctions de la forme $g_0(2^j(t - 2^{-j}k)) = g(2^j t - k)$ où j et k sont des entiers relatifs. La normalisation la plus couramment utilisée étant une normalisation en norme L_2 , on obtient des familles de fonctions $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ où $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Dans un article écrit en 1987, Stéphane MALLAT a tracé un parallèle entre les fonctions de représentation temps-échelle inspirées par le travail de MORLET et les filtres miroirs en quadrature étudiés par BURT, ADELSON et SIMONCELLI pour effectuer de la compression d'images.

Il a mis en avant une certaine catégorie de décompositions en ondelettes qui peuvent être réalisées numériquement en un temps très court par une « transformée en ondelettes

rapide », pour laquelle l'ondelette de base doit être écrite comme convolution infinie de filtres discrets. Plus exactement, soit un couple de filtres discrets (m_0, m_1) :

$$k \mapsto m_0[k] \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

$$k \mapsto m_1[k] \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2.6)$$

dont les transformées de FOURIER $\omega \mapsto m_0(\omega)$ et $\omega \mapsto m_1(\omega)$ sont des fonctions 2π -périodiques. On suppose qu'il existe une fonction d'échelle ϕ et une ondelette ψ de $L_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (2.7)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.8)$$

Sous certaines conditions sur m_0 et m_1 , la famille (ψ_{jk}) est une base orthogonale, et la décomposition en ondelettes d'une fonction échantillonnée peut être effectuée par un algorithme rapide constitué d'une cascade de filtrages et de sous-échantillonnages.

Cette approche réduit considérablement la complexité de la construction d'une ondelette. Au lieu de choisir une fonction, on choisit l'ensemble discret (et en général fini) des coefficients des deux filtres.

2.5 Analyses multi-résolutions

Le cadre d'analyse de ces ondelettes qui s'expriment à l'aide de filtres discrets s'est considérablement développé ces dernières années, et nous disposons de tout un jeu de théorèmes reliant les propriétés des ondelettes et celles de filtres discrets. Par ailleurs, il existe plusieurs familles classiques d'ondelettes qui portent en général soit le nom de leur créateur, soit celui d'une propriété.

2.5.1 Cadre théorique

Le cadre théorique posé par Stéphane MALLAT est basé sur la notion d'analyse multi-résolutions. Une analyse multi-résolutions est une famille de sous-espaces de $L_2(\mathbb{R})$ notée $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, qui ont les propriétés suivantes :

$$V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{jk} : a_k \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{Espace de RIESZ}) \quad (2.9a)$$

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (2.9b)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.9c)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}) \quad (2.9d)$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- L'hypothèse (2.9a) signifie que V_j est un espace de RIESZ engendré par la famille $(\phi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$. Sa définition dépend de la topologie choisie pour l'espace fonctionnel. On peut le définir plus rigoureusement comme l'adhérence de l'espace de combinaisons linéaires finies de fonctions ϕ_{jk} . Cette propriété impose une contrainte sur la fonction ϕ . Pour une topologie L_2 , la correspondance

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L_2(\mathbb{R}) \\ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{0k} \end{aligned}$$

doit être continue. Une fonction ϕ avec une décroissance en espace trop faible n'est donc pas admissible.

- Intuitivement, nous pouvons considérer que l'ensemble des fonctions de V_{j+1} constitue un ensemble plus « riche » ou plus « dense » que V_j , ce qui ne signifie nullement de relation d'inclusion. L'hypothèse (2.9b) l'impose.

Pour des raisons d'invariance par translation et par changement d'échelles relatives, on peut vérifier que cette hypothèse est équivalente à supposer que $\phi \in V_1$, ce qui signifie qu'il existe une suite de coefficients $(m_0[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\phi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0[k] \phi(2t - k) \quad (2.10)$$

C'est ainsi que nous voyons apparaître le filtre discret m_0 .

- L'hypothèse (2.9c) est formulée plus pour des raisons de principe, car elle est toujours vérifiée. L'hypothèse (2.9d) l'est pourvu que la fonction $\hat{\phi}$ ne soit pas nulle en $\omega = 0$.

Les ondelettes apparaissent naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre deux espaces V_j et V_{j+1} consécutifs. On construit pour cela un espace de RIESZ W_0 tel que :

$$V_0 \oplus W_0 = V_1 \quad (2.11)$$

L'espace W_0 est engendré par une fonction ψ :

$$W_0 = \left\{ t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{R}} d_k \psi(t - k) : d_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Ceci impose que la fonction ψ soit dans l'espace V_1 , et s'écrive comme combinaison linéaire des fonctions $(t \mapsto \phi(2t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_1[k] \phi(2t - k) \quad (2.12)$$

Ainsi apparaît le deuxième filtre discret m_1 .

On montre que les fonctions ϕ et ψ sont alors définies par les seules données des filtres discrets m_0 et m_1 . Les formules sont

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \text{par itération de (2.10),} \quad (2.13a)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{par (2.12).} \quad (2.13b)$$

2.5.2 Les bases d'ondelettes

La relation (2.11) se transpose à toutes les échelles j :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (2.14)$$

et on obtient par itérations de cette relation :

$$V_j \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_{j'-1} = W_{j'} \quad \text{si } j < j' \quad (2.15)$$

En faisant tendre j' vers $+\infty$ (et éventuellement j vers $-\infty$), on obtient deux relations :

$$L_2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \overline{\bigoplus_{j'=j}^{+\infty} W_{j'}} \quad \text{quel que soit } j \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j'=-\infty}^{+\infty} W_{j'}} \quad (2.17)$$

La réunion des bases de RIESZ de chacun des espaces de ces sommes directes fournit ainsi plusieurs bases d'ondelettes :

$$\mathcal{B}_j = \{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j'k} : j' \geq j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{B} = \{\psi_{jk} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.19)$$

2.5.3 Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes s'applique à des signaux échantillonnés sur une grille discrète, et en général cet échantillonnage consiste à approcher une fonction de $L_2(\mathbb{R})$ par

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} f[k/2^j] \phi_{jk}$$

où l'échantillon $f[k/2^j]$ peut lui aussi être estimé par :

$$f[k/2^j] \simeq f(k/2^j)$$

Le signal dont on part est donc représenté sur une base de RIESZ de V_j . Appliquer à ce signal une transformation en ondelettes jusqu'à l'échelle $L \in \mathbb{Z}$ revient à représenter ce signal sur une base adaptée à la somme directe :

$$V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1}$$

L'algorithme de transformation est itératif et consiste à remplacer la représentation d'une composante sur $V_{j'}$ par une représentation sur $V_{j'-1} \oplus W_{j'-1}$. On passe ainsi successivement par des décompositions adaptées aux différentes sommes directes suivantes :

$$\begin{array}{c} V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ \vdots \\ V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \end{array}$$

2.5.4 Filtres duaux, ondelettes duales

L'itération de base de transformation en ondelettes est donc un changement de base entre les deux décompositions suivantes :

$$V_{j+1} \rightarrow V_j \oplus W_j$$

Elle s'écrit comme une correspondance

$$\begin{array}{l} \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}) \times \ell_2(\mathbb{Z}) \\ (a_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto [(a_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}, (d_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}] \end{array}$$

Si on note A_j et D_j les fonctions 2π -périodiques dont les coefficients sont les suites discrètes $k \mapsto a_{jk}$ et $k \mapsto d_{jk}$:

$$\begin{aligned} A_j(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} e^{-ik\omega} \\ D_j(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} e^{-ik\omega} \end{aligned}$$

l'itération de base s'écrit comme l'application d'une matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} A_j(2\omega) \\ D_j(2\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j+1}(\omega) \\ A_{j+1}(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire pour que cette transformation soit inversible est donc que la matrice de transfert

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

soit bornée d'inverse bornée sur $[0, 2\pi]$. Dans ce cas, on appelle matrice de transfert duale la matrice $\tilde{T}(\omega) = T(\omega)^{-T}$. Il existe deux autres fonctions 2π -périodiques \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 telles que $\tilde{T}(\omega)$ s'écrive :

$$\tilde{T}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega + \pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

Ces filtres définissent les ondelettes duales $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ par des relations identiques à (2.13a) et (2.13b) :

$$\tilde{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} \tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (2.20a)$$

$$\tilde{\psi}(\omega) = \tilde{m}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \tilde{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.20b)$$

Les fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ sont donc des ondelettes duales dans le sens où pour tout j , on a les formules de décomposition sur $L_2(\mathbb{R})$:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{jk} \rangle \phi_{jk} + \sum_{j' \geq j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j'k} \rangle \psi_{j'k} \quad (2.21)$$

pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $f \in L_2(\mathbb{Z})$, et en faisant tendre j vers $-\infty$ la formule de décomposition homogène :

$$f = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} \quad (2.22)$$

2.5.5 L'algorithme de la transformée en ondelettes rapide

Les coefficients des filtres m_0 , m_1 et des filtres duaux \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 interviennent dans le calcul des changements de base

$$\{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \leftrightarrow \{\phi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$$

avec les formules suivantes :

- dans le sens de transformation dit « direct » (*forward wavelet transform*), on a

$$a_{jk} = 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{m}_0[k] a_{j+1, 2l-k}$$

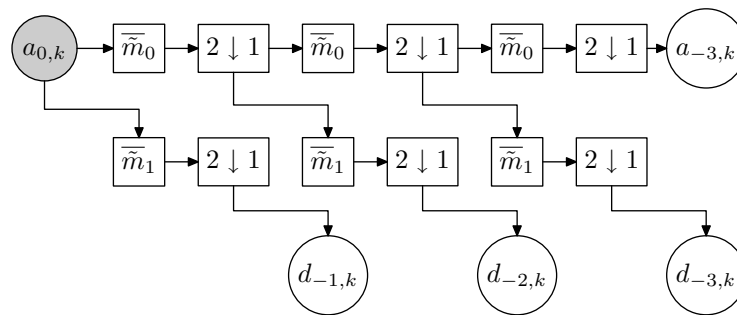
$$d_{jk} = 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{m}_1[k] a_{j+1, 2l-k}$$

- et dans le sens de transformation inverse (*inverse wavelet transform*), on obtient

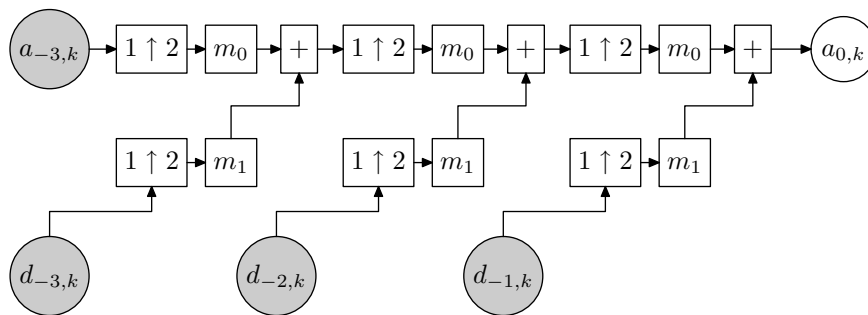
$$a_{j+1,k} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_0[2l-k] a_{jl} + m_1[2l-k] d_{jl}$$

Des schémas de transformation directe et de transformation inverse sont représentés sur la figure 2.3 entre les échelles $j = 0$ et $j = -3$.

Pour un nombre fini N d'échantillons, une transformation en ondelettes (jusqu'à n'importe quelle profondeur autorisée par la taille de l'échantillon) prend moins de $A \times N$ opérations, où la constante A dépend naturellement de la taille des filtres. Ceci est en théorie meilleur qu'une transformée de FOURIER rapide qui prend de l'ordre de $N \log N$ opérations.



(a) Transformée directe



(b) Transformée inverse

FIG. 2.3 – Transformées en ondelettes rapides. Les cercles sur fond grisé désignent les composantes d'entrée, tandis que les cercle sur fond blanc désignent les composantes de sortie.

2.5.6 Les ondelettes orthogonales

Les ondelettes orthogonales sont des ondelettes ψ telles que la famille $(t \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j t - k))_{j,k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$. C'est le cas dès que $\phi = \tilde{\phi}$ et $\psi = \tilde{\psi}$, ce qui équivaut à écrire que la matrice de transfert et la matrice de transfert duale sont égales, soit encore que la matrice de transfert est unitaire pour tout ω . Ceci se traduit par la contrainte sur les filtres m_0 et m_1 par :

$$\begin{array}{rclcl} |m_0(\omega)|^2 & + & |m_0(\omega + \pi)|^2 & = & 1 & \forall \omega \\ m_0(\omega)m_1(\omega) & + & m_0(\omega + \pi)m_1(\omega + \pi) & = & 0 & \forall \omega \\ |m_1(\omega)|^2 & + & |m_1(\omega + \pi)|^2 & = & 1 & \forall \omega \end{array}$$

Dans ce cas, les filtres m_0 et m_1 sont appelés filtres miroirs en quadrature, selon la terminologie d'ESTEBAN et GALAND et reprise par ADELSON et SIMONCELLI. De plus les sommes directes qui apparaissent dans les formules ci-dessus sont toutes orthogonales. En pratique le choix des filtres se réduit au seul choix de m_0 , car alors un choix pour m_1 s'impose :

$$m_1(\omega) = e^{i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}$$

Historiquement, les premières ondelettes qui ont été mises au point sont les ondelettes orthogonales (MEYER, MALLAT), si bien que les familles d'ondelettes non orthogonales ont reçu l'appellation d'ondelettes biorthogonales. Le préfixe « bi » est censé rappeler que deux bases d'ondelettes sont utilisées, une pour l'analyse (la base duale) et une pour la reconstruction. Une étude systématique des ondelettes biorthogonales a été menée par COHEN, DAUBECHIES et collaborateurs.

Il existe un certain nombre de familles d'ondelettes orthogonales couramment utilisées. Les plus connues sont sans doute les ondelettes de DAUBECHIES. Ces ondelettes résultent de compromis optimaux entre deux critères contradictoires : le nombre de moments nuls des ondelettes et la taille de leur support (ces deux critères contradictoires rappellent dans une certaine mesure l'inégalité de HEISENBERG). Il existe d'autres familles d'ondelettes orthogonales, comme les *coiflets*, du nom de Ronald COIFMAN, ou les *symmlets* qui sont des ondelettes presque symétriques.

Les bases d'ondelettes orthonormées ont un avantage théorique considérable dans les problèmes de compression ou de débruitage : d'une part la métrique d'erreur utilisée est en général la métrique L_2 , et celle-ci s'exprime très simplement avec les coefficients d'une décomposition dans une base orthonormale. Dans le cas du débruitage, il se trouve également qu'un bruit blanc gaussien a une décomposition également très simple dans une base orthonormale : les coefficients sont alors également des variables gaussiennes indépendantes centrées et de même variance.

En pratique, en revanche, les ondelettes orthogonales n'offrent pas la même souplesse dans leur conception que les ondelettes biorthogonales, et on peut également montrer qu'elles ne peuvent jamais être symétriques (à un cas trivial près). Il faut noter que la relation duale entre la base d'analyse des $\tilde{\psi}_{jk}$ et de reconstruction des ψ_{jk} est symétrique, et que les rôles peuvent être interchangés, on peut très bien utiliser la base $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ pour l'analyse et

$(\tilde{\psi}_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ pour la reconstruction, pour avoir la formule :

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{jk}, f \rangle \tilde{\psi}_{jk}$$

que l'on peut comparer à la formule (2.22).

2.6 Décroissance des coefficients, régularité et approximation

Pour que la convergence d'une décomposition d'une fonction sur une base d'ondelettes soit rapide, il faut que les coefficients d'ondelettes décroissent rapidement quand $j \rightarrow +\infty$. Cette décroissance est liée au nombre de *moments nuls* de l'ondelette duale $\tilde{\psi}$.

On dit que $\tilde{\psi}$ a p moments nuls si

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(t) t^k dt = 0$$

pour tout k dans $\{0, \dots, p-1\}$. Ceci revient à écrire que la transformée de FOURIER de $\tilde{\psi}$ a un zéro d'ordre p en $\omega = 0$, ou à dire que $\tilde{\psi}$ est orthogonale à tous les polynômes de degré inférieur à p .

On peut montrer alors que si une fonction f est p fois continûment dérivable dans un intervalle I , ses coefficients d'ondelettes $\langle \tilde{\psi}_{jk}, f \rangle$ décroissent en $2^{-j(p+1/2)}$ dans I , c'est à dire qu'il existe une borne M telle que

$$\left| \langle \tilde{\psi}_{jk}, f \rangle \right| \leq M 2^{-(p+1/2)j} \quad \text{si } \text{supp } \tilde{\psi}_{jk} \subset I$$

Pour montrer cette majoration, il suffit d'appliquer la formule de TAYLOR à la fonction f autour du centre de l'ondelette $\tilde{\psi}_{jk}$. Si $u = k/2^j$, on a :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (t-u)^p r(t)$$

où la fonction $r(t)$ est bornée par la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f . Quand on fait le produit scalaire de f avec $\tilde{\psi}_{jk}$, la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_{jk}, f \rangle &= \int (t-u)^p r(t) \overline{\tilde{\psi}_{jk}(t)} dt \\ &= \int t^p r(t+u) \overline{\tilde{\psi}_{j0}(t)} dt \end{aligned}$$

dont on montre par un simple changement de variable qu'il est majoré par $M 2^{-(p+1/2)j}$. On voit donc que la régularité locale de la fonction conditionne la décroissance en échelles des coefficients d'ondelettes. Une quasi-réciproque est également vraie : si la décroissance

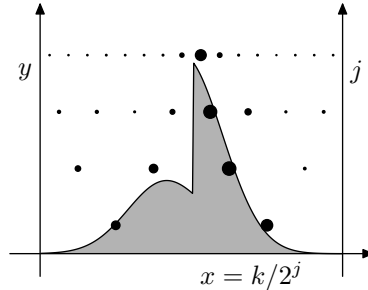


FIG. 2.4 – Coefficients d'ondelettes d'une fonction à support compact. On voit notamment que les coefficients restent importants autour des singularités pour des j croissants.

des coefficients est de l'ordre $M2^{-(p+1/2)j}$, et si ψ est p -LIPSCHITZ, alors la fonction est r -LIPSCHITZ pour tout $r < p$.

Pour illustrer le lien entre coefficients et régularité, la décomposition en ondelettes d'une fonction à support compact avec une singularité est donnée en Fig. 2.4.

Remarque

On voit le lien entre deux paramètres d'une base d'ondelettes : le nombre de moments nuls de l'ondelette duale $\tilde{\psi}$ d'une part, et la régularité de l'ondelette d'autre part. Ces deux paramètres interviennent pour le premier dans un théorème liant la décroissance des coefficients d'ondelettes à la régularité de la fonction, et le deuxième dans sa réciproque.

Yves MEYER a montré que si une ondelette était p fois dérivable, l'ondelette duale avait nécessairement $p + 1$ moments nuls. La réciproque est notoirement fautive : l'ordre de régularité d'une ondelette peut être bien inférieur au nombre de moments nuls de l'ondelette duale.

COHEN et CONZE ont montré que l'ordre de régularité α_N des ondelettes de DAUBECHIES à N moments nuls est asymptotiquement :

$$\alpha \sim \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}\right) N \simeq 0,2075 N$$

2.7 Création d'ondelettes régulières et choix de filtres

La création d'une famille d'ondelettes se réduit donc au choix d'une paire de filtres (m_0, m_1) . La matrice de transfert associée

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

doit satisfaire des conditions de reconstruction parfaite, c'est-à-dire qu'elle doit être bornée et d'inverse bornée, ce qui est relativement facile à vérifier pour des filtres à support compact.

Cette condition n'est pas suffisante. En effet, pour certains filtres m_0 , la fonction ϕ associée par convolutions infinies peut très bien ne pas être dans $L_2(\mathbb{R})$. Si on choisit par exemple $m_0(\omega) = 1$ pour tout ω , on obtient $\phi(\omega) = \delta(\omega)$ (distribution de DIRAC). Il faut que les fonctions ainsi générées soient suffisamment régulières. À ces deux contraintes s'en ajoute une troisième : la convergence des produits partiels de convolution

$$1_{[-2^j \pi, 2^j \pi]}(\omega) \prod_{k=1}^j m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

vers $\hat{\phi}$ doit être suffisamment forte (i.e. se faire au moins en norme L_2) pour que les propriétés de reconstruction des filtres se traduisent par la dualité effective des ondelettes, c'est-à-dire pour que notamment

$$\langle \phi_{jk}, \tilde{\phi}_{jk'} \rangle = \delta_{kk'}$$

Cette condition n'est pas superflue. Le filtre $m_0(\omega) = (1 + e^{2i\omega})/2$ est orthogonal, produit bien par convolutions infinies une fonction de carré intégrable

$$\phi(t) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(t)$$

qui ne vérifie clairement pas les conditions d'orthogonalité

$$\langle \phi_{jk}, \tilde{\phi}_{jk'} \rangle \neq \delta_{kk'} \quad \text{pour } |k - k'| = 1$$

Pour résumer, les trois ingrédients d'une base d'ondelettes inconditionnelle de L_2 construite à l'aide de filtres sont :

1. un jeu de filtres (m_0, m_1) à reconstruction parfaite, dont les filtres duaux sont notés $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$;
2. l'appartenance de la fonction ϕ définie par

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

et de $\tilde{\phi}$ définie de manière analogue avec \tilde{m}_0 à l'ensemble $L_2(\mathbb{R})$;

3. la convergence des produits partiels de convolutions tronqués sur la bande de fréquences $[-2^j \pi, 2^j \pi]$

$$1_{[-2^j \pi, 2^j \pi]}(\omega) \prod_{k=1}^j m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

vers ϕ (et l'analogue vers $\tilde{\phi}$), afin que la propriété de dualité des filtres se transpose effectivement sur les ondelettes.

2.7.1 Conditions suffisantes dans le cas orthogonal

Une condition suffisante relativement simple a été établie par Stéphane MALLAT dans son article de 1987, dans le cas des ondelettes orthogonales à support compact. Il a établi qu'il suffisait que le filtre m_0 orthogonal (vérifiant $m_0(0) = 1$, et $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \forall \omega$) génère une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$ si

$$m_0(\omega) \neq 0 \quad \text{pour } \omega \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Cette condition suffisante a été allégée par la suite en imposant la non annulation de m_0 sur $[-\pi/3, \pi/3]$ (toujours dans le cas orthogonal).

2.7.2 Condition suffisante de régularité

Un théorème de DAUBECHIES et TCHAMITCHIAN lie la régularité de l'ondelette ϕ à une factorisation du filtre m_0 .

Théorème 2.1 (DAUBECHIES, TCHAMITCHIAN)

Soit m_0 un filtre discret tel que la fonction

$$\omega \mapsto m_0(\omega)$$

soit bornée, dérivable en 0 et telle que $m_0(0) = 1$, et soit ϕ la fonction (distribution tempérée) définie par

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

On factorise m_0 sous la forme suivante

$$m_0(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2}\right)^N r(\omega)$$

où N est le plus grand entier tel que le quotient r reste borné. On pose

$$B_j = \sup_{\omega} \left| \prod_{k=1}^j r(2^k \omega) \right|$$

et

$$b_j = \frac{\log B_j}{j \log 2}$$

$$b = \inf_{j > 0} b_j \quad (\text{exposant critique})$$

Alors la transformée de FOURIER de ϕ est contrôlée par la formule suivante :

$$|\hat{\phi}(\omega)| \leq \frac{M}{1 + |\omega|^{N-b_j}} \quad \forall j > 0$$

Si on note H^α l'espace de HÖLDER d'exposant α , c'est à dire l'ensemble des fonctions f telles que

$$\int |\hat{f}(\omega)|(1 + |\omega|)^\alpha d\omega < +\infty$$

alors ϕ est dans l'espace H^α pour tout $\alpha < N - b_j - 1$.

Par ailleurs, pour tout $\alpha < N - b_j - 1/2$, la fonction ϕ est dans l'espace de Sobolev d'exposant α .

Ceci est un des ingrédients du théorème suivant de COHEN

Théorème 2.2 (COHEN)

Soient deux paires de filtres (m_0, m_1) et $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$ duales (donc à reconstruction parfaite). On note respectivement N, \tilde{N}, b et \tilde{b} les exposants de factorisation et les exposants critiques des deux filtres passe-bas m_0 et \tilde{m}_0 . Si $N - b > 1/2$ et $\tilde{N} - \tilde{b} > 1/2$, alors les ondelettes générées par ces filtres constituent deux bases inconditionnelles biorthogonales de $L_2(\mathbb{R})$.

Bibliographie

- [BCD⁺91] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, I. DAUBECHIES, S. G. MALLAT, Y. MEYER, L. RAPHAEL et M. B. RUSKAI. *Wavelets*. Jones and Bartlett, Boston, 1991.
- [Dau92] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*, tome 61 de *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [Mal89a] S. G. MALLAT. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):69–87, 1989.
- [Mal89b] S. G. MALLAT. A theory for multiscale signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.

Première partie

Mesure du flot optique

Chapitre 3

Le flot optique

Introduction

La mesure du flot optique est une étape de traitement de l'image dite de bas niveau. On lui trouve de nombreuses applications comme l'analyse de mouvements de fluides en physique expérimentale, la compression de séquences d'images vidéo par compensation de mouvement, ou son utilisation pour des phases de traitement des images de plus haute niveau, comme la reconstruction de scènes tridimensionnelles.

Le terme de flot optique a été inventé par le psychologue James Jerome GIBSON dans une étude sur la vision humaine. En 1980, HORN et SCHUNCK [HS80, HS81] ont proposé une méthode d'estimation du flot optique basée sur la régularisation. Ce premier travail a été suivi d'un grand nombre de contributions qui ont proposé différentes méthodes alternatives. Pour n'en citer que quelques unes, nous pouvons parler des méthodes de filtrage spatio-temporel, basées sur les travaux de ADELSON et BERGEN [AB85], qui sont divisées en deux branches suivant que l'énergie [Hee88] ou la phase [FJ90] de la sortie des filtres est utilisée pour effectuer l'estimation. On peut également les techniques d'appariement par blocs [BA83, BYX83, Ana89]. En 1994, BARRON, FLEET et BEAUCHEMIN [BFB94] ont fait un inventaire exhaustif des méthodes existantes.

De nombreux auteurs ont vite compris l'avantage qu'il y avait à effectuer une mesure multi-échelles du mouvement. Pratiquement toutes les méthodes ont une déclinaison multi-échelles. Le gain est de réduire la complexité de calcul pour les méthodes d'appariement, et d'augmenter la gamme des déplacements mesurables pour les méthodes basées sur des filtres en éliminant un choix a priori de paramètre d'échelle qui limitait cette gamme de mesures.

Les travaux exposés dans la suite ont été motivés par le fait que les ondelettes sont un outil idéal d'analyse multi-échelles d'un signal. Une base d'ondelettes discrètes a tout d'abord naturellement une structure multi-échelles. De plus, les calculs sous-jacents peuvent être réalisés en des temps très courts grâce à l'existence d'un algorithme de transformation rapide en ondelettes.

3.1 Estimation différentielle projetée du flot optique

Une séquence d'images est une fonction réelle $I(t; x_1, x_2)$ de trois variables t , x_1 et x_2 que nous supposons pour l'instant continues. Nous utiliserons les notations agrégées \mathbf{x} pour (x_1, x_2) et $\mathbf{x}(t)$ pour $(x_1(t), x_2(t))$. Le modèle mathématique standard utilisé pour trouver des équations qui définissent le flot optique est basé sur un hypothèse d'illumination constante : un point réel

$$[X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t)]$$

de la scène est projeté sur le plan image de la caméra au point $(x_1(t), x_2(t))$

$$[\ X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t) \] \mapsto (x_1(t), x_2(t)) \quad \text{au temps } t$$

Le flot optique au temps t et au point $\mathbf{x}(t)$ est alors défini comme la vitesse du point image

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right)$$

L'hypothèse d'illumination constante consiste à dire que la luminosité apparente du point $(x_1(t), x_2(t))$ au temps t ne dépend pas du temps t , ce qui s'écrit

$$I(t; \mathbf{x}(t)) = I_0$$

Le flot optique est donc contraint par l'équation suivante

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla I \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$$

ou encore

$$\mathbf{v} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (\text{OF})$$

Nous introduisons dès à présent une variante de (OF) qui prend en compte des variations d'illumination. On utilise un modèle de luminosité apparente lambertien.

$$I(t; x_1, x_2) = R(t; x_1, x_2) \times L(t; x_1, x_2)$$

Dans cette formule, R est la réflectance de la scène, ce que l'on peut voir comme une image qui vérifie l'hypothèse d'illumination constante ci-dessus et donc (OF). L est un facteur d'illumination qui expliquera les variations locales d'illumination. Pour une source ponctuelle située à une distance finie, L est le produit

$$L(t; x_1, x_2) = \frac{L_0}{d^2} \cos i$$

où i est l'angle d'incidence de la lumière qui éclaire l'objet, et d est la distance entre la source et l'objet. Les changements d'illumination sont donc causés par les mouvements relatifs entre la source lumineuse et l'objet. Nous allons supposer que ces changements ont des variations lentes en espace. Ceci consiste à faire l'hypothèse que les dérivées spatiales $\partial L / \partial x$ and $\partial L / \partial y$

sont négligeables. Une telle hypothèse pourra être mise en défaut lorsque la scène comprend des ombres projetées dures, auquel cas les contours de ces ombres n'ont pas des variations lentes en espace.

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{dR}{dt}L + R\frac{\partial L}{\partial t} \\ &= 0 + R\frac{\partial \log L}{\partial t}L\end{aligned}$$

soit donc une équation du flot optique modifiée qui prend en compte des changements locaux de l'éclairement:

$$\frac{\partial I}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial I}{\partial x_2}v_2 + \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{L'}{L}I \quad (\text{OFL})$$

Les paramètres de ce modèle que nous avons l'intention d'estimer sont le flot optique $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ et la dérivée temporelle du logarithme du facteur d'illumination $\lambda = \partial \log L / \partial t$. On constate qu'il n'est pas possible d'estimer le facteur d'illumination L mieux qu'à une constante multiplicative près, puisqu'une fonction de réflectance θR et un éclairement L/θ donneront la même image I que R et L . Ceci se traduit par le fait que nous ne mesurons donc que la dérivée du logarithme de L qui n'est pas modifiée par une multiplication de L par un facteur constant.

Les équations (OF) ou (OFL) ne peuvent pas être résolues ponctuellement, car en chaque point, on ne dispose que d'une unique contrainte scalaire pour trouver deux inconnues (v_1, v_2) ou plus. C'est ce qu'on appelle le *problème d'ouverture*. Tant qu'aucune information supplémentaire n'est disponible sur le flot à estimer, la seule équation dont nous disposons est l'équation (OF) ou (OFL). Le problème est donc *mal posé*.

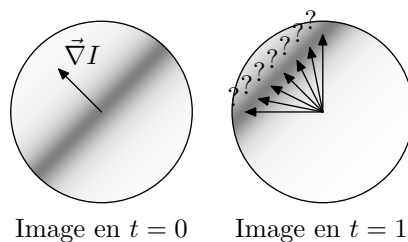


FIG. 3.1 – Illustration du problème d'ouverture. Une image régulière peut être considérée comme localement invariante par translation. Seule la composante parallèle au gradient ∇I du déplacement entre $t = 0$ et $t = 1$ peut alors être estimée. La composante orthogonale n'est pas mesurable.

Le seul moyen de réduire le nombre de solutions est de faire une hypothèse supplémentaire sur le flot. Ceci s'applique à toutes les techniques de mesure du flot, sans exception.

Par exemple, HORN et SCHUNCK [HS81] ont remplacé le système linéaire non inversible constitué de toutes les équations du flot pour tous les points de mesure \mathbf{x} possibles en un

système bien posé en faisant l'hypothèse que la « meilleure » solution de ce système est la solution la plus régulière.

En effet, minimiser la fonctionnelle

$$M[\mathbf{v}] = \iint \left(\mathbf{v} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 dx_1 dx_2$$

revient à trouver une carte de déplacement $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ qui annule l'équation (OF). HORN et SCHUNCK ajoutent à cette fonctionnelle quadratique une fonctionnelle de régularisation

$$S[\mathbf{v}] = \lambda \iint \|\Delta \mathbf{v}\|^2 dx_1 dx_2$$

où λ est un paramètre positif qui permet d'ajuster l'importance relative de la régularité et de l'adéquation à la contrainte du flot optique (OF). La fonctionnelle totale

$$\iint \left(\mathbf{v} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 dx_1 dx_2 + \lambda \iint \|\Delta \mathbf{v}\|^2 dx_1 dx_2$$

est définie positive et a un minimum unique. En tant que telle, cette méthode ne pourra être utilisée pour mesurer des déplacements importants.

Les méthodes basées sur le filtrage spatio-temporel (et sur les filtres de vitesse¹, cf. Fig. 3.2) [BRRO94, CLF95, FJ90, GD94, Hee88] reposent également sur l'hypothèse que le déplacement est constant sur le support des filtres. Nous allons également devoir faire une hypothèse de ce genre.

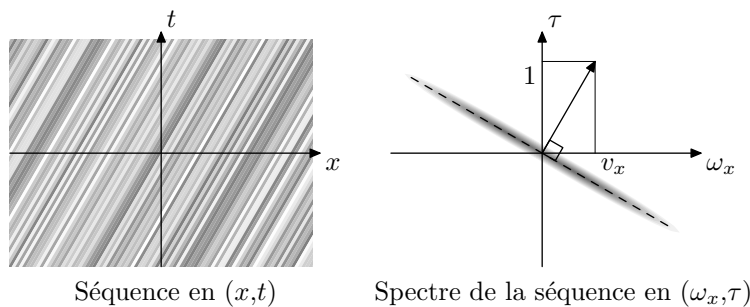


FIG. 3.2 – Illustration du principe de base de la mesure du flot optique par filtrage spatio-temporel. À gauche une séquence d'images en translation uniforme, représentée en fonction des variables d'espace x et de temps t . À droite, la transformée de FOURIER spatio-temporelle de cette séquence est localisée sur un hyperplan dont l'inclinaison indique la vitesse de déplacement. Plus précisément, la normale de ce plan est $(v_x, 1)$. Ainsi, en identifiant l'inclinaison du plan, on peut retrouver le flot optique v_x .

1. filtres spatio-temporels dont la réponse n'est grande que pour des séquences vidéo invariantes par translation dans une direction donnée, et qui correspondent donc à un flot optique donné. En anglais *velocity tuned filters*.

Dans ce travail, notre tactique pour contourner le problème d'ouverture est la suivante : nous supposons que nous disposons d'une famille de fonctions $(\psi^n)_{n=1\dots N}$ de $L_2(\mathbb{R}^2)$ toutes centrées autour de l'origine $(0,0)$, et de contenus fréquentiels différents. Nous faisons le produit scalaire des équations fonctionnelles **(OF)** ou **(OFL)** avec ces fonctions translatées $\psi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ pour ainsi obtenir N équations différentes. Dans le cas le plus simple de **(OF)**, on obtient

$$\iint \left(\frac{\partial I}{\partial x_1} v_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial I}{\partial x_2} v_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial I}{\partial t} \right) \psi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall n = 1 \dots N \quad (3.1)$$

En utilisant les notations $\langle f, g \rangle = \iint f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} dx_1 dx_2$, et $\psi_{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}) = \psi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u})$, on peut écrire

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x_1} v_1, \psi_{\mathbf{u}}^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial x_2} v_2, \psi_{\mathbf{u}}^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi_{\mathbf{u}}^n \right\rangle = 0 \quad \forall n = 1 \dots N \quad (3.2)$$

Si nous faisons maintenant l'hypothèse (ou approximation) que $v_1(\mathbf{x})$ et $v_2(\mathbf{x})$ sont constants sur les supports des $\psi_{\mathbf{u}}^n$, i.e.

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x}) &= v_1(\mathbf{u}) & \forall \mathbf{x} \in \text{support } \psi_{\mathbf{u}}^n, \forall n \\ v_2(\mathbf{x}) &= v_2(\mathbf{u}) & \forall \mathbf{x} \in \text{support } \psi_{\mathbf{u}}^n, \forall n \end{aligned} \quad (A)$$

L'équation (3.2) devient alors

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x_1}, \psi_{\mathbf{u}}^n \right\rangle v_1(\mathbf{u}) + \left\langle \frac{\partial I}{\partial x_2}, \psi_{\mathbf{u}}^n \right\rangle v_2(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t} \langle I, \psi_{\mathbf{u}}^n \rangle = 0 \quad \forall n = 1 \dots N \quad (3.3)$$

et après une intégration par parties

$$\left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^n}{\partial x_1} \right\rangle v_1(\mathbf{u}) + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^n}{\partial x_2} \right\rangle v_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} \langle I, \psi_{\mathbf{u}}^n \rangle \quad \forall n = 1 \dots N \quad (3.4)$$

Nous obtenons ainsi un système projeté de N (typiquement 3 ou plus) équations d'inconnues $v_1(\mathbf{u})$ and $v_2(\mathbf{u})$.

$$\boxed{\begin{cases} \left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^1}{\partial x_1} \right\rangle v_1(\mathbf{u}) + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^1}{\partial x_2} \right\rangle v_2(\mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle I, \psi_{\mathbf{u}}^1 \rangle \\ \vdots & \vdots \\ \left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^N}{\partial x_1} \right\rangle v_1(\mathbf{u}) + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}}^N}{\partial x_2} \right\rangle v_2(\mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle I, \psi_{\mathbf{u}}^N \rangle \end{cases}} \quad (S)$$

que nous pouvons comparer à l'unique équation **(OF)** valable au point $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ que nous avons au départ. Nous avons ainsi contourné le problème d'ouverture. Ceci n'a pas été gratuit : nous avons dû faire une hypothèse de constance locale du flot pour parvenir à ce système. Sous certaines hypothèses sur la régularité du flot optique, nous pouvons prouver que cette méthode d'approximation est asymptotiquement consistante, c'est à dire que le flot optique

ainsi extrait converge vers le flot réel quand l'échelle tend vers 0. Ce théorème est énoncé en détail en 4.1.2 et prouvé en 5.2.

La motivation d'une telle approche est multiple. Cette approche est attractive parce que nous pouvons extraire par le vecteur de déplacement localement, et ce avec une formule presque explicite (l'inversion d'un système linéaire à 2 ou 3 inconnues, ce qui n'a rien à voir avec le système linéaire global que résolvent HORN et SCHUNCK). Par comparaison avec les méthodes d'appariement, cette méthode n'a pas de limite inférieure de résolution. Les mesures peuvent être obtenues au dixième de pixel près, alors que les méthodes d'appariement fonctionnent en général au pixel ou au demi-pixel près. Enfin les coefficients de ce systèmes sont des coefficients d'ondelettes de l'images, et l'ensemble des coefficients de tous les systèmes concernés peuvent être calculés par un algorithme de transformée en ondelettes rapide.

Une approche similaire a été présentée par WEBER et MALIK en 1995 [WM95]. Ils utilisent des fonctions réelles de différentes échelles pour filtrer l'équation du flot optique. Comme ils ne tirent pas partie de la redondance des mesures à échelles grossière, leurs calculs sont beaucoup plus long que dans notre approche. SIMONCELLI *et coll.* [Sim98] ont proposé une approche bayésienne multi-échelles de la mesure du flot, basée également sur résolution de contraintes différentielles. MAGAREY et KINGSBURY [MK98] une autre approche basée sur la minimisation d'erreur d'appariement de sous-bandes fréquentielles de l'image. Notre méthode est très proche des approches présentées par ces auteurs, mais diffère en même temps par un certain nombre d'aspects détaillés dans la suite de cette thèse, qui incluent la conception des filtres (Sec. 4.3), la mesure de l'illumination, la compensation de grands mouvement par pas entiers (Sec. 4.1.4) et la méthode de décentrement des gammes de vitesses mesurables (Sec. 4.2.2).

Il faut enfin remarquer que par comparaison avec d'autres méthodes basées sur le filtrage spatio-temporel, cette méthode suppose qu'il n'existe qu'un unique vecteur de déplacement en un point donné. Cette hypothèse risque d'être mise en défaut dans des zones de l'image où plusieurs composantes superposées par transparence peuvent se déplacer à des vitesses différentes, ou bien encore autour des occlusions. Une méthode de filtrage spatio-temporel peut permettre d'extraire différentes composantes de mouvement superposées, comme cela est indiqué sur la figure 3.3. Le prix à payer pour avoir la capacité de lire des informations de ce type est élevé: il faut faire une hypothèse supplémentaire de constance en temps du le flot optique, et les calculs requis sont dans ce cas plus longs. Ceci est discuté en détail dans [FJ90], et dans [Sim92].

Cependant, dans notre méthode, nous construisons des systèmes linéaires locaux qui sont en principe sur-déterminés: le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues. Ceci nous fournit un critère pour vérifier si notre hypothèse de flot optique est valide sur le domaine considéré. Si les équations sont incompatibles, et que l'erreur de régression est trop importante, cela signifiera que notre hypothèse de constance locale du flot optique n'est pas valide, soit parce que le flot variera trop vite (effets de perspective), soit parce que nous nous trouverons autour d'une occlusion, où le flot est discontinu. Nous expliquerons en détail en 4.1.3 comment nous gérons ces systèmes sur-déterminés.

Ces considérations nous incitent donc à utiliser des fonctions de mesure ψ du plus petit support possible. Malheureusement, nous verrons dans la partie suivante que les problèmes d'*aliasing* temporel nous imposent une contrainte opposée, et que le choix d'une échelle

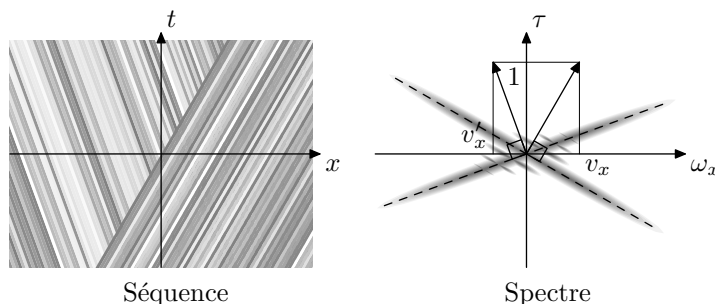


FIG. 3.3 – Ceci illustre la mesure de plusieurs composantes de mouvement autour d'une occlusion, avec une méthode de filtrage spatio-temporel. À gauche, on a représenté une séquence où un tronçon qui se déplace vers la droite cache un deuxième tronçon qui se déplace vers la gauche. Sur la figure de droite, on voit que le spectre correspondant est à peu près supporté par la réunion de deux hyperplans. L'hyperplan correspondant à la partie cachée est légèrement lissé.

optimale de mesure doit donc être le résultat d'un compromis entre ces deux contraintes.

3.2 Aliasing temporel et échelle des fonctions de mesure

En pratique, la séquence d'images est échantillonnée en temps. Elle n'est par exemple connue que pour les valeurs entières de t , et le terme du terme de droite dans (S)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle I, \psi^n \rangle$$

doit donc être estimé par une différence finie, et on doit faire une approximation $\partial I / \partial t \simeq I(t+1) - I(t)$.

Nous allons comparer l'erreur causée par l'*aliasing* temporel (l'erreur d'approximation de la dérivée temporelle par une différence finie) pour des fonctions de mesure ψ^n contractées à différentes échelles en $\psi_{\mathbf{u}s}^n(x) = s^{-1} \psi^n(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{u}}{s})$. Nous allons voir que l'erreur induite est importante si le déplacement fini entre deux image consécutives $I(t)$ et $I(t+1)$ n'est pas petit devant l'échelle s de la fonction de mesure utilisée $\psi_{\mathbf{u}s}^n$.

Supposons que pour un s donné l'image se translate uniformément sur le support des fonctions $\psi_{\mathbf{u}s}^n$, pour tout $n \in N$, i.e.

$$I(t; \mathbf{x}) = I(\mathbf{x} - t\mathbf{v})$$

L'estimation la plus simple d'une dérivée par une différence finie est l'approximation décentrée

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} \simeq I(t+1) - I(t)$$

Dans ces travaux, nous allons utiliser une estimation d'ordre supérieur et mesurer le flot optique aux temps $t + 1/2$, donc entre deux images successives, en faisant l'approximation suivante :

$$\frac{\partial I(t + 1/2)}{\partial t} \simeq I(t + 1) - I(t) \quad (3.5)$$

Dans ce cas, nous devons également estimer les coefficients de gauche du système (S) au temps $t + 1/2$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{\mathbf{u}_s}^n, I(t + 1/2) \right\rangle$$

parce que nous ne connaissons les valeurs de I qu'aux temps entiers. On utilise pour cela l'approximation suivante :

$$I(t + 1/2) \simeq \frac{I(t) + I(t + 1)}{2} \quad (3.6)$$

À une échelle s donnée, ces approximations donnent les approximations de coefficients suivantes :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial I(t + 1/2)}{\partial t}, \psi_{\mathbf{u}_s}^n \right\rangle &\simeq \langle I(t + 1) - I(t), \psi_{\mathbf{u}_s}^n \rangle \\ \langle I(t + 1/2), \psi_{\mathbf{u}_s}^n \rangle &\simeq \left\langle \frac{I(t + 1) + I(t)}{2}, \psi_{\mathbf{u}_s}^n \right\rangle \end{aligned}$$

qui peuvent être réécrites après un changement de variables et une intégration par parties

$$\langle I(t + \frac{1}{2}), \mathbf{v} \cdot \nabla \psi_{\mathbf{u}_s}^n \rangle \simeq \langle I(t + \frac{1}{2}), \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} + \mathbf{v}/2) - \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} - \mathbf{v}/2) \rangle \quad (3.7a)$$

$$\langle I(t + \frac{1}{2}), \psi_{\mathbf{u}_s}^n \rangle \simeq \left\langle I(t + \frac{1}{2}), \frac{\psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} + \mathbf{v}/2) + \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} - \mathbf{v}/2)}{2} \right\rangle \quad (3.7b)$$

Chaque approximation (3.7a) ou (3.7b) est l'approximation d'une fonctionnelle linéaire de $L_2(\mathbb{R})$ par une autre. Nous imposons alors que les approximations

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi_{\mathbf{u}_s}^n \simeq \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} + \mathbf{v}/2) - \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} - \mathbf{v}/2) \quad (3.8a)$$

$$\psi_{\mathbf{u}_s}^n \simeq \frac{\psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} + \mathbf{v}/2) + \psi_{\mathbf{u}_s}^n(\mathbf{x} - \mathbf{v}/2)}{2} \quad (3.8b)$$

soit vérifiées.

En utilisant un développement de TAYLOR de ψ , nous pouvons prouver qu'il existe une constante M telle que la somme des erreurs relatives de (3.8a) et (3.8b) est inférieure à $M \times (|\mathbf{v}|/s)^2$. Cette somme a été estimée numériquement pour les ondelettes que nous allons utiliser par la suite (filtre décrit en (6.1b)), et si la contrainte

$$\boxed{|\mathbf{v}| \leq 0.42 \times s} \quad (3.9)$$

est vérifiée, les approximations (3.8a) et (3.8b) sont valides à une erreur relative de 15%. Nous verrons en 4.2.2 que cette gamme de déplacements pour laquelle la mesure est fiable peut être décentrée, comme cela est expliqué en 4.1.4.

Il faut remarquer que ce phénomène d'*aliasing* temporel est très général, apparaît dans toutes les méthodes de mesure du flot optique, et est mentionné par de nombreux auteurs [Jäh93]. Il faut aussi remarquer que c'est systématiquement ce problème qui motive le recours à une approche multi-échelles du flot optique dans par exemple [Ana89, BRRO94, SF95, WM95, MPM96]. À titre d'exemple, nous montrons comment ce problème d'*aliasing* temporel se manifeste pour les méthodes basées sur le filtrage spatio-temporel en figure 3.4, et d'une manière plus générale en 3.5.

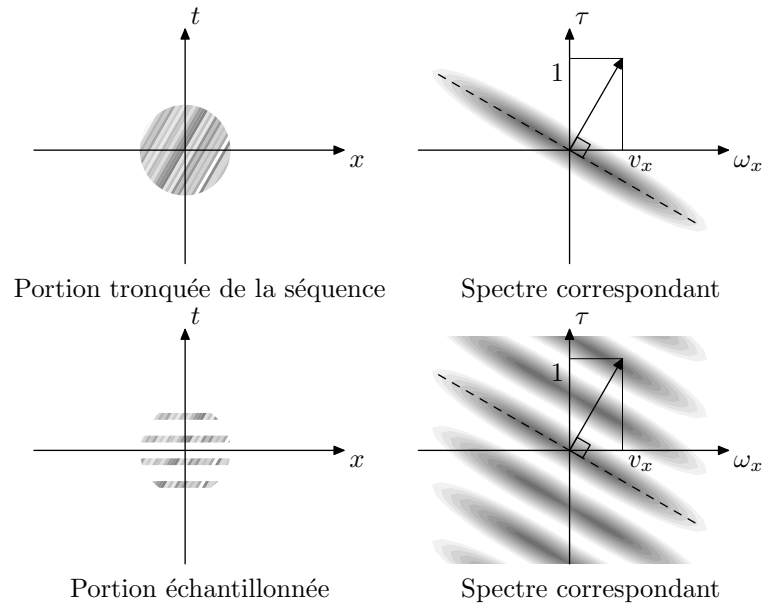


FIG. 3.4 – Ces graphiques illustrent l'*aliasing* temporel pour les méthodes de filtrage spatio-temporel. En haut à gauche, nous avons la séquence en déplacement uniforme de la figure 3.2 tronquée en temps et en fréquence. Le spectre correspondant (en haut à droite) est donc lisse. Si ensuite l'image est échantillonnée en temps (en bas à gauche), le spectre correspondant est alors périodisé en fréquence ω . L'*aliasing* se manifestera quand la vitesse sera telle que les hyperplans lissés s'inclinent suffisamment pour être confondus, auquel cas leur inclinaison ne plus être distinguée.

Si nous faisons les approximations (3.5) et (3.6), le système (S) discrétisé en temps

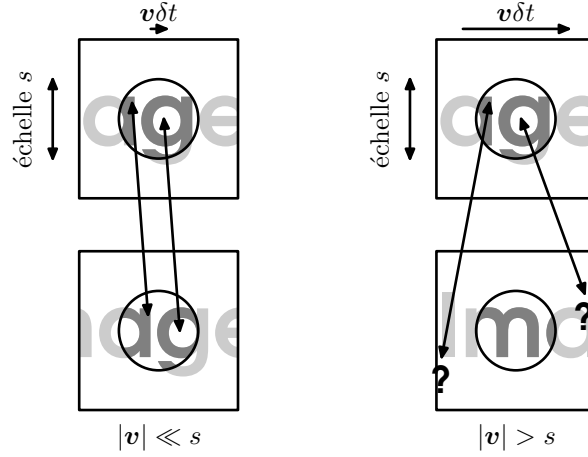


FIG. 3.5 – Ceci illustre le problème de l’aliasing temporel dans la mesure du flot optique. Si on considère des portions d’image de taille inférieure à s , on ne peut pas estimer de déplacement \mathbf{v} de longueur $|\mathbf{v}|$ supérieure à s car alors les deux portions d’images considérées n’ont rien en commun (à droite).

devient

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{I(t+1) + I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}s}^1}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell = \langle I(t+1) - I(t), \psi_{\mathbf{u}s}^1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{I(t+1) + I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{\mathbf{u}s}^N}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell = \langle I(t+1) - I(t), \psi_{\mathbf{u}s}^N \rangle \end{cases} \quad (\mathcal{DS})$$

où v_1 et v_2 sont la valeur supposée localement uniforme dans un voisinage de \mathbf{u} au $t + 1/2$ du flot optique.

Remarque

Il faut remarquer que l’approximation de la dérivée temporelle de l’image par une différence finie dans (3.5) doit être considérée dans un sens faible, puisque la fonction image n’est en général pas dérivable. Cependant, nous n’utilisons que des produits scalaires de la forme $\langle \nabla I, \psi \rangle$ ou $\langle I, \psi \rangle$. Dans ces produits scalaire, l’approximation de TAYLOR que nous faisons formellement porter sur l’image I dans (3.5) peut être transférée sur l’ondelette ψ dans (3.7a) et (3.8a), et comme ces ondelettes sont plusieurs fois dérivables, ces approximations de TAYLOR ont donc un sens.

Bibliographie

- [AB85] E. H. ADELSON et J. R. BERGEN. Spatiotemporal energy models for the perception of vision. *J. Opt. Soc. Amer.*, A2:284–299, 1985.
- [Ana89] P. ANANDAN. A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *International Journal of Computer Vision*, 2:283–310, 1989.
- [BA83] P. BURT et E. ADELSON. The Laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE. Trans. Communications*, 31:532–540, 1983.
- [BFB94] J. BARRON, D. FLEET et S. BEAUCHEMIN. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.
- [BRRO94] T. BURNS, S. ROGERS, D. RUCK et M. OXLEY. Discrete, spatiotemporal, wavelet multiresolution analysis method for computing optical flow. *Optical Engineering*, 33(7):2236–2247, 1994.
- [BYX83] P. BURT, C. YEN et X. XU. Multiresolution flow-through motion analysis. Dans *Proc. Conference Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 246–252. Washington, 1983.
- [CLF95] C. CLIFFORD, K. LANGLEY et D. FLEET. Centre-frequency adaptive IIR temporal filters for phase-based image velocity estimation. *Image Processing and its Applications*, 4(6):173–177, 1995.
- [FJ90] D. FLEET et A. JEPSON. Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5:77–104, 1990.
- [GD94] M. GÖKSTORP et P.-E. DANIELSSON. Velocity tuned generalized Sobel operators for multiresolution computation of optical flow. Dans *International Conference on Image Processing*, pages 765–769. 1994.
- [Hee88] D. HEEGER. Optical flow using spatiotemporal filters. *International Journal for Computer Vision*, 1:279–302, 1988.
- [HS80] B. HORN et B. SCHUNCK. Determining optical flow. Rapport technique A.I. Memo 572, Massachusetts Institute of Technology, 1980.
- [HS81] B. HORN et B. SCHUNCK. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–204, 1981.
- [Jäh93] B. JÄHNE. Spatio-temporal image processing. Dans *Lecture Notes in Computer Science*, tome 751. 1993.
- [MK98] J. MAGAREY et N. KINGSBURY. Motion estimation using a complex-valued wavelet transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 46(4):1069–1084, avril 1998.

- [MPM96] É. MÉMIN, P. PÉREZ et D. MACHECOURT. Dense estimation and object-oriented segmentation of the optical flow with robust techniques. Rapport technique 2836, Rapport de Recherches INRIA, France, 1996.
- [SF95] E. SIMONCELLI et W. FREEMAN. The steerable pyramid: a flexible architecture for multi-scale derivative computation. Dans *2nd Annual IEEE International Conference on Image Processing, Washington DC*. 1995.
- [Sim92] E. P. SIMONCELLI. Distributed representation of image velocity. Rapport technique 202, MIT Media Laboratory, 1992.
- [Sim98] E. P. SIMONCELLI. Bayesian multi-scale differential optical flow. Dans H. JÄHNE et GEISSLER, rédacteurs, *Handbook of computer vision and applications*. Academic Press, 1998.
- [WM95] J. WEBER et J. MALIK. Robust computation of optical flow in a multi-scale differential framework. *International Journal of Computer Vision*, 14(1):5–19, 1995.

Chapitre 4

Présentation de la méthode

4.1 Les ondelettes sont un outil d'analyse multi-échelles naturel

Comme le choix de l'échelle de dilatation s des fonctions ψ^n ne peut pas être fait a priori, nous allons utiliser un schéma de raffinement en échelles. Ceci suggère d'utiliser une base d'ondelettes comme fonctions de mesures puisqu'elle a naturellement une structure invariante par translations et dilatations discrètes, et les calculs de décomposition sont rapides.

Nous partons d'une famille d'ondelettes mères $(\psi^n)_{n=1\dots N}$ dans $L_2(\mathbb{R}^2)$. Nous définissons ensuite une famille d'ondelettes discrètes $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)_{n=1\dots N, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ par

$$\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) = 2^j \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$$

où j est un indice de résolution, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ un indice de translation à deux composantes, et \mathbf{x} la variable $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

EXEMPLE— En traitement d'images, une famille de trois ondelettes mères est couramment utilisée. Ces ondelettes sont construites comme produits tensoriels d'une fonction d'échelle $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ et d'une ondelette $\psi \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi^1(\mathbf{x}) = \psi(x_1)\phi(x_2) \tag{4.1a}$$

$$\psi^2(\mathbf{x}) = \phi(x_1)\psi(x_2) \tag{4.1b}$$

$$\psi^3(\mathbf{x}) = \psi(x_1)\psi(x_2) \tag{4.1c}$$

L'allure classique du spectre pour ces ondelettes est représenté en Fig. 4.1.

Il faut remarquer qu'une ondelette $\psi_{j\mathbf{k}}^n$ est localisée autour du point $(2^{-j}k_1, 2^{-j}k_2)$, et s'étend sur un support de taille proportionnelle à 2^{-j} .

Pour tout couple (j, \mathbf{k}) , nous obtenons donc N ondelettes d'échelle 2^{-j} et de centre $2^{-j}\mathbf{k}$: $\psi_{j\mathbf{k}}^n$, $n = 1 \dots N$. Nous pouvons faire les mêmes calculs que dans les équations (3.1)–(3.4). Pour chaque (j, \mathbf{k}) , nous obtenons alors un système local projeté de N équations qui

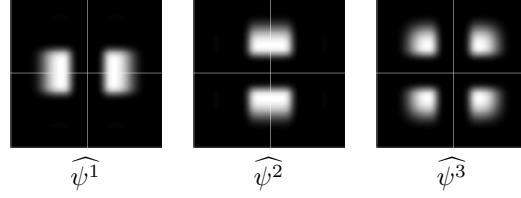


FIG. 4.1 – Spectre d'ondelettes 2D réelles standard

déterminent la valeur du flot optique autour de $2^{-j}\mathbf{k}$, supposée uniforme sur un domaine de rayon 2^{-j}

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^1}{\partial x_1} \right\rangle v_1 + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^1}{\partial x_2} \right\rangle v_2 = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi_{j\mathbf{k}}^1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^N}{\partial x_1} \right\rangle v_1 + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^N}{\partial x_2} \right\rangle v_2 = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi_{j\mathbf{k}}^N \right\rangle \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_{j\mathbf{k}})$$

Dans ce système, I et $\frac{\partial I}{\partial t}$ sont supposés être estimés au temps $t+1/2$ avec les formules (3.5) et (3.6) and le système peut donc être écrit de manière plus détaillée à l'instar de (\mathcal{DS}). Ainsi qu'il a été indiqué dans la section précédente, et plus particulièrement en (3.9), une mesure du flot ainsi obtenue ne sera fiable que si le déplacement \mathbf{v} est petit par rapport à 2^{-j} .

L'intérêt d'utiliser des ondelettes qui proviennent d'une analyse multi-résolutions est que tous les coefficients des systèmes peuvent être calculés par des jeux de filtrages et sous-échantillonnages. En effet,

- la partie gauche de ($\mathcal{S}_{j\mathbf{k}}$) est constituée de coefficients qui sont des coefficients d'ondelettes dérivées de l'image I , qui pourront être calculés en recourant à une analyse multi-résolutions dérivée (voir le chapitre A).
- la partie droite a des coefficients qui sont des coefficients d'ondelettes de la dérivée temporelle de l'image. Ils seront estimés par des différences entre coefficients d'ondelettes des deux images successives.

4.1.1 Bases et frames d'ondelettes

La théorie des ondelettes et des analyses multi-résolutions nous fournit des outils simples pour vérifier qu'une famille de coefficients d'ondelettes fournit une information complète sur l'image. Ceci se produit dès que la famille d'ondelettes considérée est une base ou un *frame* (ou plus généralement une famille redondante).

La redondance (ou au moins la représentation exacte à l'aide d'une base) est nécessaire pour garantir que nous ne perdons pas d'information en passant de l'équation du flot optique (OF) à l'ensemble des systèmes d'équations (3.1). Rien ne garantit en revanche que

nous ne risquons pas de perdre de l'information en essayant de résoudre des équations regroupées en petits nombres. En général, tant que l'image contient des textures suffisamment riches, nous pouvons raisonnablement espérer que la considération de petits systèmes locaux nous permettra d'estimer de manière fiable le mouvement.

Cet espoir risque d'être déçu dans quelques cas particuliers. Arrêtons-nous un instant sur l'exemple d'un motif régulier qui a un contenu fréquentiel très différent suivant les axes x_1 et x_2 , comme un motif

$$I(x,y) = \sin x_1 + \sin 10x_2 \quad (4.2)$$

Dans ce cas, nous ne pouvons pas mesurer le mouvement de ce motif en nous limitant à un système d'une échelle unique. Des ondelettes à une échelle j_1 auront une certaine bande fréquentielle, et ne « verront » par exemple que la composante $\sin x_1$ de la texture, i.e.

$$\langle \psi_{j_1 \mathbf{k}}^n, I \rangle = \langle \psi_{j_1 \mathbf{k}}^n, \sin x_1 \rangle$$

Cette composante étant invariante par translation, le système local correspondant est sous-déterminé.

À une autre échelle j_2 , les ondelettes ne verront cette fois que la deuxième composante de la texture, i.e.

$$\langle \psi_{j_2 \mathbf{k}}^n, I \rangle = \langle \psi_{j_2 \mathbf{k}}^n, \sin 10x_2 \rangle$$

qui est encore une fois une texture invariante par translation.

Il peut donc arriver qu'aucun système local ne puisse permettre de déterminer à lui seul le déplacement, bien que la texture elle-même n'étant pas invariante par translation, son déplacement soit en théorie mesurable. Pour contourner ce genre de problème, nous utiliserons une sorte de mémoire inter-échelles pour combiner des systèmes obtenus à différentes échelles sous formes de contraintes aux moindres carrés, ainsi que cela est détaillé en 4.1.4.

4.1.2 Convergence de l'estimation

Nous pouvons donner deux résultats de convergence. Le premier justifie l'approximation faite en supposant en 3.1 que le flot optique est constant sur le support des $\psi_{j \mathbf{k}}^n$. Nous écrivons le système des contraintes $\mathcal{S}_{j \mathbf{k}}$ de manière raccourcie

$$M_{j \mathbf{k}} \mathbf{v} = Y_{j \mathbf{k}} .$$

Nous supposons que la séquence d'images $I(t; \mathbf{x})$ est le produit du déplacement d'une image d'origine par un flot régulier

$$I(t; \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)) = I(0; \mathbf{x}) \quad \text{for all } \mathbf{x}, t \quad (4.3)$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est m fois continûment dérivable en (\mathbf{x}, t) . Remarquons que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} .$$

Le premier théorème affirme que nous pouvons contrôler l'erreur liée à l'hypothèse selon laquelle le flot est constant en espace.

Théorème 4.1

On suppose que $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ est une fonction L_2 et LIPSCHITZ- α en un point \mathbf{x}_0 . Nous supposons également que $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ n'est pas d'un degré de régularité LIPSCHITZ supérieur à α en \mathbf{x}_0 . Nous supposons enfin que la déformation $(\mathbf{x}, t) \mapsto \delta(\mathbf{x}, t)$ est $[\alpha] + 3$ fois continûment dérivable. Alors

1. Le vrai flot optique $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)$ (obtenu par dérivation du flot δ) en \mathbf{x}_0 au temps $t = 0$ satisfait le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^1}{\partial x_1} \right\rangle v_1(\mathbf{x}_0, 0) + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^1}{\partial x_2} \right\rangle v_2(\mathbf{x}_0, 0) + e_{j\mathbf{k}}^1 &= \left\langle \frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{t=0}, \psi_{j\mathbf{k}}^1 \right\rangle \\ \vdots & \vdots \\ \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^N}{\partial x_1} \right\rangle v_1(\mathbf{x}_0, 0) + \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^N}{\partial x_2} \right\rangle v_2(\mathbf{x}_0, 0) + e_{j\mathbf{k}}^N &= \left\langle \frac{\partial I}{\partial t} \Big|_{t=0}, \psi_{j\mathbf{k}}^N \right\rangle \end{cases} \quad (4.4)$$

écrit en bref

$$M_{j\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) + E_{j\mathbf{k}} = Y_{j\mathbf{k}}. \quad (4.5)$$

Il existe des suites $j_p \in \mathbb{Z}$, $j_p \rightarrow +\infty$, $\mathbf{k}_p \in \mathbb{Z}^2$ telles que

$$2^{-j_p} \mathbf{k}_p \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty$$

et le terme d'erreur $E_{j_p \mathbf{k}_p}$ est négligeable devant la norme de la matrice $M_{j_p \mathbf{k}_p}$ quand $p \rightarrow +\infty$

$$\frac{\|E_{j_p \mathbf{k}_p}\|}{\|M_{j_p \mathbf{k}_p}\|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty \quad (4.6)$$

2. S'il existe une sous-suite $q \mapsto p(q)$ telle que conditionnement de la matrice $M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}$ est borné, alors la solution \mathbf{v}_q du système

$$M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}} \mathbf{v}_q = Y_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}} \quad (4.7)$$

converge vers le vrai flot $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ quand $q \rightarrow +\infty$.

3. Si les matrices $M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}$ ne sont pas carrées, mais si leur conditionnement vis-à-vis de l'inversion à gauche $\sqrt{\text{cond } M^T M}$ est borné, alors on peut énoncer le même résultat en notant \mathbf{v}_q la solution de régression du système (4.7) qui est

$$\mathbf{v}_q = \left(M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}} \right)^{-1} M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}^T Y_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}$$

si bien que

$$\mathbf{v}_q \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) \quad \text{quand } q \rightarrow +\infty$$

La preuve de ce théorème est donnée en 5.2.1. Il faut remarquer que ce théorème garantit que la méthode différentielle projetée fournit une estimation asymptotiquement correcte du flot optique, si on suppose que l'on est en mesure d'estimer exactement la dérivée temporelle de l'image. Ce théorème ne traite donc pas de l'*aliasing* temporel. Un deuxième théorème également prouvé en 5.2.2 traite de l'*aliasing* temporel.

Théorème 4.2

Nous faisons les mêmes hypothèses sur le déplacement de l'image δ et sur la régularité de l'image en $t = 0$ qu'au théorème 4.1. Si pour un certain $\theta > 0$, t_j est une suite de d'intervalles de temps telle que $t_j = \mathcal{O}(2^{-j(1+\theta)})$ quand $j \rightarrow +\infty$, alors

1. le vrai flot $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)$ en \mathbf{x}_0 au temps $t = 0$ satisfait le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1,2} \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^1}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell(\mathbf{x}_0, 0) + e_{j\mathbf{k}}^1 &= \left\langle \frac{I(t_j) - I(0)}{t_j}, \psi_{j\mathbf{k}}^1 \right\rangle \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{\ell=1,2} \left\langle I, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^N}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell(\mathbf{x}_0, 0) + e_{j\mathbf{k}}^N &= \left\langle \frac{I(t_j) - I(0)}{t_j}, \psi_{j\mathbf{k}}^N \right\rangle \end{cases} \quad (4.8)$$

écrit en bref

$$M_{j\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) + E'_{j\mathbf{k}} = Y'_{j\mathbf{k}}. \quad (4.9)$$

Il existe des suites $j_p \in \mathbb{Z}$, $j_p \rightarrow +\infty$, $\mathbf{k}_p \in \mathbb{Z}^2$ telles que

$$2^{-j_p} \mathbf{k}_p \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \text{lorsque } p \rightarrow +\infty$$

et le terme d'erreur $E'_{j_p \mathbf{k}_p}$ est négligeable devant la norme de la matrice $M_{j_p \mathbf{k}_p}$ quand $p \rightarrow +\infty$.

$$\frac{\|E'_{j_p \mathbf{k}_p}\|}{\|M_{j_p \mathbf{k}_p}\|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } p \rightarrow +\infty \quad (4.10)$$

2. Si pour une sous-suite d'entiers $q \mapsto p(q)$, le conditionnement des matrices $M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}}$ est borné, alors la solution \mathbf{v}'_q du système

$$M_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}} \mathbf{v}'_q = Y'_{j_{p(q)} \mathbf{k}_{p(q)}} \quad (4.11)$$

converge vers le vrai flot $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ quand $q \rightarrow +\infty$. De même, si les matrices ne sont pas carrées et ont un conditionnement pour l'inversion à gauche également borné, on peut en dire de même des \mathbf{v}'_q pris comme solutions des systèmes de régression.

Remarques

- Le fait que le pas de temps doive être négligeable devant le pas de grille 2^{-j} provient évidemment de la contrainte d'*aliasing* temporel : le déplacement entre deux images doit être négligeable devant le pas de grille des ondelettes utilisées.

- Les hypothèses de régularité pour les deux théorèmes sont relativement fortes sur le flot de déplacement $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, t)$, mais sont en revanche faibles pour la régularité de l'image. On fait seulement l'hypothèse qu'on peut estimer la régularité LIPSCHITZ de l'image autour d'un point à $t = 0$. Ailleurs, la fonction peut être très irrégulière, tant qu'elle reste dans L_2 .

4.1.3 Résolution de systèmes sur-déterminés

Les systèmes linéaires locaux que nous construisons sont sur-déterminés : ils ont plus de contraintes que d'inconnues. Nous les écrivons de manière synthétique

$$MV = Y \quad (4.12)$$

où M est une matrice complexe de taille $n \times m$, V le vecteur des inconnues de taille $m \times 1$ et Y un vecteur complexe de taille $n \times 1$. L'entier m est soit 2, soit 3 suivant que nous mesurons l'illumination ($V = [v_1 v_2 L'/L]^T$) ou non ($V = [v_1 v_2]^T$).

Nous construisons le système des moindres carrés correspondant. Comme les matrices M et Y sont complexes mais que l'inconnue V est censée être réelle, ce système linéaire peut s'écrire comme un système réel :

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} M \\ \operatorname{Im} M \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} Y \\ \operatorname{Im} Y \end{bmatrix}$$

Ce système est sur-déterminé parce que $2n$ est en général bien plus grand que m . Le système des moindres carrés s'écrit donc

$$((\operatorname{Re} M)^* \operatorname{Re} M + (\operatorname{Im} M)^* \operatorname{Im} M)V = ((\operatorname{Re} M)^* \operatorname{Re} Y + (\operatorname{Im} M)^* \operatorname{Im} Y)$$

ce qui s'écrit plus simplement sous la forme

$$\operatorname{Re}(M^* M)V = \operatorname{Re}(M^* Y) \quad (4.13)$$

Plusieurs situations peuvent se présenter quand on résout un système pareil.

1. Si le système n'est pas de rang plein, il ne peut pas être résolu. Le problème d'ouverture demeure.
2. Si le système est de rang plein et a une solution V_0 , deux cas peuvent encore se présenter.
 - (a) Soit la solution V_0 est une solution acceptable pour le système original (4.12), i.e. $MV_0 = Y$, et alors on peut estimer que le flot est à peu près uniforme sur la zone considérée.
 - (b) Soit la solution V_0 n'est pas une solution acceptable du système original. Cela signifie que l'hypothèse faite que le flot est constant sur le support des ondelettes est fautive. Il varie vite ou est discontinu.

En pratique, la décision de savoir dans quelle situation nous nous trouvons est prise en comparant le conditionnement de $\operatorname{Re}(M^* M)$ avec un premier seuil, et en comparant ensuite le cas échéant l'erreur d'adéquation $\|MV_0 - Y\|$ avec un deuxième seuil. Cette erreur

d'adéquation nous indique dans quelle mesure notre hypothèse de constance du flot est fautive. Si elle est grande, cela signifie que nous nous trouvons sur un point de discontinuité du flot, ou encore de fort gradient. Si nous voulons faire de la segmentation de flot optique, nous aurons à distinguer ces deux situations. Nous devons enrichir notre modèle local d'image en utilisant un modèle localement linéaire, voire quadratique, qui peut être motivé par un modèle de mouvement solide tridimensionnel, comme l'indique KANATANI [Kan89] (voir Sec. 6.4).

4.1.4 Raffinement progressif des mesures

Nos systèmes locaux définissent une estimation du flot optique sur des grilles de résolutions variées 2^j . Les grilles correspondantes $\{2^{-j}(k_1, k_2)\}$ sont représentées sur la Fig. 4.2. En chaque nœud de ces grilles, nous avons donc un système local (\mathcal{S}_{jk}) . Le problème au-

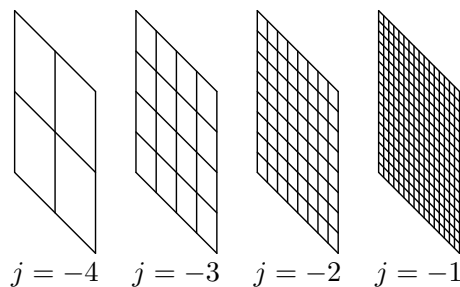


FIG. 4.2 – Grilles à différentes résolutions

quel nous nous attaquons maintenant est celui de savoir quelle stratégie nous devons utiliser pour combiner de l'information provenant de plusieurs résolutions pour construire une carte « aplatie » de flots à la plus fine résolution spatiale possible. Il faut savoir que les mesures à différentes résolutions ont des caractéristiques différentes :

- Les mesures de fine échelle ont (1) une résolution spatiale plus élevée et (2) reposent sur une hypothèse de régularité du flot plus faible.
- Cependant, les mesures d'échelles grossières sont moins sujettes à l'erreur d'*aliasing* temporel, comme indiqué en (3.9).

Dans ce travail, nous suivons la piste ouverte par différents auteurs [BYX83, Ana89, WM95, Sim98, MK98] qui consiste à combiner les informations provenant de plusieurs échelles différentes de la manière suivante : les grands déplacements sont mesurés d'abord, et à une échelle grossière. Ensuite, le mouvement ainsi mesuré est soustrait des images, afin que le mouvement résiduel puisse être mesuré à une échelle plus fine.

Supposons qu'une estimation du mouvement à une résolution $j-1$ fournit un mouvement $\tilde{\mathbf{v}}$. Ce mouvement $\tilde{\mathbf{v}}$ peut être décomposé de manière unique sous la forme d'une somme

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^N + \tilde{\mathbf{v}}^r$$

où

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}^N \in 2^{-j}\mathbb{Z}^2 \\ \tilde{\mathbf{v}}^r \in 2^{-j}[-0.5, 0.5]^2 \end{cases}$$

La raffinement de l'estimation à l'échelle j consiste alors à trouver le mouvement \mathbf{v} sous la forme $\tilde{\mathbf{v}}^N + \mathbf{v}^r$ où nous attendons du mouvement résiduel \mathbf{v}^r , qu'il ne soit beaucoup plus grand que l'ancien $\tilde{\mathbf{v}}^r$. Ce nouveau mouvement résiduel $\mathbf{v}^r = (v_1^r, v_2^r)$ est obtenu comme solution du système de N équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j, \mathbf{k}+2^j \tilde{\mathbf{v}}^N}^n}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle \right) v_1^r \\ + \frac{1}{2} \left(\left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j, \mathbf{k}+2^j \tilde{\mathbf{v}}^N}^n}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle \right) v_2^r \\ = \left\langle I(t+1), \psi_{j, \mathbf{k}+2^j \tilde{\mathbf{v}}^N}^n \right\rangle - \left\langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \quad (4.14) \end{aligned}$$

pour $n = 1 \dots N$.

Ces équations peuvent être comparées aux mêmes équations écrites en $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ quand aucune compensation de grands mouvements n'est faite (ce qui revient à poser $\tilde{\mathbf{v}}^N = 0$), et qui sont

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle \right) v_1 \\ + \frac{1}{2} \left(\left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle \right) v_2 = \left\langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle - \left\langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \quad (4.15) \end{aligned}$$

Ce schéma de raffinement est initialisé à une échelle grossière en utilisant une vitesse prédite $\tilde{\mathbf{v}}$ de 0.

Il faut remarquer que la compensation des grands mouvements n'est faite que partiellement : en multiples entiers du pas de grille courant, si bien qu'aucun calcul n'est nécessaire pour calculer des coefficients d'ondelettes d'indices de translation non entiers. En ceci, notre approche diffère des approches de SIMONCELLI et MAGAREY et KINGSBURY.

Le comportement d'un système local à une résolution j et une position $2^{-j}(k_1, k_2)$ donne une information sur l'image considérée et sur les déplacements de la nature suivante :

1. Si le système a une solution unique (v_1, v_2) , nous obtenons une solution directe pour le flot optique en $2^{-j}\mathbf{k}$. Ceci se produit si le modèle sous-jacent de flot optique est valide.
2. Si le système n'a pas de solution, cela signifie que notre hypothèse (A) est fautive. Dans ce cas, seules des mesures effectuées à plus fine échelle auront des chances de fournir une estimation correcte du flot. Une estimation de la vitesse aux moindres carrés est conservée pour faire de la compensation de grands mouvements.

Si notre région de mesure recoupe deux régions de l'image qui se déplacent à des vitesses différentes, nous avons à diviser la région de mesure en sous-régions, sur chacune desquelles on espère avoir un flot plus uniforme.

3. Si au contraire, le système a une infinité de solutions, cela signifie que la texture sur laquelle nous effectuons la mesure de mouvement est trop pauvre pour que nous puissions savoir à quelle vitesse elle se déplace.

Un cas typique est une texture invariante par translation, parce qu'il est alors impossible de mesurer son déplacement le long de son axe d'invariance.

En pratique, nous ne ferons aucune différence entre les cas 1 et 2. De plus, comme cela a été motivé en Sec. 4.1.1, nous allons combiner des contraintes sur le flot avec des contraintes qui proviennent d'échelles différentes. Si un système aux moindres carrés obtenu à l'échelle j est noté $A_j V = B_j$ où A_j est symétrique positive, nous combinons ce système avec celui provenant de la résolution précédente $A_{j-1} V = B_{j-1}$, et résolvons à l'échelle j le système

$$(A_j + \rho A_{j-1}) V = B_j + \rho B_{j-1} \quad (4.16)$$

Cette combinaison a un sens parce que résoudre un système $AV = B$ où A est symétrique définie positive est équivalent à minimiser la fonctionnelle quadratique $V \mapsto V^T AV - 2B^T V$, et résoudre le système ci-dessus consiste donc à minimiser une combinaison positive de deux telles fonctionnelles. En pratique, le coefficient ρ sera pris relativement petit, si bien que les contraintes aux moindres carrés provenant de la résolution précédente n'influencent la mesure à l'échelle j que si ces dernières sont trop faiblement coercives.

Comme garde-fou contre les erreurs d'*aliasing*, nous ajoutons un test a posteriori dans les cas 1 et 2. Nous ne rejetons les mesures (v_1^r, v_2^r) (ou (v_1, v_2)) si aucune compensation de grands déplacements n'est faite) dont l'amplitude dépasse un seuil fixé proportionnel à 2^{-j} .

Remarques

- Normalement, le système que nous récupérons d'une échelle plus grossière est exprimé en une inconnue qui est un autre déplacement résiduel, si bien qu'il faut faire un changement de variables affine sur ce système avant de le prendre en compte.
- La décomposition du déplacement en somme de déplacement de grande amplitude et de déplacement résiduel a un intérêt si le déplacement résiduel peut être mesuré sans erreur d'*aliasing* à une échelle plus fine. On ne peut garantir pour le déplacement résiduel qu'une chose : qu'il se trouve dans l'intervalle $2^{-j}[-0.5, 0.5]^2$. La limite d'*aliasing* en (3.9) ne permet a priori pas de mesurer tous ces déplacements. Cette gamme peut être étendue par sur-échantillonnage de la décomposition en ondelettes. Nous utilisons également une deuxième technique que nous allons bientôt décrire : le décentrement de la gamme de déplacements mesurables.

4.2 Ondelettes analytiques

Dans cette section, nous expliquons pourquoi l'usage d'ondelettes à valeurs réelles classiques ne permet pas de faire une mesure stable du flot optique, et motivons l'utilisation d'ondelettes analytiques. Nous verrons qu'en plus d'augmenter le nombre de contraintes sur le flot optique, elles permettent également de réduire l'effet de l'*aliasing* temporel. Nous allons brièvement rappeler quelques notations sur les fonctions analytiques et la transformation de HILBERT.

La transformation de HILBERT H s'applique de $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vers $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et peut être définie sur le domaine temporel ou fréquentiel par l'une des formules

$$\widehat{Hf}(\omega) = \hat{f}(\omega) \times \text{sign}(\omega) \quad (4.17a)$$

$$Hf = f * \left(\frac{2}{it} \right) \quad (4.17b)$$

Une fonction f de carré intégrable est analytique si son contenu fréquentiel dans les fréquences négatives est nul, ce qui revient à dire qu'elle est invariante par application de la transformation de HILBERT. La transformée analytique d'un signal f est $f^+ = f + Hf$. On peut remarquer que le signal original f , s'il est réel, peut être estimé à partir de f^+ par application de la partie réelle: $f = \text{Re } f^+$.

4.2.1 Stabilité de l'estimation

Des ondelettes à une variables classiques sont représentées avec leurs transformées de FOURIER en (4.3-a-d). Si nous utilisons les ondelettes ψ^1 , ψ^2 et ψ^3 définies en (4.1a-4.1c) pour calculer le flot optique, les coefficients du système d'équations (S) sont à valeurs réelles, et oscillants.

Pour ces raisons, ils s'annulent ou descendent fréquemment en deçà du seuil de bruit et la précision des mesures s'en ressent.

Pour mettre ce problème en évidence, nous revenons un instant au cas de la mesure du déplacement monodimensionnel. La mesure de vitesse s'écrit dans ce cas

$$v(k/2^j) \simeq \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int I(t; x) \psi_{jk}(x) dx}{\int I(t; x) \psi'_{jk}(x) dx} \quad (4.18)$$

où ψ est une ondelette réelle classique, représentée en figure (4.3-b,d). Nous notons ψ^+ l'ondelette analytique associée. Le dénominateur de (4.18) peut alors s'écrire

$$D(k/2^j) = [I(t) * \psi_{j0}] (k/2^j) \quad (4.19)$$

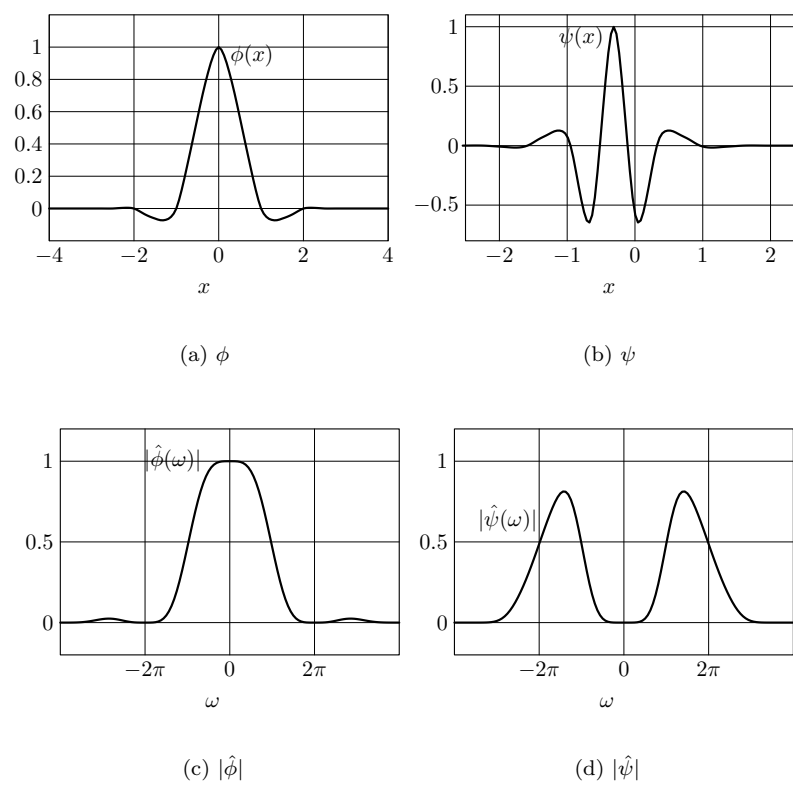
ou encore

$$D(k/2^j) = \text{Re} [I(t) * \psi_{j0}^+] (k/2^j) \quad (4.20)$$

Comme ψ^+ est analytique, $I(t) * \psi_{j0}^{+'}$ l'est aussi. Nous décomposons ce signal analytique en produit d'une amplitude et d'un terme de phase, comme cela est décrit dans [Mal97], chapitre 4 :

$$\left[I(t) * \psi_{j0}^{+'} \right] (k/2^j) = A(k/2^j) e^{i\theta(k/2^j)} \quad (4.21)$$

Dans cette décomposition, A est une fonction positive appelée amplitude analytique, et θ est la fonction de phase, dont la dérivée θ' est appelée fréquence instantanée.

FIG. 4.3 – ϕ , ψ et leurs transformées de FOURIER

Dans le cas où ψ est réelle dans (4.18), le dénominateur peut donc s'écrire comme la partie réelle du terme ci-dessus, et sa valeur absolue est donc

$$|D(k/2^j)| = A(k/2^j) |\cos \theta(k/2^j)| \quad (4.22)$$

Ce signal en cosinus oscille avec une fréquence de l'ordre de 2^j , ce qui signifie qu'il a toutes les chances de s'annuler ou être proche de 0 pour plusieurs entiers k . La figure 4.4-a montre que des valeurs échantillonnées de $|D(k/2^j)|$ peuvent être proches de 0 : estimer une fraction avec un tel dénominateur est aussi sûr que jouer à la *roulette russe*.

Regardons ce que donne maintenant un ondelette analytique ψ^+ à la place d'une ondelette réelle ψ . La formule qui donne v devient

$$v(k/2^j) \simeq \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int I(t; x) \psi_{jk}^+(x) dx}{\int I(t; x) \psi_{jk}^{+\prime}(x) dx} \quad (4.23)$$

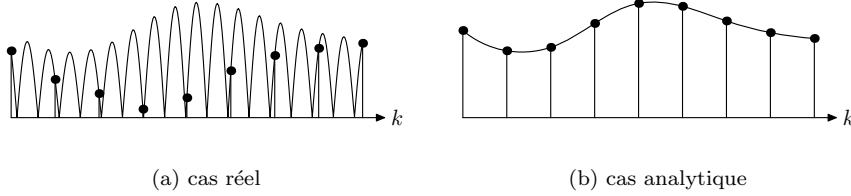


FIG. 4.4 – Échantillonnage de $|D(k/2^j)|$ dans les cas réel et analytique

Le dénominateur est donc maintenant

$$D(k/2^j) = A(k/2^j) e^{i\theta(k/2^j)} \quad (4.24)$$

et son module seulement $A(k/2^j)$. Ce nouveau dénominateur a maintenant moins de chances de s'annuler (cf Fig. 4.4-b).

Bien que l'argument ci-dessus ne soit formellement valable qu'en dimension 1, l'expérience a montré que le même problème apparaît en dimension 2. C'est un euphémisme de dire que les premiers résultats obtenus avec des ondelettes réelles n'étaient guère encourageants.

Ondelettes analytiques en dimension 2 Ceci nous suggère de remplacer les trois ondelettes réelles ψ^1 , ψ^2 et ψ^3 définies en (4.1a–4.1c) par les ondelettes suivantes

$$\Psi^1(\mathbf{x}) = \psi^+(x_1)\phi(x_2) \quad (4.25a)$$

$$\Psi^2(\mathbf{x}) = \phi(x_1)\psi^+(x_2) \quad (4.25b)$$

$$\Psi^3(\mathbf{x}) = \psi^+(x_1)\psi^+(x_2) \quad (4.25c)$$

$$\Psi^4(\mathbf{x}) = \psi^+(x_1)\psi^-(x_2) \quad (4.25d)$$

où $\psi^-(x) = \overline{\psi^+(x)}$.

Théorème 4.3

Si $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)_{n=1..3, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ est une base de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, alors la famille $(\Psi_{j\mathbf{k}}^n)_{n=1..4, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille redondante de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: il existe une borne positive M telle que

$$\sum_{j\mathbf{k}n} |\langle f, \Psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2 \geq M_1 \|f\|_2^2 \quad \text{pour toute } f \text{ de } L_2(\mathbb{R}^2) \quad (4.26)$$

Nous énonçons aussi un résultat de stabilité inverse : l'énergie des coefficients d'ondelettes analytiques d'une fonction f est bornée par un multiple fixe de l'énergie L_2 de cette fonction :

$$\sum_{j\mathbf{k}n} |\langle f, \Psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2 \leq M_2 \|f\|_2^2 \quad \text{pour toute } f \text{ de } L_2(\mathbb{R}^2) \quad (4.27)$$

Nous allons donner une preuve de (4.26) ci-dessous. La preuve de (4.27) est plus technique et est donc faite en 5.1.

Démonstration. En remarquant que

$$\begin{aligned} \langle \psi^1, I \rangle &= \operatorname{Re} \langle \Psi^1, I \rangle \\ \langle \psi^2, I \rangle &= \operatorname{Re} \langle \Psi^2, I \rangle \\ \langle \psi^3, I \rangle &= \operatorname{Re} \langle \Psi^3, I \rangle + \operatorname{Re} \langle \Psi^4, I \rangle \end{aligned}$$

nous avons

$$|\langle \psi^1, I \rangle|^2 + |\langle \psi^2, I \rangle|^2 \leq |\langle \Psi^1, I \rangle|^2 + |\langle \Psi^2, I \rangle|^2$$

et

$$\begin{aligned} |\langle \psi^3, I \rangle|^2 &\leq (\langle \Psi^3, I \rangle + \langle \Psi^4, I \rangle)^2 \\ &\leq 2 (\langle \Psi^3, I \rangle^2 + \langle \Psi^4, I \rangle^2) \end{aligned}$$

Ces deux inégalités impliquent que

$$\sum_{j\mathbf{k}n} |\langle f, \Psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{j\mathbf{k}n} \langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle^2$$

et le résultat est donc obtenu en tirant parti du fait que $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)$ est une base. \square

Remarque

Il faut remarquer que les ondelettes Ψ^n sont complexes. Elles ne sont donc pas dans $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et nous ne pouvons donc pas dire qu'elles constituent un frame de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On peut en revanche dire que

$$\{\operatorname{Re}(\Psi_{j\mathbf{k}}^n), \operatorname{Im}(\Psi_{j\mathbf{k}}^n) : n = 1 \dots N, j \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$$

est un frame de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, ou encore que

$$\left\{ \Psi_{j\mathbf{k}}^n, \overline{\Psi_{j\mathbf{k}}^n} : n = 1 \dots N, j \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

est un frame de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Ceci nous permet de garantir que la représentation de l'image obtenue par ces coefficients d'ondelettes complexes est complète, comme nous l'avons motivé dans la section 4.1.1.

Des fonctions de mesure analytiques sont également utilisées en filtrage spatio-temporel, où les filtres de vitesses sont analytiques [FJ90]. Il faut remarquer que la transformée de Hilbert est parfois aussi utilisée comme outil pour créer des filtres sensible à une gamme de vitesses donnée et non analytiques [WAA85, BRRO94].

En utilisant ainsi les ondelettes analytiques, nous intégrons de manière naturelle les informations de phase et d'énergie des filtres, et sortons du débat de savoir si l'une ou l'autre de ces deux informations est la mieux appropriée pour mesurer le flot optique. MAGAREY et KINGSBURY [MK98] motivent leur usage d'ondelettes analytiques avec des arguments similaires.

Des considérations psycho-physiques motivent également l'utilisation d'ondelette analytiques. DAUGMAN [Dau88] a identifié dans le système de vision des paires de filtres de GABOR avec un décalage de phase de $\pi/2$.

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2/2\sigma^2} \cos \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} \\ f_2 &= e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2/2\sigma^2} \sin \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

Une telle paire de filtres peut être considérée comme un unique filtre complexe

$$f = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2/2\sigma^2} e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.28)$$

qui a un spectre dissymétrique, et est une approximation de la transformée analytique de f_1 (pourvu que la norme du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ soit plus grande que la largeur de bande de la gaussienne qui est $1/\sigma$).

4.2.2 Décentrement de la gamme de déplacements mesurables avec des ondelettes analytiques

Nous pouvons voir l'erreur d'*aliasing* comme l'erreur d'approximation de la dérivée $\mathbf{v} \cdot \nabla I(\mathbf{x})$ par la différence finie $I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x} - \mathbf{v}\delta t)$. Dans le domaine fréquentiel, ceci revient à approcher une exponentielle complexe qui correspond à une translation dans le domaine spatial avec son développement de TAYLOR centré en 0, qui est $1 + i\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Nous rappelons que \mathbf{v} est le déplacement entre deux images successives $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ et nous notons $\boldsymbol{\omega}$ la variable de fréquence bidimensionnelle :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x} - \mathbf{v}\delta t) \\ \simeq \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \delta t \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega})(1 - e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}\delta t}) \\ \simeq \\ \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega}) \times (i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}\delta t) \end{array} \right.$$

Nous allons voir dans cette section que nous pouvons réduire l'impact de l'*aliasing* temporel en faisant un développement de TAYLOR décentré de $(1 - e^{i\omega \cdot \mathbf{v}\delta t})$.

Les ondelettes à valeurs réelles ont un spectre symétrique, i.e. $\hat{\psi}(\omega) = \overline{\hat{\psi}(-\omega)}$. Pour approcher $\hat{\psi}e^{i\mathbf{v}\cdot\omega}$ avec un développement de TAYLOR en ω , le choix le plus naturel consiste à faire un développement de $e^{i\mathbf{v}\cdot\omega}$ autour de $\omega = 0$. Les ondelettes analytiques, telles qu'elles sont décrites en (4.25a–4.25d) ont un spectre dissymétrique. Si nous utilisons un développement de TAYLOR de $e^{i\mathbf{v}\cdot\omega}$ non plus centré en 0 mais au barycentre du spectre de l'ondelette $\hat{\psi}$, l'erreur d'approximation sera sans aucun doute plus faible, parce que nous exploitons l'approximation de TAYLOR sur une boule de fréquences de rayon plus faible. Comparer les figures 4.5–a et 4.5–b qui illustrent ce fait en dimension 1.

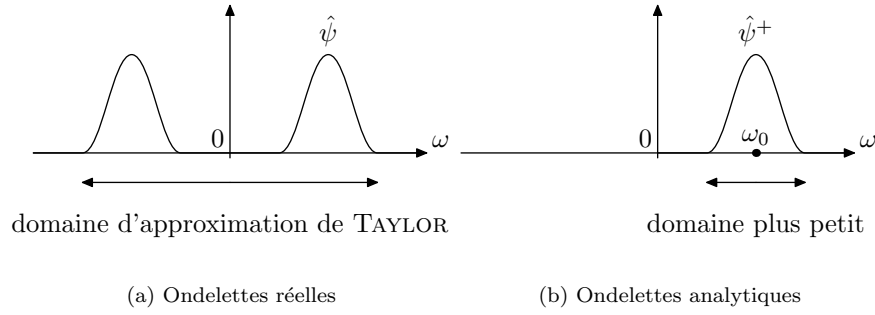


FIG. 4.5 – *Domaine fréquentiel où l'approximation de TAYLOR est utilisée (ondelettes monodimensionnelles). Nous remarquons qu'à gauche, le spectre de ψ est symétrique, et la meilleure approximation de $e^{i\mathbf{v}\omega}\hat{\psi}$ est sans doute un développement de TAYLOR centré en 0. À droite, le spectre de ψ^+ est supporté sur la demi-droite positive. Un développement de TAYLOR autour du centre ω_0 fournit donc une meilleure approximation de $e^{i\mathbf{v}\omega}\hat{\psi}$.*

Si nous regardons les équations du système (DS) avec une ondelette discrète $\psi_{j\mathbf{k}}^n$ au lieu de l'ondelette continue $\psi_{\mathbf{u}s}^n$, elles s'écrivent de manière compacte

$$\sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{I(t+1) - I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell = \langle I(t+1) - I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle \quad (4.29)$$

Regardons comment (4.29) peut être déduit par une approximation de TAYLOR d'ordre 1 autour de 0 en fréquence. Nous partons de

$$I(t+1/2; \mathbf{x}) = I(t+1; \mathbf{x} + \mathbf{v}/2) \quad (4.30)$$

et

$$I(t+1/2; \mathbf{x}) = I(t; \mathbf{x} - \mathbf{v}/2) \quad (4.31)$$

Nous déduisons de (4.31)

$$\begin{aligned}\langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle &= \langle \hat{I}(t), e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}/2} \hat{\psi}_{j\mathbf{k}}^n \rangle \\ \langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle &\simeq \left\langle \hat{I}(t), \left(1 + i\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2}\right) \hat{\psi}_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle\end{aligned}$$

par approximation de TAYLOR

$$\langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle \simeq \langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell \quad (4.32)$$

De (4.30), nous obtenons de manière similaire

$$\langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle \simeq \langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell \quad (4.33)$$

En comparant (4.33) et (4.32), nous obtenons finalement (4.29).

Si nous faisons maintenant les mêmes calculs en décentrant le développement de TAYLOR autour de $\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n$ (le centre fréquentiel de l'ondelette analytique $\psi_{j\mathbf{k}}^n$), nous obtenons après des calculs similaires

$$\begin{aligned}\langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle &\simeq \\ &e^{-i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n/2} \left((1 + i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n/2) \langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \left\langle I(t), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle I(t+1/2), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle &\simeq \\ &e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n/2} \left((1 - i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n/2) \langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \left\langle I(t+1), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell \right)\end{aligned}$$

qui donnent à nouveau par comparaison

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{e^{-i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t+1) + e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell \\ = e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} (1 - i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n) \langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle - e^{-i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} (1 + i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n) \langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle\end{aligned}$$

Nous rayons le terme $e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} (1 - i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n)$ et son conjugué, ce qui correspond à faire une approximation d'ordre 2, pour obtenir enfin

$$\sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{e^{-i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t+1) + e^{i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell = \langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle - \langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle \quad (4.34)$$

Cette formule permet d'approcher avec une précision meilleure le déplacement \mathbf{v} si nous sommes en mesure d'estimer $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n$. Cela semble contradictoire. Néanmoins, avec une estimation même grossière $\tilde{\mathbf{v}}$ de la vitesse obtenue par exemple avec (4.29) ou par une estimation à une échelle plus grossière, une estimation plus précise est obtenue en reprenant les équations (4.34) où les \mathbf{v} ont été remplacés par $\tilde{\mathbf{v}}$ dans toutes les exponentielles complexes :

$$\sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{e^{-i\tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t+1) + e^{i\tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{j\mathbf{k}}^n} I(t)}{2}, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle v_\ell = \langle I(t+1), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle - \langle I(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle \quad (4.35)$$

Nous appelons cette méthode « décentrement de la gamme de vitesses mesurables », parce qu'au lieu de pouvoir mesurer des vitesses dans une gamme $|\mathbf{v}| \leq \alpha 2^{-j}$, on les mesure fiablement dans une gamme $|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}| \leq \alpha 2^{-j}$ (pour des $2^j \tilde{\mathbf{v}}$ de norme raisonnable).

Il faut aussi remarquer qu'utiliser la formule d'origine (4.35) sans faire de décentrement revient à utiliser la formule (4.29) dans laquelle l'estimé a priori de la vitesse est 0. Une approximation même grossière $\tilde{\mathbf{v}}$ de la vitesse (par exemple à 30% près) fournit une mesure de la vitesse donc plus précise qu'une mesure non décentrée.

L'intérêt numérique de cette méthode a été vérifié sur une mesure de déplacement en deux échelles. La mesure d'échelle grossière est réinjectée pour décentrer la gamme de mesures fiables à l'échelle la plus fine. Les résultats sont consignés dans la figure 4.6, où ils sont comparés à une situation où aucun décentrement de gamme de mesure n'est effectué.

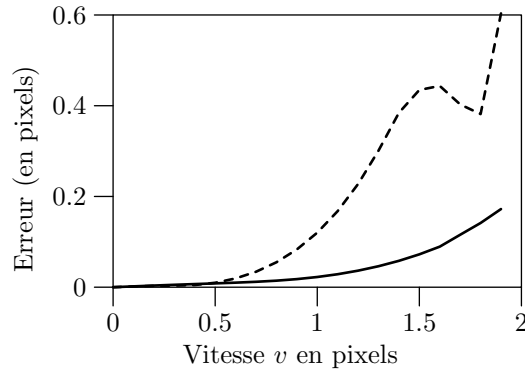


FIG. 4.6 – Gain en précision par le décentrement de gamme de fréquence. Erreurs moyennes de mesure du flot avec décentrement (trait continu) et sans décentrement (trait pointillé).

4.3 Ondelettes en bancs de filtres

Pour pouvoir calculer les coefficients de $(\mathcal{S}_{j\mathbf{k}})$ en un temps court, nous avons besoin d'ondelettes dont les coefficients puissent être calculés par une transformée rapide. Nous partons d'ondelettes séparables $\psi(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$, et nous pouvons donc baser notre construction sur cette d'ondelettes à une variable. Pour cela, nous allons utiliser tout le

cadre des analyses multirésolutions évoqué dans les premiers chapitres et décrit par Stéphane MALLAT en détail dans [Mal89b, Mal89a, Mal97].

Des coefficients d'ondelettes en dimension 1 peuvent être calculés avec une pyramide de filtrages et de sous-échantillonnages si l'ondelette est une convolution infinie de filtres à réponses impulsionnelles finies, ce qui s'écrit en domaine fréquentiel

$$\hat{\psi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} M_j \left(\frac{\omega}{2^j} \right) \quad (4.36)$$

où les M_j sont des polynômes trigonométriques. Pour des raisons d'efficacité, les M_j doivent être tous les mêmes, à l'exception des quelques premiers.

Nous montrons dans le chapitre A comment construire des bancs de filtres pour calculer des coefficients d'une ondelette dérivée. Dans cette section, nous allons principalement décrire des bancs de filtres pour des ondelettes analytiques.

4.3.1 Ondelettes analytiques en bancs de filtres

Nous ne pouvons pas utiliser la transformation de HILBERT pour calculer des coefficients d'ondelettes analytiques pour des raisons de coût de calcul. En effet, ceci signifierait qu'il faudrait utiliser des filtres de support infini, et de décroissance très lente à l'infini. Nous allons voir qu'il est possible d'approcher la transformée de Hilbert ψ^+ d'une ondelette réelle ψ par une ondelette presque analytique $\psi^\#$, dont les coefficients pourront eux être calculés avec des filtres de support fini.

4.3.2 Conception des filtres

L'ondelette $\psi^\#$ doit avoir presque toute son énergie concentrée sur le demi-axe des fréquences positives. De plus nous aimerions conserver la relation $\psi = \text{Re}(\psi^\#)$, de la même façon qu'avec l'ondelette « vraiment » analytique, nous avons $\psi = \text{Re}(\psi^+)$. Ainsi, le théorème 4.3 pourra s'étendre aux ondelettes bidimensionnelles construites avec $\psi^\#$ au lieu de ψ^+ .

Nous nous donnons une paire quelconque de filtres m_0 et m_1 qui peuvent être par exemple des filtres miroirs en quadrature D'ADELSON et SIMONCELLI [ASH87] ou MALLAT [Mal89a] ou plus généralement un filtre passe-haut et un filtre passe-bas. Nous définissons l'ondelette ψ comme une convolution infinie de ces filtres, ce qui s'écrit

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1 \left(\frac{\omega}{2} \right) \prod_{j=2}^{+\infty} m_0 \left(\frac{\omega}{2^j} \right) . \quad (4.37)$$

ψ et sa transformée de FOURIER sont représentées en (4.3–b,d).

Transformation presque analytique

Si maintenant, nous notons m_2 un filtre d'interpolation de DESLAURIERS–DUBUC, qui vérifie entre autres donc la relation

$$m_2(\omega) + m_2(\omega + \pi) = 2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \text{ et} \quad (4.38)$$

$$m_2(\omega) = m_2(-\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (4.39)$$

alors $\hat{\psi}^\#(\omega) = \hat{\psi}(\omega)m_2(\omega/4 - \pi/2)$ peut être considérée comme une bonne approximation de $\hat{\psi}^+(\omega)$ pour deux raisons :

- La majeure partie de l'énergie de ψ située dans le lobe de fréquence négative est écrasé par la multiplication par m_2 qui s'annule dans cette zone.
- Nous pouvons de plus récupérer l'ondelette originale ψ par extraction de la partie entière de $\psi^\#$:

$$\psi = \text{Re } \psi^\#$$

En effet,

$$\begin{aligned} \widehat{(\psi^\# + \overline{\psi^\#})}(\omega) &= \widehat{\psi^\#}(\omega) + \overline{\widehat{\psi^\#}(-\omega)} \\ &= \hat{\psi}(\omega) \times \left(m_2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + m_2\left(-\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2\hat{\psi}(\omega) \quad \text{grâce à (4.38–4.39)}. \end{aligned}$$

Cette relation nous permet d'étendre le théorème 4.3 au cas des ondelettes quasi analytiques. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.4

La famille des ondelettes presque analytiques définies de même qu'en (4.25–a–d) en remplaçant ψ^+ par $\psi^\#$ est un frame.

Une des inégalités du *frame* s'obtient exactement de la même manière que dans la preuve du théorème 4.3, tandis que l'autre est montrée en 5.1. Une construction similaire a été proposée par A. COHEN dans [Coh92]. Son approche diffère en ceci que tous les filtres passe bas sont modifiés (en des filtres de support infini) pour rendre l'ondelette presque analytique. Dans notre approche, seule une étape du filtrage en pyramide est modifiée.

Les transformées de FOURIER des ondelettes bidimensionnelles construites à partir des ondelettes presque analytiques selon les formules (4.25a–4.25d) n'ont plus qu'un seul pic fréquentiel significatif. Elles sont représentées en Fig. 4.8.

Schéma de filtrage en cascade

Les produits scalaires $\int I(x)\psi^\#(x)dx$ sont calculés de la même manière que des produits scalaires $\int I(x)\psi(x)dx$ à une étape de filtrage près. Par comparaison avec l'expression de $\hat{\psi}$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \times m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \times m_0\left(\frac{\omega}{8}\right) \times \dots ,$$

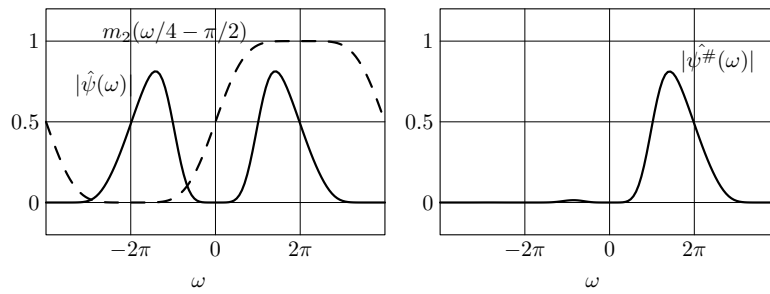
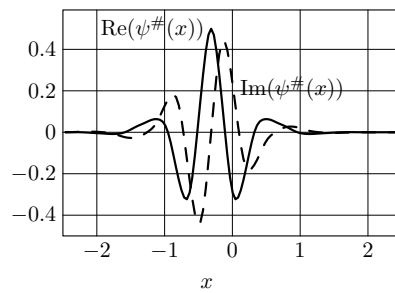
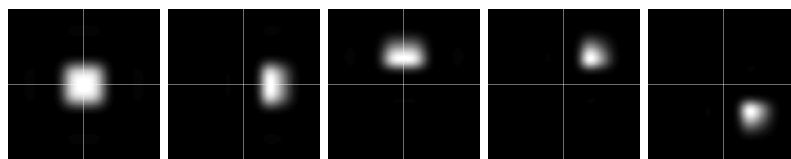
(a) $\hat{\psi}$ et $m_2(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4})$ (b) $|\hat{\psi}^\#|$ (c) $\psi^\#$ FIG. 4.7 – Approximation $\psi^\#$ de ψ^+ et sa transformée de FOURIER(a) ψ^0 (b) ψ^1 (c) ψ^2 (d) ψ^3 (e) ψ^4

FIG. 4.8 – Transformées de FOURIER des ondelettes analytiques bidimensionnelles

l'expression de $\psi^\#$ est

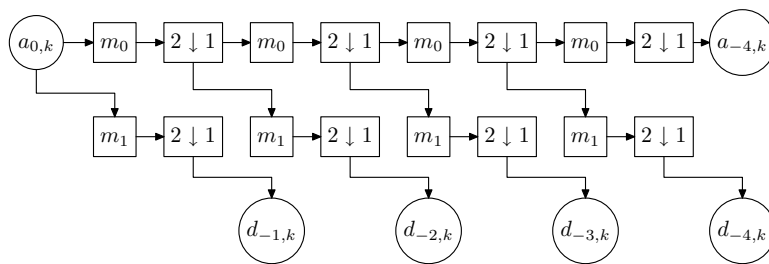
$$\widehat{\psi^\#}(\omega) = \widehat{\psi}(\omega) m_2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.40)$$

$$= m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \times \left[m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \underbrace{m_2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{filtre suppl.}} \right] \times m_0\left(\frac{\omega}{8}\right) \times m_0\left(\frac{\omega}{16}\right) \times \dots \quad (4.41)$$

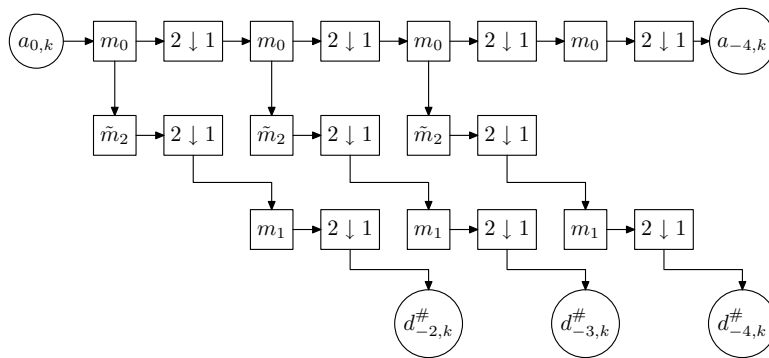
c'est à dire que le produit infini contient un unique terme de plus indiqué par une accolade. Si nous écrivons

$$\begin{aligned} a_{jk}[f] &= \langle f, \phi_{jk} \rangle \\ d_{jk}[f] &= \langle f, \psi_{jk} \rangle \\ d_{jk}^\#[f] &= \langle f, \psi_{jk}^\# \rangle \end{aligned}$$

le schéma de filtrage classique pour calculer les coefficients $d_{jk}[f]$ est indiqué en Fig. 4.9-a. On peut le comparer au schéma analytique modifié qui est représenté en Fig. 4.9-b. Les deux schémas sont représentés avec les conventions suivantes : les boîtes $\boxed{2 \downarrow 1}$ représentent un sous-échantillonnage, et les boîtes $\boxed{m_0}$ et similaires représentent des étapes de filtrage.



(a) Réel



(b) Analytique

FIG. 4.9 – Schémas de filtrage réel et analytique en 1D

Bibliographie

- [Ana89] P. ANANDAN. A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *International Journal of Computer Vision*, 2:283–310, 1989.
- [ASH87] E. ADELSON, E. SIMONCELLI et R. HINGORANI. Orthogonal pyramid transforms for image coding. Dans *Visual Communications and Image Processing II*, numéro 845 dans SPIE, pages 50–58. 1987.
- [BRRO94] T. BURNS, S. ROGERS, D. RUCK et M. OXLEY. Discrete, spatiotemporal, wavelet multiresolution analysis method for computing optical flow. *Optical Engineering*, 33(7):2236–2247, 1994.
- [BYX83] P. BURT, C. YEN et X. XU. Multiresolution flow-through motion analysis. Dans *Proc. Conference Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 246–252. Washington, 1983.
- [Coh92] A. COHEN. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Masson, 1992.
- [Dau88] J. DAUGMAN. Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 36(7):1169–1179, 1988.
- [FJ90] D. FLEET et A. JEPSON. Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5:77–104, 1990.
- [Kan89] K. KANATANI. *Group-theoretical methods in image understanding*. Springer Series in Information Sciences. Springer, 1989.
- [Mal89a] S. G. MALLAT. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(12):2091–2110, décembre 1989.
- [Mal89b] S. G. MALLAT. A theory for multiscale signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.
- [MK98] J. MAGAREY et N. KINGSBURY. Motion estimation using a complex-valued wavelet transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 46(4):1069–1084, avril 1998.
- [Sim98] E. P. SIMONCELLI. Bayesian multi-scale differential optical flow. Dans H. JÄHNE et GEISSLER, rédacteurs, *Handbook of computer vision and applications*. Academic Press, 1998.

- [WAA85] A. WATSON et J. A.J. AHUMADA. Model of human visual-motion sensing. *Journal of Optical Society of America*, 2(2):322–342, 1985.
- [WM95] J. WEBER et J. MALIK. Robust computation of optical flow in a multi-scale differential framework. *International Journal of Computer Vision*, 14(1):5–19, 1995.

Chapitre 5

Preuves de convergence

5.1 *Frame analytique*

Dans cette section, nous allons prouver que les ondelettes presque analytiques construites en 4.3.1 constituent des *frames*.

Une famille d'ondelettes $\psi_{j\mathbf{k}}^n$ est un *frame* si la double inégalité suivante est vérifiée

$$M_1 \|f\|_2^2 \leq \sum_{n=1}^N \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2 \leq M_2 \|f\|_2^2 \quad (5.1)$$

et ce pour des constantes M_1 et M_2 strictement positives fixées, et pour n'importe quelle fonction f de L_2 . Nous appellerons l'inégalité de gauche l'inégalité d'*ellipticité*, et celle de droite l'inégalité de *stabilité*.

Comme les familles d'ondelettes analytiques ou presque analytiques ont été construites de sorte à être redondantes, l'inégalité de gauche est simple à établir. Elle a été prouvée en Sec. 4.2 pour des ondelettes analytiques, et comme expliqué en Sec. 4.3.1, la preuve est identique pour les ondelettes presque analytiques définies en 4.3.1. On peut également remarquer que dans la preuve, on n'utilise pas le fait que la famille d'ondelettes de départ ψ soit orthogonale, mais seulement qu'elle constitue elle-même un *frame*.

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'inégalité de *frame* droite (dite de stabilité), que nous allons prouver pour des ondelettes analytiques ou presque analytiques sous une forme assez générale. Précisons quelques notations. Nous allons mentionner plusieurs filtres m_ℓ pour plusieurs indices ℓ . Pour un ℓ donné, m_ℓ désigne indifféremment le filtre discret (c'est-à-dire une suite discrète de réels) et sa transformée de FOURIER (une fonction 2π -périodique). La distinction se fera quand elle est nécessaire en utilisant des crochets ($m_\ell[k]$) pour désigner des valeurs de la suite discrète et des parenthèses ($m_\ell(\omega)$) pour désigner des valeurs de sa transformée de FOURIER. Ainsi, on peut écrire

$$m_\ell[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_\ell(\omega) e^{i\omega k} d\omega$$

Le *support* d'un tel filtre désignera par défaut le support temporel du filtre, et sera donc une partie de \mathbb{Z} .

Prouvons tout d'abord un lemme utile :

Lemme 5.1

Soit ψ une fonction de $L_2(\mathbb{R}^2)$, de transformée de FOURIER bornée. On suppose que $\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega})$ décroît suffisamment vite quand $|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty$ ou $|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$|\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega})| \leq \frac{C}{(1 + |\omega_x|)^s (1 + |\omega_y|)^s} \quad \text{pour un } s > 1/2 \quad (5.2)$$

$$|\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega})| \leq C' |\boldsymbol{\omega}|^\alpha \quad \text{pour un } \alpha > 0 \quad (5.3)$$

Alors, il existe une borne positive M_2 telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle \psi_{j\mathbf{k}}, f \rangle|^2 \leq M_2 \|f\|_2^2 \quad \text{pour toute } f \text{ dans } L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad (5.4)$$

Démonstration. Nous suivons la voie indiquée par Albert COHEN dans [Coh92]. Nous calculons l'énergie de bande j :

$$\begin{aligned} \sigma_j(f) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{j\mathbf{k}} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j\mathbf{k}} \rangle|^2 && \text{(PARSEVAL)} \\ &= \frac{2^{-j}}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\psi}(2^{-j}\boldsymbol{\omega}) e^{-i2^{-j}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega} \right|^2 \\ &= \frac{2^j}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(2^j\boldsymbol{\omega}) \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega} \right|^2 && \text{(Changement de variables)} \end{aligned}$$

Nous appliquons de nouveau la formule de PARSEVAL à la fonction périodisée de $L_2([0, 2\pi]^2)$

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)) \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)$$

pour obtenir

$$\sigma_j(f) = \frac{2^j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)) \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi) \right|^2 d\boldsymbol{\omega}$$

En choisissant un réel ρ de $[0, 2[$ tel que $\rho s > 1$, on écrit par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \sigma_j(f) &\leq \frac{2^j}{2\pi} \iint_{[0, 2\pi]^2} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi))| \times |\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)| \right|^2 d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{2^j}{2\pi} \iint_{[0, 2\pi]^2} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi))| \times |\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)|^{1-\rho/2} |\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)|^{\rho/2} \right|^2 d\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on obtient

$$\sigma_j(f) \leq \frac{2^j}{2\pi} \iint_{[0,2\pi]^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi))^2 \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)^{2-\rho} \right| \times \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi) \right|^\rho d\boldsymbol{\omega}$$

L'hypothèse de décroissance de $\hat{\psi}$ en (5.2) garantit que les sommes

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi) \right|^\rho d\boldsymbol{\omega}$$

sont bornées uniformément par un C'' . Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \sigma_j(f) &\leq C'' \frac{2^j}{2\pi} \iint_{[0,2\pi]^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi))^2 \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)^{2-\rho} \right| d\boldsymbol{\omega} \\ &= C'' \frac{2^j}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(2^j(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi))^2 \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{k}\pi)^{2-\rho} \right| d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{C''}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \right|^2 \times \left| \hat{\psi}(2^{-j}\boldsymbol{\omega}) \right|^{2-\rho} \end{aligned}$$

Les hypothèses (5.2) et (5.3) garantissent que la série

$$\sum_{J_1 \leq j \leq J_2} \left| \hat{\psi}(2^{-j}\boldsymbol{\omega}) \right|^{2-\rho}$$

converge pour $J_1 \rightarrow -\infty$ et $J_2 \rightarrow +\infty$ avec une vitesse géométrique, et que sa somme

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^{-j}\boldsymbol{\omega}) \right|^{2-\rho}$$

est bornée uniformément sur un anneau fréquentiel $A \leq |\boldsymbol{\omega}| \leq 2A$ par une constante C''' . Comme $S(2\boldsymbol{\omega}) = S(\boldsymbol{\omega})$, cette somme est bornée sur l'espace \mathbb{R}^2 tout entier par le même C''' .

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j(f) &\leq \frac{C'' C'''}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \right|^2 d\boldsymbol{\omega} \\ \text{et donc } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{j\mathbf{k}} \rangle|^2 &\leq \frac{C'' C'''}{2\pi} \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

et la preuve est terminée. \square

Si maintenant ϕ et ψ sont une fonction d'échelle et une ondelette définies par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\boldsymbol{\omega}) &= \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(\boldsymbol{\omega}/2^k) \\ \hat{\psi}(\boldsymbol{\omega}) &= m_1(\boldsymbol{\omega}/2) \hat{\phi}(\boldsymbol{\omega}/2) \end{aligned}$$

Nous supposons que m_0 est tel que $\hat{\phi}(\omega) = \mathcal{O}(1/|\omega|)$ quand $\omega \rightarrow \pm\infty$, ce qui est une hypothèse de régularité faible sur ϕ . Nous supposons aussi que m_1 est un filtre passe-haut de support fini, ce qui signifie que $m_1(\omega) = \mathcal{O}(\omega)$ quand $\omega \rightarrow 0$. Nous supposons enfin que

$$\{\psi_{jk_1}(x)\phi_{jk_2}(y), \phi(x)_{jk_1}\psi_{jk_2}(y), \psi_{jk_1}(x)\psi_{jk_2}(y) : j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

est une base inconditionnelle de $L_2(\mathbb{R}^2)$. Nous définissons alors

1. une ondelette à une variable $\psi^\#$, avec

$$\hat{\psi}^\#(\omega) = p(\omega)\hat{\psi}(\omega)$$

où p est soit la transformée de Fourier de la fonction de Hilbert $p(\omega) = 2 \times 1_{(\omega>0)}$ ou est définie par $p(\omega) = m_2(\omega/4 - \pi/2)$ où m_2 est le filtre décrit en 4.3.1 ;

2. une famille d'ondelettes à deux variables analytiques

$$\begin{aligned} \psi^1(\mathbf{x}) &= \psi^\#(x_1)\phi(x_2) & \psi^2(\mathbf{x}) &= \phi(x_1)\psi^\#(x_2) \\ \psi^3(\mathbf{x}) &= \psi^\#(x_1)\psi^\#(x_2) & \psi^4(\mathbf{x}) &= \psi^\#(x_1)\overline{\psi^\#(x_2)} \end{aligned}$$

et pour tout $n \geq 5$, $\psi^n(\mathbf{x}) = \overline{\psi^{n-4}(\mathbf{x})}$.

Nous pouvons maintenant énoncer

Théorèmes 4.3,4.4

La famille d'ondelettes (presque) analytiques $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)$ est un frame de $L_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Démonstration. Les hypothèses faites sur m_0 , m_1 et le fait que la fonction $\omega \mapsto p(\omega)$ soit bornée impliquent clairement que ψ^n satisfait les hypothèses (5.2) et (5.3) du lemme 5.1. Par conséquent, nous pouvons borner

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2$$

par un multiple fixé de $\|f\|_2^2$ pour tout n et donc écrire l'inégalité de stabilité

$$\sum_{n=1}^8 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle|^2 \leq M_2 \|f\|_2^2$$

Nous rappelons que l'inégalité d'ellipticité a déjà été montrée en Sec. 4.2, Th. 4.3 et la preuve est donc terminée. \square

Si la fonction f est réelle (ce qui est le cas des images), alors ce développement est inutilement redondant, puisqu'un coefficient $\langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle$ est le conjugué du coefficient $\langle f, \psi_{j\mathbf{k}}^{n+4} \rangle$ si $n \leq 4$. C'est pourquoi nous n'utilisons que les 4 premières ondelettes dans notre mesure du flot optique.

5.2 Consistance de l'estimation du flot optique

Dans cette section, nous prouvons que les approximations que nous faisons pour extraire le flot optique sont consistantes, ce qui signifie que les erreurs de ces approximations tendent asymptotiquement vers 0 quand le pas de temps et l'échelle de mesure tendent tous deux vers 0. La difficulté principale de ces preuves est de trouver une formulation pour exprimer le fait qu'une quantité est plus petite qu'une quantité de référence, quand on n'a pas de borne inférieure sur la quantité de référence, mais seulement une estimation de sa vitesse de décroissance à travers les échelles.

Pour estimer l'ordre de grandeur de coefficients d'ondelettes autour d'une singularité donnée, nous allons utiliser un théorème de JAFFARD qui lie la régularité LIPSCHITZ locale et la décroissance des coefficients. Nous rappelons qu'une fonction f de L_2 est LIPSCHITZ- α en un point \mathbf{x}_0 si et seulement si il existe un polynôme P tel que

$$|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha) \quad \text{lorsque } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (5.5)$$

Il faut remarquer que l'on peut limiter le choix de P à un polynôme (alors unique) de degré au plus $\lfloor \alpha \rfloor$. On peut également dire qu'une fonction f est exactement LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 si de plus¹ elle n'est pas LIPSCHITZ- α' pour un $\alpha' > \alpha$.

5.2.1 Erreur d'approximation d'un flot non uniforme par un flot uniforme

Nous prouvons dans cette section le théorème 4.1. Rappelons les hypothèses faites sur le modèle d'images. On suppose que la séquence est le résultat d'une déformation régulière $(\mathbf{x}, t) \mapsto \delta(\mathbf{x}, t)$ d'une image $I(0; \mathbf{x})$ au temps $t = 0$:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, t) \quad (5.6)$$

Nous supposons que $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ est localement L_2 et de régularité LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 , ce qui peut s'écrire

$$I(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha) \quad \text{lorsque } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (5.7)$$

où P est un polynôme de degré inférieur à α . Nous supposons également que $I(0)$ est exactement LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire LIPSCHITZ- α' pour aucun $\alpha' > \alpha$.

Comme $\delta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ for tout \mathbf{x} , la transformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, t)$ est inversible au temps $t = 0$, et est donc également inversible pour un intervalle de temps autour de 0 sur un voisinage fixé de \mathbf{x}_0 , par application du théorème d'inversion locale. Son inverse s'écrit

$$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} - \epsilon(\mathbf{y}, t)$$

Nous supposons que le déplacement est uniformément LIPSCHITZ- $(\alpha + 3)$ en (\mathbf{x}, t) (et donc $\lfloor \alpha \rfloor + 3$ fois continûment différentiable).

1. D'une manière générale, on pourrait appeler l'exposant LIPSCHITZ- α au point \mathbf{x}_0 la valeur critique de α telle que la fonction n'est pas LIPSCHITZ- α' pour un $\alpha' > \alpha$ et est LIPSCHITZ- α' pour tout $\alpha' < \alpha$. Nous n'irons pas à ce niveau de détail, afin d'éviter d'obscurcir notre exposé sans beaucoup gagner en généralité.

Au temps $t = 0$, le flot optique est la dérivée temporelle :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \left. \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \quad (5.8)$$

Dans ce cadre, l'hypothèse d'illumination constante s'écrit

$$I(t; \mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}, t)) = I(0; \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, t \quad (5.9)$$

et par dérivation, nous obtenons l'équation différentielle du flot optique

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

Le *frame* d'ondelettes que nous utilisons s'écrit $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)_{j\mathbf{k}n}$ et les ondelettes sont supposées avoir au moins $\lfloor \alpha \rfloor$ moments nuls. Nous supposons également que ce *frame* vérifie les hypothèses du théorème A.3, et que les ondelettes sont continûment différentiables et à support compact.

Dans un premier lemme, nous allons construire un système d'équations que le vrai flot optique satisfait à une erreur près que nous allons estimer.

Lemme 5.2

Soit α un réel positif. Si $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ est exactement LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 , alors nous avons pour n'importe quelle ondelette ψ^n l'équation du flot optique approchée suivante :

$$v_1(\mathbf{x}_0, 0) \left\langle I(0), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle + v_2(\mathbf{x}_0, 0) \left\langle I(0), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle + r(\psi^n, j, \mathbf{k}) = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}(0), \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \quad (5.11)$$

où

$$|r(\psi^n, j, \mathbf{k})| \leq M 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \quad (5.12)$$

et pour tout $\alpha' > \alpha$, il existe un réel N et des suites j_p , \mathbf{k}_p et n_p telles que

$$\begin{aligned} j_p &\rightarrow +\infty && \text{quand } p \rightarrow +\infty \\ 2^{-j_p} \mathbf{k}_p &\rightarrow \mathbf{x}_0 && \text{quand } p \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

et

$$\max_{\ell=1,2} \left| \left\langle \frac{\partial I(0)}{\partial x_\ell}, \psi_{j_p \mathbf{k}_p}^{n_p} \right\rangle \right| \geq N 2^{-j_p \alpha'} (1 + |2^{j_p} \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}_p|^{\alpha'}) \quad (5.13)$$

Démonstration. La preuve de (5.12) repose sur un développement de TAYLOR de \mathbf{v} autour de \mathbf{x}_0 . Un développement au premier ordre donne

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

où $R(\mathbf{x})$ est une matrice 2×2 et $\mathbf{x} \mapsto R(\mathbf{x})$ a un degré de régularité de moins que \mathbf{v} , c'est-à-dire qu'elle est $\lfloor \alpha \rfloor + 1$ fois différentiable.

Le produit scalaire de (5.10) avec les ondelettes $\psi_{j\mathbf{k}}^n$ donne

$$\iint \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla I(0; \mathbf{x}) \overline{\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + \iint \frac{\partial I(0; \mathbf{x})}{\partial t} \overline{\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0$$

Nous en tirons alors (5.11) si nous posons

$$r(\psi^n, j, \mathbf{k}) = - \iint [R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \cdot \nabla I(0; \mathbf{x}) \overline{\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

Par une intégration par parties, nous obtenons

$$r(\psi^n, j, \mathbf{k}) = \iint I(0; \mathbf{x}) \left[(R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot \nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) + [\nabla \cdot (R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))] \overline{\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})} \right] d\mathbf{x}$$

qui peut être découpé en la somme de deux termes r_1 et r_2 . La première moitié de cette intégrale est

$$r_1 = 2^j \iint I(0; \mathbf{x}) (R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})}{2^j} d\mathbf{x}$$

Comme les $2^{-j} \partial \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) / \partial x_\ell$ sont des ondelettes qui constituent un *frame* avec $\lfloor \alpha + 1 \rfloor$ moments nuls, et comme $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x}) R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ est LIPSCHITZ- $\alpha + 1$, le théorème de JAFFARD [Jaf91, Mal97] implique que

$$\left| \iint I(0; \mathbf{x}) (R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})}{2^j} d\mathbf{x} \right| \leq M 2^{-j(\alpha+2)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1})$$

et donc

$$|r_1| \leq M 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \quad (5.14)$$

Le deuxième terme r_2 est

$$\iint I(0; \mathbf{x}) [\nabla \cdot (R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))] \overline{\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

La partie gauche de l'intégrande

$$I(0; \mathbf{x}) [\nabla \cdot (R(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))]$$

étant LIPSCHITZ- α et les ondelettes $\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})$ ayant $\lfloor \alpha \rfloor$ moments nuls, nous pouvons utiliser encore le théorème de JAFFARD pour dire que

$$|r_2| \leq M' 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \quad (5.15)$$

Nous combinons finalement (5.14) et (5.15) pour affirmer qu'il existe une borne M telle que

$$|r(\psi^n, j, \mathbf{k})| \leq M 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1})$$

Pour prouver l'existence de suites j_p , \mathbf{k}_p et n_p qui satisfont l'équation (5.13), nous utilisons la réciproque du théorème de JAFFARD que nous appliquons à une suite de boules de centre \mathbf{x}_0 dont le rayon tend vers 0, et remarquons que $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ n'est pas LIPSCHITZ- $(\alpha + \alpha')/2$ en \mathbf{x}_0 . \square

Ce lemme montre qu'autour d'une singularité LIPSCHITZ d'ordre α , le flot optique réel satisfait un système d'équations de la forme :

$$M_{j\mathbf{k}}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + E_{j\mathbf{k}} = Y_{j\mathbf{k}} \quad (5.16)$$

où pour des suites j_p, \mathbf{k}_p telles que j_p tend vers $+\infty$ et $2^{-j_p}\mathbf{k}_p$ tend vers \mathbf{x}_0 , le rapport

$$\begin{aligned} \frac{\|E_{j_p\mathbf{k}_p}\|}{\|M_{j_p\mathbf{k}_p}\|} &\leq \frac{M}{N} 2^{-j(\alpha+1-\alpha')} \frac{1 + |\mathbf{k}_p - 2^{j_p}\mathbf{x}_0|^{\alpha+1}}{1 + |\mathbf{k}_p - 2^{j_p}\mathbf{x}_0|^{\alpha'}} \\ &\leq \frac{M}{N} 2^{-j_p(\alpha+1-\alpha')} \left(1 + \frac{|\mathbf{k}_p - 2^{j_p}\mathbf{x}_0|^{\alpha+1}}{1 + |\mathbf{k}_p - 2^{j_p}\mathbf{x}_0|^{\alpha'}} \right) \\ &\leq \frac{M}{N} 2^{-j_p(\alpha+1-\alpha')} \left(1 + |\mathbf{k}_p - 2^{j_p}\mathbf{x}_0|^{\alpha+1-\alpha'} \right) \\ &= \frac{M}{N} \left(2^{-j_p(\alpha+1-\alpha')} + |2^{-j_p}\mathbf{k}_p - \mathbf{x}_0|^{\alpha+1-\alpha'} \right) \end{aligned}$$

et tend donc vers 0 quand p tend vers l'infini si α' est dans l'intervalle $]\alpha, \alpha + 1[$. Nous avons donc prouvé la première assertion du théorème 4.1.

Nous nous attaquons maintenant à la deuxième partie :

Théorème 4.1–partie 2

S'il existe une suite d'entiers croissante $q \mapsto p(q)$ telle que les matrices carrées $M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$ aient un conditionnement borné quand $q \rightarrow +\infty$, alors les vitesses $\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$ solutions des systèmes

$$M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} = Y_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \quad (5.17)$$

convergent vers le vrai flot $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$.

Démonstration. Nous écrivons la différence entre les équations (5.16) et (5.17), pour obtenir

$$M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}) = -E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$$

et en notant « $\text{cond}(M)$ » le conditionnement de la matrice M , nous avons

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| \leq \text{cond}(M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}) \frac{\|E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}{\|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}$$

et l'erreur d'estimation tend donc vers 0. \square

Ce résultat peut être étendu au cas plus réaliste où les matrices $M_{j\mathbf{k}}$ ne sont pas carrées, mais ont plus de lignes que de colonnes. Dans ce cas, le conditionnement est supposé être le conditionnement vis-à-vis de l'inversion à gauche, i.e. $\text{cond}(M) = \sqrt{\text{cond}(M^T M)}$, et la solution $\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$ du système (5.17) est la solution aux moindres carrés du système :

$$\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} = \left(M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \right) M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T Y_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$$

si bien que nous pouvons énoncer

Théorème 4.1–partie 3

S'il existe une suite croissante $q \mapsto p(q)$ telle que les matrices $M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$ ont un conditionnement borné vis-à-vis de l'inversion à gauche quand $q \rightarrow +\infty$, alors la vitesse $\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$ solution de régression du système

$$M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} = Y_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \quad (5.18)$$

converge vers $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$.

Démonstration. La preuve s'écrit d'une manière similaire à celle de la deuxième partie du théorème. En multipliant (5.16) à gauche par $M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T$, on obtient

$$M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} + M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} = M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T Y_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$$

et en retranchant (5.18)

$$M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} (\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}) = -M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}$$

Ceci nous fournit la borne

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| \leq \text{cond}(M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}})^2 \frac{\|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}{\|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}$$

et comme

$$\begin{cases} \|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| & \leq \|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| \times \|E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| \\ \|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}^T M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| & = \|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|^2 \end{cases}$$

nous obtenons

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\| \leq \text{cond}(M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}})^2 \frac{\|E_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}{\|M_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}}\|}$$

Donc,

$$\mathbf{v}_{j_{p(q)}\mathbf{k}_{p(q)}} \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \quad \text{quand } q \rightarrow +\infty$$

□

Les résultats énoncés dans le théorème 4.1 sont faibles dans la mesure où ils ne peuvent garantir mieux que l'existence d'une sous-suite qui est susceptible de nous donner une estimation correcte du flot optique. Il est clairement impossible d'énoncer un résultat plus fort, comme l'exemple suivant nous le montre en dimension 1.

Considérons un motif $I(x)$ qui soit 1.5-LIPSCHITZ en 0 : $I(x) = x\sqrt{|x|}$, et un flot de déplacement $v(x) = v_0 + ax$ pour des constantes a et v_0 . Supposons que nous utilisons une ondelette réelle impaire ψ (i.e. $\psi(-x) = -\psi(x)$). La « matrice » M_{jk} est nulle pour

tous $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0$ parce qu'elle s'écrit comme l'intégrale d'une fonction impaire. L'erreur d'estimation est cependant

$$\begin{aligned}
 E_{j0} &= \int x\sqrt{|x|}\psi_{j0}dx \\
 &= a2^{j/2} \int x\sqrt{|x|}\psi(2^jx)dx \\
 &= a2^{-j/2} \int 2^{-j}x\sqrt{|2^{-j}x|}\psi(x)dx \\
 &= a2^{-2j} \int x|x|^{1/2}\psi(x)dx \\
 &= a2^{-2j}E_{00}
 \end{aligned}$$

Il existe une ondelette impaire telle que E_{00} soit non nulle ce qui signifie que pour tout j , le rapport $\|E_{j0}\|/\|M_{j0}\|$ est infini. Nous ne pouvons pas espérer utiliser une seule de ces mesures pour estimer le flot. Le théorème ceci-dessus est vrai, car la mesure sera possible par des mesures d'indices k non nuls tels que $2^{-j}k$ tende vers 0.

Jusque là, nous avons estimé l'erreur de mesure en négligeant l'erreur d'*aliasing*, c'est-à-dire en supposant que la dérivée temporelle de l'image nous était accessible. Nous allons maintenant voir ce qui se passe quand nous devons estimer la dérivée temporelle de l'image par une différence finie.

5.2.2 Erreur d'*aliasing*

L'erreur d'*aliasing* est causée par l'approximation de la dérivée temporelle de l'image par une différence finie. Pour limiter le nombre d'équations et pour ne pas écrire de preuves illisibles, nous nous limitons au cas simple de l'approximation de la dérivée par une différence finie du premier ordre

$$\frac{\partial I}{\partial t} \simeq \frac{I(t + \delta t) - I(t)}{\delta t}$$

et n'étudions pas celle que nous utilisons dans notre implémentation (cf Equ. (3.5) et (3.6)), mais les preuves seraient semblables.

Nous commençons par énoncer quelques lemmes. Le lemme 5.3 estime l'impact sur les coefficients d'ondelettes d'une fonction d'une déformation régulière de cette fonction et c'est dans ce lemme que se concentrent les calculs les plus techniques. Le lemme 5.4 garantit l'existence d'un système linéaire dont le vrai flot optique est la solution, dans le même esprit que le lemme 5.2.

Lemme 5.3

Soit $(t, \mathbf{x}) \mapsto X_t(\mathbf{x})$ une application $\lfloor \alpha \rfloor + 3$ fois continûment dérivable définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\mathbf{x} \mapsto X_t(\mathbf{x})$ soit inversible pour tout t et telle que $X_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Soit f une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 . Soit $(\Psi_{j\mathbf{k}}^n)$ une frame d'ondelettes avec $[\alpha] + 1$ moments nuls. Il existe $M > 0$, $j_0 \in \mathbb{Z}$, $\eta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que

$$\iint (f(X_t(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} \leq M \left(2^{-j(\alpha+2)} + |t| 2^{-j\alpha} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right) \quad (5.19)$$

pour $j > j_0$, $|2^{-j} \mathbf{k} - \mathbf{x}_0| < \eta$ et $|t| \leq t_0 2^{-j}$.

Démonstration. Comme f est LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 , on peut écrire

$$f(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$$

où P est un polynôme de degré inférieur à α et $|r(\mathbf{x})| \leq M |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha$ pour un $M \in [0, +\infty[$.

Le terme de gauche de (5.19) peut alors s'écrire

$$\iint (f(X_t(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

où

$$\mathcal{A} = \iint (P(X_t(\mathbf{x})) - P(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et

$$\mathcal{B} = \iint (r(X_t(\mathbf{x})) - r(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Comme Ψ^n a $[\alpha] + 1$ moments nuls,

$$\mathcal{A} = \iint P(X_t(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Comme l'application $\mathbf{x} \mapsto P(X_t(\mathbf{x}))$ est uniformément LIPSCHITZ- $\alpha + 3$, elle est aussi uniformément LIPSCHITZ- $\alpha + 1$, ce qui signifie

$$\mathcal{A} \leq M' 2^{-j(\alpha+2)} \quad (5.20)$$

Pour majorer \mathcal{B} , nous écrivons

$$\mathcal{B} = \iint r(X_t(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint r(\mathbf{x}) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Par le changement de variables $\mathbf{x} \mapsto X_t^{-1}(\mathbf{x})$, et en écrivant

$$K(\mathbf{x}, t) = \det \left(\frac{\partial X_t^{-1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right)$$

nous obtenons

$$\mathcal{B} = \iint (K(\mathbf{x}, t) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(X_t^{-1}(\mathbf{x})) - I_2 \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})) r(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Notons que K est $[\alpha] + 2$ fois continûment différentiable, et que de plus $K(\mathbf{x}, 0) = 1$ pour tout \mathbf{x} . \mathcal{B} peut de nouveau être découpé en la somme de deux termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \iint K(\mathbf{x}, t) (\Psi_{j\mathbf{k}}^n(X_t^{-1}(\mathbf{x})) - \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})) r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \iint (K(\mathbf{x}, t) - 1) \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \end{aligned}$$

\mathcal{B}_2 est majoré par

$$\mathcal{B}_2 \leq |t| M'' \iint |\Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})| \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha d\mathbf{x} \quad (5.21)$$

$$= |t| M'' 2^{-j} \iint |2^{-j} \mathbf{y} + 2^{-j} \mathbf{k} - \mathbf{x}_0|^\alpha \Psi^n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (5.22)$$

$$\leq 2^\alpha |t| M'' 2^{-j(\alpha+1)} \left(\iint |\mathbf{y}|^\alpha |\Psi^n(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha \iint |\Psi^n(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right) \quad (5.23)$$

$$\leq |t| M''' 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)$$

où (5.21) implique (5.22) par un changement de variables $\mathbf{y} = 2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}$ et (5.23) en remarquant que $(a + b)^\alpha \leq 2^\alpha (a^\alpha + b^\alpha)$ pour $a > 0, b > 0$.

Un calcul similaire fournit une borne sur \mathcal{B}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\leq M \iint |\Psi_{j\mathbf{k}}^n(X_t^{-1}(\mathbf{x})) - \Psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})| \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha d\mathbf{x} \\ &= M 2^j \iint |\Psi^n(2^j X_t^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}) - \Psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})| \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha d\mathbf{x} \\ &= M 2^{-j(\alpha+1)} \iint |\Psi^n(2^j X_t^{-1}(2^{-j}(\mathbf{y} + \mathbf{k}))) - \Psi^n(\mathbf{y})| \times |\mathbf{y} + \mathbf{k} - 2^j \mathbf{x}_0|^\alpha d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Nous remarquons d'abord que si $t \leq t_0 2^{-j}$,

$$\mathbf{y} \mapsto |\Psi^n(2^j X_t^{-1}(2^{-j}(\mathbf{y} + \mathbf{k})) - \mathbf{k}) - \Psi^n(\mathbf{y})|$$

est de support borné. Deuxièmement, si le support de l'ondelette $\Psi_{j\mathbf{k}}^n$ est dans un voisinage de \mathbf{x}_0 (ce qui revient à supposer que j est assez grand et $|2^{-j} \mathbf{k} - \mathbf{x}_0|$ assez petit), nous pouvons écrire

$$|\Psi^n(2^j X_t^{-1}(2^{-j}(\mathbf{y} + \mathbf{k})) - \mathbf{k}) - \Psi^n(\mathbf{y})| \leq M 2^j |X_t^{-1}(2^{-j}(\mathbf{y} + \mathbf{k})) - 2^{-j}(\mathbf{y} + \mathbf{k})| \leq M' 2^j |t|$$

pour un certain M' , si bien que finalement nous obtenons par intégration

$$\mathcal{B}_1 \leq M'' 2^{-j\alpha} |t| (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)$$

et la majoration de \mathcal{B}

$$\mathcal{B} \leq M 2^{-j\alpha} |t| (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \quad (5.24)$$

pour un autre M .

Pour conclure, nous combinons les bornes sur \mathcal{A} et \mathcal{B} pour obtenir (5.19) :

$$\iint (f(X_t(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})) \Psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} \leq M \left(2^{-j(\alpha+2)} + |t| 2^{-j\alpha} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right) \quad (5.19)$$

□

Lemme 5.4

Soit α un réel positif. Supposons que $\mathbf{x} \mapsto I(0; \mathbf{x})$ soit exactement LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 . Il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 > 0$, $C > 0$ et $M \geq 0$ tels que si $j > j_0$, $\delta t \in [0, 2^{-j} t_0]$ et $|\mathbf{x}_0 - 2^{-j} \mathbf{k}| \leq C$, alors

$$v_1(\mathbf{x}_0, 0) \left\langle I(0), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_1} \right\rangle + v_2(\mathbf{x}_0, 0) \left\langle I(0), \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_2} \right\rangle + r'(\psi^n, j, \mathbf{k}) = \left\langle \frac{I(\delta t) - I(0)}{\delta t}, \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \quad (5.25)$$

où

$$|r'(\psi^n, j, \mathbf{k})| \leq M \left(2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) + |\delta t| 2^{-j(\alpha-1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right) \quad (5.26)$$

Démonstration. Le lemme 5.2 peut être appliqué à l'image $I(t)$ pour n'importe quel temps t , où la position \mathbf{x}_0 soit être remplacée par la nouvelle position correspondante où I est encore LIPSCHITZ- α , i.e. $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t)$. Nous pouvons écrire l'équation (5.11) pour tout temps t comme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \cdot \iint \nabla I(t; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} + r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t) = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}(t), \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle$$

où

$$|r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t)| \leq M 2^{-j(\alpha+2)} (1 + |2^j(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t)) - \mathbf{k}|^\alpha)$$

Dans cette inégalité, nous pouvons supposer que M est indépendant de t sur un intervalle de temps et d'espace fini autour de \mathbf{x}_0 .

Cette inégalité peut être intégrée en temps pour donner

$$\int_0^{\delta t} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \cdot \iint \nabla I(t; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} dt + \int_0^{\delta t} r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t) dt = \langle I(\delta t) - I(0), \psi_{j\mathbf{k}}^n \rangle$$

Nous pouvons maintenant écrire (5.25)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \iint \nabla I(0) \psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} + r'(\psi^n, j, \mathbf{k}, \delta t) = \left\langle \frac{I(\delta t) - I(0)}{\delta t}, \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle$$

où le reste r' s'écrit

$$r' = \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t) dt + \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} \left(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \iiint \nabla I(t; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) \iiint \nabla I(0; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) dt$$

Nous devons maintenant majorer ce reste. Nous l'écrivons $r' = r'_1 + r'_2$. Le sort du premier terme r'_1 est vite réglé :

$$|r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t)| \leq M 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t)) - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \quad \text{par le lemme 5.2}$$

En remarquant que $|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)| \leq M'|t|$ et que $(a+b)^\alpha \leq 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$ pour tous $a, b > 0$ et $\alpha > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t)| &\leq M' 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j t|^{\alpha+1} + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \\ &\leq M'' \left(|t|^{\alpha+1} + 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \right) \end{aligned}$$

et par intégration

$$\begin{aligned} |r'_1| &\leq \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} |r(\psi^n, j, \mathbf{k}, t)| dt \\ &\leq M''' \left(|t|^{\alpha+1} + 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \right) \end{aligned}$$

Comme nous supposons que $|t| \leq t_0 2^{-j}$, nous pouvons simplifier cette majoration par

$$|r'_1| \leq M 2^{-j(\alpha+1)} (1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) \quad (5.27)$$

Le deuxième terme r'_2 s'écrit

$$r'_2 = \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} \left(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \iiint \nabla I(t; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) \iiint \nabla I(0; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) dt$$

L'intégrande peut s'écrire

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \iiint (\nabla I(t; \mathbf{x}) - \nabla I(0; \mathbf{x})) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\mathcal{C})$$

$$+ (\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)) \iiint \nabla I(0; \mathbf{x}) \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\mathcal{D})$$

Par une intégration par parties

$$\mathcal{D} = -(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)) \iiint I(0; \mathbf{x}) \nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Nous remarquons que $(2^{-j} \partial \psi_{j\mathbf{k}}^n / \partial x_\ell)_{j\mathbf{k}\ell n}$ est un *frame* de $L_2(\mathbb{R}^2)$, et que $I(0)$ est LIPSCHITZ- α en \mathbf{x}_0 , ce qui implique par application du théorème de JAFFARD

$$|\mathcal{D}| \leq M|t|2^{-j\alpha}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)$$

Pour majorer le terme \mathcal{C} , nous faisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \iint (I(t; \mathbf{x}) - I(0; \mathbf{x})) \nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n d\mathbf{x} \\ &= -2^j \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}_0, t), t) \iint (I(0; \mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)) - I(0; \mathbf{x})) \frac{\nabla \psi_{j\mathbf{k}}^n}{2^j} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

si bien que nous pouvons utiliser le lemme 5.3 avec $f = I$ et avec

$$\Psi_{j\mathbf{k}}^{(n, \ell)} = 2^{-j} \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell}$$

pour obtenir finalement

$$|\mathcal{C}| \leq M' \left(2^{-j(\alpha+1)} + |t|2^{-j(\alpha-1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right)$$

Par intégration,

$$\begin{aligned} r'_2 &= \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} \mathcal{C} + \mathcal{D} dt \\ r'_2 &\leq M \left(2^{-j(\alpha+1)} + |\delta t|2^{-j(\alpha-1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

si bien qu'en combinant (5.27) et (5.28), nous obtenons une majoration de r' :

$$\begin{aligned} |r'| &\leq |r'_1| + |r'_2| \\ &\leq M \left(2^{-j(\alpha+1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) + |\delta t|2^{-j(\alpha-1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right) \end{aligned}$$

□

Nous pouvons écrire (5.25) en bref :

$$M_{j\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0) + E'_{j\mathbf{k}} = Y'_{j\mathbf{k}}$$

où la matrice $M_{j\mathbf{k}}$ est la même que dans (5.16). Nous venons de montrer que

$$\|E'_{j\mathbf{k}}\| \leq M \left(2^{-j(\alpha+1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1}) + |\delta t|2^{-j(\alpha-1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha) \right)$$

Nous pouvons maintenant montrer la première partie du théorème 4.2. Avec des arguments identiques à ceux du théorème 4.1, pour $\alpha' > \alpha$, il existe une suite j_p, \mathbf{k}_p telle que

$$\|M_{j_p \mathbf{k}_p}\| \geq N 2^{-j_p \alpha'} \left(1 + |2^{j_p} \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha'} \right)$$

Le taux d'erreur peut être borné par

$$\frac{\|E_{j_p, \mathbf{k}_p}\|}{\|M_{j_p, \mathbf{k}_p}\|} \leq \frac{M}{N} \left(\frac{2^{-j(\alpha+1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^{\alpha+1})}{2^{-j\alpha'}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)} + |\delta t| \frac{2^{-j(\alpha-1)}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)}{2^{-j\alpha'}(1 + |2^j \mathbf{x}_0 - \mathbf{k}|^\alpha)} \right)$$

Soit θ un réel strictement positif. Nous choisissons une suite δt_p telle que

$$\delta t_p \leq 2^{-j(1+\theta)}. \quad (5.29)$$

Nous prenons $\alpha' \in]\alpha, \alpha + \theta/2[\cap]\alpha, \alpha + 1[$, et il existe p_0 et M' tels que $p \geq p_0$ implique :

$$\frac{\|E_{j_p, \mathbf{k}_p}\|}{\|M_{j_p, \mathbf{k}_p}\|} \leq M' |\delta t_p| 2^{-j(\alpha-1-\alpha')}$$

et tend vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$. La première partie du théorème 4.2 est ainsi prouvée. La dernière partie se montre exactement de la même manière que pour les parties 2 et 3 du théorème 4.1, et nous ne nous répéterons pas.

Bibliographie

- [Coh92] A. COHEN. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Masson, 1992.
- [Jaf91] S. JAFFARD. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients. *Publicaciones Matemáticas*, 1:316–328, 1991.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.

Chapitre 6

Expérimentations numériques. Perspectives.

6.1 Expérimentations numériques

L'algorithme a été mis en œuvre avec des ondelettes analytiques. La raison d'un tel choix et leur construction est détaillée en 4.2. Nous décrivons brièvement quelques détails d'implémentation et montrons comme l'algorithme se comporte sur différentes séquences classiques.

Filtres Les filtres que nous avons utilisés tout au long de nos expérimentations sont dans l'ensemble les mêmes: des filtres de DESLAURIERS–DUBUC d'ordres divers. Les filtres passe-bas de DESLAURIERS–DUBUC sont

$$\left[-1 \ 0 \ 9 \ 16 \ 9 \ 0 \ -1 \right] / 16 \quad (6.1a)$$

ou

$$\left[3 \ 0 \ -25 \ 0 \ 150 \ 256 \ 150 \ 0 \ -25 \ 0 \ 3 \right] / 256 \quad (6.1b)$$

Ces filtres ont un certain nombre d'avantages. Ils ont une bonne résolution fréquentielle (et un bon nombre de moments nuls) par comparaison avec le nombre d'opérations qu'ils requièrent pour une convolution. Ils contournent notamment la limite classique selon laquelle le nombre de moments nuls est borné pour une taille de support fixée en ayant un certain nombre de coefficients intermédiaires *nuls* qui augmentent la taille du support sans coûter des opérations supplémentaires. Par ailleurs les coefficients de ces filtres sont des rationnels dyadiques, et on peut donc éviter des calculs en virgule flottante. Les transformées en ondelettes ont été sur-échantillonnées d'un facteur 2, si bien que la gamme de mesures estimée en (3.9) peut être multipliée par 2.

Les filtres passe-haut correspondants m_1 sont les filtres passe-bas avec un déphasage de π . Le filtre analytique m_2 est obtenu par déphasage du m_0 d'une phase de $\pi/2$. Il faut

remarquer que la convolution avec un tel filtre a le même coût que la convolution par un filtre réel m_0 , parce que les coefficients sont soit réels, soit imaginaires purs.

Les effets de bords Plusieurs méthodes ont été testées pour réduire l'effet dévastateur sur les mesures de la troncature des images aux bords, prolongement par 0, par une constante (par continuité) et par symétrie. Comme l'a remarqué SIMONCELLI [Sim98], les prolongements continus sont ceux qui font perdre le moins de précision. Pour limiter le nombre des calculs, les prolongements sont effectués à la demande à chaque convolution quand le support d'un filtre sort des limites de l'image.

6.1.1 Coût de calcul

Nous avons annoncé que l'algorithme avait un coût de calcul proportionnel au nombre de pixels de l'image. Il reste maintenant à déterminer la constante qui apparaît. Le coût de calcul a été estimé pour deux situations : avec et sans mesures de changements d'illumination. Le coût en flops inclut le préfiltrage, les filtrages en cascade, la résolution des systèmes, le décentrement de gammes de mesures et l'interpolation. Nous obtenons ainsi une carte à une résolution de blocs 2×2 . Nous incluons également dans le coût de calcul le coût de raffinement de la carte de flot à la résolution du pixel par interpolation. Des complexités de calculs similaires ont été publiées par MAGAREY et KINGSBURY [MK98], et sont rappelées pour mémoire dans le tableau 6.1. La seule différence est éventuellement que MAGAREY et KINGSBURY ont estimé la complexité pour 5 niveaux de filtrage, alors que notre estimation vaut pour un nombre quelconque de niveaux.

Méthode	complexité
MAGAREY & KINGSBURY	1618
La nôtre (avec illumination)	863
La nôtre (sans illumination)	780

TAB. 6.1 – Complexité en opérations de virgule flottante (FLOPs) par pixel

6.1.2 Séquences réelles

Nous avons téléchargé différentes séquences rassemblées par BARRON *et coll.* sur leur site FTP à l'adresse *csd.uwo.ca*. L'algorithme a été testé sur la séquence « rubic » (un cube placé sur un plateau tournant), la séquence « taxi » (où trois véhicules se déplacent vers l'est, l'ouest et le nord-ouest). Une image de la séquence et la carte de flot mesurée sont représentées en Fig. 6.1.2 et 6.1.2.

6.1.3 Séquences synthétiques

L'algorithme que nous avons décrit a été essayé sur des séquences synthétiques classiques (dont la séquence « Yosemite »), et les erreurs d'estimation ont été comparées à celles des autres méthodes. L'erreur de mesure est faite comme l'usage le veut en termes d'erreur

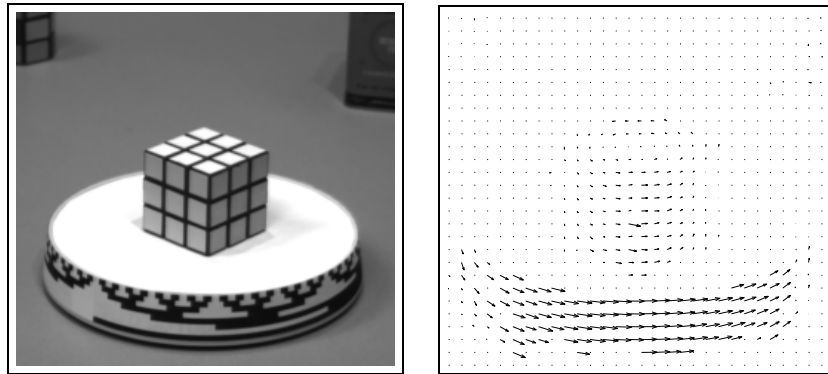


FIG. 6.1 – Séquence « rubic » et flot mesuré

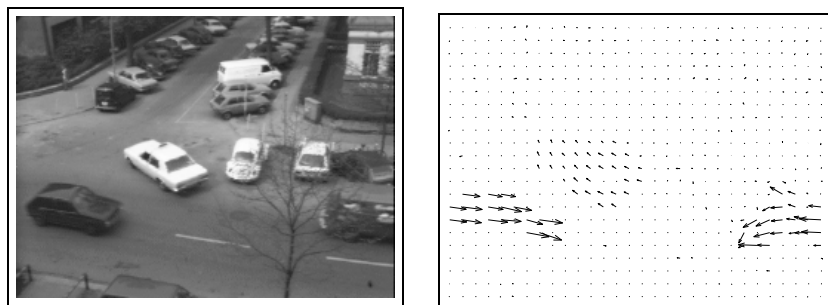


FIG. 6.2 – Séquence « taxi » et flot mesuré

angulaire, ainsi que cela a été proposé par FLEET et JEPSON dans [FJ90]. La « distance » entre une vitesse mesurée $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ et une vitesse réelle $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ est l'angle en degrés entre les vecteurs

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soit $\arccos(1 + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})$.

Pour la séquences « translating trees », l'erreur angulaire moyenne est $0,78^\circ$ avec une densité de mesure de 99,3%, qui peut être comparée aux $1,32^\circ$ de MAGAREY et KINGSBURY. Le tableau 6.2 rappelle les résultats obtenus par d'autres méthodes.

Images	Méthode	Erreur moyenne	Densité
21	FLEET & JEPSON	$0,32^\circ$	74,5%
10	WEBER & MALIK	$0,49^\circ$	96,8%
2	MAGAREY & KINGSBURY	$1,32^\circ$	100,0%
2	Notre méthode (avec illumination)	$0,78^\circ$	99,3%

TAB. 6.2 – Erreurs angulaires comparées pour la séquence « translating trees ». Dans ce tableau, la première colonne indique combien d'images successives sont nécessaires pour mesurer le flot optique. Il faut remarquer que de ce point de vue, les méthodes les moins coûteuses sont celle de MAGAREY et KINGSBURY et la nôtre.

Pour la séquence « Yosemite », l'erreur angulaire moyenne sur toute l'image (ce qui inclut le sol et le ciel, moins une bande de 16 pixels par bord) est de $6,52^\circ$. La densité de mesure est 96,5%, parce que quelques mesures ont été rejetée à cause de l'*aliasing* temporel. Ce résultat se compare à celui de MAGAREY et KINGSBURY (de $6,20^\circ$). Pour cette séquence, la carte de flot et la carte d'erreur angulaire sont représentées avec la carte de variations d'éclairéments mesurés. L'erreur angulaire moyenne est comparées à celle d'autres méthodes en figure 6.3.

D'autres méthodes [WKCL98, MP98] permettent d'atteindre des erreurs d'estimation plus faibles, au prix d'une complexité de calcul sensiblement plus élevée. MÉMIN et PÉREZ [MP98] obtiennent une erreur moyenne de $5,38^\circ$ pour la séquence *Yosemite*, et WU *et coll.* annoncent des erreurs également inférieures, mes ces méthodes consistent à minimiser des fonctionnelles non convexes par relaxation.

Images	Méthode	Erreur moyenne	Densité
21	FLEET & JEPSON	$4,63^\circ$	34,1%
10	WEBER & MALIK	$4,31^\circ$	64,2%
2	MAGAREY & KINGSBURY	$6,20^\circ$	100,0%
2	Notre méthode (avec illumination)	$6,50^\circ$	96,5%

TAB. 6.3 – Erreurs comparées pour les différentes méthodes de mesure pour la séquence « Yosemite ». Voir les remarques faites dans la légende du tableau 6.2.

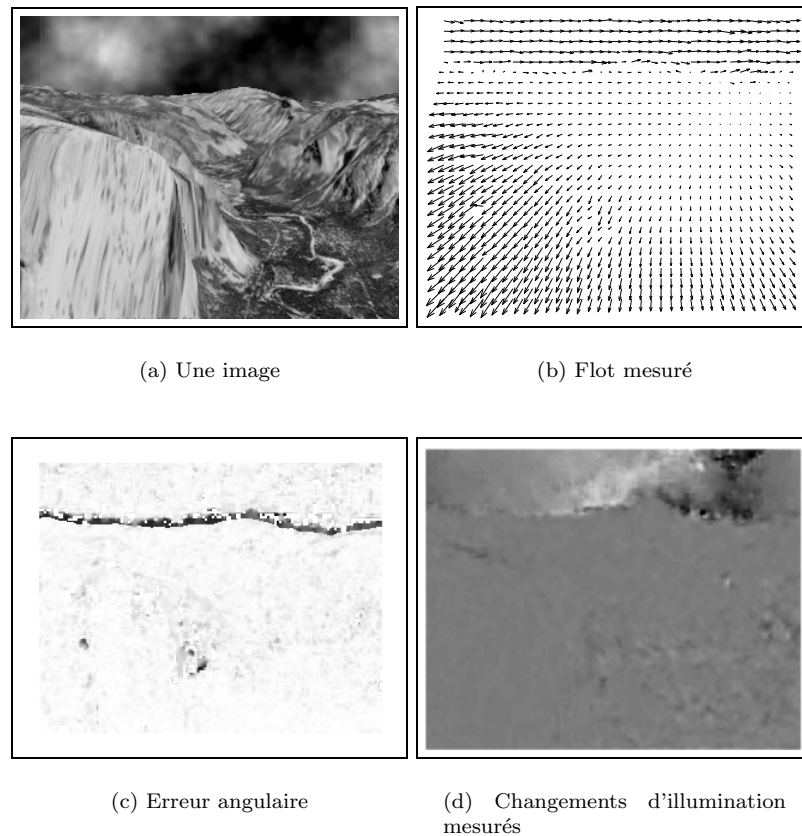


FIG. 6.3 – Séquence « Yosemite ». Nous voyons notamment que l'erreur angulaire est importante autour de l'horizon, où se situe une discontinuité du flot optique. La carte des changements d'illumination indique les zones où l'illumination est constante (en gris), où elle augmente (en blanc) et où elle diminue (en noir). L'algorithme détecte que le côté droit du nuage de gauche s'éclaircit, tandis que le côté gauche du nuage de droite s'assombrit, ce qui correspond l'impression que laisse la séquence quand on la regarde. Nous allons valider notre mesure d'illumination sur une autre séquence synthétisée.

6.1.4 Changement d'illumination

Nous utilisons l'équation du flot optique définie en 4. L'estimation du flot optique et des changements d'illumination est faite en utilisant une cinquième ondelette d'intégrale non nulle :

$$\Psi^0(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) \quad (6.2)$$

Jusque là, toutes les ondelettes Ψ^1, \dots, Ψ^4 décrites en (4.25a-d) que nous avons utilisées pour mesurer le flot optique ont une intégrale nulle. Ainsi, les mesures de déplacements ne sont en théorie pas trop perturbées par les changements d'illumination. Comme nous voulons maintenant mesurer ces changements d'illumination, il nous faut au moins une ondelette d'intégrale non nulle qui puisse « voir » les changements globaux de niveaux de gris. Tous les systèmes linéaires ont également une troisième inconnue L'/L et une contrainte linéaire réelle supplémentaire obtenue par produit scalaire de l'équation du flot optique avec Ψ^0 .

Nous allons voir que cette mesure augmente l'insensibilité de notre approche aux changements d'illumination. Notre algorithme est insensible aux changements d'illumination additifs par construction (de même que ceux de MAGAREY et KINGSBURY et d'autres auteurs). Nous avons en revanche mesuré la sensibilité de l'algorithme à des changements multiplicatifs d'illumination. Pour cela, nous avons mesuré le déplacement entre les images 20 et 21 de la séquence « translating trees » où la deuxième image est multipliée par un facteur variable dans l'intervalle $[0,5; 1,5]$. Les résultats sont indiqués dans le tableau 6.4. Ils sont très bons comparés aux méthodes classiques (dont des résultats sont rapportés par MAGAREY et KINGSBURY) où des facteurs d'illuminations de 0,95 ou 1,05 suffisent à multiplier l'erreur par 10. Ils sont également très bons comparés à ceux de la méthode de MAGAREY et KINGSBURY qui n'estiment la robustesse de leur méthode que dans l'intervalle $[0,95; 1,05]$.

Nous avons comparé le changement moyen d'illumination mesuré avec la valeur réelle $\Delta L/L$. Pour des variations importantes, la vraie valeur est en fait

$$2 \frac{L(t+1) - L(t)}{L(t) + L(t+1)}$$

où t et $t+1$ sont les temps des deux images successives sur lesquelles la mesure est faite. Ceci provient du fait que notre algorithme prend comme référence l'image qui se situe au temps $t = 1/2$ et qui est obtenue par interpolation temporelle

$$I(t+1/2) \simeq \frac{I(t) + I(t+1)}{2}$$

comme cela est expliqué en détail dans la section 3.2 sur l'*aliasing* temporel.

À titre d'exemple, pour une multiplication de $I(t+1)$ par un facteur de 0,5, nous nous attendons à avoir un facteur de changement d'illumination de $2 \times (0,5 - 1)/(1 + 0,5) \simeq -0,67$. Dans la table 6.4, nous voyons que ce terme est donc bien estimé sans biais.

Un deuxième essai a été effectué sur la même séquence « translating tree ». L'image 20 est inchangée, tandis que l'image 21 est multipliée par un profil gaussien

$$g(x, y) = 1 + e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.3)$$

Facteur d'éclairement s	0,5	0,7	0,9	1,0	1,1	1,3	1,5
Erreur angulaire	$1,33^\circ$	$0,84^\circ$	$0,76^\circ$	$0,78^\circ$	$0,79^\circ$	$0,84^\circ$	$0,93^\circ$
$\Delta L/L$ réel $2(s-1)/(1+s)$	-0,67	-0,35	-0,105	0	0,095	0,26	0,4
$\Delta L/L$ mesuré	-0,67	-0,35	-0,105	0,00	0,095	0,26	0,40

TAB. 6.4 – Erreur de mesure angulaire, changements d'illumination réels et mesurés (en moyenne sur l'image entière). Il faut remarquer que l'algorithme supporte des variations d'éclairement très violentes.

dont le centre (x_0, y_0) est $(75, 75)$ et $\sigma = 75/2$. Rappelons que les dimensions de l'image des « translating trees » sont 150×150 pixels. Le profil de changement d'illumination est donc censé être :

$$\frac{L'}{L} \simeq 2 \frac{g(x,y) - 1}{1 + g(x,y)}$$

dont le maximum est $2/3$. Les deux images successives obtenues sont représentées en Fig. 6.4.

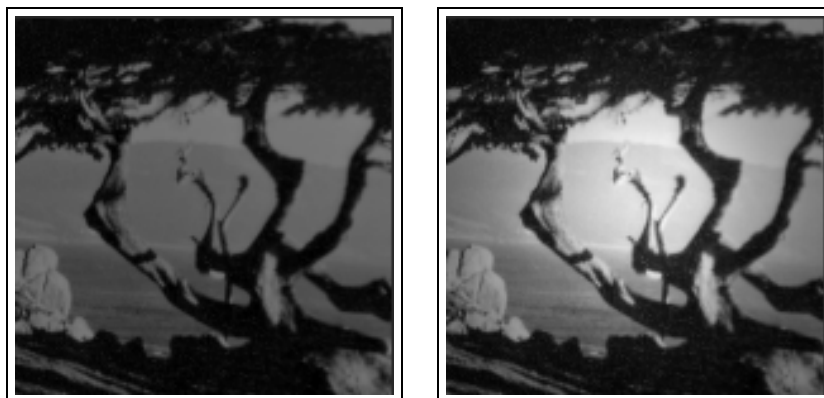


FIG. 6.4 – Deux images successives de la séquence « translating trees » modifiée pour avoir un changement d'illumination artificiel. La deuxième image est multipliée par un profil gaussien dont la formule est donnée en (6.3).

Le flot optique et les changements d'illumination ont été mesurés entre ces deux images. L'erreur angulaire moyenne pour l'estimation du flot optique est de $2,45^\circ$. L'erreur moyenne d'estimation de changements d'illumination a été estimée de la manière suivante : si on note λ l'illumination mesurée qui est censée estimer L'/L , on mesure l'erreur moyenne en norme L_1

$$E = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left| \lambda(i,j) - \frac{L'(i,j)}{L(i,j)} \right|$$

Cette erreur de mesure était donc de 0,0255. Si on la ramène à un maximum de 0,67, cela

fait une erreur relative de 3,8%. La carte d'illumination théorique et la carte mesurée sont présentées sur la figure 6.5.

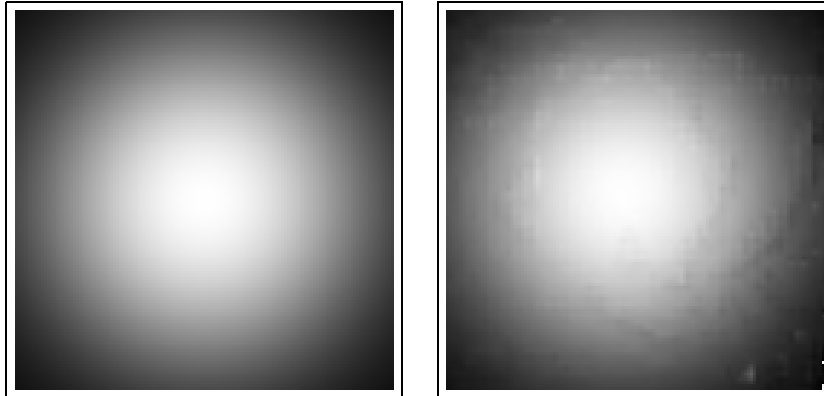


FIG. 6.5 – Carte de changement d'illumination pour la séquence « *translating trees* » modifiée. À gauche, la carte synthétique. À droite, la carte mesurée.

Nous pensons qu'en plus d'augmenter la robustesse de la mesure du flot optique vis-à-vis de changements d'illuminations, la mesure de ce paramètre supplémentaire pour être utilisée en codage de séquences vidéo. Pour de raisons diverses, l'éclairage d'une scène peut changer au cours de la prise de vue. Ceci peut être causé par des mouvements de sources, ou simplement dû au mouvement de la caméra. Si la caméra se déplace d'une zone sombre à une zone claire, le système d'équilibrage des lumières va changer la réponse du capteur optique, et ainsi changer la luminosité apparente d'un objet fixé de la scène.

6.2 Compression vidéo

La mesure du flot optique est un moyen de capturer la redondance temporelle entre des images successives d'une même séquence vidéo, et de réduire la taille du code nécessaire pour la représenter. Dans cet esprit, on peut proposer une première approche simple de la compression vidéo par compensation de mouvement.

On note la séquence vidéo $I(t; \mathbf{x})$ où $t \in \mathbb{N}$. Un codage simple consiste à coder les images une par une par un schéma de compression d'images statiques (JPEG, SPIHT, etc.). Une manière élémentaire de tirer parti de la redondance temporelle de la séquence d'images est de coder une première image $I(0)$, puis de coder ensuite seulement les différences entre images successives $I(1) - I(0)$, $I(2) - I(1)$, etc. Cette stratégie est intéressante quand une grande partie de l'image est immobile (des personnages qui se déplacent sur un fond fixe), mais est mise en défaut dès qu'une trop grande partie de la scène est mobile (par exemple à cause d'un mouvement de la caméra, comme un *travelling* ou un *zoom*).

La deuxième approche consiste à effectuer une compensation de mouvement. On mesure le déplacement $\mathbf{v}(t + 1/2)$ entre les images $I(t)$ et $I(t + 1)$. Si la mesure est précise et si le

6.3. Introduction de l'éclairement comme variable explicative supplémentaire 101

flot suffit à expliquer les modifications de l'image, on peut espérer retrouver l'image $I(t+1)$ par déplacement (en angl. *warping*) de l'image $I(t)$ le long du champ de vecteurs $\mathbf{v}(t+1/2)$.

Si on note

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))$$

on pourra espérer que l'image au temps t déplacée le long du flot $\mathbf{v}(t+1/2)$ sera proche de $I(t+1)$, c'est à dire

$$I(t+1) \simeq \mathcal{T}_{\mathbf{v}(t+1/2)}(I(t))$$

En général, il reste une erreur de prédiction $E(t)$ qui est définie par

$$E(t) = I(t+1) - \mathcal{T}_{\mathbf{v}(t+1/2)}(I(t))$$

Le principe du codage de l'image par compensation de mouvement est donc le suivant :

- On transmet la première image $I(0)$.
- On transmet pour chaque image qui suit $\mathbf{v}(t+1/2)$ et $E(t)$, qui permettent au décodeur de reconstituer l'image $I(t+1)$ selon la formule

$$I(t+1) = \mathcal{T}_{\mathbf{v}(t+1/2)}(I(t)) + E(t)$$

Ce principe parie sur le fait qu'il est plus efficace de coder $\mathbf{v}(t+1/2)$ et $E(t)$ plutôt que de coder simplement $I(t+1) - I(t)$. Cela se conçoit, car idéalement $E(t) = 0$, et le champ \mathbf{v} est plus régulier que la dérivée $I(t+1) - I(t)$ de la texture des objets qui se déplacent. Les erreurs de prédiction sont représentées pour deux séquences d'images dans la figure 6.6.

Ce principe a été mis en œuvre par deux binômes d'élèves sur la base de l'algorithme de mesure du déplacement, Paul FROMENT et Rodolphe GINTZ [FG99], puis Hervé DELAY et Adrien VEILLARD [DV99]. Dans les deux cas, ils ont mis au point un algorithme complet de compression et de décompression de séquences d'images vidéo qui soutiennent bien la comparaison avec des codeurs téléchargeables librement sur le réseau *internet*, ce qui est très honorable pour de premières implémentations.

6.3 Introduction de l'éclairement comme variable explicative supplémentaire

Quand l'éclairement d'une scène change, les modifications de l'image ne peuvent pas être décrites en termes de déplacement d'objets. La variation d'illumination doit donc intégralement prise en compte par dans l'image d'erreur $E(t)$. Si le profil d'éclairement $g(t, \mathbf{x})$ est régulier (comme en (6.3)), l'image d'erreur sera de la forme

$$I(t) \times g(t) \tag{6.4}$$

c'est à dire qu'elle héritera de la complexité de l'image d'origine. Si nous ajoutons la variable explicative « éclairement » à notre modèle, nous aurons à coder le profil $g(\mathbf{x})$ que nous aurons mesuré, et l'erreur de prédiction ne contiendra plus de terme d'erreur (6.4) à coder.

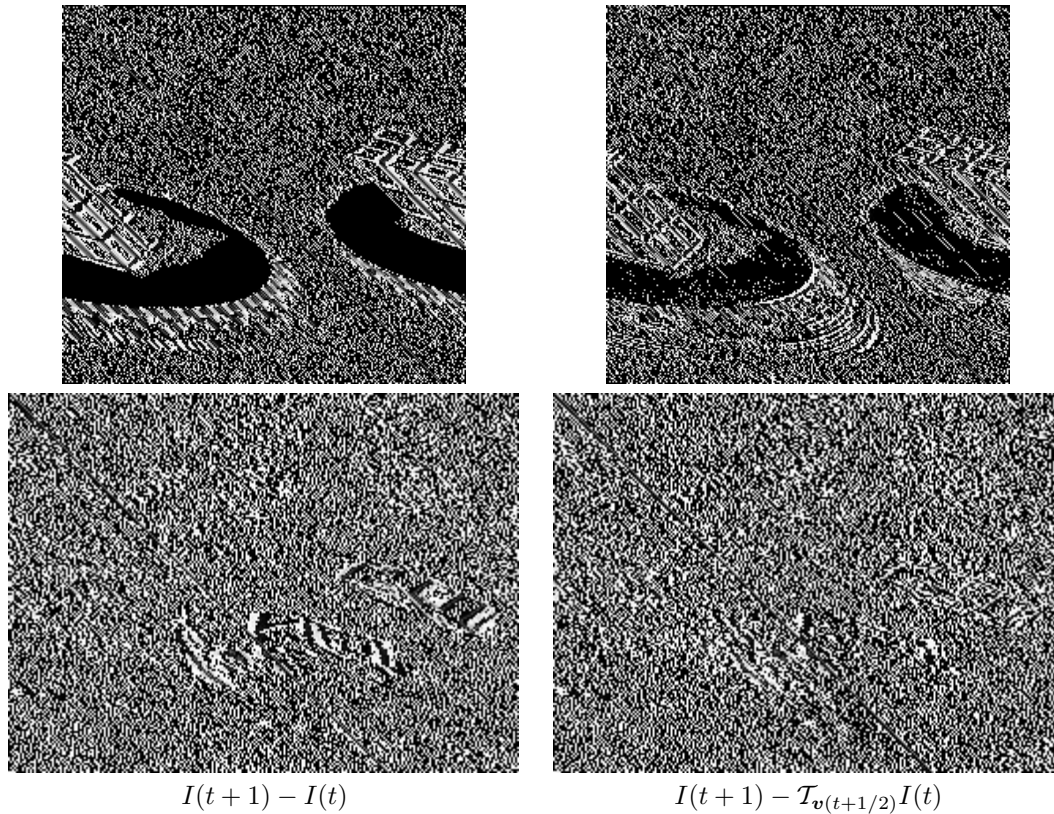


FIG. 6.6 – Pour les séquences « rubik » (en haut) et « taxi » (en bas), nous voyons les erreurs de prédiction sans compensation de mouvement (à gauche) et avec compensation de mouvement (à droite). Le contraste a été augmenté (avec une saturation forte des images de gauche) pour que les images soit comparables.

Ainsi, en ajoutant la variable d'éclairement dans le schéma de compensation, nous remplaçons le codage de $I(t) \times g(t)$ par le seul codage de $g(t)$ dont nous espérons qu'il soit moins coûteux.

Le nouveau modèle de prédiction de mouvement et d'illumination est donc le suivant. On mesure un déplacement $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + 1/2)$ et un champ d'éclairement $\lambda(\mathbf{x}, t + 1/2)$. On prédit alors l'image $I(t + 1)$ en fonction de l'image $I(t)$ selon la formule

$$I(t + 1) = (1 + \lambda(t)) \times \mathcal{T}_{\mathbf{v}(t+1/2)}I(t)$$

d'où le principe de codage par compensation de mouvement *et de changements d'illuminations* :

- On transmet la première image $I(0)$
- On transmet pour chaque image qui suit $\mathbf{v}(t + 1/2)$, $\lambda(t + 1/2)$ et $E(t)$ au décodeur. Ce dernier peut reconstituer l'image $I(t + 1)$ en fonction de $I(t)$ selon la formule :

$$I(t + 1) = (1 + \lambda(t)) \times \mathcal{T}_{\mathbf{v}(t+1/2)}(I(t)) + E(t)$$

Remarque

En principe, la compensation de changement d'éclairements devrait se faire non pas selon la formule

$$I \leftarrow I \times (1 + \lambda)$$

mais selon la formule plus précise

$$I \leftarrow I \times \left(\frac{1 + \lambda/2}{1 - \lambda/2} \right)$$

parce que le changement d'éclairement est supposé être mesuré en $t + 1/2$ (cf. Sec. 6.1.4).

6.4 Modèles non constants du flot optique

Une extension possible de l'algorithme présenté dans ces pages consiste à utiliser un modèle moins simple du flot qu'un modèle de flot localement constant. Deux modèles peuvent à la fois être motivés par des considérations géométriques et des modèles tridimensionnels sous-jacents [Kan89], tout en étant solubles dans le cadre présenté ci-dessus.

6.4.1 Modèle de projection stéréographique d'éléments plans

Considérons un modèle de caméra à projection stéréographique, c'est à dire qu'un point de l'espace (x, y, z) se projette sur le plan du film au point de coordonnées (X, Y) selon la formule

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{z} \\ Y &= \frac{y}{z} \end{aligned}$$

Considérons un élément plan dans l'espace. Il peut être caractérisé par une équation cartésienne. Nous ferons l'hypothèse que ce plan n'est pas « vu par la tranche », autrement dit qu'il ne passe pas par l'origine. Son équation cartésienne peut alors être écrite :

$$ax + by + cz = 1 \quad (\text{II})$$

La projection entre le plan image et ce plan peut être inversée. On obtient aisément x , y et z en fonction de X et Y quand on suppose que le point vu en (X, Y) est l'image d'un point du plan (II).

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{aX + bY + c} \\ y &= \frac{Y}{aX + bY + c} \\ z &= \frac{1}{aX + bY + c} \end{aligned}$$

Si on considère maintenant que la facette considérée incluse dans le plan (II) a un mouvement solide, le vecteur vitesse en un point de coordonnées (x, y, z) s'écrit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OM}$, soit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 + \omega_y z - \omega_z y \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 + \omega_z x - \omega_x z \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned}$$

On peut donc en déduire le flot optique en fonction du mouvement réel

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{x}}{z} - \dot{z} \frac{x}{z^2} \\ \dot{Y} &= \frac{\dot{y}}{z} - \dot{z} \frac{y}{z^2} \end{aligned}$$

et tenant compte du mouvement solide, on tire

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{x}_0 + \omega_y z - \omega_z y}{z} - \dot{z}_0 \frac{x_0 + \omega_x y - \omega_y x}{z^2} \\ &= \frac{x_0}{z} + \omega_y - \omega_z Y - \dot{z}_0 \frac{X}{z} - \omega_x XY + \omega_y X^2 \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de planéité :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= x_0(aX + bY + c) + \omega_y - \omega_z Y - \dot{z}_0 X(aX + bY + c) - \omega_x XY + \omega_y X^2 \\ &= X^2(\omega_y - a\dot{z}_0) + XY(-\omega_x - b\dot{z}_0) \\ &\quad + X(a\dot{x}_0 - c\dot{z}_0) + Y(b\dot{x}_0 - \omega_z) + c\dot{x}_0 + \omega_y \end{aligned}$$

Par un calcul identique, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= XY(-a\dot{z}_0 + \omega_y) + Y^2(-b\dot{z}_0 - \omega_x) \\ &\quad + X(a\dot{y}_0 + \omega_y) + Y(-b\dot{y}_0 - c\dot{z}_0) + c\dot{y}_0 - \omega_x \end{aligned}$$

6.4.2 Cas d'un modèle de caméra à projection orthogonale

Dans le cas d'une projection orthogonale (ou X et Y sont petits), on obtient les mêmes formules sans les termes de degré 2, soit

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X(ax_0 - cz_0) + Y(bx_0 - \omega_z) + cx_0 + \omega_y \\ \dot{Y} &= X(ay_0 + \omega_y) + Y(-by_0 - cz_0) + cy_0 - \omega_x\end{aligned}$$

6.4.3 Estimation d'un flot non localement constant avec des ondelettes

Nous considérons simplement le modèle de flot linéaire, qui correspond à une projection orthogonale d'un objet plan de mouvement solide sur le plan de la caméra, bien que les calculs ci-dessous puissent s'étendre dans le même esprit au cas plus général de la projection stéréographique.

Le modèle de flot obtenu est donc de la forme

$$\begin{aligned}v_x &= ax + by + c \\ v_y &= dx + ey + f\end{aligned}$$

où l'identification doit porter sur les coefficients a, b, c, d, e et f . L'hypothèse que le flot optique est constant sur le support des ondelettes est ici remplacée par une hypothèse selon laquelle ce modèle de dépendance linéaire du flot en fonction de la position est vrai sur le support des ondelettes $\psi^n = \psi_{j\mathbf{k}}^n$ utilisées. La projection de l'équation du flot optique s'écrit donc

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x} v_x, \psi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial y} v_y, \psi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi^n \right\rangle = 0$$

soit par application du modèle

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x} (ax + by + c), \psi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial y} (dx + ey + f), \psi^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi^n \right\rangle = 0$$

et après des intégrations par parties

$$\begin{aligned}a \left(\left\langle xI, \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I, \psi^n \rangle \right) + b \left\langle yI, \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right\rangle + c \left\langle I, \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right\rangle \\ + d \left\langle xI, \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right\rangle + e \left(\left\langle yI, \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right\rangle + \langle I, \psi^n \rangle \right) + f \left\langle I, \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi^n \right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de a à f sont solutions de N contraintes linéaires dont les coefficients sont des coefficients d'ondelettes de I, xI et yI . On peut ainsi effectuer des calculs rapides de ces coefficients (en $\mathcal{O}(N)$ opérations) de la même manière que le flot optique était calculé rapidement ci-dessus.

Remarque

Le lecteur peut s'imaginer que dans le cas d'un modèle de flot localement quadratique, nous pouvons obtenir un résultat similaire, à savoir que les coefficients des systèmes linéaires à résoudre seront cette fois des coefficients d'ondelettes des images I, xI, yI, x^2I, y^2I et xyI .

Ces modèles plus riches peuvent avoir plusieurs usages, et ont certains avantages sur le modèle simple de flot localement constant. Comme cela a été mentionné en 4.1.3, un tel modèle peut être utilisé pour faire de la segmentation de flot optique, ainsi que l'ont démontré ODOBEZ et BOUTHEMY[OB98]. Un modèle trop simple détecte des singularités du flot optique également là où le flot varie fortement, comme à l'intérieur d'une surface plane qui a un mouvement de zoom par rapport à la caméra, et n'est donc pas approprié.

Un tel modèle peut aussi augmenter la fiabilité d'une mesure: MENDELSON et coll. [MSB97], avec un modèle local plan d'objet (en projection stéréographique) augmentent la fiabilité de leurs mesures, avec un gain appréciable pour les déplacements importants. Une autre application est la reconstruction de scènes tridimensionnelles en imposant une certaine régularité locale aux objets qui sont reconstitués.

Bibliographie

- [BF93] P. BOUTHEMY et E. FRANÇOIS. Motion segmentation and qualitative dynamic scene analysis from an image sequence. *Int. Journal of Computer Vision*, 10(2):157–182, 1993.
- [BFB94] J. BARRON, D. FLEET et S. BEAUCHEMIN. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.
- [DV99] H. DELAY et A. VEILLARD. Compression de séquences d’images par une méthode de flot. Rapport technique, École Polytechnique, France, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, mars 1999.
- [FG99] P. FROMENT et R. GINTZ. Mesure du flot optique et compression vidéo. Rapport technique, Études d’Approfondissement, École Polytechnique, France, janvier 1999.
- [FJ90] D. FLEET et A. JEPSON. Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5:77–104, 1990.
- [Kan89] K. KANATANI. *Group-theoretical methods in image understanding*. Springer Series in Information Sciences. Springer, 1989.
- [MK98] J. MAGAREY et N. KINGSBURY. Motion estimation using a complex-valued wavelet transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 46(4):1069–1084, avril 1998.
- [MP98] E. MÉMIN et P. PÉREZ. Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(5):703–719, mai 1998.
- [MSB97] J. MENDELSON, E. SIMONCELLI et R. BAJCSY. Discrete-time rigidity-constrained optical flow. Dans *7th Int’l Conf Computer Analysis of Images and Patterns, Kiel, Germany*. septembre 1997.
- [OB98] J.-M. ODOBEZ et P. BOUTHEMY. Direct incremental model-based image motion segmentation for video analysis. *Signal Processing*, 6(2):143–155, 1998.
- [Sim98] E. P. SIMONCELLI. Bayesian multi-scale differential optical flow. Dans H. JÄHNE et GEISSLER, rédacteurs, *Handbook of computer vision and applications*. Academic Press, 1998.
- [WKCL98] Y.-T. WU, T. KANADE, J. COHN et C.-C. LI. Optical flow estimation using wavelet motion model. Dans *Sixth International Conference on Computer Vision*, pages 992–998. Narosa Publishing House, 1998.

- [WM95] J. WEBER et J. MALIK. Robust computation of optical flow in a multi-scale differential framework. *International Journal of Computer Vision*, 14(1):5–19, 1995.

Annexe A

Bases et *frames* d'ondelettes dérivées

Résumé

Dans certaines applications, comme dans notre cas pour la mesure de mouvement, on peut avoir à recourir à des bases d'ondelettes dérivées, et plus spécifiquement de calculer des coefficients d'un signal contre des dérivées d'ondelettes. Nous verrons que les analyses multi-résolutions s'accommodent bien de la dérivation. Si les ondelettes proviennent d'une analyse multi-résolutions à filtres à support compact, les dérivées ont en général la même propriété. Nous verrons également que la dérivée des vecteurs de base d'un *frame* d'ondelettes constitue également en général un *frame*, à une renormalisation près.

A.1 Ondelettes et filtres dérivés

On se donne une fonction d'échelle ϕ et une ondelette ψ construites avec deux filtres discrets m_0 et m_1 par convolutions infinies :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (\text{A.1a})$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.1b})$$

On appelle \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 les filtres duaux, et $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ les filtres duaux définis à partir de \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 avec des formules similaires à (A.1a,b).

Les dérivées de ϕ et ψ ont pour transformées de FOURIER $\omega \mapsto i\omega\hat{\phi}(\omega)$ et $\omega \mapsto i\omega\hat{\psi}(\omega)$.

Pour faire apparaître les filtres dérivés, on exploite la relation algébrique suivante :

$$\begin{aligned}
e^{i\omega} - 1 &= (e^{i\omega/2} + 1)(e^{i\omega/2} - 1) \\
&= (e^{i\omega/2} + 1)(e^{i\omega/4} + 1)(e^{i\omega/4} - 1) \\
&\vdots \\
&= \prod_{k=1}^K (e^{i\omega/2^k} + 1) \times (e^{i\omega/2^K} - 1) \\
&= \prod_{k=1}^K \left(\frac{e^{i\omega/2^k} + 1}{2} \right) \times 2^K (e^{i\omega/2^K} - 1)
\end{aligned}$$

dont le passage à la limite donne la relation :

$$e^{i\omega} - 1 = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\omega/2^k} + 1}{2} \right) \times i\omega$$

soit

$$i\omega = \frac{e^{i\omega} - 1}{\prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2} \right)}$$

En posant

$$\begin{aligned}
M_0(\omega) &= \frac{2m_0(\omega)}{e^{i\omega} + 1} \\
M_1(\omega) &= \frac{e^{i\omega} - 1}{2} m_1(\omega)
\end{aligned}$$

les nouvelles ondelettes Φ et Ψ engendrées par convolutions infinies des filtres M_0 et M_1 (avec des formules analogues à [A.1a-A.1b](#)) ont les propriétés suivantes :

$$\phi'(t) = \Phi(t+1) - \Phi(t) \quad (\text{A.2a})$$

$$\psi'(t) = \Psi(t) \quad (\text{A.2b})$$

Les filtres duaux s'obtiennent par des transformations inverse. Si nous posons

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_0(\omega) &= \frac{e^{-i\omega} + 1}{2} \tilde{m}_0(\omega) \\
\tilde{M}_1(\omega) &= \frac{2\tilde{m}_1(\omega)}{e^{-i\omega} - 1}
\end{aligned}$$

les ondelettes duales $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$, si elles existent, vérifient des relations inverses avec les ondelettes duales $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\phi}(t) = \int_{t-1}^t \tilde{\Phi}(u) du \quad (\text{A.3a})$$

$$\tilde{\psi}(t) = \int_t^{+\infty} \tilde{\Psi}(u) du \quad (\text{A.3b})$$

Nous voyons que nous pouvons produire de manière systématique un schéma de filtrage et sous-échantillonnage discret inversible si celui de départ l'est, car

$$\begin{vmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} M_0(\omega) & M_0(\omega + \pi) \\ M_1(\omega) & M_1(\omega + \pi) \end{vmatrix}$$

Pendant (si par exemple les fonctions sont trop peu régulières, comme des ondelettes de HAAR), rien ne garantit que les familles d'ondelettes construites restent des bases inconditionnelles de $L_2(\mathbb{R})$.

Pour rester dans le cadre d'analyses multi-résolutions biorthogonales dans $L_2(\mathbb{R})$, il faut que les fonctions de base construites soient bien de carré intégrable. Il faut également que les familles de fonctions d'échelles translatées sur une grille régulière constituent une base de RIESZ. COHEN, DAUBECHIES et FEAUVEAU ont prouvé un théorème qui sert à vérifier que des filtres à support compact définissent bien par des formules du type de (A.1a–A.1b) des bases inconditionnelles de $L_2(\mathbb{R})$ biorthogonales.

Ce théorème impose une régularité minimale aux fonctions d'échelles. Nous en rappelons l'énoncé.

Théorème A.1 (COHEN, DAUBECHIES, FEAUVEAU)

Soient deux paires de filtres à support compact (m_0, m_1) et $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$ qui vérifient la relation de dualité

$$\begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega + \pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}^T = I \quad (\text{A.4})$$

On suppose que les deux filtres passe-bas m_0 et \tilde{m}_0 se factorisent sous la forme

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2} \right)^N r(\omega) \\ \tilde{m}_0(\omega) &= \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2} \right)^{\tilde{N}} \tilde{r}(\omega) \end{aligned}$$

où les exposants N et \tilde{N} sont maximaux et r et \tilde{r} sont polynômiaux. On définit les exposants critiques

$$\begin{aligned} b &= \inf_{j \geq 1} \left[\frac{1}{j \log 2} \log \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \prod_{k=1}^j r(2^k \omega) \right| \right] \\ \tilde{b} &= \inf_{j \geq 1} \left[\frac{1}{j \log 2} \log \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \prod_{k=1}^j \tilde{r}(2^k \omega) \right| \right] \end{aligned}$$

Si $N - b > 1/2$ et $\tilde{N} - \tilde{b} > 1/2$, les bases d'ondelettes construites avec ϕ et ψ d'une part et avec $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ d'autre part sont des bases inconditionnelles duales de $L_2(\mathbb{R})$.

Ce théorème prouve que si les fonctions d'échelles (à support compact) sont suffisamment régulières, alors les familles d'ondelettes construites avec des paires de filtres duaux sont automatiquement des bases inconditionnelles duales.

Si nous appliquons ce théorème aux paires de filtres duales (M_0, M_1) et $(\tilde{M}_0, \tilde{M}_1)$, les conditions du théorème deviennent pour les filtres d'origine :

$$N - b > 3/2$$

Cette condition revient à exiger de la fonction ϕ un degré de régularité supplémentaire (prévisible si on veut que ϕ' soit également dans $L_2(\mathbb{R})$). D'où le théorème suivant, qui repose sur le théorème A.1.

Théorème A.2

Soit deux paires de filtres duales (m_0, m_1) et $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$, soit N, \tilde{N}, b et \tilde{b} définis dans l'énoncé du théorème A.1. Si $N - b > 3/2$ et $\tilde{N} - \tilde{b} > 1/2$, alors la famille $(2^{-j}\psi'_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base inconditionnelle de $L_2(\mathbb{R})$. La base duale associée est la famille de fonctions

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} 2^j \tilde{\psi}_{jk}(u) du$$

Démonstration. La preuve consiste à montrer que les deux paires de filtres construits (M_0, M_1) et $(\tilde{M}_0, \tilde{M}_1)$ vérifient les hypothèses du théorème A.1. Les filtres M_0 et \tilde{M}_0 ont des factorisations qui se déduisent de celles de m_0 et \tilde{m}_0 :

$$M_0(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2} \right)^{N-1} r(\omega)$$

$$\tilde{M}_0(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2} \right)^{\tilde{N}+1} \tilde{r}(\omega)$$

tandis que les exposants critiques de M_0 et \tilde{M}_0 sont respectivement les mêmes que ceux de m_0 et \tilde{m}_0 .

Enfin, les filtres M_1 et \tilde{M}_1 sont à support compact. Pour M_1 , c'est immédiat, car il est le produit d'une convolution de m_1 avec un filtre à deux coefficients (donc à support compact). \tilde{M}_1 est en revanche obtenu par la formule

$$\tilde{M}_1(\omega) = \frac{2\tilde{m}_1(\omega)}{e^{-i\omega} - 1} \quad (\text{A.5})$$

et n'est polynômial que si \tilde{m}_1 a au moins un moment nul (i.e. $\tilde{m}_1(0) = 0$). Considérons pour cela la relation (A.4) en $\omega = 0$. Comme b est nécessairement positif ou nul, l'entier N est supérieur ou égal à 2. Ceci implique que $m_0(\pi) = 0$. La matrice de transfert $T(0)$ est triangulaire supérieure. Comme $\tilde{T}(0) = T(0)^{-T}$, $\tilde{T}(0)$ est triangulaire inférieure, ce qui signifie que $\tilde{m}_1(0) = 0$ et le polynôme trigonométrique $\omega \mapsto m_1(\omega)$ est donc divisible par $e^{i\omega} - 1$.

Ceci permet de conclure que le théorème s'applique bien à la base d'ondelettes $(2^j \psi'_{jk})$. Les relations (A.2a–A.2b) et (A.3a–A.3b) découlent directement de la définition des filtres M_0, M_1, \tilde{M}_0 et \tilde{M}_1 . \square

Remarque

Le calcul de filtres dérivés peut être fait pour des multi-résolutions un peu plus générales que celles introduites dans la théorie des ondelettes, et que l'on appelle parfois multi-résolutions

non stationnaires. Si une ondelette est construite par convolution infinie de peignes de DIRAC contractés à des échelles 2^{-j} :

$$\hat{\psi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_j(2^{-j}\omega)$$

alors, la dérivée pourra s'écrire

$$\widehat{\psi}'(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} M_j(2^{-j}\omega)$$

où

$$M_j(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{i\omega}-1}{2} m_j(\omega) & \text{si } j = 0 \\ \frac{2m_j(\omega)}{e^{i\omega}+1} & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'usage de telles ondelettes n'a de sens que si les m_j sont presque tous les mêmes, à l'exception de quelques premiers, sans quoi tout le bénéfice de l'usage de bancs de filtres est perdu.

A.2 Frames d'ondelettes dérivées

Dans cette section nous établissons un résultat de portée générale selon lequel, des dérivées d'ondelettes d'un *frame* constituent sous des conditions relativement faibles également un *frame*.

Nous allons pour cela utiliser le lemme suivant qui permet de caractériser des couples de *frames* duaux.

Lemme A.1 (Lemme des ciseaux.)

Soit deux familles $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de HILBERT H , qui vérifie les inégalités de stabilité :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, e_n \rangle|^2 \leq M_e \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in H \quad (\text{A.6a})$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, f_n \rangle|^2 \leq M_f \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in H \quad (\text{A.6b})$$

et vérifient de plus

$$\langle u, u \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, e_n \rangle \langle f_n, u \rangle \quad \text{pour tout } u \in H \quad (\text{A.7})$$

alors $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des frames duaux, c'est à dire que

$$\frac{1}{M_f} \|u\|^2 \leq \sum |\langle u, e_n \rangle|^2 \quad \forall u \in H \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{1}{M_e} \|u\|^2 \leq \sum |\langle u, f_n \rangle|^2 \quad \forall u \in H \quad (\text{A.8b})$$

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, f_n \rangle e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, e_n \rangle f_n \quad \forall u \in H \quad (\text{A.8c})$$

Démonstration. La preuve est relativement élémentaire et est en partie reprise de COHEN [Coh92]. Le fait que les deux familles vérifient les inégalités de stabilité (A.6a–A.6b) garantit que le terme de droite de (A.7) est absolument convergent (par l'inégalité de CAUCHY–SCHWARTZ).

Cette même inégalité nous garantit d'ailleurs que

$$\|u\|^2 \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, e_n \rangle|^2} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, f_n \rangle|^2}$$

En la comparant respectivement avec (A.6a) et (A.6b), on obtient les inégalités d'ellipticité (A.8b) et (A.8a). Les deux familles sont donc bien deux *frames*. Par polarisation de (A.7), on obtient

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, e_n \rangle \langle f_n, v \rangle \quad \text{pour tous } u, v \in H$$

et (A.8c). □

Ce lemme signifie que si deux familles de vecteurs vérifient l'inégalité de stabilité et vérifient la relation (A.7), alors elles vérifient également la deuxième inégalité de définition d'un *frame* (l'inégalité d'ellipticité), et sont de plus deux *frames* duaux. Deux *frames* sont dits duaux s'ils vérifient (A.8c). Selon cette définition, un *frame* donné peut avoir plusieurs *frames* duaux. Dans la littérature, il est courant de parler du *frame* dual, qui est celui qui fournit les coefficients de décomposition de norme ℓ^2 minimale. Il n'est cependant pas nécessaire de produire le *frame* dual d'un *frame* pour garantir que c'est un *frame*. Ce théorème sera utile pour montrer que des ondelettes dérivées constituent un *frame*, car nous construirons pour cela un *frame* dual.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème sur les *frames* d'ondelettes dérivées.

Théorème A.3

Nous supposons que $\{\psi_{j\mathbf{k}}^n : n = 1 \dots N, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ (en notant $\psi_{j\mathbf{k}}^n(\mathbf{x}) = 2^j \psi^n(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$)

est un frame de $L_2(\mathbb{C})$. On note $\tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n$ les fonctions d'un frame dual. On suppose également :

$$|\widehat{\psi}^n(\boldsymbol{\omega})| \leq \frac{C}{(1 + |\omega_x|)^s(1 + |\omega_y|)^s} \quad \text{pour un } s > 3/2 \quad (\text{A.9a})$$

$$|\widehat{\tilde{\psi}}^n(\boldsymbol{\omega})| \leq \frac{C}{(1 + |\omega_x|)^s(1 + |\omega_y|)^s} \quad \text{pour un } s > 1/2 \quad (\text{A.9b})$$

$$|\widehat{\psi}^n(\boldsymbol{\omega})| \leq C'|\boldsymbol{\omega}|^\alpha \quad \text{pour un } \alpha > 0 \quad (\text{A.9c})$$

$$|\widehat{\tilde{\psi}}^n(\boldsymbol{\omega})| \leq C'|\boldsymbol{\omega}|^\alpha \quad \text{pour un } \alpha > 1 \quad (\text{A.9d})$$

Alors, la famille d'ondelettes

$$\left\{ 2^{-j} \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} : j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, n \in [1, N], \ell \in [1, 2] \right\} \quad (\text{A.10})$$

est un frame de $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. Nous allons produire un frame d'ondelettes duales. Si on note

$$\Psi_{j\mathbf{k}}^{n,\ell} = 2^{-j} \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell}$$

alors on pose

$$\tilde{\Psi}_{j\mathbf{k}}^{n,\ell}(x_1, x_2) = 2^j G_\ell * \tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n$$

où la distribution G_ℓ est définie par sa transformée de FOURIER

$$\hat{G}_\ell(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_\ell}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

En fait, $\mathbf{G} = [G_1 \ G_2]^T$ est le gradient du noyau de GREEN de l'équation de la chaleur :

$$\Delta u = v$$

L'hypothèse (A.9d) nous garantit que les fonctions $\tilde{\Psi}_{j\mathbf{k}}^{n,\ell}$ sont dans $L_2(\mathbb{R}^2)$. De plus, nous pouvons écrire

$$\iint f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \iint \nabla f \cdot (\mathbf{G} * g)d\mathbf{x} \quad (\text{A.11})$$

pour des fonctions f et g suffisamment régulières et d'intégrale nulle, ce qui se voit clairement en passant aux transformées de FOURIER.

Les hypothèses (A.9a) et (A.9d) sont taillées sur mesure pour que les ondelettes $\Psi^{n\ell}$ et $\tilde{\Psi}^{n,\ell}$ vérifient les hypothèse du lemme 5.1. Ceci nous fournit donc les inégalités :

$$\begin{aligned} \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} |\langle f, \Psi_{j\mathbf{k}}^{n\ell} \rangle|^2 &\leq M \|f\|^2 & \forall f \in L_2(\mathbb{R}^2) \\ \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} |\langle f, \tilde{\Psi}_{j\mathbf{k}}^{n\ell} \rangle|^2 &\leq \tilde{M} \|f\|^2 & \forall f \in L_2(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

On note \hat{C}_0^∞ l'ensemble des fonctions dont la transformée de FOURIER est C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Pour toute $f \in \hat{C}_0^\infty$, on peut écrire par dualité des frames $(\psi_{j\mathbf{k}}^n)$ et $(\tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n)$

$$\sum_{\ell=1,2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_\ell}, G_\ell * f \right\rangle = \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_\ell}, \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \left\langle \tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n, G_\ell * f \right\rangle$$

Par application de (A.11), on obtient

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_\ell}, \psi_{j\mathbf{k}}^n \right\rangle \left\langle \tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n, G_\ell * f \right\rangle$$

et par antisymétrie des opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_\ell}$ et de G_ℓ , on obtient

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} \left\langle f, \frac{\partial \psi_{j\mathbf{k}}^n}{\partial x_\ell} \right\rangle \left\langle G_\ell * \tilde{\psi}_{j\mathbf{k}}^n, f \right\rangle$$

et donc

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j,\mathbf{k},n,\ell} \left\langle f, \Psi_{j\mathbf{k}}^{n\ell} \right\rangle \left\langle \tilde{\Psi}_{j\mathbf{k}}^{n\ell}, f \right\rangle$$

Par densité de \hat{C}_0^∞ dans $L_2(\mathbb{R}^2)$ et par continuité de l'expression de droite dans $L_2(\mathbb{R}^2)$, cette relation s'étend à toute $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ et nous pouvons alors conclure par application du lemme des ciseaux. \square

Bibliographie

- [BCD⁺91] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, I. DAUBECHIES, S. G. MALLAT, Y. MEYER, L. RAPHAEL et M. B. RUSKAI. *Wavelets*. Jones and Bartlett, Boston, 1991.
- [CDF92] A. COHEN, I. DAUBECHIES et J. FEAUVEAU. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 45:485–560, 1992.
- [Coh92] A. COHEN. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Masson, 1992.
- [Dau92] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*, tome 61 de *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [Mal89a] S. G. MALLAT. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):69–87, 1989.
- [Mal89b] S. G. MALLAT. A theory for multiscale signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.

Deuxième partie

Apprentissage et interpolation

Chapitre 7

L'apprentissage

Résumé

L'apprentissage et l'interpolation sont deux variantes extrêmes d'un même problème dont l'objet est de construire une fonction censée approcher raisonnablement une fonction inconnue dont on ne connaît qu'un certain nombre d'échantillons. Ces problèmes apparaissent dans des cadres variés qui vont de la résolution d'équations au dérivées partielles, en passant par la modélisation de formes en synthèse d'images, au domaine de l'apprentissage, des réseaux de neurones et du contrôle adaptatif. Dans ce chapitre, nous allons présenter un panorama des diverses méthodes de reconstruction ou d'approximation de fonctions qui ont été proposées.

7.1 Les problèmes d'apprentissage

Le problème type auquel sont confrontés les diverses méthodes présentées dans ce chapitre s'écrit presque systématiquement sous la forme suivante : étant données un certain nombre de mesures $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, pour $n = 1 \dots N$, on veut trouver une fonction f de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} telle que

$$f(x_n) = y_n \quad \text{pour } n = 1 \dots N$$

7.1.1 Quelle solution choisir?

Ce problème est simple à résoudre dans un cadre dit d'estimation paramétrique, c'est à dire que la fonction inconnue est déterminée par un petit nombre de paramètres à estimer (comme dans le cas de la régression linéaire). Dans ce cas, le système linéaire sous-jacent est surdéterminé et il est vraisemblable qu'il n'ait pas de solution. On choisit alors un modèle de mesure bruitée par un bruit gaussien :

$$y_n = f(x_n) + \epsilon_n$$

où les variables ϵ_n sont indépendantes et de même distribution gaussienne centrée d'écart-type σ . La régression consiste à chercher la combinaison de paramètres qui maximise la

vraisemblance (densité conditionnelle de la mesure pour une fonction f fixée). Dans le cas gaussien, on maximise

$$L = \frac{1}{(8\pi)^{N/2}\sigma^N} \prod_{n=1}^N e^{-(f(x_n)-y_n)^2/2\sigma^2}$$

ce qui revient à minimiser

$$\sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2$$

et on obtient ce qu'on appelle communément une méthode dite des moindres carrés.

Si aucune hypothèse forte n'est faite sur la fonction f , c'est-à-dire que si on se contente de supposer qu'elle appartient à un espace fonctionnel de fonctions continues de dimension infinie, nous quittons le cadre de l'estimation paramétrique et le problème est alors mal posé. Il faut lui ajouter des contraintes qui seront motivées par le fait que la fonction ainsi construite prédira correctement d'autres valeurs que les x_n .

7.1.2 Quel problème choisir?

Une heuristique relativement naturelle consiste à dire que l'interpolant le plus « simple » sera le meilleur. Cette notion a trouvé plusieurs formalisations mathématiques :

- une formalisation analytique : une fonction est simple si elle est régulière. Ceci motivera entre autres des approches basées sur la régularisation [TA77], qui peuvent être vues comme des estimations bayésiennes.
- une formalisation de théorie de l'information : une fonction est simple si elle peut être décrite avec peu de mots (ou un programme court). Ceci a motivé plusieurs travaux basés sur la notion de complexité définie par KOLMOGOROV.
- une formalisation statistique de la complexité : VAPNIK [Vap95, Vap97] a construit une théorie statistique de l'apprentissage. Il se place dans le cadre où on veut estimer la dépendance entre deux variables aléatoires x et y sur la bases d'échantillons de ces variables, en approchant la variable y par une fonction $f(x)$ de la variable x . Le risque de prédiction qui est alors par exemple $E(f(x)-y)^2$ ne peut pas être évaluée. La théorie de Vapnik fournit en revanche une borne supérieure de ce risque qui s'écrit sous la forme de deux termes : l'erreur empirique (la somme d'erreurs d'ajustement sur les points de mesure) et un terme qui dépend de la complexité (appelée dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS) de la sous-famille de fonctions utilisée pour réaliser l'approximation. La formule s'écrit

$$E((y - f(x))^2) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - f(x_n))^2 + H(h, \eta, N)$$

avec une probabilité supérieure à $1 - \eta$; h est la dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS. VAPNIK propose alors de minimiser ce qu'il appelle le risque structural, qui est cette somme d'un risque empirique et d'un terme de complexité.

Les différentes approches trouveront leur justifications dans plusieurs types de critères qui sont interdépendants, que nous citons :

- des critères de convergence et de précision (bonne estimation de fonction régulières)
- un critère pratique de rapidité de calcul. Les applications d'algorithmes d'apprentissages font souvent intervenir des quantités importantes de données ou bien des données de dimensions élevées. Le critère de rapidité de calcul devient presque un critère de faisabilité.
- un critère de compacité de stockage. Il se justifie par lui-même et par les limites physiques des ordinateurs qui implémentent ces méthodes. Il se justifie également par le gain en rapidité qu'il est susceptible d'engendrer. Il se justifie enfin par le principe selon lequel la solution la moins complexe, donc stockable de la manière la plus compacte est vraisemblablement la meilleure.

7.1.3 Mesure d'erreur et fonction objectif

On peut définir plusieurs types de mesures d'erreur. La plus simple et la plus accessible est l'erreur empirique, par exemple quadratique :

$$R_{\text{emp}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - f(x_n))^2$$

Des les diverses théories de l'apprentissage, il est courant de chercher à contrôler l'erreur réelle. On suppose que les mesure x_n et y_n sont des réalisations de variables aléatoires X et Y qui sont corrélées, de mesure de probabilité jointe $p(x,y)dxdy$. L'erreur réelle est alors

$$R = E((Y - f(X))^2) = \iint (y - f(x))^2 p(x,y) dx dy$$

Cette erreur a quant à elle le défaut principal de ne pas être mesurable, car dépend d'une densité précisément inconnue. Certaines techniques d'approximation consistent donc à choisir une fonctionnelle objectif. Ce sont des mesures d'erreur composites, qui sont la somme de deux termes :

- un terme d'adéquation aux mesure (ou terme d'erreur empirique)
- un terme de régularité ou de complexité, parfois aussi appelé terme de « contrôle de capacité ».

7.1.4 Les différentes approches

Les résultats disponibles sur les différentes méthodes d'approximation sont de nature variable. Pour certaines approches, on dispose de résultats limités (capacité d'approximation d'un réseau, résultats partiels de convergence), pour d'autres de résultats plus complets de stabilité et de convergence des algorithmes.

7.2 Les réseaux de neurones

Le terme de réseau de neurones désigne une vaste famille de techniques que nous ne pouvons décrire dans son intégralité ici. Dans ce qui suit, le terme de réseau de neurone sera utilisée dans une acception très restreinte : le *perceptron multi-couches déterministe*.

7.2.1 Le perceptron multi-couches

Le perceptron multi-couches est composé d'un certain nombre d'unités de calcul appelées *neurones*, placées dans des couches numérotées de 0 à L . Les neurones de la couche 0 sont appelés *neurones d'entrée* (et leur ensemble noté \mathcal{E}), et ceux de la couche L *neurones de sortie* (et leur ensemble noté \mathcal{S}).

Les neurones sont reliés entre eux par des connexions orientées (parfois appelées *axones*), qui vont d'un neurone d'une couche ℓ à un neurone d'une couche $\ell + 1$. On notera la relation « il existe une connexion allant de n à n' » par « $n \rightarrow n'$ ». Chaque neurone n peut avoir un état $x_n \in \mathbb{R}$. Chaque connexion allant d'un neurone n à un neurone n' a un *poids* $c_{nn'}$.

On peut *consulter* un réseau de neurones. Ceci consiste à fixer l'état des neurones d'entrée, à calculer l'état des autres neurones et à lire l'état des neurones de sortie. Pour calculer les états des neurones, on associe à chaque neurone n une *fonction de transfert* $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'état d'un neurone n est alors calculé par la formule

$$x_n = \phi_n \left(\sum_{n' \rightarrow n} c_{n'n} x_{n'} \right) \quad (7.1)$$

La somme est faite sur tous les neurones n' tels qu'il existe une connexion allant de n' à n , ce qui implique que tous les neurones n' considérés sont dans la couche antérieure à celle de n . On peut remarquer que le calcul des états peut se faire en un balayage unique des neurones couche par couche dans l'ordre croissant des couches. On désigne ce mode de calcul par le terme de *propagation*.

La construction d'un réseau de neurones consiste à choisir le nombre de neurones et leurs fonctions de transfert, les connexions et à fixer les poids des connexions. L'attrait de cette approche réside dans le fait qu'en ne changeant que les poids des connexions, on peut représenter un vaste gamme de fonctions différentes, et qu'il existe une méthode générique pour régler les poids des connexions, appelée *règle d'apprentissage supervisé*. Cette règle peut être employée afin que le réseau reproduise la dépendance entre deux variables aléatoires corrélées E et S . E et S sont deux vecteurs $E = (E_n)_{n \in \mathcal{E}}$ et $S = (S_n)_{n \in \mathcal{S}}$.

7.2.2 Capacité d'expression

L'un des principaux attraits du perceptron multi-couches est de pouvoir approcher n'importe quelle relation dépendance entre entrées et sorties, pourvu que l'on dispose de suffisamment de neurones. Avec des perceptrons à deux couches à fonction de transfert sigmoïdale, on peut aisément approcher une fonction caractéristique d'un convexe quelconque. Ce qui est moins intuitif, ce qu'un perceptron à une couche avec la même fonction de transfert

sigmoïdale pour tous les neurones peut approcher arbitrairement n'importe quelle fonction suffisamment régulière [Cyb89]. Ceci revient à dire que les fonctions

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_k c_k \sigma(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x} + b)$$

forment une famille dense. Des résultats plus précis ont été obtenus par BARRON [Bar93].

CANDÈS et DONOHO ont proposé de remplacer systématiquement les sigmoïdes par des *ridgelets*, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$\mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b)$$

et construisent dans $L_2(\mathbb{R}^d)$ une transformée continue en ridgelets et des *frames* de ridgelets. Ils fournissent ainsi une méthode explicite de construction d'une approximation en ridgelets d'une fonction connue.

7.2.3 La règle d'apprentissage supervisé

On dispose donc d'une *source* d'exemples : une variable aléatoire (E, S) composée de deux vecteurs dépendants. On présente des *exemples* au réseau, c'est à dire que l'on effectue des tirages de la variable (E, S) . On consulte le réseau en fixant les états des neurones d'entrée à E , et on compare la sortie fournie $f(E)$ par le réseau au vecteur S . Idéalement, la sortie est égale à S (ou si la dépendance entre E et S n'est pas déterministe, l'espérance de $f(E) - S$ est nulle).

En général, ce n'est pas le cas, et la règle d'apprentissage consiste alors à modifier les poids de connexions en fonction de leur influence sur la sortie par un simple gradient stochastique qui s'écrit :

$$c_{nn'} \leftarrow c_{nn'} - \gamma \frac{\partial f(E)}{\partial c_{nn'}} \cdot (f(E) - S)$$

Cette règle peut être implémentée sous une forme extrêmement simple appelée *rétropropagation des erreurs*. On définit pour chaque neurone n un deuxième état qui est son erreur r_n . Cette erreur est définie pour les neurones de sortie par $r_n = x_n - S_n$, et est propagée en arrière suivant la formule :

$$r_n = \sum_{n \rightarrow n'} c_{nn'} r_{n'} \phi_{n'}'(x_{n'})$$

d'où le terme de rétropropagation. Les mises à jour des coefficients $c_{nn'}$ s'écrit alors :

$$c_{nn'} \leftarrow c_{nn'} - \gamma x_n r_{n'}$$

Ces deux règles de calcul d'erreur et de mise à jour constitue ce que l'on appelle classiquement les règles de WIDROW-HOFF.

Les fonctions de transfert ϕ_n doivent au moins ne pas être toutes linéaires. Sinon la dépendance entre entrée et sortie est linéaire, et donc triviale. On peut d'ailleurs définir le

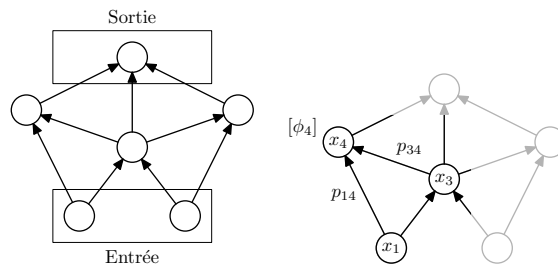


FIG. 7.1 – Un réseau de neurones. Dans la figure de gauche, on voit les neurones, les connexions du graphe sans cycle, et les neurones d'entrée et de sortie sont indiqués. Dans le dessin de droite, la règle de transfert est matérialisée : $x_4 = \phi_4(p_{14}x_1 + p_{34}x_3)$.

nombre « réel » de couches d'un perceptron multi-couches comme étant le nombre de couches où les fonctions de transfert ne sont pas linéaires.

Les fonctions de transfert sont en général des fonctions régulières. C'est considéré comme un prérequis qui est motivé par l'observation que des entrées « proches » doivent donner des résultats « proches » voire identiques en classification. On dit que le réseau doit avoir une capacité de généralisation. Des fonctions couramment utilisées pour la classification sont les sigmoïdes σ , comme la tangente hyperbolique $\sigma : x \mapsto \text{th } x$. Ce sont des fonctions régulières qui tendent vers -1 en $-\infty$ et vers $+1$ en $+\infty$, et qui peuvent être considérées comme des fonctions à réponse binaire.

Ce cadre de constructions est très vaste, ce qui fait que pratiquement toute méthode de calcul peut être vue comme une implémentation en réseau de neurones. Notamment, dès que l'on choisit une base $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'un espace de fonctions sur \mathbb{R}^d , décomposer une fonction dans cette base revient à construire un réseau de neurones mono-couche, avec un neurone par fonction de base g_m qui a précisément comme fonction de transfert g_m . Le neurone de sortie a alors pour état une combinaison linéaire de ces valeurs avec des poids qui sont les coefficients de décomposition.

L'inconvénient majeur de ces approches est que rien ne garantit que la méthode d'apprentissage supervisé converge, sauf dans le cas très particulier où les seules connexions que l'algorithme est censé régler se trouvent en aval des dernières fonctions de transfert non triviales. Dans ce dernier cas, la dépendance entre la valeur produite par le réseau et les coefficients à régler est *linéaire*. Sinon, la fonction d'objectif $E(\|f(E) - S\|^2)$ est une fonction non convexe des coefficients $c_{nn'}$, avec en général plusieurs minima locaux, et rien ne nous garantit que cette méthode de gradient stochastique ne reste alors pas bloquée dans un minimum local.

7.2.4 Les trois étapes de la conception d'un réseau de neurones

En pratique, la difficulté dans le réglage d'un réseau de neurones se situe en amont de la phase d'apprentissage. Pour résumer, on peut considérer que la construction d'un réseau de neurones se décompose en trois étapes :

- Le choix d'une *architecture*. Ceci consiste à choisir le nombre de couches, à fixer certains

poids de connexions et les fonctions de transfert.

- Le choix d'une *règle de croissance*. En pratique, le nombre de neurones à utiliser pour représenter la correspondance entre entrées et sorties dépendra de la complexité de cette correspondance. Il faut donc poser des règles de croissance du réseau, qui déterminent comment la structure du réseau doit évoluer suivant la complexité de la fonction à apprendre. Ces règles de croissance peuvent également inclure des règles de suppression de neurones.
- Le choix d'une règle d'apprentissage pour déterminer la valeur des poids manquants. La règle la plus universelle est la règle d'apprentissage supervisé décrite ci-dessus. On peut en envisager d'autres, comme la résolution d'un système linéaire. La faisabilité ou la convergence d'un algorithme d'apprentissage dépendra de manière cruciale de la bonne réalisation des deux étapes ci-dessus.

7.2.5 Le perceptron de ROSENBLATT

La forme la plus simple de réseau de neurones (réseau à une couche) a été proposée par ROSENBLATT en 1962. ROSENBLATT a appelé cet objet *perceptron*.

Le perceptron a N entrées scalaires $x = (x_1, \dots, x_N)$ et une sortie binaire y :

$$y = \text{sgn}(c + w \cdot x)$$

où c est un scalaire et w un vecteur à N composantes. Le perceptron sépare l'espace en deux demi-espaces d'équations $w \cdot x + c < 0$ et $w \cdot x + c > 0$.

ROSENBLATT veut utiliser le perceptron pour distinguer deux classes d'exemples $x \in \mathcal{C}^+$ et $x \in \mathcal{C}^-$ dont on suppose qu'ils sont séparables par hyperplan, c'est à dire qu'il existe w et c tels que

$$\begin{aligned} w \cdot x + c &< 0 & \forall x \in \mathcal{C}^- \\ w \cdot x + c &> 0 & \forall x \in \mathcal{C}^+ \end{aligned}$$

Sur la base de considérations physiologiques, il suggère de prendre une suite d'exemples (x_t, ϵ_t) où

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= +1 & \text{si } x_t \in \mathcal{C}^+ \\ \epsilon_t &= -1 & \text{si } x_t \in \mathcal{C}^- \end{aligned}$$

et de modifier itérativement les coefficients w et c à chaque fois que le réseau donne une réponse incorrecte y_t à un exemple x_t suivant les règles :

$$\begin{aligned} (w_{t+1}, c_{t+1}) &= (w_t, c_t) & \text{si } \text{sgn}(w_t \cdot x_t + c_t) = \epsilon_t \\ (w_{t+1}, c_{t+1}) &= (w_t + \epsilon_t x_t, c_t + \epsilon_t) & \text{sinon.} \end{aligned}$$

NOVIKOFF a montré que si les deux classes de points sont séparables et finies, et quand la suite d'exemples, chaque exemple est répété un nombre infini de fois, alors l'algorithme converge en temps fini. Il a également donné une majoration du nombre de corrections à effectuer. La borne est exprimée en fonction du rayon de l'ensemble des exemples

$$R = \max\{|x| : x \in \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-\}$$

et de la marge de séparation

$$\rho = \frac{1}{\inf\{\|w\| : w \cdot x + 1 > 0 \forall x \in \mathcal{C}^+ \text{ et } w \cdot x - 1 < 0 \forall x \in \mathcal{C}^-\}}$$

Théorème 7.1 (NOVIKOFF, 1962)

L'algorithme de ROSENBLATT initialisé par $w_0 = 0$ et $c_0 = 0$ converge en temps fini, après au plus $\lfloor R^2/\rho^2 \rfloor$ corrections.

7.3 Des ondelettes comme fonctions de transfert neuronales pour les réseaux à une couche

PATI et KRISHNAPRASAD ont remarqué qu'un réseau de neurones à une couche à fonctions de transfert sigmoïdales pouvait, pour certaines valeurs des poids de connexions, être vu comme un réseau de neurones en ondelettes. Ils proposent une structure de réseau de neurones à une couche avec des fonctions de transfert en ondelettes. La fonction réalisée par le réseau est donc

$$f(\mathbf{x}) = \sum_k c_k \psi(A_k \mathbf{x} + b_k) \quad (7.2)$$

où les coefficients à ajuster sont les c_k .

Ils décrivent deux règles de croissance basées soit sur une analyse fréquentielle de l'ensemble des exemples, ou sur la corrélation inter-échelles des coefficients. Le réglage des poids du réseau se fait par inversion d'un système de régression linéaire, puisque la sortie dépend linéairement de ces poids.

ZHANG et BENVENISTE [ZB92] ont proposé une approche similaire à celle de PATI et KRISHNAPRASAD, qui consiste à rechercher une approximation d'une fonction inconnue par un sous-échantillonnage adaptatif d'une transformée en ondelettes continues. Le réseau est donc aussi un réseau à une couche, de fonction (7.2). Contrairement à PATI et KRISHNAPRASAD, ils font varier les positions b_k et matrices de déformation A_k de chaque ondelette avec un algorithme de rétropropagation.

Par la suite, ZHANG [Zha97] a proposé un algorithme d'approximation adaptative de fonctions constructif qui est relativement proche de ce que nous allons proposer, et que nous détaillerons donc dans le chapitre suivant. BENVENISTE *et coll.* [DJB95] ont développé des approches de Monte-Carlo pour l'apprentissage d'une fonction sur la base d'exemples. Cette approche permet à la fois de prouver des résultats d'approximation non linéaire, et de construire un algorithme qui converge en probabilité.

7.4 Le contrôle adaptatif

Cette technique d'apprentissage peut également servir dans le cadre du contrôle d'un système dynamique dont des paramètres sont inconnus, qui a été développé et étudié en détail par SLOTINE *et coll.* [Slo86, SC86, SL90]. Dans le cas où l'équation du système dépend

linéairement des paramètres inconnus, on peut trouver des algorithmes stables et convergents. Par « paramètres inconnus », on peut désigner un jeu fini de paramètres aussi bien qu'une fonction complète inconnue.

7.4.1 Contrôle adaptatif en dimension finie

Prenons un exemple: on veut déplacer une masse connue m attachée à un ressort de raideur inconnue k , à laquelle on applique une force choisie u . L'équation d'évolution du système est alors :

$$m\ddot{x} = -kx + u \quad (7.3)$$

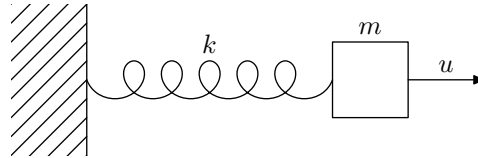


FIG. 7.2 – Schéma de principe du système masse plus ressort et la force appliquée par un contrôleur.

On veut faire suivre à la masse une trajectoire choisie $x_d(t)$. Si la raideur k est connue, on choisit une commande de la forme :

$$u = kx + \left(\ddot{x}_d - 2\frac{\dot{x} - \dot{x}_d}{\tau} - \frac{x - x_d}{\tau^2} \right) \quad (7.4)$$

Ainsi, l'équation d'évolution devient

$$(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + 2\frac{\dot{x} - \dot{x}_d}{\tau} + \frac{x - x_d}{\tau^2} = 0 \quad (7.5)$$

ce qui garantit que l'erreur de suivi $x - x_d$ s'écrit $(a + bt)e^{-t/\tau}$ et tend donc vers 0 exponentiellement. Il est courant d'introduire une variable composite d'erreur

$$s = \dot{x} - \dot{x}_d + \frac{x - x_d}{\tau} \quad (7.6)$$

Cette variable d'erreur est choisie telle que si elle tend vers 0, alors nécessairement l'erreur de suivi $x - x_d$ tend aussi vers 0. Son intérêt est de ramener l'équation d'évolution (7.5) à un système du premier ordre

$$\dot{s} = -\frac{s}{\tau} \quad (7.7)$$

Si la raideur du ressort est maintenant inconnue et estimée par la valeur \hat{k} , l'erreur de suivi ne tend pas vers 0. La force de commande devient

$$u = \hat{k}x + \left(\ddot{x}_d - 2\frac{\dot{x} - \dot{x}_d}{\tau} - \frac{x - x_d}{\tau^2} \right) \quad (7.8)$$

et l'équation d'évolution (7.7) en la variable composite devient

$$\dot{s} = -\frac{s}{\tau} + \frac{\hat{k} - k}{m}x \quad (7.9)$$

En l'état, la convergence vers 0 de s et de l'erreur de suivi ne sont plus garanties.

Le contrôle adaptatif permet de choisir une loi de contrôle et de calcul de k qui garantit la convergence de l'erreur de suivi vers 0 et éventuellement de \hat{k} vers k .

On choisit pour cela une fonctionnelle de la forme

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\gamma(\hat{k} - k)^2$$

où γ est un facteur de gain libre, et on suppose que la variable \hat{k} sera susceptible d'évoluer au cours du temps. Cette fonctionnelle sera une fonction de LYAPUNOV qui garantira la convergence du système si

- elle est définie positive, c'est à dire que son minimum unique est atteint en $s = 0$ et $\hat{k} = k$,
- elle est décroissante au cours du temps.

La première condition est vérifiée par construction. Nous allons voir que nous pouvons choisir une règle d'évolution explicite pour \hat{k} qui garantit que la fonction de LYAPUNOV est décroissante. La dérivée de V au cours du temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} + \gamma(\hat{k} - k)\dot{\hat{k}} \\ &= -\frac{s^2}{\tau} + s\frac{\hat{k} - k}{m}x + \gamma(\hat{k} - k)\dot{\hat{k}} \\ \dot{V} &= -\frac{s^2}{\tau} + (\hat{k} - k)\left(\frac{s}{m}x + \gamma\dot{\hat{k}}\right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Le miracle est qu'en posant

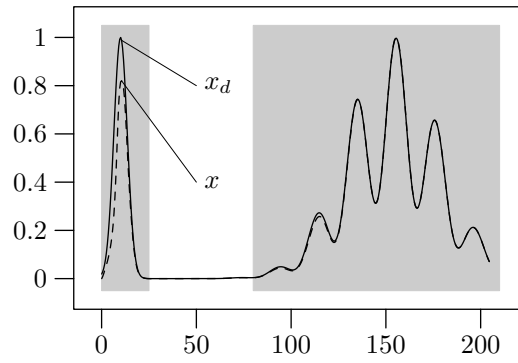
$$\dot{\hat{k}} = -\frac{sx}{m\gamma} \quad (7.11)$$

nous pouvons faire disparaître de l'expression (7.10) un terme qui nous gênait à double titre : il pouvait rendre la fonction de LYAPUNOV non décroissante et ne pouvait être estimé. Nous obtenons donc

$$\dot{V} = -\frac{s^2}{\tau}$$

On peut alors montrer qu'avec les lois de contrôle (7.8) et d'apprentissage (7.11), l'erreur composite s tend vers 0. Intuitivement, s ne peut pas rester durablement strictement positif sans que V décroisse jusqu'à être strictement négatif, ce qui est impossible. Formellement, ceci se prouve à l'aide d'un théorème d'analyse dû à BARBALAT.

On n'a pas de résultat aussi tranché pour \hat{k} . La fonction de Lyapunov ne garantit que le fait qu'il reste borné. En pratique \hat{k} ne tendra vers k que si le contrôle le requiert. Si $x_d = 0$ et si le système part d'un état de repos $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, la commande sera nulle et \hat{k} n'évoluera pas. On dit que le système n'apprend que « ce dont il a besoin ». On voit ainsi qu'on ne peut garantir une vitesse de convergence de la variable d'erreur composite s vers 0, car on peut repousser arbitrairement loin dans le temps l'estimation de k .



(a) Trajectoires souhaitée et réelle

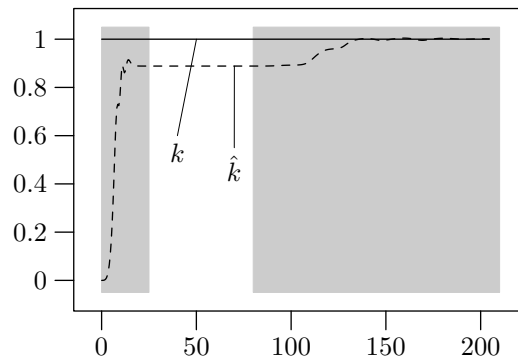
(b) Paramètre réel k et estimé \hat{k}

FIG. 7.3 – Exemple de contrôle adaptatif pour le système masse plus ressort de la figure 7.2. On voit que les zones grisées dans lesquels un mouvement est demandé au contrôleur sont celles où l'erreur d'appréciation $\hat{k} - k$ du paramètre k se réduit. Au repos, l'estimation \hat{k} de ce paramètre ne change pas.

7.4.2 Apprentissage de fonctions

Cette approche peut s'appliquer à un nombre quelconque de paramètres, et éventuellement à un objet caractérisé par un nombre infini de paramètres : une fonction [SS92, CS95, SS95, BS97].

Supposons que le système à contrôler soit de la forme

$$x^{(n)} = f(x, \dots, x^{(n-1)}) + u$$

L'état mesurable du système est composé des variables $x, \dots, x^{(n-1)}$. On se fixe une trajectoire cible x_d dont les dérivées sont connues à tout ordre.

Si on choisit une base discrète $(\phi_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbb{R}^n , la fonction inconnue f se décompose

$$f(x, \dots, x^{(n-1)}) = \sum_{i \in \mathbb{I}} c_i \phi_i(x, \dots, x^{(n-1)})$$

et le problème d'apprentissage se reporte sur les coefficients inconnus c_i . Si on choisit une variable composite

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right)^{n-1} (x - x_d)$$

et une loi de contrôle

$$u = - \sum_{i \in \mathbb{I}} \hat{c}_i \phi_i(x, \dots, x^{(n-1)}) + (\dot{x} - \dot{s}) - \frac{s}{\tau}$$

on obtient l'équation d'évolution en la variable composite

$$\dot{s} = -\frac{s}{\tau} + \sum_{i \in \mathbb{I}} (c_i - \hat{c}_i) \phi_i(x, \dots, x^{(n-1)})$$

Il faut noter que dans l'expression de la commande u choisie, le terme $\dot{x} - \dot{s}$ ne fait intervenir de dérivées de la trajectoire réelle que jusqu'à l'ordre $n - 1$ (par élimination) et peut être calculé à partir de l'état.

Si nous choisissons maintenant un jeu de gains $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{I}}$, la fonction de LYAPUNOV

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{I}} \gamma_i (c_i - \hat{c}_i)^2$$

a pour dérivée temporelle

$$\dot{V} = -\frac{1}{\tau} s^2 + \sum_{i \in \mathbb{I}} (c_i - \hat{c}_i) (s \phi_i(x, \dots, x^{(n-1)}) - \gamma_i \dot{\hat{c}}_i)$$

La fonction de LYAPUNOV sera décroissante au cours du temps si on choisit la loi d'évolution sur les coefficients \hat{c}_i :

$$\dot{\hat{c}}_i = \frac{s \phi_i(x, \dots, x^{(n-1)})}{\gamma_i}$$

Remarques

- Ce schéma d'apprentissage sera un des rares qui puisse être concilié avec les impératifs de stabilité du contrôle.
- On voit que la loi d'évolution imposée sur chaque coefficient ressemble à celle imposée aux coefficients des réseaux de neurones. Chaque coefficient est modifié en fonction de l'erreur, et à la mesure de son influence à un moment donné (qui est $\phi_i(x, \dots, x^{(n-1)})$)
- On verra que le choix des paramètres γ_i n'est pas innocent, surtout quand le nombre de paramètres c_n peut être infini. Le choix de ces gains revient à choisir dans la fonction de LYAPUNOV une mesure de régularité. Si par exemple la base de fonctions est une base d'ondelettes orthogonales (ψ_{jk}) et si les gains γ_{jk} correspondants sont de la forme

$$\gamma_{jk} = 1 + 2^{2\alpha j}$$

la mesure de régularité est équivalente à une norme de SOBOLEV d'indice α .

Ainsi, la fonction de LYAPUNOV peut à nouveau être vue sous le schéma classique : un terme d'adéquation (erreur de suivi) plus un terme de régularité imposée à la fonction à apprendre. Dans ce cas particulier, le deuxième terme cumule la double fonction d'imposer une régularité à la fonction apprise et d'imposer son adéquation aux mesures. Cette approche a de très fortes similitudes formelles avec les méthodes qui vont être exposées par la suite, et qui sont dites de régularisation.

7.5 La régularisation et les fonctions radiales

La régularisation est un cadre d'approximation qui a des bases théoriques solides. Cet outil a connu plusieurs évolutions récentes, parmi lesquelles les *Support Vector Machines* (SVM) de VAPNIK, ou encore les méthodes multipolaires de calcul rapide adaptées à ce cadre par BEATSON et NEWSAM [BN98].

La régularisation [TA77] consiste à choisir un espace hilbertien \mathcal{H} de fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ et d'un produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les contraintes interpolatrices doivent être équicontinues au sens de cette norme :

$$\exists M, \forall x, \forall f \in \mathcal{H}, |f(x)| \leq M \|f\|_{\mathcal{H}}$$

7.5.1 Le problème régularisé

La solution interpolatrice régularisée est donc la fonction f de norme minimale qui vérifie les contraintes interpolatrices, c'est-à-dire

$$f = \arg \min \{ \|f\|_{\mathcal{H}} : f(x_n) = y_n, \forall n = 1 \dots N \} \quad (\text{I})$$

Une forme plus générale de problème de régularisation consiste à minimiser un critère qui combine des contraintes de régularité et d'adéquation aux mesures, sous la forme

$$f = \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \sum_{n=1}^N |f(x_n) - y_n|^2 + \lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (\text{II})$$

Le deuxième problème est systématiquement bien posé : c'est un problème de minimisation d'une fonction quadratique définie positive dans un espace de HILBERT qui a une solution unique. Le premier problème n'est lui bien posé que si les contraintes interpolatrices ne sont pas dégénérées. Ceci impose que les points de mesure x_n soient distincts, et que l'espace \mathcal{H} soit suffisamment « riche ». Cette richesse s'exprime par exemple de la manière suivante : pour toute partie finie $X \subset \mathbb{R}^d$, on doit avoir

$$\{f|_X : f \in \mathcal{H}\} = \mathbb{R}^X$$

Cette propriété ne peut être vérifiée par un espace de dimension finie. Elle l'est par tous les espaces de SOBOLEV qui ne contiennent que des fonctions continues.

Nous verrons dans la suite que choisir la formulation (II) du problème consiste à supposer que les mesures y_i sont perturbées par un bruit gaussien additif d'autant plus important que λ est grand. La formulation (I) en est donc un cas limite correspondant à un bruit de mesure nul.

7.5.2 Résolution du problème régularisé

Les calculs qui vont suivre n'ont pas pour objectif d'établir des résultats connus, et seront donc présentés sans toutes les justifications théoriques.

Dans un espace de HILBERT, une fonctionnelle linéaire continue peut s'exprimer comme le produit scalaire par un vecteur de l'espace (théorème de représentation de RIESZ). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un vecteur $v_x \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(x) = \langle f, v_x \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

On définit également le noyau d'interpolation

$$K(x, y) = \langle v_x, v_y \rangle.$$

Par construction, on a $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

La solution du problème (II) s'écrit alors explicitement à l'aide des vecteurs v_x . En effet en notant

$$\begin{aligned} M[f, \lambda] &= \sum_{n=1}^N |f(x_n) - y_n|^2 + \lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sum_{n=1}^N |\langle f, v_{x_n} \rangle - y_n|^2 + \lambda \langle f, f \rangle \end{aligned}$$

la forme différentielle dM est

$$\begin{aligned} dM &= 2\lambda \langle f, df \rangle + 2 \sum_{n=1}^N \langle df, v_{x_n} \rangle \langle f, v_{x_n} \rangle - 2 \sum_{n=1}^N y_n \langle df, v_{x_n} \rangle \\ &= \left\langle 2\lambda f + 2 \sum_{n=1}^N \langle f, v_{x_n} \rangle v_{x_n} - 2 \sum_{n=1}^N y_n v_{x_n} \middle| df \right\rangle \end{aligned}$$

Au minimum, cette différentielle est nulle, ce qui signifie que

$$\lambda f = \sum_{n=1}^N (y_n - \langle f, v_{x_n} \rangle) v_{x_n} \quad (7.12)$$

Cette formule implicite nous indique déjà que la solution s'écrit comme combinaison linéaire des N fonctions v_{x_n} . On pose

$$f = \sum_{n=1}^N c_n v_{x_n} \quad (7.13)$$

i.e. $f(x) = \sum_{n=1}^N c_n K(x_n, x)$

et

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \langle v_{x_1}, v_{x_1} \rangle & \cdots & \langle v_{x_1}, v_{x_N} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{x_N}, v_{x_1} \rangle & \cdots & \langle v_{x_N}, v_{x_N} \rangle \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \langle f, v_{x_1} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_{x_N} \rangle \end{bmatrix} \quad \text{et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

On obtient par produit scalaire de (7.13) et (7.12) par les v_{x_m} pour $m = 1 \dots N$ les relations

$$KC = F \quad (7.14)$$

$$\lambda F = K(Y - F) \quad (7.15)$$

dont on tire

$$C = (K + \lambda I)^{-1} Y \quad (7.16)$$

Dans le cas limite où $\lambda \rightarrow 0$, on doit supposer que K est inversible (ce qui impose notamment que les x_n soient distincts), et on peut alors écrire

$$C = K^{-1} Y \quad (7.17)$$

qui est la solution du problème (I).

7.5.3 Noyaux auto-reproduisants de régression

Le noyau auto-reproduisant [Aro50, GJP95] associé à cet espace de HILBERT est la fonction

$$K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto v_x(y) = \langle v_x, v_y \rangle$$

On appelle ce noyau « auto-reproduisant » parce qu'il vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle h, K(\cdot, x) \rangle &= h(x) & \forall h \in \mathcal{H}, x \in \mathbb{R}^d \\ \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y) \rangle &= K(x, y) & \forall x, y \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Les noyaux présentés jusqu'à présent sont dits définis positifs, parce que la matrice de collocation symétrique K , qui peut s'écrire

$$K = \begin{bmatrix} K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ K(x_N, x_1) & \dots & K(x_N, x_N) \end{bmatrix}$$

est définie positive si les points x_n sont tous distincts.

Des formes courantes de noyaux auto-reproduisants sont les noyaux invariants par translation :

$$K(x + \delta, y + \delta) = K(x, y) \quad \forall x, y, \delta$$

qui s'écrivent sous une forme simplifiée $K(x, y) = K(x - y)$. Les noyaux auto-reproduisants pour les espaces de SOBOLEV définis avec une norme invariante par translation sur un domaine infini rentrent dans ce cadre. La norme hilbertienne s'écrit alors sous la forme

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{K}(\omega)} d\omega$$

où la transformée de FOURIER \hat{K} de K est intégrable, strictement positive et bornée :

$$\begin{aligned} \hat{K}(\omega) &\in]0, M] & \forall \omega \\ \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}(\omega) d\omega &< +\infty \end{aligned}$$

Parmi ces noyaux, il est également courant de choisir des noyaux isotropes, qui s'écrivent finalement

$$K(x - y) = g(\|x - y\|)$$

On note que, dans ce cas, le noyau K et sa transformée de FOURIER \hat{K} sont des fonctions radiales.

7.5.4 Fonctions définies positives

Dans le cas radial, le noyau d'interpolation s'écrit donc

$$K(x, y) = g(\|x - y\|)$$

D'après les résultats que nous avons vus ci-dessus, la fonction g conviendra si la transformée de FOURIER de la fonction $x \mapsto g(\|x\|)$ définie de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} est positive. Le critère

faisant intervenir d explicitement, la fonction g ne pourra a priori convenir que pour un espace de départ de dimension d fixée \mathbb{R}^d .

Un théorème de SCHOENBERG fournit une caractérisation des fonctions g qui conviennent pour un espace de départ de dimension d quelconque. Nous allons l'énoncer en donnant d'abord les définitions suivantes.

Définition 7.1

Une fonction g de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} est dite **définie positive** si pour tous entiers d et N , pour tout N -uplet (x_1, \dots, x_N) de points distincts de \mathbb{R}^d , la matrice de terme général $g(\|x_n - x_m\|)$ est définie positive.

Définition 7.2

Une fonction h de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} est dite **absolument décroissante** si

1. elle est indéfiniment dérivable
2. pour tout $t \in]0, +\infty[$ et tout entier naturel n

$$\begin{aligned} h^{(n)}(t) &> 0 && \text{si } n \text{ est pair,} \\ h^{(n)}(t) &< 0 && \text{si } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer

Théorème 7.2 (SCHOENBERG, 1950)

La fonction g est définie positive si et seulement si la fonction $t \mapsto g(\sqrt{t})$ est absolument décroissante.

Ce théorème a deux avantages considérables : il nous libère de toute considération fréquentielle et nous fournit un critère relativement simple pour choisir une fonction g qui conviendra pour faire de l'approximation dans un espace de dimension quelconque.

Ainsi, nous pouvons produire les couples de fonctions absolument décroissantes et de fonctions définies positives suivants :

Absolument décroissante	Définie positive
$x \mapsto e^{-x/2\sigma^2}$	$r \mapsto e^{-r^2/2\sigma^2}$
$x \mapsto \frac{1}{(a^2 + x)^\alpha}$	$r \mapsto \frac{1}{(a^2 + r^2)^\alpha}$

Ce modèle nous permet de construire des fonctions qui conviennent pour de l'interpolation dans n'importe quelle dimension. Ceci exclut de notre champ de vision les fonctions qui pourraient ne convenir que pour une dimension d donnée.

7.5.5 Modèle bayésien

On peut justifier une telle approche par un modèle bayésien, qui repose sur un modèle a priori du signal et du bruit. On suppose tout d'abord que la fonction f à estimer est une réalisation d'un processus aléatoire centré de densité

$$dP(f) \propto e^{-\|f\|_{\mathcal{H}}^2/2s^2}$$

Cette hypothèse apparemment *ad hoc* revient à faire les hypothèses suivantes sur les valeurs ponctuelles de la fonction :

1. $f(x)$ est une variable aléatoire centrée gaussienne,
2. $E(f(x)f(y)) = s^2 K(x,y)$

et le noyau apparaît donc explicitement comme terme de corrélation entre valeurs ponctuelles de la fonction¹.

On fait ensuite l'hypothèse que les mesures y_n sont des mesures bruitées :

$$y_n = f(x_n) + \epsilon_n$$

où les variables ϵ_n sont gaussiennes identiquement distribuées d'écart-type σ . On peut alors exprimer la densité de probabilité conditionnelle des mesures y_n en fonction de la valeur de la fonction

$$dP(\{y_n\}|f) \propto \prod_{n=1}^N e^{-(f(x_n)-y_n)^2/2\sigma^2}$$

La règle de BAYES consiste à rechercher la fonction f qui maximise la densité de probabilité *a posteriori* $dP(f)$ sur la donnée des mesures (y_n) , qui s'écrit à un facteur de normalisation près :

$$\begin{aligned} dP(f|\{y_n\}) &\propto \frac{dP(\{y_n\}|f)dP(f)}{dP(\{y_n\})} \\ &= e^{-\|f\|_{\mathcal{H}}^2/2s^2} \times \prod_{n=1}^N e^{-\epsilon_n^2/2\sigma^2} \\ &\propto \exp\left(-\frac{\|f\|_{\mathcal{H}}^2}{s^2} - \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2/2\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ce qui revient bien à minimiser le terme

$$\lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{n=1}^N (f(x_n) - y_n)^2$$

pourvu que λ désigne le carré du rapport estimé entre bruit et signal :

$$\lambda = \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2$$

On voit la différence principale entre les deux problèmes (I) et (II) : la première forme correspond à l'hypothèse selon laquelle le bruit de mesure est nul. On voit également que choisir un coefficient de pondération λ revient à faire une hypothèse sur les importances relatives du signal et du bruit.

1. PARZEN a montré en 1962 que la donnée d'un espace de HILBERT au noyau auto-reproduisant K et la donnée d'un processus stochastique centré de covariance $K(x,y)$ sont équivalentes (quand K est symétrique défini positif).

7.5.6 Limite de l'approche régularisée

Quand on choisit une norme régularisante, on doit choisir une fonction K telle que la norme s'exprime sous la forme

$$\int \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{K}(\omega)} d\omega$$

où K doit décroître quand ω tend vers l'infini et prendre une valeur finie en 0. Le choix de cette fonction implique nécessairement le choix a priori d'un paramètre d'échelle. On peut le retrouver systématiquement de la manière suivante. On pose :

$$\Delta\omega = \inf\{|\omega| : f(\omega) < f(0)/2\}$$

Le paramètre d'échelle sera alors $\Delta x = 1/\Delta\omega$. Cette approche n'est donc pas invariante par changement d'échelle. Le choix de ce paramètre d'échelle conditionne la convergence du schéma d'approximation, et doit être lié à la densité des points. Si cette densité n'est pas uniforme, et si par exemple le paramètre d'échelle est variable, l'arsenal théorique développé ne s'applique plus.

7.6 Extension à des semi-normes et des noyaux conditionnellement définis positifs

Si on veut choisir une fonctionnelle quadratique qui pénalise les fonctions irrégulières sans introduire de facteur d'échelle, il faut choisir un noyau K avec une fonction g homogène, par exemple de la forme $r \mapsto r^\alpha$. Nous obtenons des semi-normes :

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int |\hat{f}(\omega)| \times \|\omega\|^\alpha d\omega$$

7.6.1 Théorème du représentant

Si la fonction $\omega \mapsto \hat{K}(\omega)$ diverge en $+\infty$, la semi-norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{K}(\omega)} d\omega$$

ne définit plus un espace de HILBERT, mais un semi-espace de HILBERT. Ce semi-espace de HILBERT peut être vu comme la somme de

- l'espace des distributions tempérées dont la transformée de FOURIER est une fonction localement de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ et pour lesquelles l'intégrale définissant la semi-norme ci-dessus est finie,
- un espace \mathcal{N} de dimension finie des distributions tempérées f telles que $\hat{f} \times \sqrt{\hat{K}(\omega)}$ ait un sens et soit nulle. En pratique, le pôle de $\hat{K}(\omega)$ est à croissance polynômiale et cet espace est un ensemble de polynômes.

Les résultats présentés en 7.5 s'étendent à ce cas. On peut citer un théorème de KIMELDORF et WAHBA qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème 7.3 (KIMELDORF, WAHBA)

Le problème de minimisation de la fonctionnelle quadratique

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 / K(\omega) d\omega$$

sous les contraintes

$$f(x_n) = y_n \quad \text{pour } n = 1 \dots N$$

est bien posé dans un semi-espace de Hilbert sous la réserve que

$$(P \in \mathcal{N} \text{ et } \forall n, P(x_n) = 0) \Rightarrow P = 0$$

La solution se caractérise alors de la manière suivante. Elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = P + \sum_{n=1}^N c_n K(x_n, x) \quad \text{où } P \in \mathcal{N},$$

elle vérifie les conditions interpolatrices

$$f(x_n) = y_n$$

et les coefficients (c_n) vérifient

$$\sum_{n=1}^N c_n P(x_n) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

On peut trouver une formulation similaire pour la variante de ce problème qui inclut un modèle de bruit. On peut montrer que ce genre de problème d'interpolation a toujours une solution unique quand on se donne un espace de polynômes \mathcal{N} et un noyau $x, y \mapsto K(x, y)$ symétrique. La contrainte de définie positivité qui s'appliquait auparavant est remplacée par une contrainte de définie positivité conditionnelle :

Définition 7.3

Une fonction continue symétrique définie de $(\mathbb{R}^d)^2$ dans \mathbb{R} est **conditionnellement définie positive** par rapport à un espace de polynômes \mathcal{N} si elle vérifie la propriété suivante : pour tout entier N , tous points x_1, \dots, x_N de \mathbb{R}^d , et tous réels $c_1 \dots c_N$, on a

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m K(x_n, x_m) > 0$$

si

$$\sum_{n=1}^N c_n P(x_n) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{N}$$

et si les c_n ne sont pas tous nuls.

De la même manière que pour les noyaux d'interpolation définis positifs, on peut trouver des fonctions g telles que le noyau radial

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(\|x\|) \end{aligned}$$

soit défini positif conditionnellement à l'espace $K_{p-1}(\mathbb{R}^d)$ des polynômes de degré au plus $p-1$, et ce quelle que soit la dimension d de l'espace de départ. D'où

Définition 7.4

Une fonction de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} est conditionnellement définie positive de degré p si pour tout entier d , pour tout entier N , tout N -uplet (x_1, \dots, x_N) de points de \mathbb{R}^d , tout N -uplet de réels (c_1, \dots, c_N) non tous nuls, on a

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m g(\|x_n - x_m\|) > 0$$

si les coefficients c_n vérifient

$$\sum_{n=1}^N c_n P(x_n) = 0 \quad \forall P \in K_p(\mathbb{R}^d)$$

Le théorème de SCHOENBERG a été étendu par MICHELLI [Mic86] aux noyaux conditionnellement définis positifs.

Théorème 7.4 (MICHELLI, 1986)

Une fonction g est conditionnellement définie positive de degré p si et seulement si la fonction

$$h : t \mapsto g(\sqrt{t})$$

vérifie

$$(-1)^k h^{(k)}(t) > 0 \quad \forall k \geq p, \forall t > 0$$

Nous avons de nouveau une caractérisation exacte des fonctions g qui génèrent des noyaux radiaux conditionnellement définis positifs pour des dimensions d'espace quelconques et qui nous affranchit encore de considérations fréquentielles.

À titre d'exemple, nous pouvons citer les fonctions suivantes

Fonctions h	Fonctions radiales	Ordre p
$x \mapsto \sqrt{a^2 + x}$	$r \mapsto \sqrt{a^2 + r^2}$	1
$x \mapsto (a^2 + x)^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N}$	$r \mapsto (a^2 + r^2)^\alpha$	$\lfloor \alpha \rfloor$
$x \mapsto x^{n+1/2}$	$r \mapsto r^{2n+1}$	n

Un exemple de telles fonctions a été étudié par DUCHON. Il a proposé une fonctionnelle de régularisation de la forme suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \int |\hat{f}(\omega)|^2 \|\omega\|^{2m} d\omega$$

dont le noyau auto-reproduisant a donc pour transformée de FOURIER

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\|\omega\|^{2m}}$$

La régularité doit être suffisante pour que les noyaux soient continus, ce qui signifie que $m > d/2$.

L'expression réelle du noyau est alors

$$\begin{aligned} K(x) &= \|x\|^{2m-d} && \text{si } d \text{ est impair} \\ K(x) &= \|x\|^{2m-d} \ln \|x\| && \text{sinon.} \end{aligned}$$

L'espace polynômial associé à de telles fonctions est l'espace des polynômes de degré au plus $m - 1$.

7.6.2 Ordre d'approximation

Un certain nombre de théorèmes permettent d'estimer la vitesse de convergence d'un réseau de fonctions radiales en fonction de la régularité de la fonction à estimer f et de la norme régularisante utilisée, et sont par exemple rappelés dans [SW98].

Si on note f la fonction inconnue, et $f_{\mathcal{X}}$ la fonction obtenue par interpolation régularisée sur les échantillons $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$, on peut définir:

La maille maximale de \mathcal{X} est le réel

$$h(\mathcal{X}) = \max_{\mathbf{x} \in D} \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$$

La distance de séparation est le nombre

$$q(\mathcal{X}) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$$

Si la fonction f est la restriction à un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ d'une fonction de l'espace de SOBOLEV $H^{d/2+s}$, et que l'on prend un noyau d'interpolation K_s tel que

$$A\|\omega\|^{-d-2s} \leq \hat{K}(\omega) \leq B\|\omega\|^{-d-2s} \quad (7.18)$$

alors l'erreur d'approximation $\|f - f_{\mathcal{X}}\|_{\infty}$ est bornée par

$$\|f - f_{\mathcal{X}}\|_{\infty} \leq Mh(\mathcal{X})^s$$

Si la fonction n'est pas assez régulière, la convergence ne peut pas être prouvée. Si la fonction à approcher f est de régularité SOBOLEV locale $H^{d/2+s'}$, il faut utiliser un noyau K_s de régularité s suffisamment faible pour que $s < \min s'$.

Ceci pose deux problèmes: il faut choisir a priori la régularité sous-jacente s de la régularisation. Cette estimation doit être la meilleure possible, car si elle est trop basse, la vitesse de convergence s'en ressent et si elle est trop élevée, le système devient instable. De plus, ce paramètre est unique. Si la fonction a une régularité non uniforme, on doit s'aligner sur

la plus basse régularité $\min s'$ pour choisir le paramètre s . La conséquence est alors que la vitesse de convergence, étant en $h(\mathcal{X})^{\min s'}$, est relativement lente.

Cette approche a un autre problème : le mauvais conditionnement de la matrice du système à inverser. Celle-ci est liée à la distance de séparation des échantillons (la plus petite distance entre deux échantillons distincts). Si on note A la matrice du système, on a la seule majoration

$$\|A^{-1}\|_{\infty, \infty} \leq q(\mathcal{X})^{-s}$$

et diverge donc d'autant plus vite que l'ordre cherché est bon, ce qu'on désigne parfois dans la littérature sous le terme de *relation d'incertitude* de la régularisation.

7.6.3 Calcul rapide avec des noyaux radiaux

A priori, le calcul en un point x d'une combinaison linéaire de noyaux :

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n g(\|x_n - x\|)$$

demande N opérations quand ces noyaux ne sont pas bien localisés, ce qui est le cas de tous les noyaux présentés ci-dessus, à l'exception peut-être de la gaussienne. Quand le nombre de noyaux qui intervient augmente, les calculs de valeurs au point peuvent devenir de plus en plus longs.

BEATSON et NEWSAM [BCN98, BN98] ont proposé un schéma d'accélération des calculs qui consiste à regrouper les noyaux proches les uns des autres en paquets, et ces paquets en paquets plus gros. Ils s'inspirent pour cela des travaux de GREENGARD et ROKHLIN. Nous allons avoir un aperçu de la méthode de GREENGARD et ROKHLIN dont le problème est formellement plus simple, puis nous verrons ce qui s'y ajoute dans l'approche de BEATSON et NEWSAM.

GREENGARD et ROKHLIN veulent résoudre numériquement une équation elliptique avec un nombre fini de sources discrètes, dont le noyau de GREEN est (à des transformations élémentaires près) une fonction analytique. Ils ont pour cela mis au point une méthode rapide pour calculer des potentiels de la forme

$$f(z) = \sum_{n=1}^N c_n \phi(z - z_n)$$

définis dans le plan complexe. Les noyaux ϕ sont des noyaux analytiques de la forme de

$$\phi : z \mapsto \frac{1}{z}$$

ou encore $\phi : z \mapsto \ln z$

GREENGARD et ROKHLIN montrent que si on groupe des centres $(z_n)_{n \in P}$ qui sont proches, on peut trouver un développement *multipolaire* centré en un point z_c qui approche bien leur

contribution à une distance grande devant le « rayon » de ce groupe de points :

$$\sum_{n \in P} c_n \phi(z - z_n) = a_{-1} \ln(z - z_c) + a_0 + \frac{a_1}{z - z_c} + \cdots + \frac{a_m}{(z - z_c)^m} + \mathcal{O}\left(\frac{r}{|z - z_c|}\right)^{m+1}$$

où le « rayon » r est

$$D = \max_{n \in P} |z_n - z_c|$$

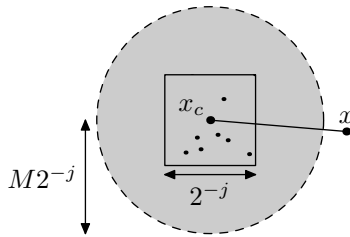


FIG. 7.4 – *Domaine de validité de l'approximation multipolaire. Si les centres $(z_n)_{n \in P}$ se trouvent tous dans un carré de centre z_c et de côté 2^{-j} , l'approximation multipolaire de la contribution de ces centres z_n est valide au-delà d'un cercle de rayon $M2^{-j}$.*

Ils développent également des règles de calculs pour décentrer un développement multipolaire, c'est-à-dire pour passer d'un développement de la forme

$$a_{-1} \ln(z - z_c) + a_0 + \frac{a_1}{z - z_c} + \cdots + \frac{a_m}{(z - z_c)^m}$$

à un développement de la forme

$$b_{-1} \ln(z - z'_c) + b_0 + \frac{b_1}{z - z'_c} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z'_c)^m}$$

Leur méthode de calcul d'un potentiel se subdivise alors en deux étapes. Une étape préparatoire consiste à placer les centres z_n des noyaux dans les nœuds d'un arbre. L'arbre est un arbre quaternaire, dont chaque nœud est associé à un carré dyadique $2^{-j}[k; k+1] \times [k'; k'+1]$ du plan. La structure de l'arbre est liée à la subdivision de ces carrés en quatre, c'est-à-dire que le nœud lié au carré

$$2^{-j}[k; k+1] \times [k'; k'+1]$$

a pour fils les quatre nœuds liés aux carrés

$$2^{-j-1}[2k + \epsilon; 2k + 1 + \epsilon] \times [2k' + \epsilon'; 2k' + 1 + \epsilon'] \quad (\epsilon, \epsilon') \in \{0, 1\}^2$$

L'arbre est construit de telle manière que les feuilles (les nœuds associés aux carrés de plus petite taille) contiennent au plus un nombre prédéterminé ν de points z_n .

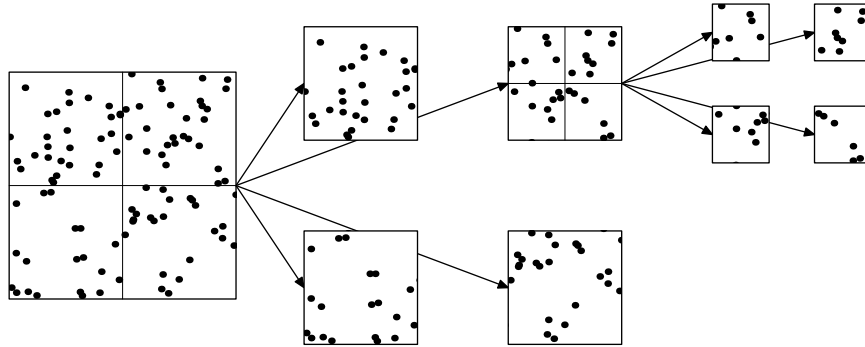


FIG. 7.5 – L'arbre de GREENGARD pour le calcul rapide d'un potentiel. La figure montre la structure hiérarchique de l'arbre liée à une subdivision de carrés.

Pour chaque feuille, on calcule le développement multipolaire autour du centre de son carré. Ensuite, on calcule les développements multiplicaires des nœuds intermédiaires par remontée d'arbre : pour cela, les développements multiplicaires des quatre fils d'un nœud sont recentrés au centre du carré du nœud père et sommés. A la fin de cette phase préparatoire, nous avons donc un arbre, dont chaque nœud correspond à un carré du domaine, et pour lequel nous disposons d'un développement multipolaire dont la précision est bonne à une distance du carré grande devant son rayon, comme indiqué en Fig. 7.4.

Le calcul de la valeur du potentiel total en un point utilise ensuite par récursivité ce jeu d'approximations à plusieurs échelles. La valeur du potentiel est calculée comme somme des contributions de tous les carrés de plus grande taille placés à la racine de l'arbre. Quand un carré est loin du point de mesure x (relativement à sa taille), son développement multipolaire est utilisé. Sinon, on recourt aux contributions des quatre sous-carrés qui le composent, et ainsi récursivement. Par une telle approche, si les N centres x_n sont placés avec une densité à peu près uniforme, le temps d'estimation du potentiel en un point est de l'ordre de $\log N$ au lieu de N .

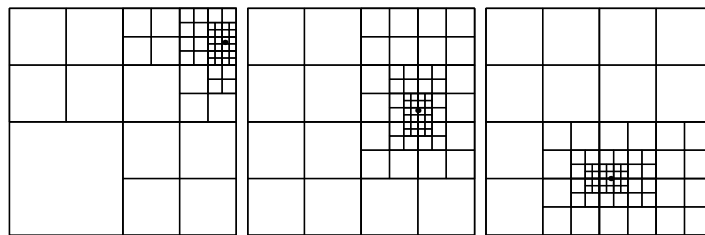


FIG. 7.6 – Exemples de grilles utilisées pour calculer un potentiel en différents points. On voit que plus on s'approche du point où l'estimation est faite, plus les carrés utilisés sont petits.

Comme les noyaux utilisés par GREENGARD et ROKHLIN sont analytiques, les développements multipolaires sont formellement de la même nature qu'un développement de LAURENT d'une fonction sur \mathbb{R} .

BEATSON et NEWSAM étendent cette approche à des noyaux non analytiques. Un développement asymptotique dans toute sa généralité fait intervenir des différentielles d'ordre quelconque, c'est à dire des tenseurs d'ordre k à 2^k coefficients. Comme les noyaux qu'ils utilisent sont radiaux, cette approximation se simplifie en combinaison de termes de la forme

$$\sum a_{p,q} \frac{(x.u)^p}{\|x\|^q} \quad \text{où les } p \text{ et } q \text{ vérifient } p < q$$

sensiblement plus malaisée à manipuler que les développements de GREENGARD et ROKHLIN. L'application est en revanche plus générale, puisque les fonctions n'ont plus à être analytiques, et la dimension de l'espace peut être plus élevée.

Pour des noyaux homogènes (conditionnellement définis positifs), l'erreur d'approximation est de l'ordre de $(r/\|x - x_c\|)^p$ où p est l'ordre d'approximation, ce qui signifie que la distance du point d'estimation x au centre x_c d'un carré doit être grande devant le côté du carré r

$$\|x - x_c\| \gg r$$

BEATSON et NEWSAM appliquent également ces méthodes à des noyaux non homogènes. Comme exemple de noyau non homogène, on peut citer les multiquadriques

$$x \mapsto \sqrt{a^2 + \|x\|^2}$$

où un paramètre a homogène à une distance apparaît. Dans ce cas l'approximation multipolaire n'est valide que si

$$\|x - x_c\| \gg \sqrt{r^2 + a^2}$$

ce qui limite la finesse des subdivisions de carrés, dans la mesure où il n'est pas intéressant de recourir à des subdivisions en carrés de taille inférieure à a .

Des résultats numériques de comparaison entre un calcul direct des valeurs de la fonction et un calcul avec l'approche multipolaire sont consignés dans le tableau 7.1. Ils donnent le temps de calcul pour estimer en 3200 points différents la valeur d'une fonction qui est elle-même combinaison de 3200 noyaux placés aléatoirement. L'ordre d'approximation pour l'estimation multipolaire est choisi de telle sorte que la précision relative soit de 10^{-10} . Le temps de calcul de N valeurs d'une somme de N noyaux est ramené en théorie à $\mathcal{O}(N \log N)$, alors que le calcul direct prend N^2 opérations. Il faut également noter que la phase de préparation est la plus coûteuse, tandis que la phase de calcul de N valeurs une fois l'arbre construit ne coûte que N opérations.

Cette méthode permet donc d'évaluer une combinaison de noyaux en N points pour un total de $N \log N$ opérations. Il peut aussi être utilisé pour inverser la matrice de collocation par une méthode itérative. Sa complexité ne permet en revanche pas de l'utiliser pour des méthodes d'inversion plus complexes et directes.

Type de noyaux	$\sqrt{x^2 + .001}$	$x^2 \ln x $
Temps (calcul direct)	32.2 s	63.6 s
Temps (méthode multipolaire)	0.71 s	0.97 s

TAB. 7.1 – Comparaison entre le calcul direct et la méthode multipolaire

7.7 Les machines à vecteurs support de VAPNIK

Les machines à vecteurs support peuvent être utilisées en régularisation, pour faire de la classification ou de la régression. Leur intérêt est de fournir une solution plus creuse qu'une solution de régularisation classique, dans la mesure où en général, la plupart des coefficients des décompositions qu'ils fournissent sont strictement à zéro. L'approche des vecteurs support est basée sur une théorie plus générale de la complexité et de la capacité de généralisation que nous décrivons ici.

VAPNIK et CHERVONENKIS ont proposé une mesure de complexité d'une famille de fonctions qui est appelée dimension de VAPNIK–CHERVONENKIS et brièvement dimension VC. VAPNIK a prouvé qu'il est possible de majorer avec une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut le risque d'approximation d'une correspondance entre deux variables aléatoires X et Y par la somme de deux termes connus. Le premier terme est le risque empirique, c'est-à-dire l'erreur d'ajustement de la fonction f sur N réalisations de ces variables $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$, et le deuxième terme fait intervenir la mesure de complexité (dimension VC) de la famille de fonctions dans laquelle on choisit l'approximation f , et le nombre N d'échantillons. On note le risque empirique

$$R_{\text{emp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2$$

et le risque réel

$$R = E(Y - f(X))^2$$

La majoration obtenue a la forme suivante

$$R \leq R_{\text{emp}} + H(\eta, h, N) \quad \text{avec probabilité } 1 - \eta$$

où la fonction H est connue.

VAPNIK propose une stratégie de minimisation du terme de droite de l'inégalité ci-dessus, qu'il appelle *risque structurel*

$$R_{\text{struct}} = R_{\text{emp}} + H(\eta, h, N)$$

Une réalisation possible est de choisir une suite croissante de famille de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$$

Leurs dimensions VC $\dim_{\text{VC}}(S_n)$ sont croissantes et on les suppose connues. Les profils des termes R_{emp} et $H(\eta, \dim_{\text{VC}}(S_n), N)$ pour un η fixé sont respectivement croissant et décroissant, et positifs. Le terme $H(\eta, \dim_{\text{VC}}(S_n), N)$ tendant vers $+\infty$ quand la dimension VC de S_n tend vers $+\infty$, il existe un choix d'espace qui permet de minimiser le risque structurel, comme cela est indiqué en Fig. 7.7.

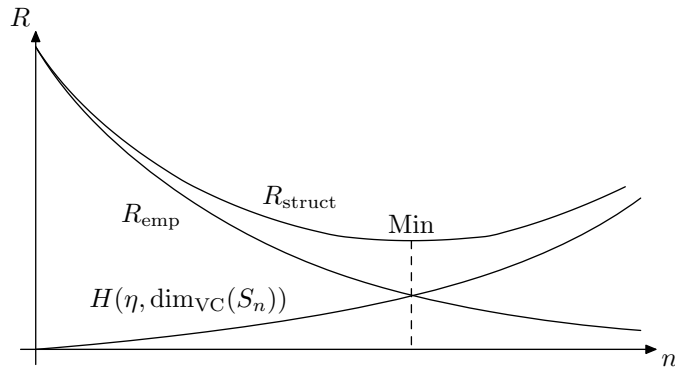


FIG. 7.7 – Principe de minimisation du risque structurel

7.7.1 Dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS

La dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS (ou en bref *dimension VC*) est une mesure de complexité appliquée à une famille de fonctions donnée. Nous allons la définir et l'opposer à une notion heuristique que nous avons introduite de « capacité de généralisation ».

Définition 7.5 (Dimension VC)

Soit une famille de fonctions $f \in \mathcal{F}$ définie sur un espace X et à valeurs dans $\{0,1\}$. La dimension de VAPNIK-CHERVONENKIS de la famille \mathcal{F} notée $\dim_{VC}\mathcal{F}$ est le plus grand entier N tel qu'il existe N points $(x_1, \dots, x_N) \in X^N$ pour lesquels

$$\{f|_{\{x_1, \dots, x_N\}} : f \in \mathcal{F}\} = \{0,1\}^{\{x_1, \dots, x_N\}}$$

Ceci signifie que toute fonction binaire de $\{x_1, \dots, x_N\}$ dans $\{0,1\}$ peut être obtenue par la restriction d'une fonction de \mathcal{F} à l'ensemble $\{x_1, \dots, x_N\}$. Si cette construction peut être faite pour des entiers N arbitrairement grands, on dit que la dimension VC de la famille de fonctions \mathcal{F} est infinie.

Cette définition s'étend aux fonction à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} tout entier.

Définition 7.6

La dimension VC d'une famille de fonctions \mathcal{F} définie d'un espace quelconque X sur \mathbb{R} est la dimension de la famille suivante :

$$\mathcal{F}' = \{x \mapsto 1_{(f(x) > \alpha)} : f \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

c'est à dire de la famille des fonctions de niveaux que l'on peut construire à partir de ces fonctions à valeurs réelles.

Remarques

- La dimension d'une famille de fonctions est au moins N s'il existe un N -uplet de points tel que la restriction de la famille de fonctions à ces points constitue toutes fonctions

binaires définies sur $\{x_1, \dots, x_N\}$. Cette définition de complexité est une mesure de la plus grande complexité possible de cette famille de fonctions, ce que l'on peut se représenter comme sa plus mauvaise capacité de généralisation possible.

- Il faut remarquer que cette définition ne fait intervenir aucune structure sur l'espace de départ, et notamment pas de structure topologique. Pour illustrer ce fait, prenons $X = [0,1]$ et choisissons une permutation σ de $[0,1]$ aussi discontinue que l'on veut (comme une permutation sur les chiffres de la décomposition décimale). Si une famille \mathcal{F} de fonctions continues f a une dimension VC fixée, la famille des fonctions $f \circ \sigma$ a la même dimension.
- Quand \mathcal{F} est une famille de fonctions à n paramètres, la dimension VC de cette famille de fonctions peut être à la fois plus grande ou beaucoup plus petite que le nombre de paramètres n . VAPNIK présente un cas pathologique qui est celui de la famille

$$(x \mapsto \sin(\alpha x))_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

dont la dimension VC est infinie. Il montre que si on prend les points x_1, \dots, x_N définis par

$$x_1 = 10^{-1}, \quad \dots, \quad x_N = 10^{-N}$$

toute fonction binaire b définie sur $\{1, \dots, N\}$ peut être représentée comme la restriction de $x \mapsto \text{sign} \sin(\alpha x)$ à $\{x_1, \dots, x_N\}$ si α vaut

$$\alpha = \pi \sum_{n=1}^N (1 - b(n)) 10^n + \pi$$

et que cette famille de sinusoides à un paramètre a donc une mauvaise capacité de généralisation.

- On peut montrer que la dimension VC d'un espace vectoriel F de fonctions de dimension finie est égal à la dimension algébrique de l'espace engendré par F et la fonction constante, soit $\dim F$ ou $\dim F + 1$.
- La dimension VC d'une réunion de familles $\bigcup_k \mathcal{F}_k$ est supérieure ou égale à la plus grande dimension VC $\dim_{VC} \mathcal{F}_k$ de ces familles (ce qui est une propriété relativement classique d'une dimension, comme la dimension de HAUSDORFF). Il faut noter en revanche que la dimension d'une réunion finie $\bigcup_k \mathcal{F}_k$ de familles peut être strictement supérieure à la plus grande dimension VC de ces familles (ce qui n'est pas le cas de la dimension de HAUSDORFF).

7.7.2 Majoration de l'erreur d'estimation

Le théorème central qui fournit une majoration du risque réel en fonction du risque empirique et d'un terme de complexité a plusieurs déclinaisons suivant le type de problème que l'on cherche à résoudre (classification ou régression). Dans tous les cas, un paramètre clef est la dimension VC de la famille des fonctionnelles de coût associées à la famille de fonctions choisies.

Si nous cherchons à approcher la fonction inconnue $x \mapsto y = f(x)$ par un élément f_α d'une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, la fonctionnelle de coût associée est la fonction

$$Q_\alpha : (x, y) \mapsto |y - f_\alpha(x)|^2$$

si bien que le risque réel peut s'écrire

$$R(\alpha) = \int Q_\alpha(x, y) dP(x, y)$$

et le risque empirique

$$R_{\text{emp}}(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q_\alpha(x_n, y_n)$$

En théorie, ce n'est donc pas la complexité des fonctions approchantes (f_α) qu'il faut contrôler, mais la complexité des fonctionnelles de coût Q_α associées. En pratique, elles sont fortement liées. On peut montrer la relation

$$\dim_{\text{VC}}(f_\alpha)_{\alpha \in A} \leq \dim_{\text{VC}}(Q_\alpha)_{\alpha \in A} \leq 2 \dim_{\text{VC}}(f_\alpha)_{\alpha \in A}$$

Théorème 7.5 (VAPNIK, 1995)

Supposons que la famille de fonctions Q_α soit bornées par A , alors avec probabilité $1 - \eta$, on a :

$$R(\alpha) \leq R_{\text{emp}}(\alpha) + A \sqrt{\frac{h(\ln \frac{2N}{h} + 1) - \ln(\eta/4)}{N}} \quad \forall \alpha \quad (7.19)$$

où h est la dimension VC de la famille des Q_α , i.e.

$$h = \dim_{\text{VC}}(Q_\alpha)_{\alpha \in A}$$

L'information que ce théorème apporte est de plusieurs natures. On obtient une information *qualitative* : en augmentant la complexité du modèle par lequel on essaie d'expliquer des mesures, on obtiendra un risque empirique plus faible, mais la capacité de généralisation du modèle sera plus faible, parce que le terme

$$\sqrt{\frac{h(\ln \frac{2N}{h} + 1) - \ln(\eta/4)}{N}}$$

augmente avec la dimension VC du modèle. Mais l'information est également *quantitative*, car les deux termes d'erreur empirique et de perte de capacité de généralisation sont présentés de manière *commensurable*. Ceci est très différent des modèles de régularisation classiques où le compromis entre capacité de généralisation et adéquation aux mesures est arbitraire. Dans l'exemple de la régularisation, où la fonction de coût est

$$R_{\text{emp}} + \lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

l'arbitraire se situe à plusieurs niveaux : le choix du paramètre λ (le rapport présumé entre variance du bruit et du signal) et dans le choix de la métrique hilbertienne qui sous-tend l'espace \mathcal{H} .

Des variantes de ce théorème existent pour les cas où les fonctionnelles de coût ne sont pas bornées (ce qui est le cas de la régression, par exemple).

On exploite cette relation en minimisant le risque structurel. On choisit comme objectif à minimiser ce que l'on est capable d'estimer, c'est-à-dire le terme de droite de (7.19)

$$R_{\text{struct}}(\alpha) = R_{\text{emp}}(\alpha) + A \sqrt{\frac{h(\ln \frac{2N}{h} + 1) - \ln(\eta/4)}{N}}$$

7.7.3 Mise en œuvre du principe de minimisation de l'erreur structurale : les machines à vecteurs support

VAPNIK propose comme cadre général de minimisation du risque structurel la méthode suivante. On dispose d'une suite d'ensemble de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incluses les unes dans les autres, de dimensions VC croissantes. Quand on se place dans un espace S_n fixé, un terme du risque structurel est fixé : la perte de capacité de généralisation. La minimisation du risque structurel se fait donc par minimisation du risque empirique. On obtient ainsi une solution $f_n \in S_n$. Quand n croît le risque empirique va décroître et la perte de généralisation augmenter et tendre vers $+\infty$. On sait donc en théorie trouver un ordre n optimal pour lequel le risque structurel est minimal.

C'est à ce niveau de la conception des machines à vecteurs support que se fait l'introduction d'information a priori. Elle se fait par le choix des ensembles S_n .

La construction des machines à vecteurs support repose sur la considération des propriétés d'un problème type de classification : la séparation optimale de deux familles de points séparables par un hyperplan, qui est le problème que le perceptron de ROSENBLATT devait résoudre.

VAPNIK montre que séparer deux classes de points par un hyperplan de marge maximale revient à minimiser le risque structurel d'erreur de classification, car on montre que la dimension VC des fonctions séparatrices de marge ρ dans une boule de rayon R est majorée par $\lfloor R^2/\rho^2 \rfloor$. Pour des points de mesure x_1, \dots, x_n qui sont respectivement dans les classes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ où $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$, l'hyperplan d'équation $y = w \cdot x + b$ est un hyperplan séparateur si

$$\begin{aligned} w \cdot x_i &> 0 && \text{si } \epsilon_i = +1 \\ w \cdot x_i &< 0 && \text{si } \epsilon_i = -1 \end{aligned}$$

et sa marge est maximale si

$$\min_i \frac{|w \cdot x_i + b|}{\|w\|} \text{ est maximal}$$

Ceci constitue un problème de programmation quadratique, dont la solution s'exprime sous la forme :

$$w \cdot x + b = \sum_{i \in I} \alpha_i \langle x_i, x \rangle + b$$

où l'ensemble I est en pratique relativement petit, et les vecteurs x_i sont appelés vecteurs support. Intuitivement, les vecteurs support sont les points de mesure critiques qui se trouvent à la frontière des classes à séparer, et qui permettent de délimiter le plus précisément la frontière de séparation entre les classes de points.

La séparation par des hyperplans est un cadre de classification relativement pauvre, car pour beaucoup de cas, les familles que l'on veut séparer ne sont pas séparables par des hyperplans. Pour continuer à bénéficier de l'arsenal théorique qui justifie la recherche d'hyperplans de marge maximale tout en utilisant des surfaces de séparation plus complexes, VAPNIK suggère de séparer non pas les points de mesures x_i eux-mêmes, mais des représentants $X_i\Psi(x_i)$ de ces points de mesures dans un espace F de dimension bien plus grand, que VAPNIK appelle l'espace des caractéristiques (*feature space*). On se donne une fonction de caractérisation non linéaire notée Ψ .

La séparation de marge maximale non linéaire consiste à séparer les points $X_i = \Psi(x_i)$. Comme la fonction de séparation s'exprime exclusivement à l'aide de produits scalaires $\langle X, X_i \rangle$, soit donc $\langle \Psi(x), \Psi(x_i) \rangle$, on n'utilise en pratique jamais la fonction Ψ directement, mais seulement le noyau K défini par

$$K(x, x') = \langle \Psi(x), \Psi(x') \rangle \quad (7.20)$$

Si inversement on se donne un noyau symétrique défini positif, le théorème de MERCER garantit l'existence d'un espace F et de la fonction Ψ tels que (7.20) soit vérifiée.

Pour conclure, chercher une fonction de séparation sous la forme

$$\epsilon(x) = \sum_{i \in I} c_i K(x_i, x) + c$$

telle que la marge de séparation

$$\min_j \frac{|\sum_{i \in I} c_i K(x_i, x_j) + c|}{\sqrt{\sum_i c_i^2}}$$

soit maximale revient à appliquer un principe de minimisation du risque structurel. Dans le cas non linéaire, le problème n'est plus un problème de programmation quadratique. En revanche, on peut utiliser le théorème du point selle pour résoudre le problème dual qui lui reste un problème de programmation quadratique.

Les machines à vecteurs support peuvent également être utilisés pour faire de la régression. Notons $|a|_\epsilon = \max(0, |a| - \epsilon)$. Pour des points de mesure x_i, y_i , cela consiste à rechercher la fonction f sous la forme

$$f(x) = \sum_{i \in I} c_i K(x_i, x) \quad \text{où } \|c\| \leq C$$

telle que la fonctionnelle

$$H[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|_\epsilon$$

soit minimale. La borne C et ϵ permettent de contrôler l'erreur de généralisation. Certains auteurs réécrivent ce problème sous la forme d'un problème de minimisation globale de la fonctionnelle

$$H[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|_\epsilon + \sum_i c_i^2$$

Ici encore, seulement pour un sous-ensemble en général petit $I \subset \{1 \dots n\}$, les coefficients $(c_i)_{i \in I}$ ne sont pas nuls, et les points $(x_i)_{i \in I}$ sont appelés *vecteurs support*.

Ainsi, la technique des vecteurs support est à la fois théoriquement satisfaisante et fournit des méthodes de calcul convergentes et de complexité relativement limitée. Elle se rapproche beaucoup de la régularisation classique. Elle en hérite ainsi de nombre d'avantages et d'inconvénients. Elle en diffère cependant en ceci qu'elle permet d'obtenir une représentation sensiblement plus comprimée de la solution que les méthodes de régularisation.

La représentation choisie du signal reste cependant complètement identique. On cherche la solution sous forme d'une combinaison linéaire de noyaux centrés sur les points de mesure. Nous avons déjà vu que ces représentations sont basées sur un a priori fort sur la régularité de la fonction et qu'elles n'offrent aucune adaptativité locale (en régularité ou en échelle) car les noyaux $K(x_i, x)$ sont tous les mêmes à une translation près.

Ceci nous incite à baser notre recherche d'une méthode d'interpolation sur le choix d'une représentation, et à choisir seulement ensuite le principe ou la méthode qui permettra de construire l'interpolant.

Bibliographie

- [Aro50] A. ARONSAJN. Reproducing kernel hilbert spaces. *Am. Math. Soc. Trans.*, 68:337–404, 1950.
- [Bar93] A. R. BARRON. Universal approximation bounds for superposition of a sigmoidal function. *IEEE Trans. on Information Theory*, 39(3):930–945, 1993.
- [BCN98] R. BEATSON, J. CHERRIE et G. NEWSAM. Radial basis function methods for large data sets. Dans *International Workshop on CAGD and Wavelet Methods for Reconstructing Functions*. Montecatini, Italy, juin 1998.
- [BN98] R. K. BEATSON et G. N. NEWSAM. Fast evaluation of radial basis functions: moment based methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5):1428–1449, 1998.
- [BS97] C. P. BERNARD et J.-J. E. SLOTINE. Adaptive control with multiresolution bases. Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC'97), San Diego*. décembre 1997.
- [CS95] M. CANNON et J.-J. E. SLOTINE. Space-frequency localized basis function networks for nonlinear system estimation and control. *Neurocomputing*, 9(3), 1995.
- [Cyb89] G. CYBENKO. Approximations by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 309(2), 1989.
- [DJB95] D. DELYON, A. JUDITSKY et A. BENVENISTE. Accuracy analysis for wavelet approximations. *IEEE Trans. Neural Networks*, 6(2):332–348, 1995.
- [GJP95] F. GIROSI, M. JONES et T. POGGIO. Regularization theory and neural networks architectures. *Neural Computation*, 7(2):219–269, 1995.
- [JZD⁺94] A. JUDITSKY, Q. ZHANG, B. DELYON, P.-Y. GLORENNEC et A. BENVENISTE. Wavelets in identification wavelets, splines, neurons, fuzzies: how good for identification. Rapport technique RR-2315, INRIA, France, 1994.
- [Mic86] C. A. MICHELLI. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2:11–22, 1986.
- [SC86] J.-J. E. SLOTINE et J. A. COETSEE. Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems. *International Journal of Control*, 3:44–47, 1986.
- [SL90] J.-J. E. SLOTINE et W. LI. *Applied Non-Linear Control*. Prentice-Hall, 1990.
- [Slo86] J.-J. E. SLOTINE. On modeling and adaptation in robot control. Dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 7-10, 1986*, pages 1387–1392. 1986.
- [SS92] R. M. SANNER et J.-J. E. SLOTINE. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(6):837–863, novembre 1992.

- [SS95] R. M. SANNER et J.-J. E. SLOTINE. Structurally dynamic wavelet networks for the adaptive control of uncertain robotic systems. Dans *Proc. IEEE Conf. Decision and Control, New Orleans*. 1995.
- [SSB⁺96] B. SCHOELKOPF, K. SUNG, C. BURGESS, F. GIROSI, P. NIYOGI, T. POGGIO et V. VAPNIK. Comparing support vector machines with gaussian kernels to radial basis function classifiers. Technical Memo AIM-1599, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory, décembre 1996.
- [SW98] R. SCHABACK et H. WENDLAND. Inverse and saturation theorems for radial basis function interpolation. Preprint NAM 05, Universität Göttingen, 1998.
- [SZL⁺95] J. SJÖBERG, Q. ZHANG, L. LJUNG, A. BENVENISTE, B. DEYLONG, P.-Y. GLORENEC, H. HJALMARSSON et A. JUDITSKY. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, 31:1691–1724, décembre 1995.
- [TA77] A. N. TIKHONOV et V. I. ARSEININ. *Solutions of Ill-Posed Problems*. W.H. Winston & Sons, John Wiley & Sons, Washington DC, 1977.
- [Vap95] V. N. VAPNIK. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [Vap97] V. N. VAPNIK. The support vector method. *Lecture Notes in Computer Science*, 1327, 1997.
- [ZB92] Q. ZHANG et A. BENVENISTE. Wavelet networks. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 3(6):889–898, novembre 1992.
- [Zha97] Q. ZHANG. Using wavelet network in nonparametric estimation. *IEEE Trans. Neural Networks*, 8(2):227–236, mars 1997.

Chapitre 8

Approches multi-résolutions

Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons une nouvelle méthode d'interpolation en ondelettes. Cette méthode consiste à sélectionner un sous-ensemble d'une famille d'ondelettes, et à résoudre ensuite dans cette famille le système linéaire des contraintes interpolatrices. La partie centrale de cet algorithme est le choix des ondelettes, parce qu'il détermine la stabilité de cette approche. Nous proposons donc un schéma d'interpolation en trois étapes.

1. Le choix d'une sous-famille d'une base d'ondelettes prédéfinie, en fonction des positions des points de mesure. Ceci est fait avec un *algorithme d'allocation*, qui sélectionne des ondelettes de la base en construisant une correspondance biunivoque entre les ondelettes et les points de mesure.
2. La sélection parmi les couples ondelette/mesure d'un sous-ensemble pour lequel le système des contraintes d'interpolation est stable. Nous proposons pour cela un *critère géométrique* simple que nous appelons le *critère d'exclusion* en dimension 1 et le *critère de bon placement relatif* en dimension supérieure.
3. La dernière étape consiste alors à inverser le système linéaire obtenu, qui est stable et creux.

Nous énonçons et prouvons ensuite des résultats de stabilité et de convergence qui soutiennent bien la comparaison avec la régularisation. L'ordre d'approximation est localement adaptatif, et la matrice du système de collocation est bien conditionnée. La première section de ce chapitre motive le choix du mode de représentation en ondelettes.

8.1 Le choix d'une représentation

Pour représenter une fonction estimée, il faut choisir un mode de représentation de cette fonction. Les réseaux de neurones comme des perceptrons multi-couches représentent des fonctions par une structure de calcul composée de combinaisons linéaires et d'application d'une fonction de transfert. La dépendance de la fonction obtenue en fonction des paramètres n'étant pas linéaire, il existe peu de cas où on peut fournir un algorithme d'apprentissage prouvable.

Nous allons employer un mode de représentation plus simple : une combinaison linéaire d'une sous-famille finie d'une base. Sur la donnée de N mesures $(x_n, y_n)_{n=1\dots N}$, on cherchera un interpolant f comme combinaison linéaire d'une sous-famille finie $(g_n)_{n \in I}$ d'une base de fonctions $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f = \sum_{n \in I} c_n g_n$$

Une fois la sous-famille I choisie, les coefficients $(c_n)_{n \in I}$ seront déterminés par les contraintes interpolatrices. L'objet principal de notre discussion va être tout d'abord le choix des fonctions sélectionnées. Les méthodes que nous avons passées en revue dans le chapitre précédent ainsi que le principe de minimisation du risque structurel de VAPNIK nous incitent à rechercher la représentation la plus compacte possible pour la fonction f , c'est à dire avec une sous-famille I de cardinal minimal.

Le choix de la base $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dicté par plusieurs critères :

- la base \mathcal{G} doit avoir de bonnes propriétés d'approximation de la classe de fonctions f choisie. Une fonction f de la classe de régularité choisie doit pouvoir être approchée avec une bonne précision par une décomposition sur une petite sous-famille $(g_n)_{n \in I}$ de la base \mathcal{G} ;
- les calculs d'accès à une valeur ponctuelle et d'apprentissage doivent être rapides. Ceci nous pousse à choisir des fonctions de base g_n localisées, et à exclure par exemple des fonctions comme les exponentielles complexes $x \mapsto e^{ik \cdot x}$.

Nous allons donc commencer par recourir à des résultats de la théorie de l'approximation pour guider ce choix.

8.1.1 Approximation linéaire

L'approximation consiste à remplacer des fonctions objectif f par une fonction approchante f_N plus simple à représenter et ce avec une erreur (distance entre la fonction objectif et l'approximation $\|f - f_N\|$) la plus faible possible pour une taille de code N donnée.

Si f est une fonction périodique, une approximation à $2N + 1$ termes de cette fonction f est par exemple la série de FOURIER tronquée aux $2N + 1$ termes de plus basse fréquence.

$$f_{2N+1} = \sum_{n=-N}^{+N} \langle f, e_n \rangle e_n$$

où $e_n(x) = e^{inx}$

On sait que si la fonction f est uniformément LIPSCHITZ- α , les coefficients $\langle f, e_n \rangle$ vérifient

$$\langle f, e_n \rangle = o(n^{-\alpha})$$

et donc l'erreur d'approximation vérifie

$$\|f - f_{2N+1}\|_2 = o(n^{1/2-\alpha})$$

On note l'erreur d'approximation à N termes de f dans une base orthonormée $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\epsilon_N^{lin}[f] = \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, g_n \rangle g_n \right\|$$

Ceci suggère la définition suivante, que nous reprenons de [DeV98a]

Définition 8.1

Soit une base hilbertienne $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace \mathcal{H} , l'espace d'approximation d'indice α noté \mathcal{A}_{lin}^α est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{H}$ telles que l'erreur d'approximation à N termes décroisse en $N^{-\alpha}$:

$$f \in \mathcal{A}_{lin}^\alpha \Leftrightarrow \exists B, \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, g_n \rangle g_n \right\| \leq B \times N^{-\alpha}$$

On peut définir comme norme de f le plus petit B pour lequel l'inégalité ci-dessus est vérifiée, c'est-à-dire qu'on pose

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{lin}^\alpha} = \max_{N \in \mathbb{N}} (\epsilon_N[f] N^\alpha)$$

Nous pouvons reformuler la remarque ci-dessus en disant que les fonctions 2π -périodiques α -LIPSCHITZ sont dans l'espace d'approximation $\mathcal{A}_{lin}^{\alpha-1/2}$ si la base hilbertienne considérée est la base de FOURIER.

On peut montrer des théorèmes inverses selon lesquels les classes d'approximation des fonctions de FOURIER sont des classes de fonctions de régularité uniforme. Notamment, on peut encadrer un espace d'approximation entre des espaces de régularité Sobolev :

$$W^\alpha \subset \mathcal{A}_{lin}^\alpha \subset W^{\alpha-1/2-\varepsilon} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

Une fonction est donc dans l'espace d'approximation \mathcal{A}_{lin}^α si la décroissance de ses coefficients de FOURIER est suffisante.

8.1.2 Approximation non-linéaire et espaces de BESOV

L'approximation non-linéaire sur N termes d'une fonction f dans une base fixée $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consiste à tronquer le développement de f dans \mathcal{G} non plus aux N premiers termes, mais à N termes choisis de telle manière que l'erreur soit la plus petite possible. On pose :

$$f_N^{nl} = \sum_{n \in I} \langle f, g_n \rangle g_n$$

où I est choisi de telle manière que $\text{card } I = N$ et

$$\text{card } I' = N \Rightarrow \left\| f - \sum_{n \in I} \langle f, g_n \rangle g_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n \in I'} \langle f, g_n \rangle g_n \right\|$$

Quand la base \mathcal{G} est hilbertienne, ceci revient à sélectionner les N plus grands coefficients de la décomposition de f sur la base.

Si on réordonne les vecteurs de base g_n en g_{n_k} de manière à ce que la suite $|\langle f, g_{n_k} \rangle|$ soit décroissante, l'approximation non linéaire sur N termes de f s'écrit

$$f_N = \sum_{k=1}^N \langle f, g_{n_k} \rangle g_{n_k}$$

On note également l'erreur d'approximation non-linéaire dans la base \mathcal{G}

$$\epsilon_N[f] = \left\| f - \sum_{k=1}^N \langle f, g_{n_k} \rangle g_{n_k} \right\|$$

On définit également classiquement un espace d'approximation non-linéaire en fonction de la décroissance de l'erreur d'approximation :

Définition 8.2

Soit un espace de Hilbert \mathcal{H} et une base hilbertienne de cet espace $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'espace d'approximation non linéaire d'indice α noté \mathcal{A}^α est défini par

$$f \in \mathcal{A}^\alpha \Leftrightarrow \exists B, \epsilon_N[f] \leq B \times N^{-\alpha}$$

C'est un espace vectoriel.

Une définition plus complète des espaces d'approximation non linéaire est une définition à trois indices α , p et q .

Définition 8.3

Soit un espace de Hilbert \mathcal{H} et une base hilbertienne de cet espace $\mathcal{G} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit l'erreur en norme L_p d'approximation non-linéaire par

$$\epsilon_{N,p}[f] = \inf_{\substack{\#I=N \\ (c_n)_{n \in I}}} \left\| f - \sum_{n \in I} c_n g_n \right\|_p$$

L'espace d'approximation non linéaire d'indices α , p et q noté $\mathcal{A}_q^\alpha(L_p)$ est défini par

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N} (N^\alpha \epsilon_{N,p}[f])^q &< +\infty && \text{si } q < +\infty \\ \sup_{N \in \mathbb{N}^*} (N^\alpha \epsilon_{N,p}[f]) &< +\infty && \text{si } q = +\infty \end{aligned}$$

Remarque

L'indice p est l'exposant de la norme avec laquelle on mesure l'erreur d'approximation. L'indice α est l'indice de décroissance de l'erreur en fonction de N . Les espaces $\mathcal{A}_q^\alpha(L_p)$ sont des espaces de fonctions pour lesquelles la décroissance de l'erreur est comparable à $N^{-\alpha}$. L'indice q est un indice de subdivision plus fine de ces échelles de décroissance qui est secondaire. On remarque que $\mathcal{A}_{+\infty}^\alpha(L_2) = \mathcal{A}^\alpha$.

Une fonction est dans un espace d'approximation non linéaire d'exposant élevé si sa décomposition dans la base \mathcal{G} est clairsemée, c'est à dire que la suite des coefficients réordonnés dans l'ordre décroissant vérifie

$$|\langle f, g_{n_k} \rangle| \leq B n^{-\alpha} \quad (8.1)$$

pour un α grand. Une définition presque équivalente de cette propriété s'écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle g, g_n \rangle|^{1/\alpha} < +\infty$$

On montre alors que l'erreur d'approximation non-linéaire sur N termes décroît en $N^{1/2-\alpha}$ et que donc $f \in \mathcal{A}^{\alpha-1/2}$.

L'approximation non-linéaire est utilisée pour tronquer des décompositions de signaux sur des bases d'ondelettes. Les espaces d'approximation non-linéaire sont des espaces de BESOV, qui sont des espaces de régularité plus grands que des espaces de SOBOLEV. Un espace de BESOV est principalement défini par 2 indices. Un indice de régularité uniforme α et un indice p qui est une sorte d'indice de tolérance. Une fonction de régularité LIPSCHITZ- α uniforme est contenue dans un espace $B^\alpha(L_p)$. Si maintenant cette fonction a un nombre fini de singularités où elle n'est que LIPSCHITZ- $(\alpha - d/p)$, sur le complémentaire desquelles elle est uniformément LIPSCHITZ- α , elle reste dans cet espace.

La définition d'un espace de BESOV repose sur les modules de régularité d'une fonction

Définition 8.4 (Module de régularité)

On définit l'opérateur de différences finies d'ordre r et de pas \mathbf{h} $\Delta_{\mathbf{h}}^r$ par

$$\Delta_{\mathbf{h}}^1(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \quad \text{pour } r = 1$$

et par la relation de récurrence

$$\Delta_{\mathbf{h}}^r(\Delta_{\mathbf{h}}^{r'}(f)) = \Delta_{\mathbf{h}}^{r+r'}(f)$$

On montre aisément que l'opérateur $\Delta_{\mathbf{h}}^r$ peut s'écrire

$$\Delta_{\mathbf{h}}^r(f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_r^k f(\mathbf{x} + k\mathbf{h})$$

On définit alors le module de régularité d'ordre r , de pas h de la manière suivante :

$$\omega_r(f, h) = \sup_{|\mathbf{h}'| \leq h} \|\Delta_{\mathbf{h}'}^r(f)\|_p$$

On voit que ce module de régularité décroît avec h et tend vers 0 si $h \rightarrow 0$ quand la fonction est continue. On voit également que si la fonction est r fois dérivable, le module de régularité d'ordre r décroît en h^r .

Le choix de p va nous permettre quelques singularités dans la fonction f . Supposons que p soit inférieur à $1/r$ et que la fonction f soit à support compact, r fois dérivable sur \mathbb{R}^* (de dérivée r -ième

bornée) et discontinue en 0. La différence d'ordre $r + 1$ et de pas h sera uniformément majorée par un h^r sur $\mathbb{R} - [-rh; rh]$. Sur $[-rh, rh]$ elle sera simplement bornée par une constante.

Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^r(f)(x)|^p dx \leq M|h|^{pr} + M'|h| \leq M'|h|^{pr} \quad \text{pour } |h| \text{ assez petit}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\omega_r(f, h)_p \leq M''h^r$$

Pour des exposants p suffisamment petits, le module de continuité ne "voit pas" les singularités. Plus généralement, supposons par exemple qu'une fonction f soit uniformément LIPSCHITZ- α sur son domaine de définition de dimension d privé d'une singularité \mathcal{S} de dimension de HAUSDORFF δ et de mesure $m_\delta(\mathcal{S})$ finie. On suppose que dans un voisinage de la singularité, la fonction est uniformément LIPSCHITZ- β . On aura alors

$$\begin{aligned} \int |\omega_h^\alpha(f)(x)|^p dx &\leq Mh^{\alpha p} + m_\delta(\mathcal{S})h^{d-\delta}h^{\beta p} \\ &\leq M'h^{\alpha p} \quad \text{si } p < (d - \delta)/(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Le module de régularité "ignore" des singularités, d'autant plus fortes et de support de dimension de HAUSDORFF d'autant plus élevée que le coefficient p est petit. Nous pouvons maintenant définir :

Définition 8.5 (Espace de BESOV)

Une fonction f est dans un espace de BESOV d'indices α , p et q , noté $B_q^\alpha(L_p)$ si

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (h^{-\alpha} \omega_{[\alpha+1]}(f, h)_p)^q \frac{dh}{h} &< +\infty & \text{si } q < +\infty \\ \sup_{h>0} (h^{-\alpha} \omega_{[\alpha+1]}(f, h)_p) &< +\infty & \text{si } q = +\infty \end{aligned}$$

Comme dans la définition des espaces d'approximation non linéaire, l'indice q est d'importance secondaire par comparaison aux indices α et p .

La théorie de l'approximation non linéaire prouve entre autres que les espaces d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes sont des espaces de Besov. Ceci s'exprime plus précisément de la manière suivante.

Théorème 8.1

Soit $\psi_{j\mathbf{k}}^s$ une base d'ondelettes orthonormale dyadique de $L_2(\mathbb{R}^d)$, vérifiant donc $\psi_{j\mathbf{k}}^s = 2^{dj/2} \psi^s(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$. Alors,

$$\mathcal{A}_\tau^{\alpha/d}(L_p) = B_\tau^\alpha(L_p)$$

si

$$\tau = \frac{1}{s/d + 1/p}$$

à la condition que les ondelettes utilisées aient $[\alpha + 1]$ moments nuls et soient dans ce même espace de BESOV. Sous ces conditions, les espaces d'approximation non-linéaire sur des bases d'ondelettes sont donc des espaces de BESOV.

8.1.3 Structure et approximation en arbres

Quand nous disposons d'une information limitée sur la fonction que nous voulons estimer, (ses valeurs en un nombre fini de points), on peut trouver plusieurs interpolations possibles qui correspondent à plusieurs choix possibles de sous-familles d'une base d'ondelettes. À l'extrême, nous pouvons trouver une famille d'ondelettes de très haute résolution qui permettront de représenter la fonction apprise par une somme de pics disjoints. La capacité de généralisation d'un tel interpolant a toutes les chances d'être nulle. Nous devons donc également introduire un a priori dans l'ordre dans lequel nous choisissons les ondelettes qui composent la sous-famille. Nous allons le faire en imposant une structure sur les sous-familles que nous allons utiliser.

Par ailleurs, rechercher une fonction sous forme de combinaison linéaire d'une sous-famille quelconque d'une base, c'est à dire utiliser les résultats de l'approximation non linéaire sous sa forme la plus générale n'est réalisable pour plusieurs raisons. La première raison est un problème de stockage. En approximation non linéaire, il faut non seulement coder les coefficients retenus :

$$\mathcal{C}_N = \{N, g_1, \dots, g_N\}$$

mais également coder les indices de la sous-famille I des ondelettes sélectionnée. Le code correspondant est donc :

$$\mathcal{C}_N^{nl} = \{N, n_1, \dots, n_N, g_{n_1}, \dots, g_{n_N}\}$$

pour être en mesure de reconstituer les signal.

Un code de ce type peut être en théorie arbitrairement grand si les coefficients sélectionnés peuvent être quelconques.

La deuxième raison est algorithmique. L'ensemble

$$\mathcal{C}_d = \mathcal{G} - \{\psi_{j\mathbf{k}} : (j, \mathbf{k}) \notin I\}$$

des ondelettes candidates parmi lesquelles on recherche une fonction $\psi_{j\mathbf{k}}$ pour étendre la sous-famille finie I en une nouvelle sous-famille $I \cup \{\psi_{j\mathbf{k}}\}$ est dans ce cas infini. Pour nous limiter à un ensemble de fonctions candidates fini, nous devons utiliser des représentation plus structurées que des représentations d'une fonction sur une sous-famille quelconque :

$$f_N(x) = \sum_{n \in I_N} c_n g_n(x)$$

Une stratégie très utilisée en compression d'images consiste à n'utiliser des sous-familles d'ondelettes I qui constituent des arbres. Ce choix est guidé par la considération que les coefficients d'ondelettes élevés sont principalement ceux dont le support de l'ondelette touche une singularité. Les coefficients dont le support de l'ondelette touche une singularité constituent ce que l'on appelle en général le cône d'influence de la singularité. Comme ceci est montré dans la figure 8.1.

Ceci implique que l'on peut considérer qu'il y a une dépendance statistique forte entre coefficients d'échelles j voisines et de localisation $2^{-j}\mathbf{k}$ voisines. Quand la famille d'ondelettes est engendrée par S ondelettes mères $(\psi^s)_{s=1 \dots S}$, et que la famille d'ondelettes est

$$\psi_{j\mathbf{k}}^s(\mathbf{x}) = 2^d j / 2 \psi^s(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad s \in \{1 \dots S\}, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

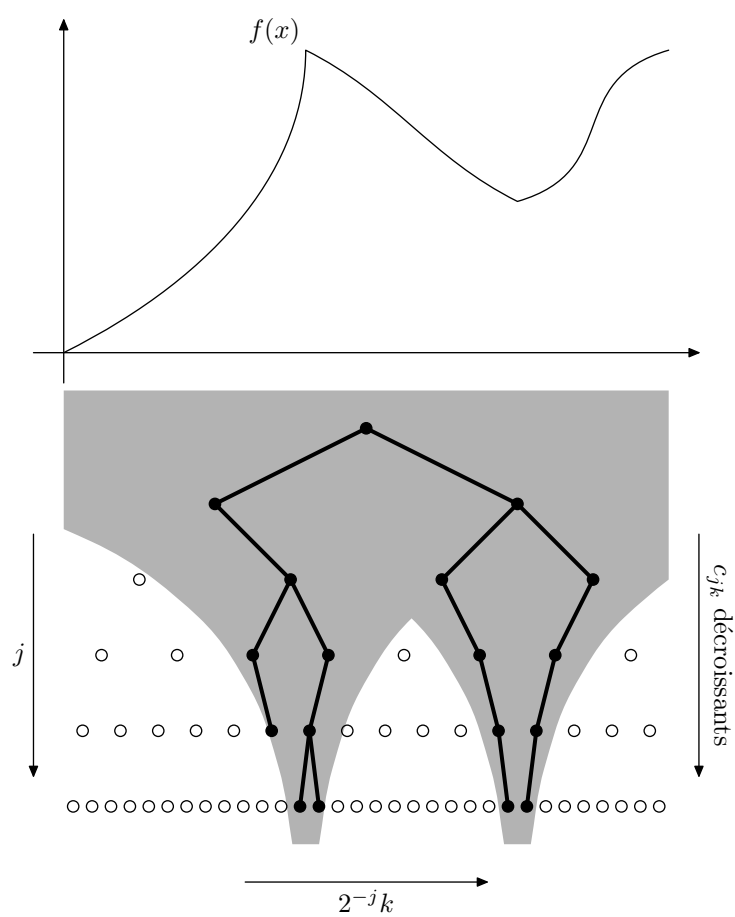


FIG. 8.1 – Cônes d'influence de deux singularités ponctuelles, et sous-arbres des coefficients associés.

on utilise la structure d'arbre suivante :

$$(j, \mathbf{k}, s) \mathcal{R}(j', \mathbf{k}', s') \Leftrightarrow \begin{cases} s = s' \\ j' = j + 1 \\ k'_i \in \{2k_i, 2k_i + 1\} \end{cases}$$

Dans ce cas, la famille des fonctions candidates pour augmenter la famille de décomposition de la fonction approchée est finie :

$$Cd = \{\psi_{j\mathbf{k}}^s : (j, \mathbf{k}, s) \notin I, \exists (j', \mathbf{k}', s') \in I \text{ tel que } (j', \mathbf{k}', s') \mathcal{R}(j, \mathbf{k}, s)\}$$

A priori, on peut craindre qu'une famille de représentations ainsi restreinte ait de moins bonnes capacités d'approximation. COHEN, DEVORE et collaborateurs ont montré qu'en fait la perte de capacité d'approximation était minime. Il suffit de faire une hypothèse de régularité plus forte (avec une augmentation de l'indice de régularité p arbitrairement faible) pour que les approximation en arbres aient des erreurs d'approximation qui décroissent de la même manière.

Un théorème de COHEN, DEVORE *et coll.* [DeV98b, CDDD98] prouve que les espaces d'approximations en arbres ne sont pas beaucoup plus petits que qu'un espace d'approximation non linéaire quelconque. Plus précisément, si on note $\mathcal{T}_q^\alpha(L_p)$ l'espace d'approximation analogue à $\mathcal{A}_q^\alpha(L_p)$ où les seules sous-familles de coefficients qui sont autorisées sont celles qui constituent des sous-arbres, on a

$$\mathcal{T}_{+\infty}^{\alpha/d}(L_p) \supset B_q^\alpha(L_\mu)$$

dès que

$$\mu > \tau = \frac{1}{\alpha/d + 1/p}$$

pourvu que les ondelettes considérées aient $\lfloor \alpha \rfloor + 1$ moments nuls et qu'elles soient dans l'espace de BESOV $B_q^\alpha(L_\mu)$.

L'avantage de la représentation en arbre en termes de codage est immédiat. Le codage des coefficients sélectionnés est maintenant borné par $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre de coefficients. Il suffit en effet d'indiquer pour chaque coefficient lesquels de ses 2^d fils sont également dans l'ensemble I des coefficients d'ondelettes sélectionnés.

Enfin, nous pouvons proposer une interprétation de ce choix à la lueur des travaux de VAPNIK sur la minimisation du risque structurel. En 7.7.3, nous avons vu un cadre de mise en œuvre du principe de minimisation du risque structurel proposé par VAPNIK. On construit une suite (S_n) croissante de familles de fonctions de dimensions VC croissantes. On minimise le risque empirique sur chaque S_n (c'est à dire que recherche une solution de régression dans cette famille), et on cherche le meilleur compromis entre erreur de généralisation et erreur empirique.

L'approximation en arbres peut se lire ainsi : on note $A \in \mathcal{A}$ les sous-familles d'ondelettes qui constituent des arbres. La dimension VC d'un espace vect A engendré par une sous-famille A sera égal à $\text{card } A$ ou $\text{card } A + 1$. Nous pouvons alors considérer les familles de fonctions $(\text{vect } A)_{A \in \mathcal{A}}$ sur lesquelles nous estimons un interpolant par régression. La seule différence est que les $(\text{vect } A)_{A \in \mathcal{A}}$ ne constituent pas une suite croissante, mais seulement une famille croissante indexée par des éléments d'un ensemble \mathcal{A} qui n'est pas totalement ordonné, comme ceci est indiqué dans la figure 8.2.

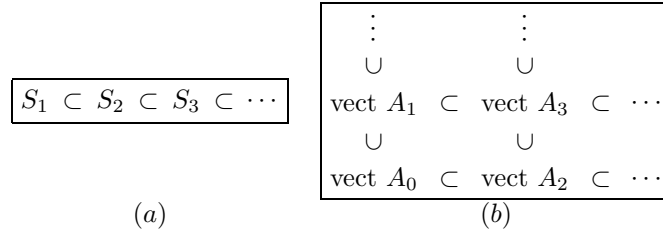


FIG. 8.2 – Familles d’espaces d’approximation pour la minimisation du risque structurel. En (a), la suite croissante d’espaces proposée par VAPNIK, en (b), une autre structure de choix correspondant au sous-arbres de l’arbre des coefficients d’ondelettes.

8.1.4 Limites de l’approximation en ondelettes

Quand la dimension d de l’espace sous-jacent augmente, les singularités de support régulier peuvent avoir des dimensions diverses et devenir plus coûteuses à coder en ondelettes, comme le montre schématiquement la figure 8.3.

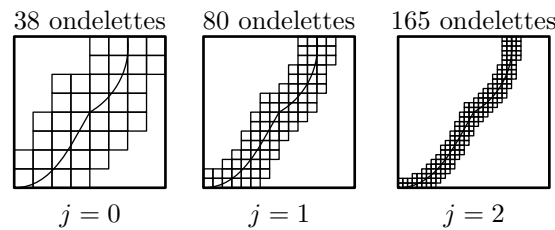


FIG. 8.3 – Coût de représentation d’une singularité. Le nombre de coefficients dont la valeur est affectée par la présence de la singularité est de l’ordre de $2^{\delta j}$ où δ est la dimension de HAUSDORFF du support de la singularité.

Singularités de dimension de HAUSDORFF élevée

Considérons un instant une fonction constante par morceaux :

$$f(\mathbf{x}) = 1_{(\mathbf{x} \in \Omega)}$$

où la frontière $\partial\Omega$ est de longueur finie et de courbure bornée. Cette fonction est notamment à variations bornées. Les ondelettes à une échelle j donnée qui auront un coefficient non nul seront au nombre de $\mathcal{O}(2^{(d-1)j})$ et seront de module $\mathcal{O}(2^{-dj/2})$. L’énergie L_2 correspondante sera donc de l’ordre de grandeur

$$\begin{aligned} \sigma_j(f) &= \sum_{n, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} [c_{j\mathbf{k}}^n(f)]^2 \\ &\leq M 2^{-j} \end{aligned}$$

Une approximation sur les j premières échelles contiendra

$$1 + \dots + 2^{(d-1)(j-1)} + 2^{(d-1)j} \propto 2^{(d-1)j}$$

termes et l'erreur correspondante sera

$$\|f - \sum_{j' < j} \sum_{n, \mathbf{k}} c_{j', \mathbf{k}}^n \psi_{j', \mathbf{k}}^s\|_2 = \mathcal{O}(2^{-j/2})$$

On obtient ainsi une estimation de l'erreur à $N = 2^{(d-1)j}$ termes qui est

$$\epsilon_N(f) = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2(d-1)}}) \quad (8.2)$$

Cette estimation est conforme à l'application du théorème 8.1. En laissant les coefficients q de côté, on peut voir que la fonction $1_{(\mathbf{x} \in \Omega)}$ est dans tout espace de BESOV $B^\alpha(L_p)$ où $p \leq 1/\alpha$. L'application du théorème nous dit que

$$\mathcal{A}^\alpha(L_2) = B^{d\alpha}(L_\tau)$$

où

$$\tau = \frac{1}{\alpha + 1/2}$$

Le théorème s'appliquera si

$$\begin{aligned} \tau &\leq \frac{1}{d\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} &\geq d\alpha \end{aligned}$$

donc pour $\alpha \leq \frac{1}{2(d-1)}$, et nous retrouvons ainsi l'ordre limite de décroissance estimé en (8.2).

David DONOHO et Emmanuel CANDÈS ont développé des transformées en ondelettes modifiées (les *ridgelets*) qui permettent de représenter de manière optimale des singularités de support hyperplan. Malheureusement, ces représentations deviennent peu efficaces pour représenter des singularités ponctuelles. Leur utilisation se fait donc dans le cadre de dictionnaires redondants de représentation qui contiennent tout à la fois des ondelettes classiques et des ridgelets qui se répartissent la tâche de la représentation. Une description détaillée des ridgelets et de ses variantes peut être trouvée dans les articles de DONOHO et la thèse de CANDÈS [Can97, Don98a, Can98].

Dans ce cas, certains schémas d'approximation sont plus efficaces que l'approximation non linéaire dans une base d'ondelettes. Si nous considérons le cas où la dimension de l'espace est $d = 2$, et où la frontière du domaine Ω a une frontière régulière de courbure bornée, on peut montrer que pour tout nombre N fixé, on peut approcher la fonction $1_{(\mathbf{x} \in \Omega)}$ par une somme de N fonctions caractéristiques de triangles $(T_n)_{n=1 \dots N}$ à une erreur L_2 de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{-1})$ près, comme le montrent N.DYN et S. RIPPA [DLR90].

Une approximation par une triangulation adaptée peut donc fournir un ordre d'approximation supérieur à une approximation sur une base d'ondelettes car elle tire parti de la régularité du contour.

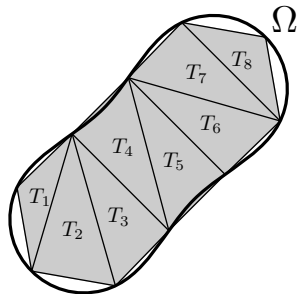


FIG. 8.4 – Approximation d’une fonction caractéristique d’un domaine de frontière régulière par une somme de fonctions caractéristiques de triangles T_n .

Ceci montre aussi que cette approximation peut être obtenue avec un perceptron multicouche à $4N + 1$ neurones. En effet, un triangle T_n peut être représenté par les trois inégalités linéaires :

$$T_n = \{ \mathbf{x} : \lambda_n^1(\mathbf{x}) \geq 0, \lambda_n^2(\mathbf{x}) \geq 0, \lambda_n^3(\mathbf{x}) \geq 0 \}$$

Si nous choisissons la fonction sigmoïde $\sigma(t) = 1_{(t>0)}$, la fonction caractéristique d’un triangle s’écrit

$$1_{(\mathbf{x} \in T_n)} = \sigma \left(\sum_{k=1}^3 \sigma(\lambda_n^k(\mathbf{x})) - 2,5 \right)$$

et la fonction $1_{(\mathbf{x} \in \Omega)}$ peut donc être approchée à N^{-1} près par un réseau de neurones à $4N + 1$ neurones. L’erreur optimale d’approximation en réseaux de neurones de cette fonction est donc au plus $\mathcal{O}(N^{-1})$ où N est le nombre de neurones.

Ces deux méthodes d’approximation sont donc dans ce cas plus efficaces que l’approximation en ondelettes qui ne peut atteindre qu’un ordre de $\mathcal{O}(N^{-1/2})$.

Espaces d’entrée de dimension très élevée

Pour des dimensions d’espace d’entrée très élevées, la représentation en ondelettes souffre du *fléau des hautes dimensions* (curse of dimensionality). En effet, l’efficacité de la représentation en ondelettes repose la possibilité de prédire de nouvelles valeurs d’une fonction sur la base d’autres valeurs. Pour des ondelettes d’interpolation à une variable les plus simples possibles, c’est-à-dire les ondelettes linéaires par morceaux, le schéma de prédiction consiste à prédire une troisième valeur sur la base de deux premières. Il faut donc au minimum deux échantillons pour que ce schéma de prédiction fonctionne. Si maintenant nous passons en dimension d plus élevée que 1, nous utilisons des ondelettes produits tensoriels d’ondelettes à une variable, qui sont d -linéaires par morceaux. Les premières prédictions ne peuvent se faire que sur la base de 2^d échantillons. Si la dimension d est élevée, nous n’aurons jamais autant d’échantillons, et nous ne pouvons donc pas nous attendre à obtenir des représentations de

fonctions en ondelettes qui sont creuses. Dans ce cas, la représentation en ondelettes n'est pas bien adaptée, et les représentations en fonctions séparables ou en fonctions radiales sont les seules qui restent utilisables.

Pour conclure, nous avons vu qu'il existe des outils pour approcher des fonctions régulières par morceaux avec une précision asymptotique meilleure que celle fournie par les ondelettes. Néanmoins, ces méthodes de représentations sont complexes. Elle consistent soit à rechercher une approximation creuse d'une fonction dans un dictionnaire redondant [Don98b], à manipuler des réseaux de neurones dont la convergence des méthodes d'apprentissage est rarement prouvable, ou encore à générer des maillages adaptatifs, comme le font N. DYN et S. RIPPA. Les maillages sont cependant difficiles à manipuler quand la dimension devient élevée.

Néanmoins, les ondelettes permettront d'atteindre un bon compromis, car elle ont une bonne capacité d'approximation tout en permettant de faire de l'interpolation avec des calculs de complexité raisonnable, et ce avec des algorithmes d'approximation prouvables, comme nous allons le voir. Comme nous venons de le voir, ceci ne s'appliquera que pour des dimensions d'espace de départ raisonnables.

8.1.5 Arbres d'ondelettes d'interpolation

La représentation en arbres des sous-familles d'ondelettes utilisées pose plusieurs problèmes que nous allons présenter maintenant.

Le premier problème est un problème intrinsèque à la représentation en arbres. En dimension supérieure à 1, on ne dispose pas d'une forme d'ondelette, mais de plusieurs formes d'ondelettes différentes générées par les différentes ondelettes mères. En général, il existe $2^d - 1$ ondelettes mères, et donc $2^d - 1$ arbres disjoints pour placer des coefficients d'ondelettes qui sont gérés séparément.

Il nous a paru artificiel pour notre application d'avoir à choisir entre plusieurs arbres parallèles. Nous proposons donc une nouvelle structure de base d'interpolation d -dimensionnelle dans laquelle il n'y a qu'une seule forme d'ondelette.

Nous inspirons pour cela de la construction de DONOHO des bases d'ondelettes d'interpolation en dimension 1. Si on se donne une fonction d'échelle d'interpolation ϕ , qui vérifie donc

$$\phi(k) = \delta_{k0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

soit encore

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) = 1$$

DONOHO suggère de choisir comme ondelette $\psi(x) = \phi(2x - 1)$, soit donc une fonction qui a exactement la même forme que ϕ . Il choisit donc une base des espaces de détail W_j comme une sous-famille de la base de Riesz de V_{j+1} . On peut alors utiliser ces ondelettes pour construire une base d'ondelettes d'interpolation à d variables par le schéma classique utilisé

entre autres en traitement d'images, en posant

$$\psi^\epsilon(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \epsilon = 0 \\ \psi(x) & \text{si } \epsilon = 1 \end{cases}$$

et en choisissant les $2^d - 1$ ondelettes mères

$$\psi^\epsilon(\mathbf{x}) = \psi^{\epsilon_1}(x_1) \times \cdots \times \psi^{\epsilon_d}(x_d) \quad \text{où } \epsilon \in \{0,1\}^d$$

Si ϕ et ψ sont une fonction d'échelle et une ondelette d'interpolation avec $\psi(x) = \phi(2x - 1)$, les $2^d - 1$ ondelettes ont des formes différentes. Une autre approche consiste à appliquer la construction des bases de détail comme sous-famille d'une base de fonctions d'échelles directement sur les ondelettes à d variables.

On pose donc $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1) \times \cdots \times \phi(x_n)$. On pose ensuite

$$V_j = \overline{\text{vect}\{\phi(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}}$$

$$W_j = \overline{\text{vect}\{\phi(2\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{k}/2 \notin \mathbb{Z}^d\}}$$

On peut vérifier que

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}$$

et la base d'ondelettes duale de

$$\mathcal{B} = \{\phi_{j\mathbf{k}} : j = 0 \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\} \cup \{\phi_{j\mathbf{k}} : j > 0 \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d\}$$

est alors

$$\tilde{\phi}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

$$\tilde{\phi}_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - 2^{-j}\mathbf{k}) - \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^d} \phi(\mathbf{k}/2 - \mathbf{k}') \delta(\mathbf{x} - 2^{-j+1}\mathbf{k}') \quad j > 0, \mathbf{k}/2 \notin \mathbb{Z}^d$$

Les ondelettes duales sont des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac, mais ne sont pas séparables. Comme toutefois nous n'utilisons jamais explicitement leur expression, cette complexité ne sera pas gênante. La simplicité de cette représentation nous servira dans la suite de l'exposé et dans nos preuves.

Structure d'arbres

On peut aisément plaquer sur une telle famille d'ondelettes une structure quand $d = 1$. Une ondelette est repérée par 2 indices j et k tels que $k \notin 2\mathbb{Z}$. La structure d'arbre suivante peut être utilisée :

$$(j, k) \text{ a pour fils } \begin{cases} (j+1, 2k-1) \\ (j+1, 2k+1) \end{cases}$$

En dimension supérieure, il n'est pas possible de trouver une structure aussi simple, à moins d'introduire une structure légèrement redondante. Les nœuds de l'arbre sont indicés par (j, \mathbf{k}) $j \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. La relation de filiation s'écrit :

$$(j, \mathbf{k}) \text{ a pour fils } (j + 1, 2\mathbf{k} + \boldsymbol{\epsilon}) \quad \boldsymbol{\epsilon} \in \{0, 1\}^d$$

Certains nœuds de l'arbre ne correspondront alors pas à des coefficients d'ondelettes (ceux pour lesquels $j > 0$ et $\mathbf{k} \in 2\mathbb{Z}^d$).

Une structure d'arbre est-elle toujours nécessaire ?

Nous verrons que dans certains schémas d'interpolation, nous pouvons renoncer à effectuer une interpolation avec une sous-famille d'ondelettes qui constitue un sous-arbre.

L'un des intérêts de la structure d'arbre est de fournir un moyen de limiter le nombre de fonctions candidates. Dans l'approche que nous allons décrire par la suite, nous verrons que nous pouvons nous affranchir partiellement de cette contrainte par une méthode d'allocation. Dans certains cas (pour certains types de bases d'ondelettes), l'allocation que nous allons maintenant décrire sera exactement une descente d'arbre.

8.1.6 Apprentissage pour les réseaux d'ondelettes

Nous avons la connaissance de deux méthodes d'apprentissage. Une première filière est celle développée par ZHANG et BENVENISTE [ZB92], et ZHANG [SZL+95, Zha97], tandis que la deuxième a été proposée par PATI et KRISHNAPRASAD [PK93]. Il existe d'autres approches que nous ne détaillerons pas ici, car elles sont relativement éloignées de la notre.

La méthode la plus simple est celle proposée par PATI et KRISHNAPRASAD. Ces auteurs proposent d'apprendre une fonction inconnue en cherchant une décomposition sur une sous-famille d'une base d'ondelettes. Une sous-famille est sélectionnée, soit par une analyse spectrale de l'ensemble des échantillons, soit par raffinement progressif, et PATI et KRISHNAPRASAD résolvent ensuite un système aux moindres carrés pour obtenir les coefficients de la décomposition, c'est à dire les coefficients $c_{j\mathbf{k}}$ dans la décomposition

$$f = \sum_{j, \mathbf{k}} c_{j\mathbf{k}} \psi_{j\mathbf{k}}$$

Pour montrer la similitude avec les techniques de réseaux de neurones, ils exhibent une méthode itérative d'apprentissage par une méthode de gradient dont on peut prouver la convergence (il faut noter que la fonctionnelle d'erreur est une fonction quadratique des paramètres à ajuster).

L'approche proposée initialement par ZHANG et BENVENISTE consiste à chercher une approximation d'une fonction sous la forme suivante :

$$f = \sum_k a_k \psi(B_k \mathbf{x} - c_k)$$

où les matrices B_k et les vecteurs c_k sont susceptibles d'être modifiés par l'algorithme d'apprentissage. La dépendance de la solution en fonction des paramètres étant fortement non linéaire, peu de résultats théoriques de convergence peuvent être fournis.

Par la suite, ZHANG a développé un algorithme d'apprentissage qui consiste à sélectionner des ondelettes d'une *frame*, ce qui se rapproche de ce que nous allons proposer, et ensuite de résoudre le système linéaire associé pour obtenir les coefficients de décomposition de

$$f = \sum_{(j,\mathbf{k}) \in I} c_{j\mathbf{k}} \psi_{j\mathbf{k}}$$

Sa méthode de choix des ondelettes se fait en deux passes : une passe de sélection, et une passe d'élimination où de sélection.

La première passe de sélection consiste à choisir toutes les ondelettes dont le support contient un point de mesure. On limite ainsi l'ensemble de recherche aux ondelettes qui sont susceptible d'expliquer les mesures obtenues.

Pour la deuxième passe, ZHANG propose deux approches différentes. La première est une approche de resélection itérative. À chaque étape, ZHANG ajoute une ondelette qui est le plus capable d'expliquer l'erreur résiduelle de régression. Cette approche repose sur une orthonormalisation de la famille d'ondelettes avec une métrique adaptée :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) \overline{g(\mathbf{x}_n)}$$

La deuxième approche consiste à faire une troncature de développement. La régression est faite sur toutes les ondelettes sélectionnées, et les ondelettes dont les coefficients de régression sont les plus petits sont progressivement éliminées de la décomposition I .

Dans les deux cas, le choix du nombre d'ondelettes (et donc de la capacité de généralisation) est mené sur la base d'un critère dit de *validation croisée généralisée*, qui consiste à minimiser un critère composite

$$GCV = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(\mathbf{x}_k) - y_k)^2 + 2 \frac{\text{card } I}{N} \sigma^2$$

où I est l'ensemble des indices des ondelettes retenues, et donc $\text{card } I$ le nombre de ces ondelettes. On retrouve donc un critère classique, où le premier terme est l'erreur empirique et le deuxième un terme de contrôle de capacité qui est d'autant plus pénalisant que le nombre d'ondelettes introduit est élevé. Le terme σ désigne l'écart-type estimé du bruit de mesure.

8.2 Ondelettes d'interpolation et grilles d'approximation

Nous supposons que nous disposons d'une famille d'ondelettes que nous notons sous la forme

$$\mathcal{B} = (\phi_{j\mathbf{k}})_{j \in \mathbb{N}, \mathbf{k} \in K_j}$$

définies d'un espace de départ D qui sera soit \mathbb{R}^d , soit $[0,1]^d$.

Dans cette notation, j est l'indice de résolution et \mathbf{k} est un indice de translation. Si ϕ est une fonction d'échelle de DESLAURIERS–DUBUC, on pourra par exemple définir

$$\begin{aligned}\phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= \phi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) \\ K_0 &= \mathbb{Z}^d \\ K_j &= \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{k}/2 \notin \mathbb{Z}^d\} \quad j \geq 1\end{aligned}$$

pour avoir une base des fonctions définies sur \mathbb{R}^d tout entier. Dans un hypercube, on pourra prendre $\phi_{j\mathbf{k}}$ comme étant la fonction d'échelle construite par raffinement dyadique de DESLAURIERS et DUBUC adapté à l'intervalle et définir les ensembles d'indices K_j

$$\begin{aligned}K_0 &= \{0,1\}^d \\ K_j &= \{\mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^j\}^d : \mathbf{k}/2 \notin \mathbb{Z}^d\} \quad j \geq 1\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on note l'ensemble des indices (j, \mathbf{k}) qui décrivent la base complète K , défini par

$$K = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{j\} \times K_j$$

On note $\nu_{j\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^d$ le centre de l'ondelette d'indices j, \mathbf{k} qui vaut pour l'exemple ci-dessus

$$\nu_{j\mathbf{k}} = 2^{-j} \mathbf{k}$$

On suppose que la base d'ondelettes \mathcal{B} est une base d'ondelettes d'interpolation. C'est à dire que

$$\begin{aligned}\phi_{j\mathbf{k}}(\nu_{j\mathbf{k}'}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} & \forall \mathbf{k}, \mathbf{k}' \\ \phi_{j'\mathbf{k}'}(\nu_{j\mathbf{k}}) &= 0 & \forall j' > j, \mathbf{k}, \mathbf{k}'\end{aligned}$$

Pour chaque échelle j , on fixe une partition de l'espace de départ D en bassins d'attraction des ondelettes $\phi_{j\mathbf{k}}$:

$$D = \bigcup_{\mathbf{k} \in K_j} B_{j\mathbf{k}}$$

où $\nu_{j\mathbf{k}} \in \overset{\circ}{B}_{j\mathbf{k}}$. En pratique, le bassin d'attraction sera une cellule de VORONOÏ, c'est à dire

$$B_{j\mathbf{k}} = \{x \in D : |x - \nu_{j\mathbf{k}}| \leq |x - \nu_{j\mathbf{k}'}| \forall \mathbf{k}' \in K_j\}$$

à un ensemble de mesure nulle près.

Si nous utilisons des ondelettes d'interpolation triadiques, pour lesquelles une fonction d'échelle de résolution j et de d'indice \mathbf{k} s'écrit $\phi_{j\mathbf{k}}(x) = \phi(3^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$, des définitions similaires peuvent être utilisées. On aura alors

$$\nu_{j\mathbf{k}} = 3^{-j} \mathbf{k}$$

et pour $j \geq 1$

$$K_j = \begin{cases} \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{k}/3 \notin \mathbb{Z}^d\} & \text{si } D = \mathbb{R}^d \\ \{\mathbf{k} \in \{0 \dots 3^j\}^d : \mathbf{k}/3 \notin \mathbb{Z}^d\} & \text{si } D = [0,1]^d \end{cases}$$

Quelle que soit l'échelle de dilatations (dyadique ou triadique) que nous utilisons, on remarquera qu'un vecteur rationnel dyadique (resp. triadique) qui s'écrit donc $2^{-j}\mathbf{k}$ (resp. $3^{-j}\mathbf{k}$) est le centre d'une unique ondelette d'interpolation de la base \mathcal{B} . Les indices j', \mathbf{k}' de l'ondelette en question sont déterminés de manière unique par les propriétés :

$$\begin{aligned} 2^{-j}\mathbf{k} &= 2^{-j'}\mathbf{k}' \quad (\text{resp. } 3^{-j}\mathbf{k} = 3^{-j'}\mathbf{k}') \\ j &= 0 \text{ ou bien } (j > 0 \text{ et } \mathbf{k} \notin 2\mathbb{Z}^d \text{ (resp. } \mathbf{k} \notin 3\mathbb{Z}^d)) \end{aligned}$$

8.3 Schéma d'allocation

Nous décrivons ici un schéma de construction de familles de coefficients d'ondelettes sur la base de la donnée d'un certain nombre de points de mesures. Ce schéma est défini pour satisfaire certains critères d'optimalité que nous détaillerons par la suite.

La fonction de ces schémas d'allocation est de choisir une sous-famille d'une base d'ondelettes d'interpolation afin de construire une estimation d'une fonction sur la base de mesures ponctuelles. Deux premiers critères s'imposent :

- le schéma doit construire une sous-famille dans laquelle le problème d'interpolation fournira une fonction a priori régulière. Ceci impose que des ondelettes de basse échelle soient préférées à des ondelettes de fine échelle ;
- des composantes de résolution fine n'ont de raison d'apparaître dans la représentation de l'estimée que si on dispose d'information de fine échelle sur la fonction, c'est à dire de points de mesures proches. On attend de ce schéma qu'il fasse apparaître des ondelettes de fine échelle dans les zones où la densité de points de mesure est suffisante.

Nous allons partir d'une famille de mesures $(x_n, y_n)_{n=1 \dots N}$. En pratique, le schéma d'allocation dépendra des points de mesure x_n et non des valeurs mesurées y_n . Nous noterons par la suite \mathcal{X} l'ensemble des points de mesure $\{x_n : n = 1 \dots N\}$.

Définition 8.6 (Allocation admissible)

Une allocation admissible d'un ensemble fini de points de mesure distincts $x \in \mathcal{X}$ dans une famille d'ondelettes d'interpolation est une injection i de \mathcal{X} dans K , telle que toute mesure x allouée à une ondelette $\phi_{i(x)}$ est dans le bassin d'attraction de cette ondelette

$$x \in B_{i(x)} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{X}.$$

et qu'une mesure n'est allouée à une ondelette de résolution donnée seulement si elle ne pouvait pas être allouée à une ondelette d'échelle plus grossière, ce qui s'écrit :

$$i(x) = (j, \mathbf{k}), x \in B_{j', \mathbf{k}'} \text{ avec } j' < j \Rightarrow \exists x' \in \mathcal{X} \text{ tel que } i(x') = (j', \mathbf{k}')$$

On note I l'image de i , qui est donc l'ensemble des indices des ondelettes sélectionnées.

En général (dès que des ondelettes de plusieurs échelles différentes sont dans I), plusieurs allocations admissibles différentes existent. Nous allons considérer que certaines sont meilleures que d'autres. Pour cela nous définissons une relation d'ordre entre deux allocations possibles d'un même jeu de points de mesure \mathcal{X} .

Définition 8.7

Une allocation i d'un jeu de points de mesures \mathcal{X} dans une base d'ondelettes est **supérieure** à une autre allocation i' si et seulement si il existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que les deux conditions $(C_1 - C'_1)$ et (C_2) suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout j tel que $0 \leq j < j_0$, on a

$$I \cap (\{j\} \times K_j) = I' \cap (\{j\} \times K_j) \quad (C_1)$$

$$(j, \mathbf{k}) \in I \Rightarrow i^{-1}(j, \mathbf{k}) = i'^{-1}(j, \mathbf{k}) \quad (C'_1)$$

ce qui signifie que l'allocation est la même jusqu'à l'échelle j_0 non incluse.

2. Comme les allocations sont toutes les deux admissibles, les ondelettes sélectionnées à l'échelle j_0 sont également les mêmes :

$$I \cap (\{j_0\} \times K_{j_0}) = I' \cap (\{j_0\} \times K_{j_0})$$

La deuxième condition est alors que les mesures allouées à l'échelle j_0 sont plus proche des centres $\nu_{j_0 \mathbf{k}}$ pour i que pour i' , i.e.

$$(j_0, \mathbf{k}) \in I \Rightarrow |i^{-1}(j_0, \mathbf{k}) - \nu_{j_0 \mathbf{k}}| \leq |i'^{-1}(j_0, \mathbf{k}) - \nu_{j_0 \mathbf{k}}| \quad (C_2)$$

Nous allons voir que ce schéma d'allocation a deux bonnes propriétés. On peut montrer un résultat d'unicité, et on peut montrer qu'une allocation converge (quand le nombre de points alloués devient grand) vers un placement des points sur des positions qui sont exactement les nœuds $\nu_{j \mathbf{k}}$ des ondelettes et que les sous-systèmes correspondants sont donc inversibles et très bien conditionnés.

8.3.1 Quasi unicité et existence d'un optimum

En toute rigueur, il peut exister des configurations dans l'allocation d'un nombre fini de points x_n dans une base d'ondelettes où il n'y a pas d'allocation strictement meilleure qu'une autre. Cela signifiera qu'il existe deux allocations indifférentes.

Définition 8.8 (Allocations indifférentes.)

On dit que deux allocations sont indifférentes s'il existe une résolution j_0 telle que les conditions $(C_1 - C'_1)$ et (C_2) ci-dessus sont vérifiées, où les inégalités dans (C_2) sont toutes des égalités (C'_2) , mais les allocations sont différentes à l'échelle j_0 (C''_2) :

$$(j_0, \mathbf{k}) \in I \Rightarrow |i^{-1}(j_0, \mathbf{k}) - \nu_{j_0 \mathbf{k}}| = |i'^{-1}(j_0, \mathbf{k}) - \nu_{j_0 \mathbf{k}}| \quad (C'_2)$$

$$\exists \mathbf{k} \text{ tel que } (j_0, \mathbf{k}) \in I \text{ et } i^{-1}(j_0, \mathbf{k}) \neq i'^{-1}(j_0, \mathbf{k}) \quad (C''_2)$$

Nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Théorème 8.2

Soit \mathcal{X} un ensemble de points de mesure. Au moins une de ces deux propositions est vraie :

- il existe une allocation optimale, c'est-à-dire strictement meilleure que toute autre allocation possible.
- il existe deux allocations indifférentes.

Démonstration. Nous n'allons donner qu'un aperçu de la preuve qui n'est pas très difficile. Elle consiste à faire l'allocation échelle par échelle avec l'algorithme suivant. On commence par poser $j = 0$ et $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$,

1. On appelle Λ_j l'ensemble des $\mathbf{k} \in K_j$ tels que $\mathcal{X}_j \cap B_{j\mathbf{k}} \neq \emptyset$. Pour tout $\mathbf{k} \in \Lambda_j$, on note $x_{j\mathbf{k}}$ le point de mesure dans le bassin $B_{j\mathbf{k}}$ qui est le plus proche de $\nu_{j\mathbf{k}}$. Comme les bassins d'attraction sont disjoints, les $x_{j\mathbf{k}}$ sont distincts. On peut donc poser $i(x_{j\mathbf{k}}) = (j, \mathbf{k})$.
2. On définit l'ensemble des points de mesure à placer à l'échelle suivante :

$$\mathcal{X}_{j+1} = \mathcal{X}_j - i^{-1}(\{j\} \times \Lambda_j)$$

Les points de mesures qui restent vérifient tous

$$x \in \mathcal{X}_{j+1} \text{ et } x \in B_{j'\mathbf{k}} \text{ pour } j' \leq j \Rightarrow \mathbf{k} \in \Lambda_{j'}$$

Ce procédé est itéré pour $j = 1, 2, \dots$ jusqu'à ce que $\mathcal{X}_j = \emptyset$. Comme

$$\text{card } \mathcal{X}_{j+1} < \text{card } \mathcal{X}_j,$$

cet algorithme finit bien (au plus tard pour $j = \text{card } \mathcal{X}$). Il est clair qu'on obtient ainsi une allocation optimale, sauf si la définition des $x_{j\mathbf{k}}$ n'est pas unique, c'est-à-dire qu'à une échelle donnée j_0 , on trouve deux points de mesure à la même distance d'un centre $\nu_{j_0\mathbf{k}}$, auquel cas il existe deux allocations indifférentes. \square

8.3.2 Schéma d'allocation itératif

Le schéma suivant permet de réaliser une allocation optimale quand elle existe.

Si les points de mesures \mathbf{x}_n sont des réalisations d'une variable aléatoire X de densité bornée, alors on pourra montrer que les situations où il existe deux allocations indifférentes sont de probabilité nulle.

Ceci nous garantira que dans les situations générales (à l'exclusion du cas de probabilité nulle où il existe des allocations indifférentes), nous pouvons toujours avoir une allocation optimale unique, et que le résultat de l'allocation itérative ne dépend pas de l'ordre de présentation des mesures, mais seulement de l'ensemble des mesures \mathcal{X} .

Définition 8.9 (Schéma d'allocation itératif)

Nous supposons que nous disposons déjà d'une allocation i_n d'un ensemble \mathcal{X}_n de n mesure dans la famille d'ondelettes. L'allocation d'une famille de $n + 1$ mesures $\mathcal{X} \cup x$ se fait de la

manière suivante :

Calculer l'allocation i_{n+1} **en fonction de** i_n *consiste à allouer* \mathbf{x} *à partir de l'échelle* $j = 0$.

Allouer \mathbf{x} **à partir de l'échelle** j *consiste à faire les choses suivantes*

1. Soit $\mathbf{k} \in K_j$ tel que $x \in B_{j\mathbf{k}}$.

(a) Les mesures qui sont allouées à d'autres ondelettes de la même échelle ne sont pas déplacées :

$$i_n(\mathbf{x}) = (j, \mathbf{k}') \text{ avec } \mathbf{k}' \neq \mathbf{k} \Rightarrow i_{n+1}(\mathbf{x}) = i_n(\mathbf{x})$$

(b) Si aucune mesure n'était allouée en (j, \mathbf{k}) , i.e. $(j, \mathbf{k}) \notin I_n$, on pose

$$i_{n+1}(\mathbf{x}) = (j, \mathbf{k})$$

et i_{n+1} coïncide avec i_n pour les ondelettes de résolution supérieure à j , i.e.

$$i_n(\mathbf{x}) = (j', \mathbf{k}') \text{ avec } j' > j \Rightarrow i_{n+1}(\mathbf{x}) = i_n(\mathbf{x})$$

L'algorithme est terminé.

(c) Si une mesure \mathbf{x}' est allouée à (j, \mathbf{k}) , c'est-à-dire si $(j, \mathbf{k}) = i_n(\mathbf{x}')$, on dit qu'il y a compétition entre les mesures \mathbf{x} et \mathbf{x}' . On note \mathbf{x}_p le point de $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\}$ le plus proche de $\nu_{j\mathbf{k}}$ et \mathbf{x}_e le plus éloigné. On pose alors

$$i_{n+1}(\mathbf{x}_p) = (j, \mathbf{k})$$

et on alloue \mathbf{x}_e à partir de l'échelle $j + 1$.

Cet algorithme finit en au plus $j + 1$ itérations si j est la plus grande résolution dans l'ensemble I_n des ondelettes sélectionnée au temps n , c'est-à-dire

$$j = \max_{(j', \mathbf{k}') \in I_n} j'$$

On peut montrer par une récurrence simple que l'on construit ainsi une allocation optimale (s'il n'existe pas d'allocation indifférente). Ceci nous garantit notamment que le produit d'une allocation itérative est le même, quel que soit l'ordre d'apparition des points de mesure.

Exemple d'allocation

Nous donnons ici un exemple d'allocation itérative dans un cadre de construction d'ondelettes triadiques. Les mesures allouées sont placées respectivement en

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,3 & x_2 = 0,1 \\ x_3 = 0,2 & x_4 = 0,01 \end{array}$$

Le résultat de cette allocation est représenté dans la figure 8.5. Les cercles pleins indiquent des nœuds de l'arbre qui correspondent à un coefficient d'ondelette, tandis que les autres sont seulement utilisés pour compléter la structure et en faire une structure d'arbre. La mesure x_1 est tout allouée à l'ondelette ϕ_{00} . Ensuite la mesure x_2 étant plus proche de ν_{00} que x_1 , x_1 est éjectée pour être allouée à l'échelle en dessous à l'ondelette ϕ_{11} , etc.

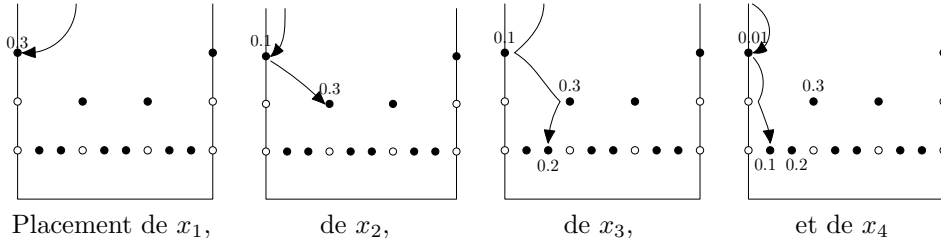


FIG. 8.5 – Exemple de procédure d'allocation itérative

8.3.3 Comportement asymptotique

Nous allons prouver un théorème qui fournit une motivation importante de cette approche. Si nous effectuons un placement itératif des points de mesures et si la variable aléatoire X est de densité strictement positive (et bornée), les points alloués à une mesure donnée convergent vers le centre de l'ondelette presque sûrement.

Théorème 8.3

On suppose que les points de mesure \mathbf{x}_n sont des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X de densité de probabilité strictement positive et bornée. On note i_n l'allocation obtenue par le schéma itératif des n points de mesures $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ et I_n l'ensemble des ondelettes sélectionnées.

On peut alors montrer que pour tous $j \geq 0, \mathbf{k} \in K_j$ donnés,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \text{ tel que } n \geq n_0 &\Rightarrow (j, \mathbf{k}) \in I_n \\ \mathbf{x}_{i_n^{-1}(j, \mathbf{k})} &\rightarrow \nu_{j\mathbf{k}} \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

presque sûrement.

Démonstration. On choisit un pas $\epsilon < 2^{-j-1}$. On note $b_\epsilon(j, \mathbf{k})$ l'ensemble

$$b_\epsilon(j, \mathbf{k}) = \{x \in D : |x - \nu_{j\mathbf{k}}| < \epsilon\}$$

On note $A_\epsilon(j, \mathbf{k})$ l'ensemble des antécédents de (j, \mathbf{k}) , c'est-à-dire

$$A_\epsilon(j, \mathbf{k}) = \{(j', \mathbf{k}') : j' < j \text{ et } B_{j'\mathbf{k}'} \cap b_\epsilon(j, \mathbf{k}) \neq \emptyset\}$$

Le cardinal de $A_\epsilon(j, \mathbf{k})$ est fini. De plus, comme les $(\nu_{j'\mathbf{k}'}), (j', \mathbf{k}') \in A_\epsilon(j, \mathbf{k})$ sont des multiples entiers de 2^{-j} , les boules $b_\epsilon(j', \mathbf{k}')$ pour $(j', \mathbf{k}') \in A_\epsilon(j, \mathbf{k})$ sont disjointes dès que $\epsilon < 2^{-j-1}$.

Comme la probabilité de l'événement $\{\mathbf{x}_n \notin b_\epsilon(j, \mathbf{k})\}$ est strictement inférieure à 1, on a pour tout (j', \mathbf{k}')

$$\exists n \text{ tel que } \mathbf{x}_n \in b_\epsilon(j', \mathbf{k}') \quad \text{presque sûrement}$$

et donc comme $A_\epsilon(j, \mathbf{k})$ est fini,

$$\forall (j', \mathbf{k}') \in A_\epsilon(j, \mathbf{k}), \exists n_{j'\mathbf{k}'} \text{ tel que } \mathbf{x}_{n_{j'\mathbf{k}'}} \in b_\epsilon(j, \mathbf{k}) \quad \text{presque sûrement.}$$

On pose alors

$$n = \max\{n_{j,\mathbf{k}}\}$$

On montre alors que $A_\epsilon(j,\mathbf{k}) \subset I_n$, et que

$$\forall (j',\mathbf{k}') \in A_\epsilon(j,\mathbf{k}), |i_n^{-1}(j,\mathbf{k}) - \nu_{j\mathbf{k}}| < \epsilon \quad (8.3)$$

par exemple par récurrence sur j , en exploitant le fait que la suite des $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et que si $(j,\mathbf{k}) \in I_{m_0}$, alors la suite

$$m \mapsto |i_m^{-1}(j,\mathbf{k}) - \nu_{j\mathbf{k}}| \quad m \geq m_0$$

est décroissante.

De (8.3), on obtient donc que pour tout (j,\mathbf{k}) et tout ϵ suffisamment petit (inférieur à 2^{-j-1}), on a

$$\exists n, m \geq n \Rightarrow (j,\mathbf{k}) \in I_m \text{ et } |i_m^{-1}(j,\mathbf{k}) - \nu_{j\mathbf{k}}| < \epsilon \quad \text{p.s.}$$

En utilisant cette relation pour la famille dénombrable des $\epsilon_k = 2^{-j-1-k}$, on obtient par conjonction de propositions presque sûres la proposition presque sûre suivante :

$$\exists n, m \geq n \Rightarrow (j,\mathbf{k}) \in I_m \text{ et } i_m^{-1}(j,\mathbf{k}) \rightarrow \nu_{j\mathbf{k}} \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty$$

□

En quoi cette situation est-elle intéressante ? Si on choisit un sous-système de coefficients d'ondelettes (j,\mathbf{k}) pour $j < j_0$ (dans un domaine D fini), on sait que presque sûrement, les mesures allouées à chaque coefficient (j,\mathbf{k}) vont tendre vers $\nu_{j\mathbf{k}}$. Dans la situation limite, le sous-système considéré correspond donc à un échantillonnage régulier. La matrice du système obtenu est donc la matrice de la transformée en ondelettes pour ces ondelettes d'interpolation. Cette matrice est triangulaire, inversible, et de conditionnement en norme ℓ^∞ qui croît proportionnellement à j , c'est à dire au logarithme du nombre des contraintes considérées.

8.4 Allocation dans une base de SCHAUDER

Nous allons voir que dans une situation de difficulté minimale (dimension 1, ondelettes linéaires par morceaux), l'algorithme d'allocation peut être utilisé pour réaliser une interpolation adaptative. Cet exemple simple nous permettra déjà d'avoir un aperçu des difficultés que nous aurons à affronter dans les cas plus complexes. Pour commencer, nous allons rappeler quelques résultats sur les matrices à diagonale dominante que nous allons largement utiliser par la suite.

8.4.1 Conditionnement des matrices à diagonale dominante

Une matrice A de terme général $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite à diagonale dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{pour tout } i = 1 \dots n$$

Selon le théorème de HADAMARD, la matrice A est alors inversible. Une preuve élémentaire se fait par l'absurde. On suppose que A n'est pas inversible. Il existe un vecteur v non nul tel que $Av = 0$. Soit alors v_i une coordonnée de v de valeur absolue maximale. $Av = 0$ implique

$$\begin{aligned} |a_{ii}v_i| &= \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}v_j \right| \\ \text{soit } |a_{ii}v_i| &\leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}v_j| \\ &\leq |v_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\ &< |a_{ii}v_i| \end{aligned}$$

et donc une contradiction.

Si on veut estimer la norme de la matrice inverse A^{-1} , on doit faire une hypothèse de dominance diagonale un peu plus forte :

Définition 8.10

Une matrice A de terme général $(a_{ij})_{i, j \in I}$ (éventuellement de taille infinie) est à diagonale dominante avec une marge de η si

$$|a_{ii}| \geq \eta + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{pour tout } i \in I$$

Dans le cas infini, on suppose que l'opérateur associé est continu de ℓ^∞ dans ℓ^∞ , ce qui revient à dire que la famille $(a_{ii})_{i \in I}$ est bornée.

Dans ce cas, le théorème suivant fournit une estimation de la norme de la matrice inverse A^{-1} .

Théorème 8.4

Soit A une matrice à diagonale dominante bornée. On note $a^+ = \sup_i |a_{ii}|$ et $a^- = \inf_i |a_{ii}|$. La matrice A est inversible, et la norme opératorielle de A^{-1} dans $L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ est majorée par

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{a^+}{\eta a^-}$$

Démonstration. Soit D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_{ii} = a_{ii}$. D est clairement continue et inversible. On note $B = D^{-1}A$. La matrice B de terme général b_{ij} vérifie alors

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 \\ \sum_{j \neq i} |b_{ij}| &\leq 1 - \frac{\eta}{|a_{ii}|} \\ &\leq 1 - \frac{\eta}{a^+} \end{aligned}$$

On note que nécessairement, $a^+ \geq a^- \geq \eta$. On remarque que la norme opératorielle de $I - B$ est inférieure à $1 - \eta/a^+$ et est donc strictement inférieure à 1. B est alors inversible, et son inverse est la somme de la série entière absolument convergente suivante :

$$B^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (I - B)^k$$

et de plus

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|(I - B)^k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\eta}{a^+}\right)^k \\ &= \frac{a^+}{\eta} \end{aligned}$$

Par suite, $A = DB$ est aussi inversible et la norme de son inverse vérifie

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &\leq \|D^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| \\ &\leq \frac{a^+}{\eta a^-} \end{aligned}$$

□

Après ce préliminaire, nous pouvons entrer dans le vif du sujet.

8.4.2 La base de SCHAUDER

La base utilisée est une base de SCHAUDER de fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$. On note ϕ la fonction linéaire par morceaux définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x + 1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

puis on définit les fonctions de base :

$$\phi_{jk}(x) = \phi(2^j x - k) \quad \text{pour } x \in [0,1]$$

La base de SCHAUDER est la famille de fonctions

$$\phi_{jk} \quad \text{pour } \begin{cases} j = 0 \text{ et } k \in \{0,1\} \\ j > 0 \text{ et } k \in (\mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}) \cap \{0 \dots 2^j\} \end{cases}$$

Les centres des ondelettes sont $\nu_{jk} = 2^{-j}k$. Les bassins d'attraction sont

$$B_{jk} = \begin{cases} [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] \cap [0,1] & \text{si } j = 0 \\ [2^{-j}(k-1), 2^{-j}(k+1)] & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

Quand nous nous donnons une suite de mesures (x_n, y_n) avec des points de mesure x_n distincts, et que nous choisissons par la méthode d'allocation n ondelettes de la base de SCHAUDER, nous obtenons alors sous certaines conditions que nous allons identifier un système d'équations linéaires inversible.

Soit $(\phi_{jk})_{k \in \Lambda_j}$ la sous-famille d'ondelettes choisie par allocation. On effectue sur cette famille la transformation suivante, que nous allons appeler "relocalisation".

8.4.3 La relocalisation

L'opération de relocalisation d'une sous-famille d'ondelettes d'interpolation a une définition très générale. C'est une transformation triangulaire qui à une famille $(\phi_{jk})_{k \in \Lambda_j}$ associe la famille $(\varphi_{jk})_{k \in \Lambda_j}$ de la manière suivante :

Définition 8.11 (Sous-famille d'ondelettes relocalisée)

Soit $(\phi_{jk})_{k \in \Lambda_j}$ une sous-famille d'une base d'ondelettes d'interpolation. La sous-famille relocalisée est la famille de fonctions $(\varphi_{jk})_{k \in \Lambda_j}$ définie par

$$\varphi_{jk} = \phi_{jk} \quad \text{si } \Lambda_{j'} = \emptyset \text{ pour } j' > j \quad (8.4a)$$

Si non, on définit par récurrence sur j' les fonctions $\phi_{j\mathbf{k};j'}$ par

$$\begin{aligned} \phi_{j\mathbf{k};j} &= \phi_{j\mathbf{k}} \\ \phi_{j\mathbf{k};j'} &= \phi_{j\mathbf{k};j'-1} - \sum_{\mathbf{k}' \in \Lambda_{j'}} \phi_{j\mathbf{k};j'-1}(\nu_{j'\mathbf{k}'}) \phi_{j'\mathbf{k}'} \quad \text{pour } j' > j \end{aligned}$$

Comme $\Lambda_{j'}$ est vide pour j' assez grand, la suite $(\phi_{j\mathbf{k};j'})_{j' \geq j}$ est stationnaire pour j' assez grand. On pose alors

$$\varphi_{j\mathbf{k}} = \phi_{j\mathbf{k};\infty} \quad (8.4b)$$

Quand la définition (8.4a) s'applique, ces deux définitions sont en fait équivalentes, puisque si $\Lambda_{j'} = \emptyset$ pour tout $j' > j$, alors la suite $(\phi_{j\mathbf{k};j'})_{j' \geq j}$ est constante.

On peut remarquer que si la sous-famille choisie contient toutes les ondelettes jusqu'à une certaine échelle, c'est-à-dire par exemple en dimension 1

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \mathbb{Z}\Lambda_j &= \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} & \text{pour } 1 \leq j \leq j_0 \\ \Lambda_j &= \emptyset & & \text{pour } j > j_0, \end{aligned}$$

alors ce changement de base est exactement une transformation en ondelettes inverse.

Sinon, dans le cas le plus général, on a la propriété suivante :

Proposition 8.1

La matrice de collocation $(\varphi_{j\mathbf{k}}(\nu_{j'\mathbf{k}'}))_{\mathbf{k} \in \Lambda_j, \mathbf{k}' \in \Lambda_{j'}}$ est la matrice identité.

Démonstration. On sait déjà que $\phi_{j\mathbf{k}}(\nu_{j'\mathbf{k}'}) = \delta_{jj'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ si $j' \leq j$. On peut ensuite montrer par une simple récurrence sur j'' que

$$\varphi_{j\mathbf{k};j''}(\nu_{j'\mathbf{k}'}) = \delta_{jj'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \text{pour tous } j' \leq j'' \text{ et } \mathbf{k}' \in \Lambda_{j''}$$

□

Exemple

Supposons que nous disposions de 5 points de mesure

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1 & x_2 &= 0,23 \\ x_3 &= 0,35 & x_4 &= 0,62 \\ x_5 &= 0,8 & & \end{aligned}$$

La méthode d'allocation va sélectionner 5 ondelettes avec la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} x_0 &\leftrightarrow \phi_{00} & x_4 &\leftrightarrow \phi_{01} \\ x_3 &\leftrightarrow \phi_{11} & x_1 &\leftrightarrow \phi_{21} \\ x_2 &\leftrightarrow \phi_{33} & & \end{aligned}$$

Les ondelettes relocalisées sont représentées dans la figure 8.6. Nous pouvons montrer que si les mesures placées dans l'arbre des coefficients d'ondelettes vérifient un certain critère d'exclusion que nous allons détailler, le système des contraintes d'interpolation est inversible.

Le critère d'exclusion que nous allons utiliser est le suivant :

Définition 8.12

Soient u et v deux réels positifs. Une allocation $i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ vérifie le critère d'exclusion (u, v) si pour tout $(j, \mathbf{k}) = i(x)$, on a la propriété suivante :

$$(j', \mathbf{k}') = i(x') \text{ et } j' < j \Rightarrow x' \notin [\nu_{j\mathbf{k}} - 2^{-j}u; \nu_{j\mathbf{k}} + 2^{-j}u] \quad (\text{EX}_1)$$

$$x \in]\nu_{j\mathbf{k}} - 2^{-j}v; \nu_{j\mathbf{k}} + 2^{-j}v[\quad (\text{EX}_2)$$

Nous appellerons parfois l'intervalle $[\nu_{j\mathbf{k}} - 2^{-j}u; \nu_{j\mathbf{k}} + 2^{-j}u]$ l'intervalle d'exclusion de l'ondelette $\phi_{j\mathbf{k}}$ de largeur u .

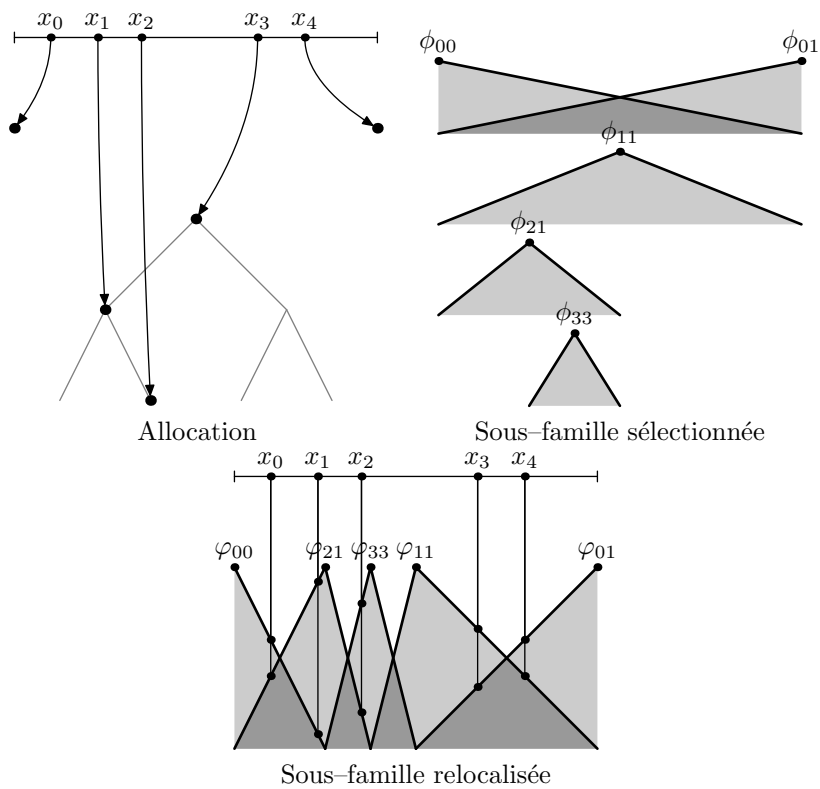


FIG. 8.6 – Exemple d'allocation dans un base d'ondelettes d'interpolation dyadique. Exemple de relocalisation.

Remarques

- On peut d'abord remarquer qu'il est facile de vérifier si ce critère d'exclusion est satisfait, car il suffit de le vérifier pour seulement deux mesures x' : elles correspondent à deux ondelettes (j_1, k_1) et (j_2, k_2) de résolutions j_1 et j_2 plus basses telles que

$$2^{-j_1} k_1 = 2^{-j} (k - 1) \qquad 2^{-j_2} k_2 = 2^{-j} (k + 1)$$

où évidemment $k_1 \in K_{j_1}$ et $k_2 \in K_{j_2}$.

- On peut montrer qu'il existe un plus grand sous-arbre de coefficients de l'arbre $I = i(\mathcal{X})$ pour lequel ce critère est vérifié. Quand la plus grande maille de l'ensemble des points de mesure

$$\max_{x \in [0,1]} \min_{x' \in \mathcal{X}} |x - x'|$$

tend vers 0, ce sous-arbre des coefficients vérifiant le critère d'exclusion tend vers l'arbre complet des coefficients, c'est à dire que

$$\inf\{j : K_j \neq \Lambda_j\} \rightarrow +\infty$$

Nous allons montrer qu'une allocation qui vérifie le critère d'exclusion $(1/2, 1/2)$ fournit un système de contraintes linéaires inversibles. Si de plus u est plus grand que v , nous aurons une majoration du conditionnement de la matrice du système.

Théorème 8.5

Si une allocation d'un jeu de mesures (x_i, y_i) avec $x_i \in [0,1]$ dans une base d'ondelettes d'interpolation linéaires par morceaux de $L^\infty([0,1])$ vérifie le critère d'exclusion $(1/2, 1/2)$, alors le système des contraintes est inversible. Si elle vérifie le critère d'exclusion (u, v) où $u = 1/2 + \eta$ et $v = 1/2 - \eta$, alors la matrice inverse du système des contraintes linéaires a une norme opératorielle inférieure (en normes ℓ^∞) à $M_{j_{\max}}/\eta$.

Démonstration. La preuve se décompose de la manière suivante. On renumérote les ondelettes sélectionnées $(\phi_{jk})_{(j,k) \in I}$ par ordre croissant de la position de leurs centres ν_{jk} en

$$(\phi_{j_t k_t})_{t=1 \dots N}$$

où $N = \text{card } \mathcal{X}$, si bien que

$$\nu_{j_1 k_1} < \dots < \nu_{j_N k_N}$$

Pour simplifier la démonstration, on suppose que les deux ondelettes d'échelle $j = 0$ sont dans I ¹, si bien que

$$\nu_{j_1 k_1} = 0 \qquad \nu_{j_N k_N} = 1$$

et pour des raisons pratiques de notations, on suppose que l'on peut écrire :

$$\nu_{j_0 k_0} = 0 \qquad \nu_{j_{N+1} k_{N+1}} = 1$$

1. mais la démonstration peut se faire sans cette hypothèse

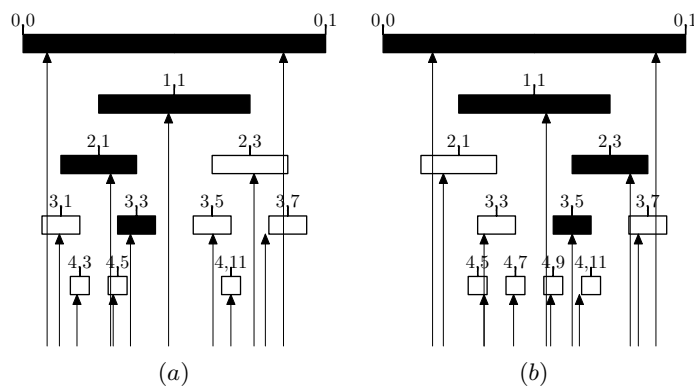


FIG. 8.7 – Les deux figures ci-dessus représentent des exemples d'allocation de mesure dans la base de SCHAUDER. Dans les deux cas, les ondelettes qui sont sélectionnées par l'allocation sont indiquées par un rectangle blanc ou noir. Chaque mesure est représentée par une flèche verticale dont la pointe indique l'ondelette à laquelle elle est allouée. La largeur du rectangle indique l'intervalle d'exclusion de chaque ondelette (de largeur $1/2$). Les ondelettes qui constituent le plus grand sous-arbre d'ondelettes qui vérifie le critère d'exclusion sont indiquées par des rectangles noirs. On voit par exemple dans la figure de gauche (a) que l'ondelette (ϕ_{31}) ne vérifie pas le critère d'exclusion, car la mesure allouée à l'ondelette ϕ_{00} est dans son intervalle d'exclusion (cf (Ex₁)). Pour une même raison les ondelettes ϕ_{23} et ses descendantes sont marquées par un rectangle blanc. Dans la figure (b), on voit la deuxième raison pour laquelle une ondelette peut ne pas vérifier le critère d'exclusion: la mesure qui est allouée à (4,11) n'est pas dans son rectangle d'exclusion (cf (Ex₂)).

On montre que les ondelettes relocalisées φ_{jk} correspondantes sont linéaires par morceaux (avec « deux morceaux non nuls »). Une ondelette $\varphi_{j_t k_t}$ est donc définie par

$$\varphi_{j_t k_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, \nu_{j_{t-1} k_{t-1}}[\\ 1 & \text{si } t = \nu_{j_t k_t} \\ 0 & \text{pour } t \in]\nu_{j_{t+1} k_{t+1}}, 1] \end{cases}$$

pour $t = 1 \dots N$ et est linéaire sur les deux intervalles $[\nu_{j_{t-1} k_{t-1}}, \nu_{j_t k_t}]$ et $[\nu_{j_t k_t}, \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}]$. Un exemple d'une famille relocalisées est ainsi montré en figure 8.6-c.

Lemme 8.1

On note x_{jk} la mesure allouée à une ondelette ϕ_{jk} , c'est à dire telle que $i(x) = (j, k)$. Si l'allocation vérifie un critère d'exclusion $(1/2, 1/2)$, on peut alors montrer que chaque mesure $x_{j_t k_t}$ est dans l'intervalle

$$\frac{\nu_{j_{t-1} k_{t-1}} + \nu_{j_t k_t}}{2} < x_{j_t k_t} < \frac{\nu_{j_t k_t} + \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}}{2} \quad (8.5)$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. La récurrence est initialisée par le cas où $I = \{(0,0), (0,1)\}$, c'est à dire quand les seules ondelettes sélectionnées sont celles de résolution $j = 0$. Dans ce cas simple, on peut aisément montrer que par application de l'inégalité (Ex₂) pour chacune des ondelettes, la relation (8.5) est vérifiée.

Considérons maintenant un sous-arbre de coefficients I auquel a été alloué un jeu de mesures $x \in \mathcal{X}$, et que pour ce sous-arbre, le critère d'exclusion soit vérifié. On suppose que les ondelettes sont ordonnées par ordre croissant de l'abscisse de leur centre ν_{jk} en $\phi_{j_t k_t}$.

On choisit une ondelette $\phi_{j_t k_t}$ de résolution j_t maximale dans I . On peut appliquer par récurrence le résultat du lemme à la sous famille des coefficients privés de cette ondelette. Pour $\tau \notin \{t-1, t, t+1\}$, on a alors

$$\frac{\nu_{j_{\tau-1} k_{\tau-1}} + \nu_{j_{\tau} k_{\tau}}}{2} < x_{j_{\tau} k_{\tau}} < \frac{\nu_{j_{\tau} k_{\tau}} + \nu_{j_{\tau+1} k_{\tau+1}}}{2}$$

et également

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{j_{t-2} k_{t-2}} + \nu_{j_{t-1} k_{t-1}}}{2} &< x_{j_{t-1} k_{t-1}} < \frac{\nu_{j_{t-1} k_{t-1}} + \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}}{2} \\ \frac{\nu_{j_{t-1} k_{t-1}} + \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}}{2} &< x_{j_{t+1} k_{t+1}} < \frac{\nu_{j_{t+1} k_{t+1}} + \nu_{j_{t+2} k_{t+2}}}{2} \end{aligned}$$

Il faut compléter cette chaîne d'inégalités en prouvant que

$$x_{j_{t-1} k_{t-1}} < \frac{\nu_{j_{t-1} k_{t-1}} + \nu_{j_t k_t}}{2} \quad (8.6)$$

$$\frac{\nu_{j_{t-1} k_{t-1}} + \nu_{j_t k_t}}{2} < x_{j_t k_t} < \frac{\nu_{j_t k_t} + \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}}{2} \quad (8.7)$$

$$\frac{\nu_{j_t k_t} + \nu_{j_{t+1} k_{t+1}}}{2} < x_{j_{t+1} k_{t+1}} \quad (8.8)$$

Comme la famille de coefficients sélectionnés I constitue un arbre, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} 2^{-j_t}(k_t + 1) &= 2^{-j_{t+1}}k_{t+1} \\ 2^{-j_t}(k_t - 1) &= 2^{-j_{t-1}}k_{t-1} \end{aligned}$$

Le critère d'exclusion appliqué pour t donne alors par **(Ex₁)** pour $j = j_t$ et $j' = j_{t-1}$ l'inégalité (8.6). En effet, on sait par récurrence que

$$x_{j_{t-1}k_{t-1}} < \frac{\nu_{j_{t-1}k_{t-1}} + \nu_{j_{t+1}k_{t+1}}}{2}$$

et par **(Ex₁)**

$$x_{j_{t-1}k_{t-1}} \notin [\nu_{j_t k_t} - 2^{-j_t-1}, \nu_{j_t k_t} + 2^{-j_t-1}]$$

ce qui implique (8.6). On obtient (8.8) de manière similaire. La double inégalité (8.7) est obtenue par application de la relation **(Ex₂)** de l'hypothèse d'exclusion pour $j = j_t$. \square

Par conséquent, pour chaque mesure $x_{j_t k_t}$, $t = 1 \dots N$, il existe au plus deux ondelettes relocalisées qui prennent des valeurs non nulles en ce point. La première est toujours $\varphi_{j_t k_t}$ qui prend une valeur strictement supérieure à $1/2$, et la deuxième soit $\varphi_{j_{t-1}k_{t-1}}$, soit $\varphi_{j_{t+1}k_{t+1}}$. On en déduit que la matrice du système sur la base φ est à diagonale dominante, et est donc inversible par le théorème de HADAMARD.

Si nous supposons maintenant que l'allocation vérifie le critère d'exclusion (u, v) où $u = 1/2 + \eta$ et $v = 1/2 - \eta$, avec $\eta > 0$, alors on montre de manière similaire que chaque point de mesure $x_{j_t k_t}$ est localisé dans l'intervalle défini par les inégalités

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right) (\nu_{j_{t-1}k_{t-1}} - \nu_{j_t k_t}) < x_{j_t k_t} - \nu_{j_t k_t} < \left(\frac{1}{2} - \eta\right) (\nu_{j_{t+1}k_{t+1}} - \nu_{j_t k_t})$$

Dans ce cas, la matrice A' du système des contraintes linéaires dans la base des fonctions φ_{j_k} est à diagonale dominante avec une marge strictement positive. En effet, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{j_t k_t}(x_{j_t k_t}) &> \frac{1}{2} + \eta \\ \varphi_{j_{t-1}k_{t-1}}(x_{j_t k_t}) &< \frac{1}{2} - \eta \\ \varphi_{j_{t+1}k_{t+1}}(x_{j_t k_t}) &< \frac{1}{2} - \eta \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$|\varphi_{j_t k_t}(x_{j_t k_t})| \geq \sum_{t' \neq t} |\varphi_{j_t' k_t'}(x_{j_t k_t})| + 2\eta$$

parce que cette fois encore, soit $\varphi_{j_{t-1}k_{t-1}}$ soit $\varphi_{j_{t+1}k_{t+1}}$ s'annule en $x_{j_t k_t}$. La matrice inverse A'^{-1} a donc une norme (opératoireielle de ℓ^∞ vers ℓ^∞) inférieure à

$$\|A'^{-1}\| \leq \frac{1}{2\eta}$$

Comme enfin la norme de la matrice de changement de base $(\phi_{jk}) \leftrightarrow (\varphi_{jk})$ est inférieure à Mj_{\max} , on obtient que la matrice inverse de la matrice A des contraintes interpolatrices dans la base d'origine est bornée par

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{Mj}{2\eta}$$

□

L'hypothèse d'exclusion implique notamment que les points de mesure pris en considération soient suffisamment éloignés les uns des autres. Plus précisément, on peut vérifier que l'écart entre deux points de mesure x_{jk} et $x_{j'k'}$ est nécessairement supérieur à $2\eta 2^{-\max(j,j')}$, c'est à dire que la distance est minorée par une marge proportionnelle au pas d'échelle correspondant à l'ondelette choisie parmi ϕ_{jk} et $\phi_{j'k'}$ de plus haute résolution.

Intuitivement, il se conçoit bien que si deux mesures proches sont allouées à deux ondelettes, au moins une des ondelettes doit avoir une échelle au plus du même ordre de grandeur que la distance entre les deux mesures, pour que le système des contraintes soit stable. Sinon, cela signifie que l'on essaie d'expliquer des différences de valeurs en des points proches avec des fonctions de base qui ont des échelles de variation bien plus grossières.

Nous allons en revanche voir qu'une seule hypothèse de cette nature (sur les distances respectives entre les mesures rapportées à des échelles d'ondelettes) n'est pas suffisante pour garantir la stabilité du système construit.

Considérons un jeu de trois mesures $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2 + \epsilon$ et $x_3 = 1/4$. Les ondelettes associées par l'algorithme d'allocation sont respectivement ϕ_{00} , ϕ_{01} et ϕ_{11} . La fonction est alors une fonction continue et linéaire par morceaux (les morceaux sont les intervalles $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$). Quand ϵ tend vers 0, le système de contraintes devient dégénéré, alors que les distances entre mesures restent minorées par $1/4$. En effet, en faisant varier y_3 d'un pas h , le coefficient de l'ondelette ϕ_{01} variera d'un pas $2h/\epsilon$, et la norme de la matrice inverse peut être arbitrairement grande.

8.5 Généralisation en dimension supérieure

Dans cette section, nous étendons les résultats précédents aux dimensions supérieures et à des ordres d'approximation supérieurs. Nous allons nous attacher à définir un cadre dans lequel un choix d'une sous-famille d'ondelettes nous fournira un système de contraintes interpolatrice stable. Nous donnerons des conditions suffisantes pour cela en 8.5.2, et pourrons énoncer un théorème de stabilité en 8.5.1. Ce théorème établit deux résultats :

- La norme L^∞ de la fonction interpolante $f_{\mathcal{X}}$ obtenue à partir des échantillons $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$ est bornée par un multiple de $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |f(\mathbf{x})|$. En peut notamment en déduire une majoration :

$$\|f_{\mathcal{X}}\|_\infty \leq M \times \|f\|_\infty$$

- La norme opératorielle de la matrice inverse de celle du système des contraintes linéaires est très basse. Si la matrice du système est notée A et si j_{\max} est la plus grande

résolution qui apparaît dans la sous-famille sélectionnée, on a

$$\|A^{-1}\|_{\infty, \infty} \leq M j_{\max}$$

Par conséquent, si $q(\mathcal{X})$ est la distance de séparation des mesures de \mathcal{X} , c'est-à-dire si

$$q(\mathcal{X}) = \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$$

alors la norme de A^{-1} est bornée par un

$$\|A^{-1}\|_{\infty, \infty} \leq M_1 + M_2 |\log q(\mathcal{X})|$$

Certaines composantes de l'approche que nous avons décrite jusqu'ici vont être réutilisées pour généraliser ce résultat à des ondelettes d'interpolation d'ordre quelconque et des dimensions quelconques, tandis que d'autre devront être abandonnées.

Le critère d'exclusion ne peut pas être utilisé si la dimension de l'espace de départ est supérieure à 1. En effet, nous avons implicitement utilisé le fait que la construction d'un arbre dyadique en dimension 1 consiste à faire un partitionnement hiérarchique du segment $[0,1]$ en segments dyadiques, et ce n'est plus le cas en dimension supérieure à 1.

Le critère d'exclusion va être remplacé par un critère que nous allons appeler « de bon placement relatif ».

Définition 8.13 (Critère (BRP) de bon placement relatif)

Soit i une allocation d'un jeu fini de points de mesure \mathcal{X} dans une base d'ondelettes d'interpolation. On dit qu'un point de mesure \mathbf{x} alloué à une ondelette $\phi_{j\mathbf{k}}$ vérifie le critère de bon placement relatif de paramètres $p \in \mathbb{N}$ et $\rho \in \mathbb{R}$ si pour tous (j', \mathbf{k}')

$$\left. \begin{array}{l} \|\nu_{j'\mathbf{k}'} - \nu_{j\mathbf{k}}\|_{\infty} \leq 6p2^{-j} \\ j' < j \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X} : i(\mathbf{x}') = (j', \mathbf{k}') \\ \|\mathbf{x}' - \nu_{j'\mathbf{k}'}\|_{\infty} \leq \rho 2^{-j} \end{array} \right. \quad (8.9)$$

On dit alors qu'une allocation vérifie le critère de bon placement relatif de paramètres p et ρ si toutes les mesures allouées vérifient le critère ci-dessus.

Remarques

- Ce critère signifie qu'une mesure allouée à une ondelette (j, \mathbf{k}) donnée ne peut être prise en compte que si
 1. un certain nombre d'ondelettes placées à une résolution plus basse et de centres proches sont dans I ,
 2. pour ces ondelettes, la distance entre point de mesure et centre de l'ondelette et inférieur à une constante fois 2^{-j} .
- On peut d'abord remarquer que le critère pour une mesure donnée ne fait intervenir que des mesures d'échelle plus grossière. Quand on dispose donc d'une allocation donnée, on peut extraire une plus grande sous-allocation (dont la définition est relativement évidente) qui vérifie le critère de bon placement relatif.

- Le coût d'extraction d'un tel sous-arbre est relativement court, puisque pour chaque ondelette, il suffit de parcourir au plus $(2p+2)^d$ autres ondelettes. Le coût total de l'extraction du plus grand sous-arbre qui vérifie le critère de bon placement relatif est donc $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre de mesures.

Le critère de bon placement relatif va nous permettre de sélectionner un sous-arbre de l'arbre d'allocation pour lequel nous serons sûrs que le système des contraintes d'interpolation est bien conditionné.

8.5.1 Conditions de stabilité

Nous allons montrer que sous réserve que le critère de bon placement relatif est vérifié pour une allocation donnée, la résolution du système des contraintes linéaires est stable. Le critère de bon placement relatif fait intervenir un paramètre ρ dont nous allons donner une estimation par la définition suivante.

On pose $P = \{-p \dots p+1\}^d$ et $P' = P \cap (2\mathbb{Z}^d)$. Pour tout $\mathbf{k} \in P$ et tout $S \subset P'$, on définit

$$\phi_{0\mathbf{k}}^S = \phi_{0\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}' \in S} \phi_{0\mathbf{k}}(2^{-1}\mathbf{k}')\phi_{1\mathbf{k}'}$$

On prend la sous-famille des ondelettes d'échelle 0 dont le support touche l'hypercube $[-1/4; 3/8]^d$, les mêmes ondelettes d'échelle 1. On se place dans une situation où une sous-famille des ondelettes d'échelle 1 est sélectionnée (par exemple par allocation), et la notation ci-dessus désigne donc les ondelettes relocalisées. La formule qui les définit est relativement simple, puisque leur calcul ne fait intervenir des corrections que sur une seule échelle.

On peut alors définir le rayon de dominance ρ .

Définition 8.14 (rayon de dominance à marge η .)

Soit ϕ une ondelette d'interpolation de support compact (inclus dans $[-p,p]$). Soit $(\phi_{j\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in K_j}$ une base d'ondelettes définies sur \mathbb{R}^d , par la construction suivante :

$$\begin{aligned} K_0 &= \mathbb{Z}^d \\ K_j &= \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d \end{aligned} \quad \text{pour } j > 0$$

et par

$$\phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \phi(2^j x_1 - k_1) \times \dots \times \phi(2^j x_d - k_d)$$

On définit alors

$$D_{0,\eta} = \left\{ \mathbf{x} : |\phi_{00}^S(\mathbf{x})| \geq \eta + \sum_{\mathbf{k} \in P - \{0\}} |\phi_{0\mathbf{k}}^S(\mathbf{x})| + \sum_{\mathbf{k} \in P'} |\phi_{1\mathbf{k}}(\mathbf{x})| \right\} \quad (8.10)$$

Ensuite pour tout $\epsilon \in \{0,1\}^d$, $\epsilon \neq 0$, on note

$$D_{\epsilon,\eta} = \left\{ \mathbf{x} : |\phi_{1\epsilon}(\mathbf{x})| \geq \eta + \sum_{\mathbf{k} \in P} |\phi_{0\mathbf{k}}^S(\mathbf{x})| + \sum_{\mathbf{k} \in P' - \{\epsilon\}} |\phi_{1\mathbf{k}}(\mathbf{x})| \right\} \quad (8.11)$$

Pour η inférieur à $1/2$, on sait que $0 \in D_{0,\eta}$ et $\epsilon/2 \in D_{\epsilon,\eta}$. En effet le terme de gauche de l'inégalité qui définit $D_{0,\eta}$ ou $D_{\epsilon,\eta}$ vaut 1 et le terme de droite vaut η . Si donc $\eta < 1/2$, on peut dire que chaque $D_{\epsilon,\eta}$ contient un voisinage de $\epsilon/2$.

De là, on pose

$$\rho_{\epsilon,\eta} = \max\{\rho : |\mathbf{x} - \epsilon/2| \leq \rho \Rightarrow \mathbf{x} \in D_{\epsilon,\eta}\} \quad (8.12)$$

Le rayon de dominance à marge η est alors

$$\rho_\eta = \inf_{\epsilon \in \{0,1\}^d} \rho_{\epsilon,\eta} \quad (8.13)$$

On peut vérifier que pour $\eta < 1/2$ ce rayon est strictement positif. Dans le cas de la base de SCHAUDER que nous avons étudié dans ci-dessus, ce rayon est égal à $(1 - \eta)/4$.

8.5.2 Stabilité de l'interpolation en cas de bon placement relatif

Nous pouvons énoncer un premier théorème de stabilité.

Théorème 8.6

Soit i une allocation optimale d'une famille de mesures $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ qui vérifie le critère de bon placement relatif de rayon ρ_η . Alors le système de contraintes d'interpolation est inversible. La norme de la matrice inverse dans la sous-famille des ondelettes originale est majorée par Mj_{\max}/η où j_{\max} est la plus grande résolution qui apparaît dans la sous famille I . La norme de la matrice inverse dans la base des ondelettes relocalisées est bornée par M/η , c'est-à-dire par une constante.

Démonstration. On va montrer que la matrice du système de contraintes dans la base relocalisée est à diagonale dominante avec une marge de η .

Considérons un couple d'allocation constitué d'un point de mesure \mathbf{x} et d'une ondelette (j, \mathbf{k}) . Soit j_M le plus grand indice j' tel que

$$\exists \mathbf{k}' \in \Lambda_{j'} : \|2^{j'} \mathbf{x} - \mathbf{k}'\|_\infty \leq p$$

Soit (j_M, \mathbf{k}_M) une ondelette correspondante. Par application du critère de bon placement relatif à l'ondelette (j_M, \mathbf{k}_M) , nous pouvons affirmer que

$$j' < j_M \text{ et } \|2^{j'} \mathbf{x} - \mathbf{k}'\|_\infty \leq p \Rightarrow (j', \mathbf{k}') \in I$$

Nous pouvons montrer que les seules ondelettes relocalisées qui sont susceptibles d'avoir une valeur non nulle en \mathbf{x} sont les ondelettes $\varphi_{j'\mathbf{k}'}$ telles que $\|\mathbf{k}' - 2^{j'} \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty \leq p$, et qu'alors

leur résolution j' est au plus j_M . Nous pouvons déjà exclure les ondelettes de résolution supérieure à j_M . Pour les autres, on note

$$S = \{\mathbf{k}' \in \Lambda_{j_M-1} : \|\mathbf{k}' - \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty \leq p\}$$

Si donc $j' < j_M$, une ondelette $\phi_{j'\mathbf{k}'}$ relocalisée jusqu'à l'échelle $j_M - 1$ que nous avons noté $\phi_{j'\mathbf{k}';j_M-1}$ dans la définition de la relocalisation s'écrit comme combinaison linéaire

$$\begin{aligned} \phi_{j'\mathbf{k}';j_M-1} &= \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} c_\kappa \phi_{j_M-1,\kappa} \\ \phi_{j'\mathbf{k}';j_M-1}(\nu_{j''\mathbf{k}''}) &= 0 && \text{si } j'' < j_M \text{ et } (j'', \mathbf{k}'') \neq (j, \mathbf{k}) \\ \phi_{j'\mathbf{k}';j_M-1}(\nu_{j\mathbf{k}}) &= 1 && \text{si } j < j_M \end{aligned}$$

En effectuant la relocalisation jusqu'à la résolution j_M , on obtient que les fonctions $\phi_{j'\mathbf{k}';j_M}$ coïncident sur l'hypercube $H = \{\nu_{j\mathbf{k}}\} + 2^{-j}[-1/2; 1/2]^d$ avec

$$\begin{cases} \phi_{0\mathbf{k}'}^S(2^{j_M-1}\cdot) & \text{si } j' < j_M \text{ et } \|2^{j_M-1}\nu_{j'\mathbf{k}'} - \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty \leq p \\ 0 & \text{si } j' < j_M \text{ et } \|2^{j_M-1}\nu_{j'\mathbf{k}'} - \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty > p \\ \phi_{1\mathbf{k}'}(2^{j_M-1}\cdot) & \text{si } j' = j_M \end{cases}$$

Les relocalisations suivantes n'affectent plus la valeur des ondelettes sur l'hypercube H , parce que les ondelettes correctives $(\phi_{j'\mathbf{k}'})_{\mathbf{k}' \in K_{j'}, j' > j_M}$ sont nulles sur l'hypercube H . On peut donc dire pour conclure que $\varphi_{j'\mathbf{k}'}$ coïncide sur H avec la fonction

$$\begin{cases} \phi_{0\mathbf{k}'}^S(2^{j_M-1}\cdot) & \text{si } j' < j_M \text{ et } \|2^{j_M-1}\nu_{j'\mathbf{k}'} - \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty \leq p \\ 0 & \text{si } j' < j_M \text{ et } \|2^{j_M-1}\nu_{j'\mathbf{k}'} - \nu_{j\mathbf{k}}\|_\infty > p \\ \phi_{1\mathbf{k}'}(2^{j_M-1}\cdot) & \text{si } j' = j_M \\ 0 & \text{si } j' > j_M \end{cases}$$

Le critère de bon placement relatif étant vérifié pour $\phi_{j_M\mathbf{k}_M}$ avec le rayon ρ_η , on peut déduire que

$$|\varphi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x})| \geq \eta + \sum_{\substack{(j', \mathbf{k}') \neq (j, \mathbf{k}) \\ \mathbf{k}' \in \Lambda_{j'}}} |\varphi_{j'\mathbf{k}'}(\mathbf{x})|$$

Comme on peut écrire cette relation pour tous les couples ondelette / mesure, on en déduit que la matrice du système des contraintes linéaires dans la base relocalisée est à diagonale dominante à marge η .

La matrice du système est donc inversible, et la norme opératorielle de son inverse est majorée par un certain M_1/η . Comme la norme de la matrice de passage de la base relocalisée à la base d'ondelettes d'origine est inférieure à $M_2 j_{\max}$, on peut majorer la norme de la matrice inverse du système dans la sous-famille d'ondelettes d'origine par $M j_{\max}/\eta$ (avec $M = M_1 M_2$). Il faut bien préciser ici que le facteur M dépend de la famille d'ondelettes considérée, mais ne dépend pas du nombre de mesures pris en compte (ni donc de la taille de la matrice du système des contraintes linéaires). \square

Nous allons donner un deuxième résultat de stabilité pour majorer la norme L^∞ de l'interpolant en fonction de la norme ℓ^∞ de la famille des mesures y_n . Nous allons utiliser pour cela le lemme suivant :

Lemme 8.2

Soit une i une allocation d'une famille de points de mesure (\mathbf{x}_n) dans une base d'ondelette qui vérifie le critère de bon placement relatif. Soit $(\varphi_{j\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \Lambda_j}$ la famille d'ondelettes relocalisées associées. Alors

- les ondelettes relocalisées $\varphi_{j\mathbf{k}}$ sont bornées par un majorant φ_{\max} qui est indépendant de la sous-famille allouée ;
- pour tout point \mathbf{x} fixé, le nombre d'ondelettes relocalisées qui prennent une valeur non nulle en \mathbf{x} est borné par un entier N_{\max} indépendant du nombre de points de mesure.

Démonstration. La preuve se fait de manière similaire à la preuve de stabilité ci-dessus. Pour montrer le premier point, on prend une ondelette quelconque de la famille relocalisée, et on montre qu'elle peut s'écrire comme une forme contractée d'une ondelette $\phi_{0\mathbf{k}}^S$.

Soit $\varphi_{j\mathbf{k}}$ une ondelette relocalisée. Soit

$$j_M = \max\{j' : \exists \mathbf{k}' \in \Lambda_{j'} \text{ tel que } \|2^{j'} \nu_{j\mathbf{k}} - \mathbf{k}'\|_\infty \leq 2p\}$$

Par l'application du critère de bon placement relatif, on peut montrer par une récurrence élémentaire que pour tout $j' \in \{0 \dots j_M - 1\}$, on a

$$|2^{j'} \nu_{j\mathbf{k}} - \mathbf{k}'| \leq 2p \Rightarrow (j', \mathbf{k}') \in I$$

Dans ce cas, l'ondelette $\phi_{j\mathbf{k}}$ relocalisée jusqu'à l'échelle $j_M - 1$ s'écrit

$$\phi_{j\mathbf{k}; j_M - 1} = \phi_{j_M - 1, 2^{j_M - 1 - j} \mathbf{k}}$$

Comme cette ondelette a son support dans l'hypercube $H = \nu_{j\mathbf{k}} + 2^{-j}[-p; p]^d$, on voit alors que $\varphi_{j\mathbf{k}}$ peut s'écrire

$$\varphi_{j\mathbf{k}} = \phi_{0\mathbf{k}}^{S'}(2^j \cdot)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_{0\mathbf{k}}^{S'}(\mathbf{x}) &= \phi_{0\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}' \in S'} \phi_{0\mathbf{k}}(\mathbf{k}'/2) \phi_{1\mathbf{k}'} \\ S' &= \{\mathbf{k}' \in \Lambda_{j_M} : \|\mathbf{k}' - \mathbf{k}\|_\infty \leq 2p\} \end{aligned}$$

Les fonctions $\phi_{0\mathbf{k}}^{S'}$ qui peuvent ainsi être obtenues sont en nombre fini, et sont donc uniformément bornées par φ_{\max} . Les fonctions relocalisées sont donc uniformément bornées par le même φ_{\max} .

Le deuxième point se montre en reprenant exactement la preuve du théorème précédent. On peut montrer que le nombre de fonctions relocalisées qui prennent une valeur non nulle en un point donné \mathbf{x} est majoré par $2 \times (2p + 2)^d$. \square

Théorème 8.7

Sous les hypothèses du théorème précédent, la norme L^∞ de l'interpolant $\|f\|_\infty$ est bornée par

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{M \sup_n |y_n|}{\eta} \quad (8.14)$$

Démonstration. La fonction interpolante obtenue f s'écrit

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in K_j} c_{j\mathbf{k}} \varphi_{j\mathbf{k}}$$

D'après le théorème précédent, on peut écrire

$$|c_{j\mathbf{k}}| \leq \frac{M}{\eta} \sup_n |y_n|$$

Comme les fonctions relocalisées sont bornées (par φ_{\max}) et que pour tout $\mathbf{x} \in D$, le nombre des ondelettes relocalisées qui ne s'annulent pas en \mathbf{x} est également borné (par N_{\max}), on obtient

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{M \varphi_{\max} N_{\max}}{\eta} \sup_n |y_n|$$

□

Remarque

Les théorèmes ci-dessus ont formellement été montrés pour des ondelettes définies sur le domaine \mathbb{R}^d tout entier. Ils peuvent néanmoins être étendus à un domaine borné de la forme $[0,1]^d$. Les notations et définitions (notamment du rayon de dominance absolue) doivent être adaptées, ce qui les rend substantiellement plus complexes, mais tous les arguments donnés sont transposables. Nous l'admettrons pour la suite de l'exposé.

8.5.3 Vitesse de convergence de l'approximation

Les hypothèses des théorèmes ci-dessus s'expriment en termes d'allocations de mesures dans une base d'ondelettes qui sont censées vérifier un critère de bon placement relatif.

Dans cette section, nous allons montrer que ce critère de bon placement relatif est vérifié pour un sous-arbre de n'importe quelle profondeur pourvu que la densité des points de mesure soit suffisante. Dans un deuxième temps, nous donnerons des résultats d'approximation asymptotiques pour le schéma d'interpolation irrégulière que nous venons de décrire.

Existence d'allocations vérifiant le critère de bon placement relatif

Soit une famille de points $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Si la largeur de maille de cette famille de points est suffisamment petite, on peut prouver l'existence d'une sous-allocation de profondeur

minimale qui vérifie le critère de bon placement relatif. Nous allons tout d'abord poser quelques définitions que nous avons omises jusqu'alors.

Définition 8.15 (Sous-allocation)

Soit une allocation i d'une famille de points de mesure \mathcal{X} dans une base d'ondelette $\mathcal{B} = (\phi_{j\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in K_j}$. Un couple (\mathcal{X}', i') est une sous-allocation de i si

$$\begin{aligned} \mathcal{X}' &\subset \mathcal{X} \\ i|_{\mathcal{X}'} &= i' \end{aligned}$$

On pourra tout d'abord vérifier que si i est une allocation optimale, alors i' en est également une.

Définition 8.16

La **profondeur** d'une allocation ou d'une sous-allocation est le plus grand j tel que $\Lambda_j = K_j$.

Cette définition n'a de sens (dans le cas d'un nombre de points de mesure fini) que si le domaine est borné (par exemple $[0,1]^d$ et pas \mathbb{R}^d).

Définition 8.17 (Maille maximale)

La maille maximale d'un ensemble de points de mesure est le réel $h(\mathcal{X})$ défini par

$$h(\mathcal{X}) = \max_{\mathbf{x} \in D} \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_{\infty} \quad (8.15)$$

On peut montrer que si la maille maximale d'un ensemble de points de mesures est inférieure à $\rho_{\eta} 2^{-j}$ alors la profondeur de la plus grande sous-allocation qui vérifie le critère de bon placement relatif sera supérieure ou égale à j .

Nous pouvons maintenant énoncer toute une série de théorèmes pour estimer le taux de convergence de l'approximation de la fonction.

Approximation de fonctions continues

On peut montrer un premier théorème de convergence qui s'applique à des fonctions qui sont seulement continues.

Théorème 8.8

Soit f une fonction continue de $[0,1]^d$ dans un espace vectoriel F normé. On note $f_{\mathcal{X}}$ la fonction obtenue par interpolation irrégulière sur la base des mesures $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$. Alors quand la maille maximale $h(\mathcal{X})$ tend vers 0, $f_{\mathcal{X}}$ tend uniformément vers f .

Démonstration. On utilise comme marchepied le théorème d'approximation de fonctions continues dans une base d'ondelettes d'interpolation que nous rappelons : si f est continue sur $[0,1]^d$, alors la troncature jusqu'à une échelle j du développement de f dans la base

d'ondelettes d'interpolation converge uniformément vers f :

$$f_j = \sum_{\substack{\mathbf{k}' \in K_{j'} \\ j' \leq j}} \langle f, \tilde{\phi}_{j'\mathbf{k}'} \rangle \phi_{j'\mathbf{k}'}$$

$$\|f - f_j\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } j \rightarrow +\infty$$

On applique alors le théorème de stabilité à la différence $f - f_j$. Soit $\epsilon > 0$. Pour j assez grand,

$$\|f - f_j\|_{L^\infty} \leq \epsilon$$

On note $f_{j,\mathcal{X}}$ l'interpolant obtenu à partir des points de mesure $(\mathbf{x}, f_j(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$. Pour une maille maximale assez petite, la plus grande sous-allocation de \mathcal{X} qui vérifie la critère de bon placement relatif contient toutes les ondelettes d'échelle inférieure à j . Dans ce cas, on peut montrer aisément que $f_{j,\mathcal{X}} = f_j$ par unicité de la solution du problème d'interpolation. On a alors

$$\begin{aligned} \|f_{\mathcal{X}} - f\|_{L^\infty} &\leq \|f_{\mathcal{X}} - f_j\|_{L^\infty} + \|f_j - f\|_{L^\infty} \\ &= \|f_{\mathcal{X}} - f_{j,\mathcal{X}}\|_{L^\infty} + \|f_j - f\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{M}{\eta} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})| + \|f_j - f\|_{L^\infty} \\ &\leq \left(\frac{M}{\eta} + 1 \right) \epsilon \end{aligned}$$

et l'erreur L^∞ tend donc vers 0. \square

Nous voyons que les hypothèses de ce théorème sur la fonction f pour obtenir la convergence uniforme sont minimalistes. On ne pouvait exiger moins de f qu'elle soit continue. Si la fonction f est discontinue, la convergence uniforme ne peut pas avoir lieu.

Nous abordons maintenant le cas de fonctions plus régulières pour lesquelles nous pouvons avoir une estimation explicite du taux de convergence.

Théorème 8.9

Soit f une fonction définie de $[0,1]^d$ dans un espace vectoriel normé F qui est uniformément LIPSCHITZ- α sur $[0,1]^d$ pour un exposant $\alpha > 0$ donné. On peut alors montrer la majoration suivante de l'erreur d'interpolation (en reprenant les notations du théorème précédent) :

$$\|f_{\mathcal{X}} - f\|_{L^\infty} \leq Mh(\mathcal{X})^\alpha \quad (8.16)$$

qui est vraie dès que l'ondelette d'interpolation duale a au moins $\lfloor \alpha + 1 \rfloor$ moments nuls.

Démonstration. On utilise la même approche que précédemment. On utilise un marchepied qui est l'approximation uniforme d'une fonction par des ondelettes jusqu'à une échelle j . Si une fonction est uniformément LIPSCHITZ- α et si l'ondelette duale a au moins $\lfloor \alpha + 1 \rfloor$ moments nuls, alors les coefficients d'ondelettes vérifient :

$$\langle f, \tilde{\phi}_{j\mathbf{k}} \rangle = \mathcal{O}(2^{-\alpha j})$$

et on a donc

$$\|f - f_j\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(2^{-\alpha j})$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|f - f_{\mathcal{X}}\|_\infty &\leq \|f - f_j\|_\infty + \|f_j - f_{\mathcal{X}}\|_\infty \\ &= \|f - f_j\|_\infty + \|f_{j,\mathcal{X}} - f_{\mathcal{X}}\|_\infty \\ &= \mathcal{O}(2^{-\alpha j}) \end{aligned}$$

par application du théorème 8.7 à la différence $f_j - f$, et on obtient ainsi la majoration annoncée de l'erreur. \square

Ces résultats peuvent déjà être l'objet d'une première comparaison avec les propriétés de la régularisation mentionnée en 7.6.2. On note que la vitesse de convergence est défini comme le minimum entre la régularité LIPSCHITZ de la fonction et le nombre de moments nuls de l'ondelette duale. Quelle que soit la situation, la norme de la matrice inverse du système dans la base d'ondelettes (non relocalisée) est majorée par un certain Mj/η où η est la marge de dominance choisie.

Par comparaison, la régularisation impose que la régularité LIPSCHITZ- α de la fonction à estimer soit connue avec le plus de précision possible. Si la régularité est sous-estimée par un terme β , on n'obtient qu'un taux de convergence de l'ordre h^β (ce qui est une situation comparable avec celle de notre algorithme). Si en revanche β est plus que α , la régularisation échoue (les coefficients de la solution explosent) alors que notre approche converge avec le meilleur ordre possible : en $h(\mathcal{X})^\alpha$.

8.5.4 Théorèmes d'approximation non uniforme

Dans cette section, nous allons montrer des théorèmes selon lesquels l'approximation dépend localement de la régularité de la fonction. Ceci nous permettra incidemment de prouver des résultats de convergences plus faibles pour des fonctions qui sont discontinues.

Pour cela, nous devons revenir sur le théorème de stabilité 8.4. Ce théorème nous fournit une majoration uniforme des composantes d'un vecteur x vérifiant $Ax = y$ en fonction d'une majoration uniforme des coefficients de y . Le théorème nous dit en effet que

$$\|x\|_\infty \leq \frac{M}{\eta} \|y\|_\infty$$

si la matrice A est continue à diagonale dominante à marge de η . Si nous voulons produire des résultats qui donne une estimation locale de l'erreur, nous devons tout d'abord affiner le résultat ci-dessus pour avoir une majoration locale, de la forme :

$$|x_i| \leq \frac{M}{\eta} |y_i|$$

Malheureusement, une majoration aussi simple n'a de chances d'avoir lieu que si la matrice A est diagonale.

Nous allons considérer un cas d'une simplicité extrême, mais qui nous permettra de voir comment une telle majoration peut se faire. Supposons que y est défini par $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $y_i = \delta_{i,0}$. Supposons également que la matrice soit de diagonale 1 : $a_{ii} = 1 \forall i$. La matrice $I - A$ a donc une norme opératorielle inférieure à $1 - \eta$. De plus, A est une matrice bande de largeur $2p + 1$:

$$|i - j| > p \Rightarrow a_{ij} = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}y \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (I - A)^k y \end{aligned}$$

La matrice $(I - A)^k$ est une matrice bande de largeur $2kp + 1$, et de norme opératorielle bornée par $(1 - \eta)^k$. Donc $(I - A)^k y$ est supporté sur $\{-kp, \dots, kp\}$ et est borné par $(1 - \eta)^k$. On obtient la majoration locale des coefficients du vecteur x :

$$\begin{aligned} |x_i| &\leq \sum_{kp \geq |i|} (1 - \eta)^k \\ &\leq \frac{(1 - \eta)^{|i|/p}}{\eta} \end{aligned}$$

Le vecteur x peut donc être de support infini, mais ses coefficients ont une décroissance exponentielle. C'est un résultat similaire que nous aurons pour l'approximation de fonction de régularité non uniforme. Une singularité localisée aura sur l'erreur d'estimation de la fonction une influence sensible sur tout le domaine d'approximation, mais d'intensité décroissant exponentiellement avec la distance à la singularité.

Décroissance de l'impact des singularités

Nous allons introduire pour cela les définitions suivantes. On se donne une allocation qui vérifie le critère de bon placement relatif avec un rayon de ρ_η . La matrice du système est donc à diagonale dominante avec une marge de η . On note

$$j_b = \max\{j \leq 0 : K_j = \Lambda_j\} \quad (8.17)$$

c'est à dire que l'allocation a rempli tous les niveaux jusqu'à l'échelle j_b incluse.

On note l'ensemble des centres d'ondelettes sélectionnées

$$\mathcal{N} = \{\nu_{j\mathbf{k}} : j \geq 0 \text{ et } \mathbf{k} \in \Lambda_j\} \quad (8.18)$$

On rappelle que la correspondance entre centres et ondelettes est biunivoque, car

$$\left. \begin{array}{l} \nu_{j\mathbf{k}} = \nu_{j'\mathbf{k}'} \\ \mathbf{k} \in K_j \\ \mathbf{k}' \in K_{j'} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = j' \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}' \end{array} \right.$$

On peut donc identifier les couples (j, \mathbf{k}) (avec $\mathbf{k} \in K_j$) et les centres $\nu_{j\mathbf{k}}$. On note donc ϕ_ν l'ondelette de centre ν et \mathbf{x}_ν le point de mesure qui a été alloué à cette ondelette.

La matrice du système A dans la base des ondelettes relocalisées est donc de terme général $a_{\nu\nu'}$ où

$$a_{\nu\nu'} = \varphi_\nu(\mathbf{x}_{\nu'})$$

Définition 8.18 (Centres adjacents)

On dit que deux centres d'ondelettes $\nu, \nu' \in \mathcal{N}$ sont adjacents si

$$a_{\nu\nu'} \neq 0 \text{ où } a_{\nu'\nu} \neq 0$$

et on note cette relation $\nu \leftrightarrow \nu'$.

Si $\nu = \nu'$ alors $\nu \leftrightarrow \nu'$, car la matrice A n'a pas de coefficient diagonal nul.

Définition 8.19 (Temps de parcours)

On dit que le temps de parcours entre deux centres ν et ν' est $t \in \mathbb{N}$ si il existe une suite de centres adjacents qui les joint, c'est à dire s'il existe une suite de centres ν_0, \dots, ν_t tels que

$$\begin{aligned} \nu_k &\leftrightarrow \nu_{k+1} && \text{pour } k = 0 \dots t-1 \\ \nu_0 &= \nu \\ \nu_t &= \nu' \end{aligned}$$

et il n'est pas de suite ayant les mêmes propriétés pour un t plus petit. On note ce temps de parcours $t_{\nu\nu'}$.

Le temps de parcours entre deux centres est ainsi

- nul s'ils sont égaux
- égal à 1 s'ils sont adjacents et différents.

Cette définition dépend de l'allocation et de la matrice du système (et donc des ondelettes d'interpolation choisies).

Nous allons montrer une première proposition qui nous permet de lier temps de parcours et distance réelle :

Proposition 8.2

Soit une allocation qui vérifie le critère de bon placement relatif de rayon ρ_η , et soit j_b la résolution définie en (8.17). On suppose également que l'ondelette d'interpolation d'échelle 0 a un support inclus dans $[-p, p]^d$. Le temps de parcours entre deux centres ν et ν' est alors minoré par

$$t_{\nu\nu'} \geq 2^{j_b} \frac{\|\nu - \nu'\|_\infty}{p + 1}$$

Démonstration. Nous n'allons pas donner une preuve détaillée, mais seulement ses éléments principaux. On utilise le fait que les ondelettes de la base relocalisée peuvent s'écrire comme

des ondelettes de l'échelle j_b relocalisées et ont donc un support inclus dans un hypercube $\nu + [-p2^{-j_b}, p2^{-j_b}]^d$. Par suite deux centres ν et ν' ne peuvent être adjacents que si leur distance est inférieure à $(p+1)2^{-j_b}$:

$$\nu \leftrightarrow \nu' \Rightarrow \|\nu - \nu'\|_\infty \leq (p+1)2^{-j_b}$$

En itérant cette propriété, on obtient

$$t_{\nu\nu'} \geq 2^{j_b} \frac{\|\nu - \nu'\|_\infty}{p+1}$$

□

Soit $(y_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ un vecteur de support $S \subset \mathcal{N}$ et de norme $\|y\|_\infty = 1$. Notons c le vecteur $c = A^{-1}y$. La proposition qui suit va nous permettre de majorer séparément les coefficients c_ν . Pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, on note

$$d(\nu, S) = \inf_{\nu' \in S} \|\nu - \nu'\|_\infty$$

Proposition 8.3

On pose

$$a^+ = \sup_i a_{ii}$$

$$a^- = \inf_i a_{ii}$$

et on a alors

$$|c_\nu| \leq \frac{\|y\|_\infty a^+}{\eta a^-} \exp\left(-\frac{2^{j_b} d(\nu, S)}{p+1} \ln\left(\frac{1}{1 - \eta/a^+}\right)\right)$$

Démonstration. On définit la matrice D qui est constituée des coefficients diagonaux de A . Son terme général s'écrit

$$d_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} \delta_{\nu\nu'}$$

Cette matrice est inversible. On note

$$B = D^{-1}A$$

La matrice B a maintenant une diagonale de 1 : $b_{ii} = 1$ et est à diagonale dominante à marge de η/a^+ . Il faut remarquer que si dans le cas de la base de Schauder, les ondelettes avaient des valeurs majorées par 1, ce n'est plus cas quand l'ordre d'approximation est supérieur et que l'on utilise une construction sur un domaine borné. Dans ce cas, certaines ondelettes de bord prennent des valeurs supérieures à 1 par des effets de « rebonds ». Comme dans la preuve du théorème 8.4, on sait que la matrice $I - B$ a une norme opératorielle inférieure à $1 - \eta/a^+$, ce qui garantit qu'elle est inversible.

De la même manière que dans la preuve du théorème 8.4, on peut écrire

$$c = \sum_{k=0}^{+\infty} (I - B)^k D^{-1}y$$

On note c^k le vecteur

$$c^k = (I - B)^k D^{-1}y$$

On peut majorer la norme ℓ^∞ de c^k par

$$\|c^k\|_\infty \leq \frac{1}{a^-} \left(1 - \frac{\eta}{a^+}\right)^k \|y\|_\infty$$

Par ailleurs, un coefficient c_ν^k de ce vecteur ne peut être non nul que si le temps d'accès de ν à un point de S est inférieur à k :

$$\begin{aligned} c_\nu^k \neq 0 &\Rightarrow \exists \nu' \in S : t_{\nu\nu'} \leq k \\ &\Rightarrow d(\nu, S) \leq 2^{-j_b}(p+1)k \end{aligned}$$

On obtient alors les deux propriétés :

$$\begin{aligned} |c_\nu^k| &\leq \frac{1}{a^-} \left(1 - \frac{\eta}{a^+}\right)^k \|y\|_\infty \\ c_\nu^k &= 0 \quad \text{si } d(\nu, S) > 2^{-j_b}(p+1)k \end{aligned}$$

dont on tire

$$\begin{aligned} |c_\nu| &\leq \sum_{k \geq 2^{j_b} d(\nu, S) / (p+1)} \frac{1}{a^-} \left(1 - \frac{\eta}{a^+}\right)^k \|y\|_\infty \\ &\leq \frac{\|y\|_\infty a^+}{\eta a^-} \exp\left(-\frac{2^{j_b} d(\nu, S)}{p+1} \ln\left(\frac{1}{1 - \eta/a^+}\right)\right) \end{aligned}$$

□

En groupant sous une dénomination générique toutes les constantes qui dépendent de paramètres choisis a priori comme p , η , ρ_η , la dimension de l'espace, on obtient une majoration des coefficients de c qui est

$$|c_\nu| \leq M \|y\|_\infty \exp(-M' 2^{j_b} d(\nu, S))$$

Nous pouvons maintenant transformer ce théorème en théorème de majoration locale de la fonction interpolante en fonction de la fonction source de points de mesure.

Théorème 8.10

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de D , et soit f une fonction bornée de support inclus dans Ω . Pour tout ensemble de points de mesures \mathcal{X} , on note $f_{\mathcal{X}}$ la fonction interpolante obtenue

par interpolation sur les mesures $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$. On note comme précédemment la maille maximale de \mathcal{X} :

$$h(\mathcal{X}) = \max_{\mathbf{x} \in D} \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_\infty$$

Alors on a la majoration

$$|f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M e^{-M' d(\mathbf{x}, \Omega)/h(\mathcal{X})} \|f\|_\infty$$

Démonstration. On pose $j = \ln(h(\mathcal{X})/\rho_\eta)/\ln 2$. Le sous-arbre des coefficients qui vérifient le critère de bon placement relatif contient alors tous les coefficients d'ondelettes jusqu'à l'échelle j incluse. Soit \mathbf{x} un point du domaine, au plus N_{\max} ondelettes relocalisée prennent une valeur non nulle en \mathbf{x} . Soit

$$N = \{(j, \mathbf{k}) : \phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

l'ensemble des indices correspondants. On a alors

$$(j, \mathbf{k}) \in N \Rightarrow d(\nu_{j\mathbf{k}}, S) \leq d(\mathbf{x}, S) + h(\mathcal{X})$$

et

$$d(\nu_{j\mathbf{k}}, S) \leq d(\nu_{j\mathbf{k}}, \Omega) + h(\mathcal{X})$$

et par application de la proposition 8.3

$$\Rightarrow c_{j\mathbf{k}} \leq M e^{-M' d(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})} \|f\|_\infty$$

On obtient donc

$$|f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq N_{\max} \varphi_{\max} M e^{-M' d(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})} \|f\|_\infty$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Ce dernier théorème nous permet maintenant de trouver une majoration locale de l'erreur d'interpolation d'une fonction de régularité non uniforme.

Théorème 8.11

Soit une fonction f définie sur le domaine $D = [0, 1]^d$. On suppose que cette fonction est uniformément LIPSCHITZ- α sur le domaine D privé du support S d'une singularité au voisinage duquel la fonction n'est qu'uniformément LIPSCHITZ- β , avec $\beta < \alpha$. Soit un ensemble fini de points de mesure \mathcal{X} , et soit $f_{\mathcal{X}}$ l'interpolant obtenu par interpolation des mesures $(\mathbf{x}_n, f(\mathbf{x}_n))$ sélectionnées par allocation et extraction du plus grand sous-arbre qui vérifie le critère de bon placement relatif. On a alors la majoration d'erreur :

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M_1 h(\mathcal{X})^\alpha + M_2 h(\mathcal{X})^\beta e^{-M_3 d(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})}$$

On peut ainsi voir que si l'on est loin de la zone singulière, l'erreur décroît en $h(\mathcal{X})^\alpha$, et sur la zone singulière, l'erreur décroît en $h(\mathcal{X})^\beta$. Près de la zone singulière, l'erreur due à la présence de la singularité diffuse autour de singularité, avec une intensité qui décroît exponentiellement avec la distance à la singularité. La portée de cet influence est proportionnelle à la maille maximale, et donc tend vers 0 quand $h(\mathcal{X}) \rightarrow 0$.

Démonstration. La preuve repose essentiellement sur le théorème 8.10. Quand la maille maximale de l'ensemble de points de mesure $h(\mathcal{X})$ tend vers 0, le plus grand sous-arbre qui vérifie le critère de bon placement relatif construit par allocation contient toutes les ondelettes jusqu'à la résolution $j = \ln(h(\mathcal{X})/\rho_\eta)/\ln 2$ (qui tend vers l'infini quand la maille maximale tend vers 0).

On note f_j le développement de la fonction f sur la base d'interpolation tronqué aux échelles allant de 0 à j :

$$f_j = \sum_{\substack{j' \leq j \\ \mathbf{k}' \in K_{j'}}} \langle f, \tilde{\phi}_{j', \mathbf{k}'} \rangle \phi_{j', \mathbf{k}'}$$

Comme les ondelettes $\phi_{j, \mathbf{k}}$ et $\tilde{\phi}_{j, \mathbf{k}}$ ont des supports respectifs $2^{-j}(\mathbf{k} + [-p, p]^d)$ et $2^{-j}(\mathbf{k} + [-q, q]^d)$ les hypothèses faites sur la régularité de la fonction f impliquent que l'on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})| \leq M_1 h(\mathcal{X})^\alpha + M_2 h(\mathcal{X})^\beta 1_{(d(\mathbf{x}, \Omega) < (p+q)2^j)} \quad (8.19)$$

On note maintenant $f_{j, \mathcal{X}}$ la fonction obtenue par interpolation avec les mesures $(\mathbf{x}_n, f_j(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$. Comme la maille maximale est inférieure à $\rho_\eta 2^{-j}$, on a $f_{j, \mathcal{X}} = f_j$ par unicité de la solution du système d'interpolation. On peut alors écrire :

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})| + |f_j(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \quad (8.20)$$

Le premier terme pourra être majoré par l'équation (8.19). Pour le deuxième, on décompose le terme d'erreur $f_j - f$ de manière brutale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_j - f &= (f_j - f) 1_{(d(\mathbf{x}, S) \geq (p+q)2^j)} + (f_j - f) 1_{(d(\mathbf{x}, S) < (p+q)2^j)} \\ &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

On rappelle que la notation $g_{\mathcal{X}}$ désigne le produit de l'application de l'algorithme d'interpolation aux échantillons $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$. On déduit de l'équation ci-dessus que

$$\begin{aligned} |f_j(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| &= |f_{j, \mathcal{X}}(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \\ &\leq |e_{1, \mathcal{X}}(\mathbf{x})| + |e_{2, \mathcal{X}}(\mathbf{x})| \end{aligned} \quad (8.21)$$

Or comme

$$|e_1(\mathbf{x})| \leq M_1 h(\mathcal{X})^\alpha$$

on a par application du théorème 8.9

$$|e_{1, \mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M'_1 h(\mathcal{X})^\alpha \quad (8.22)$$

et comme enfin e_2 a pour support $\{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, S) < (p+q)2^j\}$ et est uniformément bornée par

$$|e_2(\mathbf{x})| \leq M_2 h(\mathcal{X})^\beta$$

on obtient par application du théorème 8.10

$$|e_{2,\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M_2' h(\mathcal{X})^\beta e^{-Md(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})} \quad (8.23)$$

On obtient par (8.21) et par les deux majorations (8.22) et (8.23)

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M_1' h(\mathcal{X})^\alpha + M_2' h(\mathcal{X})^\beta e^{-Md(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})}$$

On obtient finalement par (8.19) et (8.20) la majoration

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M_1'' h(\mathcal{X})^\alpha + M_2'' h(\mathcal{X})^\beta e^{-Md(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})}$$

et la preuve est terminée. \square

A titre de corollaire, nous pouvons montrer un résultat de convergence pour des fonctions continues par morceaux. Considérons une fonction continue sur un ouvert Ω_1 et un ouvert Ω_2 tels que $D - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ soit de mesure nulle. Nous supposons de plus que la fonction est bornée sur tout le domaine de définition. Nous pouvons alors prouver que la fonction $f_{\mathcal{X}}$ tend vers f en norme L_p pour tout $p > 1$.

Pour simplifier la preuve, nous supposons que la fonction est uniformément LIPSCHITZ α sur Ω_1 et Ω_2 pour un $\alpha > 0$ quelconque. Dans ce cas, il suffit d'appliquer le théorème 8.11 à cette fonction. On obtient :

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})| \leq M_1 h(\mathcal{X})^\alpha + M_2 h(\mathcal{X})^0 e^{-Md(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})}$$

ce qui donne par intégration et l'inégalité triangulaire de MINKOWSKI

$$\|f - f_{\mathcal{X}}\|_{L_p} \leq M_1' h(\mathcal{X})^\alpha + M_2 \left(\int_D e^{-Mpd(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})} d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

Le premier terme de droite $M_1' h(\mathcal{X})^\alpha$ tend vers 0 quand $h(\mathcal{X})$ tend vers 0. Le deuxième terme est majoré de la manière suivante :

$$\int_D e^{-Mpd(\mathbf{x}, S)/h(\mathcal{X})} d\mathbf{x} \leq m \left(\{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, S) \leq \sqrt{h(\mathcal{X})}\} \right) + m(D) e^{-Mp/\sqrt{h(\mathcal{X})}}$$

et tend donc aussi vers 0, parce que S est de mesure nulle.

Ainsi, la convergence peut être obtenue pour des fonctions relativement peu régulières (qui ne sont pas nécessairement à variation bornées). La fonction caractéristique de l'intérieur du flocon de VON KOCH, par exemple, n'est pas à variations bornées, mais son interpolant converge en norme L_p vers elle. Pour reposer les yeux de lecteur fatigué par ces démonstrations abscones, nous représentons cette fonction en figure 8.8.

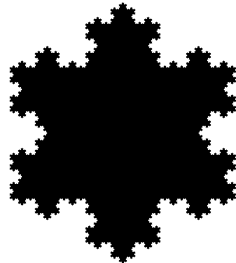


FIG. 8.8 – Fonction caractéristique du flocon de VON KOCH. Comme la dimension de HAUSDORFF du contour est strictement supérieure à 1 ($\log 4 / \log 3$ exactement), sa longueur est infinie, et la fonction ne peut pas être à variations bornées.

8.6 Exemples

L'algorithme décrit ci-dessus a été appliqué à des échantillons de la fonction régulière par morceaux suivante

$$f(x,y) = \sin\left(3\left|y - |x - 0.3| - 0.4\right|\right)$$

Les échantillons étaient au nombre de 10 000 et ont été tirés aléatoirement. Le critère de bon placement relatif en a conservé environ 800. Après construction de l'interpolant en ondelettes et troncature des coefficients d'ondelettes à un seuil de 10^{-2} , il reste 310 coefficients. Les points de mesure sont représentés en figure 8.9, avec la fonction originale, la fonction reconstituée, et la carte des erreurs. Les ondelettes sont des ondelettes de DESLAURIERS-DUBUC triadiques dont les ondelettes duales ont 4 moments nuls.

Interpolation d'une surface discontinue

La fonction discontinue f définie par

$$f(x_1, x_2) = 1_{(x_1+x_2 < 1,2)} (1 - x_1^2 - x_2^2) + 1_{(x_1+x_2 \geq 1,2)} (x_2^2 - 1)$$

a été estimée sur la base de 10 000 échantillons aléatoires placés dans le carré. L'ensemble de points de mesure est représenté en Fig. 8.10. Les résultats consignés dans cette figure montrent que l'interpolation a une précision qui dépend localement de la régularité de la fonction, et qu'elle n'est pas perturbée par la présence de singularités.

8.6.1 Décroissance de l'erreur avec le nombre de points de mesure

Dans cet exemple, nous avons pris une fonction de régularité LIPSCHITZ $\alpha = 1/2$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|\sin(4x - 1)|} \quad \text{pour } x \in [0,1]$$

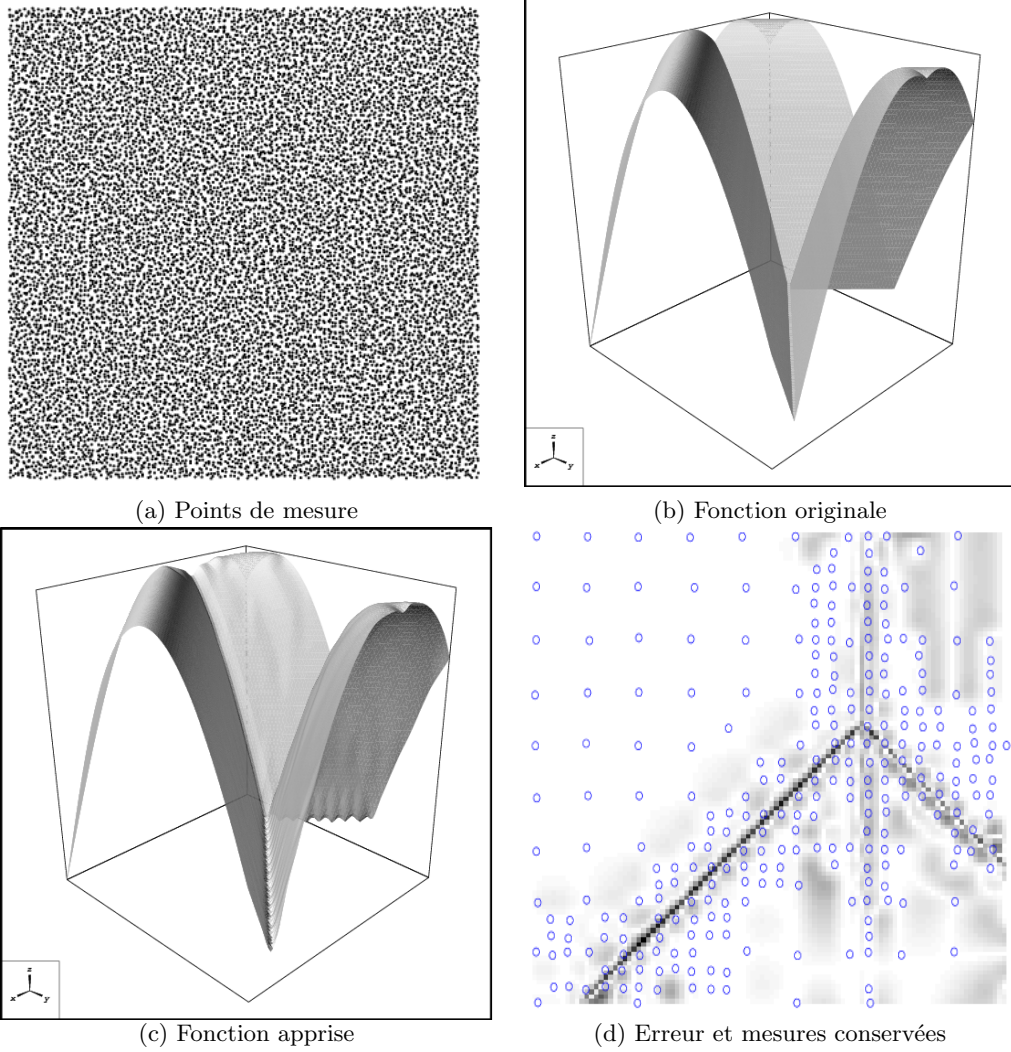


FIG. 8.9 – *Expérimentation numérique. Algorithme d'interpolation appliqué en dimension 2. En (a), les points de mesure aléatoires. En (b), la fonction originale. En (c) la fonction apprise. En (d), les points de mesure conservés après troncature de l'arbre des coefficients d'ondelette superposés avec la fonction d'erreur. On voit que les mesures conservées sont situées près des singularités.*

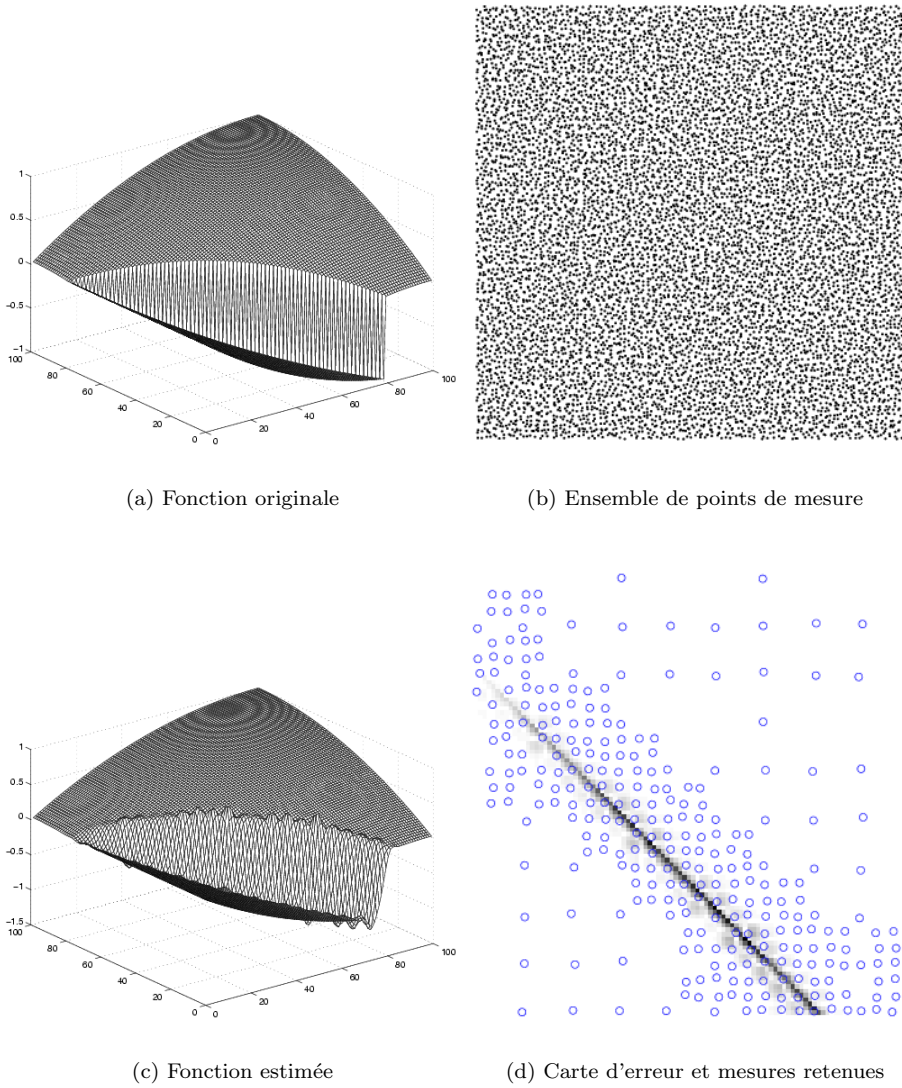


FIG. 8.10 – Interpolation d'une fonction discontinue. La principale différence que l'on peut voir entre la fonction originale et la fonction interpolée se situe sur la singularité où des effets de GIBBS apparaissent dans la fonction estimée. On peut remarquer que les mesures conservées sont concentrées autour de la singularité.

L'algorithme a été testé sur des nombres croissants d'échantillons aléatoires tiré selon une loi uniforme sur $[0,1]$. La norme L^∞ de l'erreur d'estimation est représentée en Fig.8.11. D'après les résultats énoncés ci-dessus, nous devons nous attendre à une décroissance en $h^{1/2}$. Comme par ailleurs la maille maximale h décroît proportionnellement à N^{-1} , on doit finalement avoir une erreur qui décroît en $N^{-1/2}$.

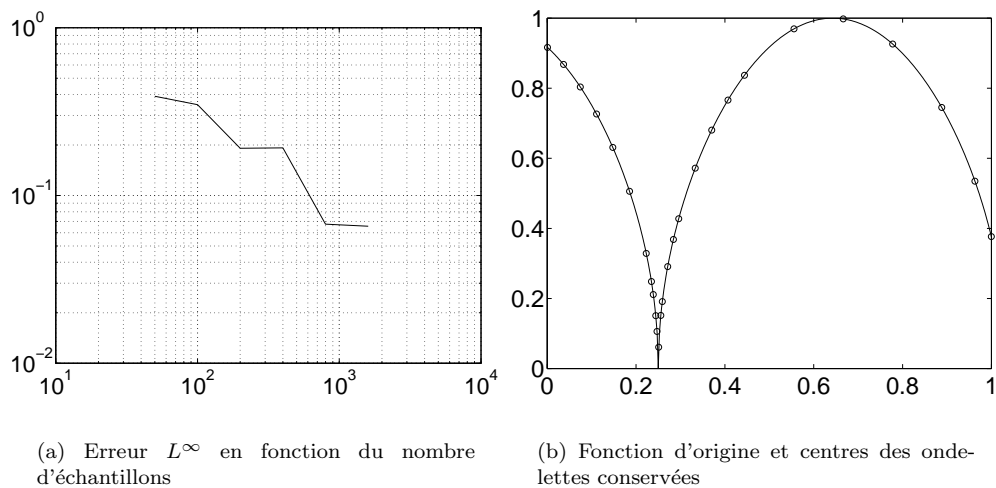


FIG. 8.11 – Approximation d'une fonction LIPSCHITZ-1/2. Le graphe de gauche représente la décroissance de l'erreur L^∞ en fonction du nombre d'échantillons. L'ordre de décroissance est en $N^{-1/2}$. À droite, la graphe de la fonction originale et les centres d'ondelettes retenues par l'algorithme après troncature.

8.7 Commentaires et perspectives

Dans cette section en forme de conclusion, nous rappelons quelles sont les propriétés clés de notre approche, et indiquons comment elle peut être étendue à une estimation de fonction sur la base de mesures bruitées.

8.7.1 Comparaison avec les autres méthodes

Par comparaison avec la régularisation, cette méthode permet à la fois d'obtenir un système de contraintes linéaires bien conditionné, et d'obtenir un taux de convergence qui dépend localement de la régularité de la fonction. Par comparaison avec les méthodes de maillages adaptatifs [DGS99, DR93], cette méthode a une formulation générique indépendante de la dimension d de l'espace de départ.

Elle a en revanche l'inconvénient de ne pas prendre en compte certaines mesures. À un prix peut-être élevé, la régularisation n'en ignore aucune. Ceci motivera des approches un peu différentes décrites dans le chapitre suivant.

8.7.2 Le cas des mesures bruitées

Nous pensons que cette approche peut être étendue pour estimer des fonctions sur la base de mesures bruitées :

$$(\mathbf{x}_n, y_n = f(\mathbf{x}_n) + \epsilon_n)$$

où les ϵ_n sont des réalisations indépendantes d'un bruit gaussien centré. \mathcal{X} désigne la suite $(\mathbf{x}_n, y_n)_n$ et \mathcal{E} la suite des bruits de mesure $(\epsilon_n)_n$.

L'estimation peut se faire de la manière suivante : on effectue une allocation itérative d'une suite de mesures $(\mathbf{x}_n)_{n=1\dots N}$ dans l'ensemble des coefficients d'ondelettes. On sélectionne une sous-famille $(\mathbf{x}_n)_{n \in J}$ de mesures et une sous-famille d'ondelettes I' par application du critère de bon placement relatif. On ne parle plus d'ensemble de points de mesures, mais de sous-famille, parce qu'on peut envisager d'avoir plusieurs mesures au même point avec des valeurs mesurées différentes.

La différence avec l'approche précédente consistera à utiliser *toutes* les contraintes interpolatrices (\mathbf{x}_n, y_n) , avec l'ensemble réduit des ondelettes $(\phi_{j\mathbf{k}})_{(j,\mathbf{k}) \in I'}$. On résoud le système de régression

$$f_{\mathcal{X}, \mathcal{E}} = \sum_{(j,\mathbf{k}) \in I'} c_{j\mathbf{k}} \phi_{j\mathbf{k}}$$

$$\sum_{n=1}^N |f_{\mathcal{X}, \mathcal{E}}(\mathbf{x}_n) - y_n|^2 \text{ est minimum.}$$

On note de manière abrégée $A_0 c = y_0$ le système linéaire des contraintes

$$f_{\mathcal{X}, \mathcal{E}}(\mathbf{x}_n) = y_n \quad \text{pour } n \in J$$

et $A_s c = y_s$ le système des contraintes linéaires supplémentaires (qui auraient été ignorées dans la méthode ci-dessus)

$$f_{\mathcal{X}, \mathcal{E}}(\mathbf{x}_n) = y_n \quad \text{pour } n \notin J$$

Le système de régression consiste à minimiser la norme L_2 de

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_s \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_s \end{bmatrix}$$

et le vecteur c s'écrit

$$c = (A_0^T A_0 + A_s^T A_s)^{-1} (A_0^T y_0 + A_s^T y_s)$$

Les théorèmes précédents nous garantissent que le sous-système carré A des contraintes conservées par le critère de bon placement relatif est stable. Le système régressif total avec

toutes les contraintes est donc a fortiori aussi inversible, puisque $A_0^T A_0 + A_s^T A_s$ est la somme de matrices respectivement définie positive et positive.

Une deuxième phase de débruitage peut ensuite être effectuée par troncature des coefficients d'ondelettes obtenus (*wavelet shrinkage*). Il n'est sans doute pas idéal d'effectuer cette troncature dans la base des ondelettes d'interpolation. Il faut dans ce cas trouver une nouvelle représentation du signal dans une base par exemple orthogonale dans laquelle la représentation de la fonction apprise reste compacte, et dans laquelle la matrice de covariance du bruit de mesure sur les coefficients c qui s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mathbb{E} \left((A_0^T A_0 + A_s^T A_s)^{-1} \begin{bmatrix} A_0^T & A_s^T \end{bmatrix} \epsilon \epsilon^T \begin{bmatrix} A_0 \\ A_s \end{bmatrix} (A_0^T A_0 + A_s^T A_s)^{-1} \right) \\ &= (A_0^T A_0 + A_s^T A_s)^{-1} \end{aligned}$$

est suffisamment proche d'une matrice diagonale.

8.7.3 Densité de points de mesure non uniforme

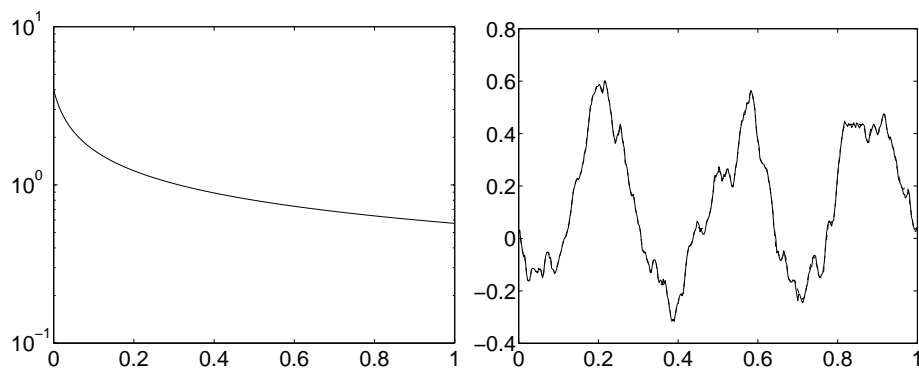
Jusque là, nous avons toujours supposé dans les différentes preuves de convergence que la densité des points de mesure est uniforme. De la même manière que la vitesse de convergence de l'erreur locale dépend de la régularité locale de la fonction, on peut s'attendre à ce que l'erreur d'estimation locale dépende également de la maille maximale locale, comme par exemple

$$\|f(\mathbf{x}) - f_{\mathcal{X}}(\mathbf{x})\| \leq Mh(\mathcal{X}, \mathbf{x})^\alpha$$

où la maille maximale locale est par exemple

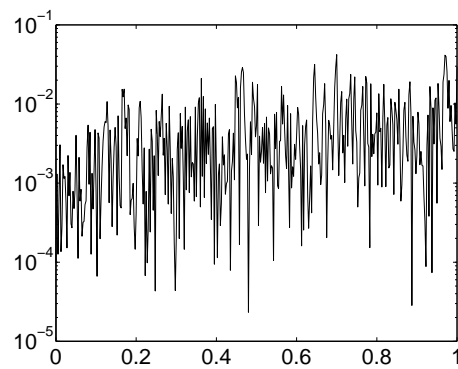
$$h(\mathcal{X}, \mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}' \in D} \inf_{\substack{\mathbf{x}'' \in \mathcal{X} \\ |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \epsilon}} |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|$$

Nous ne disposons pour l'instant pas de formulation exacte d'un tel résultat, et donc encore moins d'une preuve. Cependant, une expérimentation numérique suggère qu'une telle estimation doit pouvoir être produite. Nous avons pris 1000 réalisations $(x_n)_{n=1\dots 1000}$ d'une variable aléatoire non uniforme X sur $[0,1]$. Cette variable était définie par la formule $X = (Y + 2Y^2)/3$ où Y est une variable uniforme. La densité de probabilité de X est représentée dans la figure 8.12-a. Ces 1000 échantillons ont été utilisés pour estimer une fonction de régularité LIPSCHITZ 1/2. La fonction (trait plein) et l'estimée (pointillé) sont représentées dans la figure 8.12-b. L'erreur d'estimation correspondante est représentée en figure 8.12-c. On voit que cette erreur est plus faible là où la densité de points de mesures est plus élevée.



(a) Densité de tirage

(b) Courbes originale et apprise



(c) Erreur d'estimation

FIG. 8.12 – Échantillonnage de densité non uniforme, et erreur associée

Bibliographie

- [Can97] E. CANDÈS. Harmonic analysis of neural nets. Rapport technique, Department of Statistics, Stanford University, 1997.
- [Can98] E. J. CANDÈS. Ridgelets: theory and applications. Rapport technique 17, Department of Statistics, Stanford University, septembre 1998.
- [CDDD98] A. COHEN, W. DAHMEN, I. DAUBECHIES et R. DEVORE. Tree approximation and encoding. *Preprint*, 1998.
- [DeV98a] R. A. DEVORE. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, pages 51–150, 1998.
- [DeV98b] R. A. DEVORE. Tree approximation and encoding. Dans *International Workshop on CAGD and Wavelet Methods for Reconstructing Functions*. Montecatini, Italy, juin 1998.
- [DGS99] I. DAUBECHIES, I. GUSKOV et W. SWELDENS. Regularity of irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 15(3):381–426, 1999.
- [DLR90] N. DYN, D. LEVIN et S. RIPPA. Data dependant triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 10:137–154, 1990.
- [DLR92] N. DYN, D. LEVIN et S. RIPPA. Boundary correction for piecewise linear interpolation defined over data-dependant triangulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 39:179–192, 1992.
- [Don98a] D. L. DONOHO. Orthonormal ridgelets in dimension two. Dans *International Workshop on CAGD and Wavelet Methods for Reconstructing Functions*. Montecatini, Italy, juin 1998.
- [Don98b] D. L. DONOHO. Sparse components of images and optimal atomic decompositions. Rapport technique, Statistics Dept., Stanford University, 1998.
- [DR93] N. DYN et S. RIPPA. Data-dependant triangulations for scattered data interpolation and finite element approximation. *Applied Num. Math.*, 12:89–105, 1993.
- [PK93] Y. PATI et P. KRISHNAPRASAD. Analysis and synthesis of feedforward neural networks using discrete affine wavelet transformations. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 4(1), 1993.
- [SZL⁺95] J. SJÖBERG, Q. ZHANG, L. LJUNG, A. BENVENISTE, B. DEYLONG, P.-Y. GLORENNEC, H. HJALMARSSON et A. JUDITSKY. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, 31:1691–1724, décembre 1995.
- [ZB92] Q. ZHANG et A. BENVENISTE. Wavelet networks. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 3(6):889–898, novembre 1992.

- [Zha97] Q. ZHANG. Using wavelet network in nonparametric estimation. *IEEE Trans. Neural Networks*, 8(2):227–236, mars 1997.

Chapitre 9

Interpolation incrémentale. Perspectives.

Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons une implémentation incrémentale de l'algorithme décrit dans le chapitre précédent. De telles implémentations peuvent être utiles dans un cadre où les mesures sont fournies au fur et à mesure au réseau, et celui-ci est consulté régulièrement. Dans un tel cas, le réglage et l'utilisation du réseau ne peuvent être pas être faits successivement, et l'interpolation de la fonction doit être raffinée progressivement à mesure que les échantillons sont fournis.

Dans un deuxième temps, nous décrivons des variantes de l'algorithme où le contrôle de stabilité ne se fait plus par sélection de mesures qui vérifient le critère de bon placement relatif. Ces variantes consistent pour la première à effectuer un *contrôle a posteriori de la stabilité* du système. La deuxième est une sorte de *régularisation locale*. L'objectif de ces variantes est d'éviter la sélection sévère de mesures effectuée par le critère de bon placement relatif.

9.1 Implémentation incrémentale de l'algorithme d'interpolation

L'interpolation que nous avons décrite dans le chapitre précédent peut être menée de manière incrémentale. Pour cela, on doit tenir à jour l'ensemble des points de mesure, l'ensemble des coefficients d'ondelettes, la matrice (creuse) du système, et la matrice inverse du système. L'algorithme d'allocation itératif est par construction incrémental. La mise à jour du système des contraintes, de la matrice inverse du système et des coefficients d'ondelettes consiste à effectuer des modifications de faible rang de ces matrices. Ces modifications peuvent être réalisées avec la formule de SHERMAN–MORRISON.

Si nous supposons que cette approche incrémentale doit tourner en ligne, il faut introduire un moyen de limiter la croissance du nombre de coefficients d'ondelettes dans la représentation de l'interpolant. Cela se fera en éliminant des coefficients dont la valeur absolue est deçà

d'un certain seuil, et la mesure associée. Nous voyons ici un intérêt immédiat de l'existence de l'algorithme d'allocation. Il fournit un choix raisonnable de contrainte à éliminer en même temps qu'un coefficient d'ondelette tronqué.

L'approche que nous proposons consiste à choisir une structure dans laquelle l'allocation s'apparente à une descente d'arbre. Si une structure d'arbre n'est pas nécessaire pour effectuer une allocation et construire un interpolant, elle est cependant plus pratique à gérer quand le sous-ensemble de coefficients est appelé à être augmenté ou diminué.

9.1.1 Structure d'arbre

Afin d'avoir une structure d'arbre pour laquelle l'allocation s'apparente à une descente d'arbre, nous avons dû utiliser une structure d'arbre triadique, avec des ondelettes d'interpolation de DESLAURIERS–DUBUC triadiques (qui sont brièvement décrites en Sec. B.6).

La raison pour laquelle nous utilisons une structure triadique est que les bassins d'attraction qui sont des cellules de VORONOÏ¹ à une résolution donnée doivent être inclus dans les bassins des ondelettes de résolution plus grossière. Ceci n'est pas le cas pour les ondelettes d'interpolation dyadiques, comme c'est illustré en figure 9.1. Si en revanche nous utilisons des ondelettes triadiques et la structure d'arbre correspondante, les bassins d'une résolution j sont inclus dans les bassins de la résolution $j - 1$ et l'allocation consiste donc à effectuer une descente d'arbre.

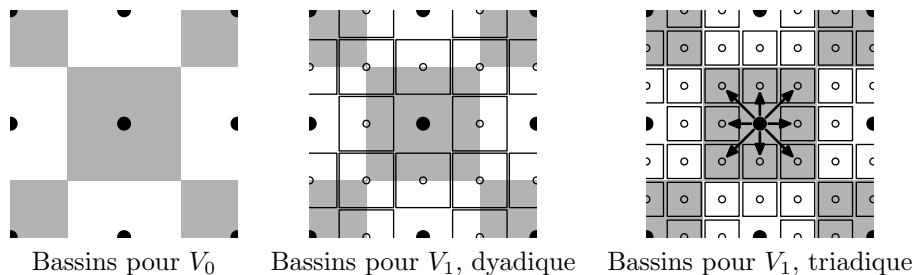


FIG. 9.1 – Pourquoi utiliser une structure d'arbre triadique. Ceci est illustré dans les trois graphes ci-dessus. À gauche, on voit les cellules de VORONOÏ à la résolution $j = 0$. Dans le cas dyadique, les cellules de VORONOÏ ne sont pas incluses dans celle de résolution $j = 0$ (figure du milieu), tandis que dans le cas triadique, elle le sont (figure de droite).

La structure d'arbre est donc la suivante. Les racines de l'arbre sont les ondelettes de résolution $j = 0$ et d'indice de translation $\mathbf{k} \in \{0,1\}^d$. Ensuite, chaque ondelette d'indices j et \mathbf{k} a les filles suivantes :

$$(\phi_{j+1,3\mathbf{k}+\boldsymbol{\epsilon}})_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,0,1\}^d}$$

à condition que les centres correspondants soient encore dans le domaine $[0,1]^d$.

1. Un diagramme de VORONOÏ d'un ensemble discret \mathcal{X} de points \mathbf{x} est un ensemble de cellules de VORONOÏ $B(\mathbf{x})$ définies par $B(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < |\mathbf{x}' - \mathbf{y}|, \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{X} - \{\mathbf{x}\}\}$.

Cette structure d'arbre contient toutes les ondelettes $\phi_{j\mathbf{k}}$, ce qui inclut celles pour lesquelles $j > 0$ et $\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}^d$. Nous rappelons qu'une base est constituée de la manière suivante

$$\mathcal{B} = \{\phi_{j\mathbf{k}} : |\mathbf{k}|_\infty \leq 3^j, j = 0 \text{ ou } (j > 0 \text{ et } \mathbf{k} \notin 3\mathbb{Z}^d)\}$$

Nous rendons donc les ondelettes qui ne sont pas dans la base (celles pour lesquelles $j > 0$ et $\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}^d$) *silencieuses*, c'est à dire que leur coefficient doit rester nul. Elles ont cependant une utilité pour maintenir la structure de l'arbre.

Dans ce cas, l'algorithme d'allocation itérative décrit en section 8.3.2 se fait en descente d'arbre à un détail près. Si une mesure tombe dans le bassin d'une ondelette silencieuse (j, \mathbf{k}) , elle soit être passée à l'ondelette non silencieuse la plus proche, d'indices $(j, \mathbf{k} + \boldsymbol{\epsilon})$ où $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1, 0, 1\}^d$ et $\|\boldsymbol{\epsilon}\|_1 = 1$.

9.1.2 Calculs de mise à jour des matrices

Comme cela est par exemple exprimé dans la formule de SHERMAN–MORRISON, des changements dans la matrice A^{-1} causés par des variations de faible rang de A peuvent être calculées avec peu d'opérations. Résoudre le système linéaire des contraintes de manière incrémentale consiste à stocker constamment la matrice A , la matrice A^{-1} , le vecteur des mesures y et le vecteur des coefficients c . Pour résoudre le système des contraintes

$$Ac = y$$

nous avons envisager deux types de modifications

- l'ajout d'une contrainte d'interpolation et d'une ondelette,
- l'opération inverse: l'élimination d'une contrainte et d'une ondelette.

Ajout d'une ondelette et d'une mesure Si nous ajoutons une ondelette $\psi_{j\mathbf{k}}$ et une mesure \mathbf{x} de telle manière que I et \mathcal{X}' sont respectivement remplacés par $I \cup \{(j, \mathbf{k})\}$ et $\mathcal{X}' \cup \{\mathbf{x}\}$, les mises à jour de matrices sont les suivantes

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} A & V \\ L & \theta \end{bmatrix}$$

où V est le vecteur des coefficients $\psi_{j'\mathbf{k}'}(\mathbf{x})$ pour $(j', \mathbf{k}') \in I$, L est la ligne de coefficients $\psi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}')$ pour $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'$, et $\theta = \psi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x})$.

En posant $\alpha = LA^{-1}V$, A^{-1} est alors mise à jour par une formule similaire à celle de SHERMAN–MORRISON :

$$\begin{bmatrix} A & V \\ L & \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + \frac{A^{-1}VLA^{-1}}{\theta - \alpha} & -\frac{A^{-1}V}{\theta - \alpha} \\ -\frac{LA^{-1}}{\theta - \alpha} & \frac{1}{\theta - \alpha} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Le vecteur c est aussi mis à jour avec la formule suivante :

$$c \leftarrow \begin{bmatrix} c + \frac{A^{-1}V(LA - y)}{\theta - \alpha} \\ \frac{y - Lc}{\theta - \alpha} \end{bmatrix}$$

Dans ce dernier calcul, le plus grand nombre d'opérations provient de la multiplication $A^{-1} \times V$. On pourrait se demander s'il n'est pas plus simple de recalculer directement c par le produit $A^{-1}y$ avec les matrices A^{-1} et y . La différence est que le vecteur y n'a pas de raison d'être creux, alors qu'en général, V l'est.

Retrait d'une ondelette et d'une mesure Les calculs sont similaires dans le cas du retrait d'une mesure et d'une ondelette.

Supposons que l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} A' & U \\ L & \theta \end{bmatrix}$$

est connu et vaut

$$\begin{bmatrix} B & V \\ K & \tau \end{bmatrix}$$

et que l'on retire la contrainte correspondant à la dernière ligne et l'ondelette correspondant à la dernière colonne. La nouvelle matrice du système sera donc simplement A' , c'est à dire que la mise à jour de A s'écrit

$$A \leftarrow A'$$

On peut alors extraire A'^{-1} à l'aide des relations suivantes

$$\begin{aligned} B &= A'^{-1} + \frac{A'^{-1}U L A'^{-1}}{\theta - \alpha} \\ V &= -\frac{A'^{-1}U}{\theta - \alpha} \\ K &= -\frac{L A'^{-1}}{\theta - \alpha} \\ \tau &= \frac{1}{\theta - \alpha} \end{aligned}$$

On obtient

$$A'^{-1} = B - \frac{VK}{\tau} \quad (9.2)$$

La mise à jour du vecteur des coefficients c se fait aussi par une formule de ce genre. Si on suppose que c s'écrit

$$c = \begin{bmatrix} c' \\ c_1 \end{bmatrix}$$

où $c_1 \in \mathbb{R}$ et y s'écrit

$$y = \begin{bmatrix} y' \\ y_1 \end{bmatrix},$$

le vecteur y sera simplement remplacé par y' . Le vecteur c devra subir le calcul de mise à jour suivant :

$$c \leftarrow c' - \frac{V}{\tau}$$

Nous pouvons prouver que la matrice A and son inverse tronquée sont creuses, de même que les vecteurs de mise à jour. On peut considérer que toutes les lignes et presque toutes les colonnes de la matrice du système A ont de l'ordre de $\mathcal{O}(j_{\max})$ coefficients non nuls, ainsi que pour A^{-1} . Si nous nous plaçons dans le cas où les points de mesure sont placés régulièrement alors j est le logarithme du nombre N de points de mesure, et la complexité d'une itération est alors $\mathcal{O}(\log N)^2$, ce qui est un ordre de grandeur d'une implémentation en temps réel.

9.2 Contrôle a posteriori de la stabilité

L'inconvénient principal de la méthode décrite dans la section précédente est qu'elle élimine généreusement toutes les contraintes qui ne peuvent pas être prises en compte, parce que le critère de bon placement relatif ne peut pas garantir qu'en les intégrant dans le système et en ajoutant l'ondelette associée, on obtienne encore une matrice inversible.

Une deuxième approche consiste à effectuer un contrôle de stabilité basé non plus sur le critère géométrique relativement restrictif de « bon placement relatif », mais sur la norme estimée a posteriori de la matrice inverse du système.

La norme que nous pouvons chercher à contrôler est la norme opératorielle dans $L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ de la matrice inverse du système. Pour une matrice B donnée de terme général (b_{ij}) , cette norme opératorielle s'écrit

$$\|B\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} = \sup_i \sum_j |b_{ij}|$$

L'itération de base consiste à garder une copie originale des variables courantes y , c , A et A^{-1} , à faire les calculs (en moyenne courts) qui consistent à prendre en compte une nouvelle mesure et à une utiliser une nouvelle ondelette obtenue par le schéma d'allocation. Deux cas peuvent se produire

- soit la norme de la matrice A^{-1} reste acceptable, et alors la mesure est retenue. Les modifications provisoires effectuées sur x , c , A et A^{-1} sont validées.
- soit la norme de la matrice A^{-1} dépasse un certain seuil, et alors la mesure n'est pas retenue. Toutes les modifications effectuées sur x , c , A et A^{-1} sont annulées.

Il est beaucoup plus difficile pour une telle approche de fournir une preuve de convergence, car le changement de conditionnement de la matrice A n'est pas seulement dû au fait que la dernière mesure ajoutée soit mal placée, mais peut très bien être dû à une accumulation d'instabilités dont la cause est diluée parmi les mesures précédentes. Ce qui plaide en faveur d'une telle approche, c'est que l'algorithme d'allocation a tendance à progressivement rapprocher les points de mesures des centres des ondelettes, et à ainsi améliorer progressivement le conditionnement de la matrice du système, et que nous pouvons raisonnablement penser que le système ne restera pas bloqué dans une situation où il refuse définitivement de prendre en compte une nouvelle mesure.

9.2.1 Vue d'ensemble

Le schéma de principe de l'algorithme par contrôle a posteriori de la stabilité est le suivant. Pour chaque mesure, l'allocation nous fournit une ondelette à ajouter au développement de la fonction. Un premier calcul est fait pour mesurer la modification causée sur la matrice inverse du système A^{-1} . Si la nouvelle matrice inverse a une norme qui dépasse une borne donnée, la nouvelle paire mesure/ondelette est rejetée. Un schéma de principe de cette approche est donné dans la figure. 9.2.

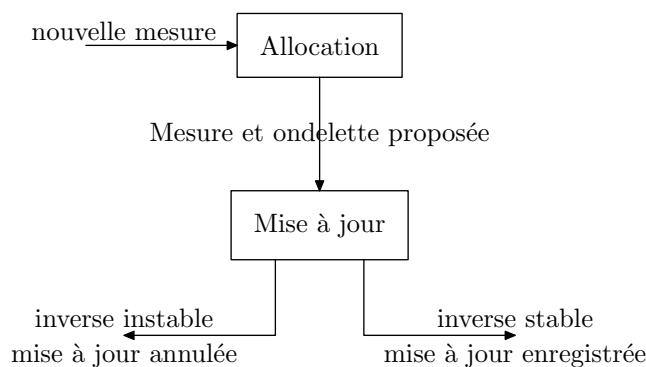


FIG. 9.2 – Schéma de principe du contrôle a posteriori

9.2.2 Remplacement de mesures

Si la nouvelle paire mesure/ondelette est rejetée, nous essayons alors de remplacer une mesure déjà prise en compte par cette nouvelle mesure, pour voir si ceci améliorera la stabilité du système. Si tel est le cas, la nouvelle mesure est conservée, tandis que la mesure ancienne est éliminée. Aucune ondelette n'est ajoutée dans la représentation de la fonction.

9.2.3 Contrôle de croissance

La croissance de l'arbre d'ondelettes ainsi construit est contrôlée en parcourant les coefficients de plus fine échelle (qui sont modifiés). À chaque fois qu'un coefficient est en deçà d'un seuil de troncature fixé, le coefficient et l'ondelette correspondante sont retirés.

La troncature des coefficients d'ondelettes est considérée comme un moyen efficace de réaliser un débruitage d'un signal bruité de taille fixe. Dans notre cas, des expérimentations numériques nous laissent penser que l'utilisation de grands seuils de troncature pour débruiter des mesures ne marche pas quand l'interpolation est réalisée en ligne. Une raison théorique est donnée par les résultats de DONOHO: le seuil optimal est proportionnel à l'écart-type du bruit et augmente avec le nombre N de coefficients bruités. Dans le cas de l'interpolation en ligne telle que nous la faisons, le nombre d'échantillons est potentiellement infini, et ce procédé semble sélectionner les mesures où les réalisations du bruit sont exceptionnellement importantes.

Choix du seuil pour le contrôle de stabilité

Au vu des résultats de stabilité obtenus dans le chapitre précédent, la norme de la matrice A^{-1} est de l'ordre de $\mathcal{O}(j_{\max})$ où j_{\max} est la plus grande résolution qui apparaît dans la sous-famille d'ondelettes sélectionnée. C'est donc dans cet ordre de grandeur qu'il faut choisir le seuil auquel on compare la norme mesurée de la matrice inverse du système.

Comme le contrôle de la norme opératorielle est effectué sur la matrice A^{-1} dans la base d'ondelettes normales (et non pas la matrice inverse dans la base d'ondelettes relocalisées, voir Sec. 8.5.2), le contrôle de l'erreur sera plus faible. La norme de la matrice A^{-1} dans la base d'ondelettes relocalisées φ_{jk} sera donc au mieux majorée par un terme de la forme Mj_{\max}^2 .

Supposons par exemple que nous ayons suffisamment de mesures pour avoir sélectionné tous les coefficients jusqu'à une résolution j donnée (et aucun en delà de la résolution j_{\max}), on aura d'une manière similaire à ce qui est montré dans le théorème 8.9, la majoration d'erreur²

$$\|f - f_{\mathcal{X}}\|_{\infty} \leq M3^{-\alpha j} j_{\max}^2$$

à comparer avec la majoration obtenue dans le théorème 8.9 qui était

$$\|f - f_{\mathcal{X}}\|_{\infty} \leq M3^{-\alpha j}$$

La borne obtenue suppose tout d'abord qu'il faille contrôler les plus fines résolutions représentées j_{\max} . Par ailleurs, comme $j_{\max} \geq j$, le taux de décroissance que l'on pourra assurer sera légèrement plus faible dans la méthode décrite au chapitre précédent. Pour que l'erreur d'estimation tende vers 0, il faudra donc que la fonction à apprendre soit de régularité LIPSCHITZ- α pour un $\alpha > 0$, alors qu'il suffisait auparavant que la fonction soit seulement continue.

Nous pourrions donc montrer un résultat de convergence *conditionnelle*. Si nous pouvons placer des mesure dans l'arbre des ondelettes jusqu'à un niveau j sans dégrader la norme de la matrice inverse du système, ni placer des mesures à des échelles j_{\max} excessivement grandes, nous pourrions garantir que l'estimée est arbitrairement proche de la fonction originale, pourvu que son degré de régularité LIPSCHITZ soit strictement positif.

9.3 Régularisation partielle

Il faut remarquer que même sous cette forme, l'algorithme repose sur une élimination partielle de mesures et d'ondelettes effectuée afin de conserver la stabilité du système d'interpolation. Nous nous sommes également lancés dans l'étude d'une autre approche dite de *régularisation partielle*, dont l'objet est de proposer une estimation qui ne rejette aucune mesure.

Revenons au système de contrôle de stabilité à posteriori décrit ci-dessus. Quand le schéma d'allocation soumet une nouvelle paire ondelette/mesure, le contrôle de stabilité a

2. Les puissances de 2 qui sont dans le théorème 8.9 ont été remplacées par des puissances de 3, puisque nous énonçons ici le résultat pour des ondelettes triadiques.

posteriori garde la mesure si la nouvelle matrice inverse du système a une norme dans des limites acceptables, et la rejette sinon.

L'alternative que nous avons envisagée et mise en œuvre consiste à ajouter des ondelettes supplémentaires dites de régularisation, et dont les centres sont placés autour du nouveau point de mesure, pour effectuer une séparation du nouveau point de mesure par rapport aux autres et ainsi pouvoir conserver la nouvelle mesure. Comme nous obtenons alors un système linéaire avec davantage d'inconnues que de contraintes, nous pouvons rechercher une solution aux moindres carrés, c'est à dire résoudre le problème

$$\min \{ \|c\|_H : [A_0 \quad A_r] c = y \}$$

où A_0 est la sous-matrice du système des contraintes qui correspond aux ondelettes sélectionnées par allocation, et A_r est la sous-matrice qui correspond aux ondelettes de régularisation. On note

$$A = [A_0 \quad A_r]$$

Pour des raisons proches de celles qui imposent le choix de normes de SOBOLEV dans les méthodes de régularisation, le choix de la métrique hilbertienne $\|\cdot\|_H$ définie sur les ensembles de coefficients a une influence cruciale sur la forme de la solution ainsi obtenue.

Nous avons envisagé de construire cette métrique de manière adaptative. Pour chaque coefficient d'ondelette $c_{j\mathbf{k}}$ auquel est alloué une mesure, nous posons $\gamma_{j\mathbf{k}} = 1$. Pour les autres coefficients (coefficients de régularisation), nous attribuons un poids³ $\gamma_{j\mathbf{k}} = 3^{-d\alpha} \gamma_{j-1, \mathbf{k}'}$ si l'ondelette $\phi_{j\mathbf{k}}$ est une fille de $\phi_{j-1, \mathbf{k}'}$. La métrique hilbertienne choisie sur les coefficients d'ondelettes est alors :

$$\|c\|_H^2 = \sum_{j\mathbf{k}} \frac{c_{j\mathbf{k}}^2}{\gamma_{j\mathbf{k}}^2}$$

Cette approche peut également être implémentée sous une forme incrémentale. Si on note Γ la matrice diagonale de coefficients

$$\Gamma_{(j, \mathbf{k})(j', \mathbf{k}')} = \delta_{jj'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{\gamma_{j\mathbf{k}'}}$$

la solution du système régularisé s'écrit alors

$$c = \Gamma^{-1} A^T (A \Gamma^{-1} A^T)^{-1} y$$

L'introduction de la matrice Γ n'augmente pas considérablement la complexité de cette approche, car elle est diagonale. En revanche, nous résolvons maintenant un système aux moindres carrés dans un cadre incrémental, et il faut tenir à jour en mémoire les matrices A , $A \Gamma^{-1} A^T$ et son inverse $(A \Gamma^{-1} A^T)^{-1}$.

3. Comme toujours, cette formule vaut pour des ondelettes triadiques.

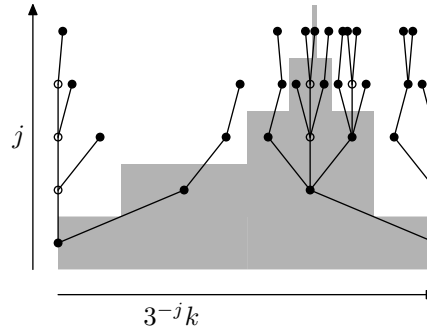


FIG. 9.3 – Exemple d'arbre avec deux catégories d'ondelettes. Les disques désignent des coefficients d'ondelettes. Les ondelettes sur fond gris sont celles auxquelles correspondent des points de mesures; leur poids $\gamma_{j\mathbf{k}}$ est toujours égal à 1. Les ondelettes sur fond blanc sont les ondelettes de régularisation; leur poids est au plus $3^{-\alpha}$ fois celui de l'ondelette parente. On rappelle que les cercles vides correspondent aux ondelettes silencieuses, dont le coefficient est toujours nul.

9.3.1 Expériences numériques et perspectives

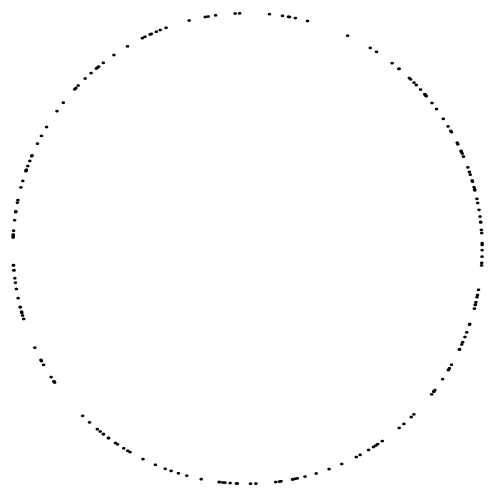
Les deux approches de sélection a posteriori et de régularisation locale ont été implémentées. Dans la première, le contrôle de stabilité a été implémenté sous une forme faible. Au lieu d'estimer explicitement la norme opératoire de la nouvelle matrice A^{-1} , nous avons basé le test de stabilité sur le seul paramètre $\theta - \alpha$ qui apparaît dans la formule de mise à jour (9.1). En n'acceptant que des paires ondelette/mesure pour lesquelles le terme $|\theta - \alpha|$ obtenu est supérieur à un seuil fixé, on peut majorer la norme de la matrice A^{-1} et s'assurer qu'elle est toujours inversible. Malheureusement, la borne que l'on obtient sur la norme de A^{-1} est une suite divergente en fonction du nombre de points de mesure. Ce type de contrôle de stabilité est moins coûteux que celui qui consiste à estimer explicitement la norme opératoire de la matrice A^{-1} , mais ne se révèle pas très efficace.

Ces implémentations ont été testées pour estimer une fonction dans un cas où l'approche du chapitre 8 aurait échoué, parce qu'elle présuppose que les points de mesure remplissent asymptotiquement tout le domaine considéré. Les points de mesure sont ici 200 points tirés au hasard sur un même cercle. Dans les deux cas, le profil de fonction obtenu est proche de la fonction à apprendre, mais des instabilités finissent par apparaître, d'autant plus que le nombre d'échantillons est important. Les résultats sont consignés dans la figure 9.4.

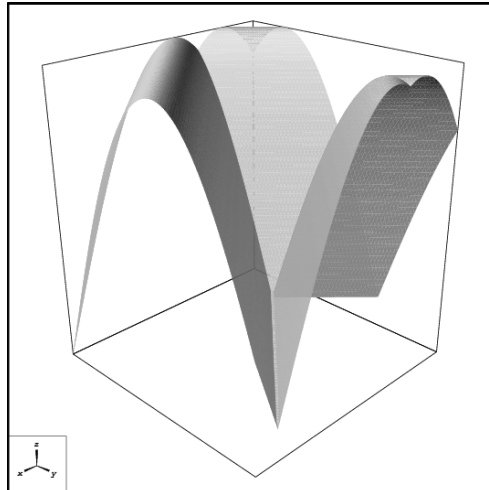
Ces résultats montrent que l'on peut espérer se libérer des contraintes fortes sur l'ensemble des points de mesure qui sont imposées par le critère de bon placement relatif. En revanche, la stabilité offerte par ces méthodes est encore loin d'être satisfaisante. En témoigne un deuxième couple d'essais numériques effectués en dimension 1 sur une fonction régulière par morceaux. La fonction est

$$f(x) = x + \sin 6x \times 1_{(x>1/2)}$$

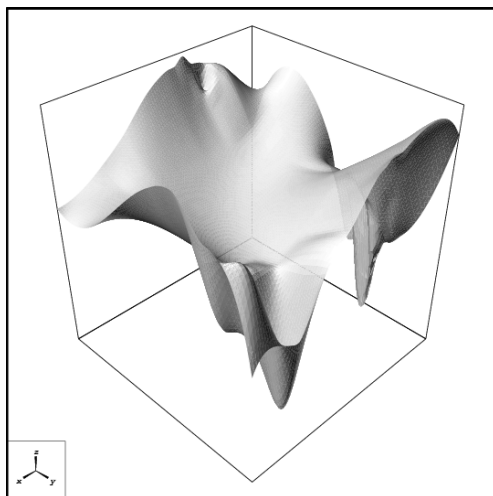
Le produit de l'approximation par sélection des mesures par application du critère de



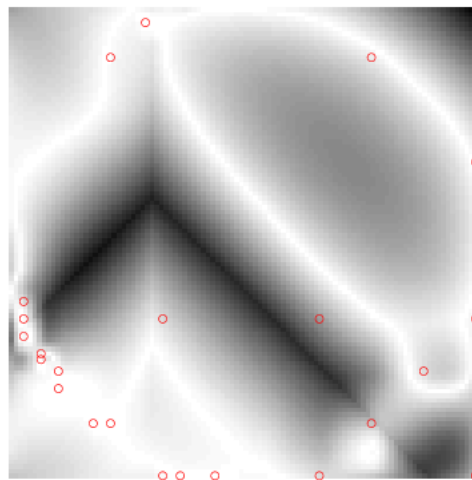
(a) Points de mesure



(b) Fonction originale



(c) Fonction estimée



(d) Carte d'erreur et centres d'ondelettes

FIG. 9.4 – Apprentissage d'une fonction sur une sous-variété : un cercle. En (a), les points de mesure. En (b), la fonction originale. En (c), la fonction estimée et en (d), la carte d'erreurs et les centres des ondelettes retenues pour représenter la fonction.

bon placement relatif et le produit de l'approximation par régularisation locale sont consignés dans la figure 9.5. La méthode de régularisation locale ne fournit pas des résultats satisfaisants par comparaison avec la méthode BPR. Le résultat avec notre implémentation de contrôle a posteriori de la stabilité n'est pas meilleur.

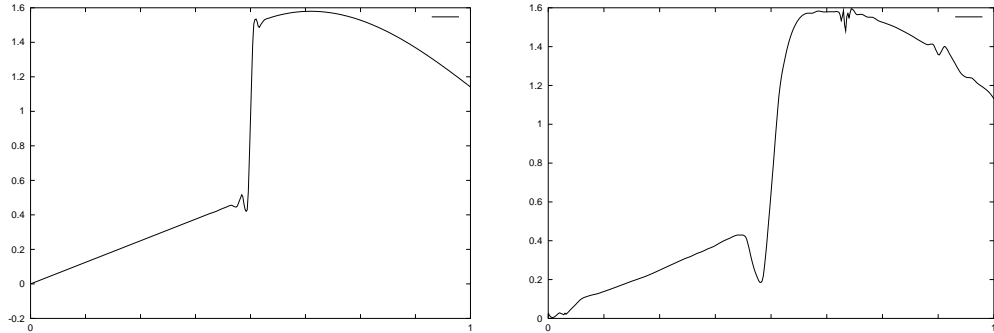


FIG. 9.5 – Approximation d'une fonction régulière par morceaux sur 200 échantillons aléatoires. À gauche, l'approximation par la méthode BPR et à droite la régularisation locale.

Pour la première approche, la raison des instabilités vient d'être indiquée : la stabilité de la matrice A^{-1} n'est pas contrôlée uniformément au cours du temps, mais seulement par une borne croissante. L'implémentation par contrôle a posteriori de la stabilité ne peut se faire de manière stable qu'en mesurant *effectivement* après insertion d'une nouvelle paire ondelette/mesure dans le système la nouvelle norme opératoire de la matrice inverse du système. Cette estimation peut se faire sous une forme incrémentale.

Pour l'approche de régularisation locale, on peut proposer l'analyse heuristique suivante. Cette approche se trouve à mi-chemin entre une régularisation complète (pour laquelle la décroissance des poids $\gamma_{j\mathbf{k}}$ le long des échelles serait la même pour tous les poids $\gamma_{j\mathbf{k}} = 3^{-\alpha dj}$), et une forme a priori instable de l'algorithme décrit au chapitre précédent, que l'on obtient en retirant simplement les ondelettes de régularisation du développement de la fonction $f_{\mathcal{X}}$:

$$f_{\mathcal{X}} = \sum_{\gamma_{j\mathbf{k}}=1} c_{j\mathbf{k}} \phi_{j\mathbf{k}}$$

pour revenir à un système linéaire carré :

$$A_0 c_0 = y$$

Si en revanche, l'attribution de poids égaux à 1 n'est faite que pour des coefficients sélectionnés suivant un critère de stabilité géométrique (le bon placement relatif) ou a posteriori pour le sous-système correspondant $A_0 c_0 = y$, on peut espérer obtenir un système aux moindres carrés stable. Ce système pourra être analysé comme un raffinement en régularisation d'une approximation en ondelettes. Nous voyons qu'ainsi, le développement de cette approche de régularisation locale va bénéficier du développement des deux premières méthodes.

L'avantage qui est recherché dans cette régularisation partielle est principalement de limiter la croissance du conditionnement de la matrice de collocation, en ne faisant pas de régularisation pour les coefficients d'ondelettes qui apparaissent dans un sous-système carré de contraintes d'interpolation et d'ondelettes qui est stable, mais seulement pour le reste des coefficients.

Annexe B

Ondelettes d'interpolation

Résumé

La littérature sur les ondelettes abonde de familles d'ondelettes et d'analyses multi-résolutions aux propriétés diverses, soit orthogonales, soit biorthogonales, symétriques avec plus ou moins de degrés de régularité et de moments nuls. Une classe sur laquelle nous allons nous arrêter est celle des analyses multi-résolutions d'interpolation. Nous montrons brièvement que les outils d'interpolation classiques peuvent être intégrés dans un cadre d'analyse à plusieurs échelles. Dans ce cadre, les travaux effectués par DESLAURIERS et DUBUC au début des années 1980 jouent un rôle central.

Le terme d'ondelette d'interpolation peut prêter à confusion. Dans une base d'ondelettes dite d'interpolation, ce n'est pas à proprement parler l'ondelette qui est une fonction d'interpolation, mais la fonction d'échelle.

B.1 Fonctions d'échelle d'interpolation

Une fonction d'échelle d'interpolation est donc une fonction ϕ qui est également une fonction d'interpolation au sens classique du terme, à savoir qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\begin{aligned}\phi(k) &= 0 && \text{si } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \neq 0 \\ \phi(0) &= 1\end{aligned}$$

et est au moins continue.

Si la fonction ϕ est construite à partir d'une analyse multi-résolutions et s'écrit comme convolution infinie de peignes de DIRAC :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

la condition que cela impose sur le filtre m_0 s'écrit :

$$m_0(\omega) + m_0(\omega + \pi) = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

De nombreuses familles de fonctions d'interpolation sont connues (fonctions Spline, fonctions d'interpolation de DESLAURIERS–DUBUC). On sait depuis les résultats énoncés par FIX et STRANG qu'une fonction d'interpolation de support compact fixée ne peut pas avoir un ordre d'approximation arbitrairement grand.

B.2 Ondelettes d'interpolation

Ces propriétés qui portent sur les fonctions d'échelle n'ont pas d'extension naturelle sur les ondelettes, ce qui n'est pas le cas de la construction des ondelettes orthogonales. Aussi, à défaut d'autre choix, certains auteurs (CHUI..) ont proposé de choisir des espaces d'ondelettes W_j supplémentaires orthogonaux de V_j dans V_{j+1} , c'est-à-dire

$$W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$$

Nous suivrons pour notre part l'approche proposée par DONOHO, qui s'inspire de l'exemple de la base de SCHAUDER pour choisir tout simplement l'ondelette

$$\psi(x) = \phi(2x - 1)$$

La normalisation des fonctions contractées et translattées se faisant en norme L_∞ , on note $\phi_{jk}(t) = \phi(2^j t - k)$, et les bases construites par DONOHO sont alors

$$\mathcal{B}_J = \{\phi_{jk} : j = J \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ ou bien } j > J \text{ et } k \text{ impair}\}$$

L'avantage de ce choix va apparaître très vite : les fonctions d'échelles duales sont des masses de DIRAC, et les ondelettes duales des sommes discrètes de masses de DIRAC. Nous ne le prouverons pas ici, car la preuve est technique et sans grande difficulté. Nous nous contenterons d'exhiber un argument qui étaye ce résultat, et qui repose sur le calcul des filtres duaux. Le filtre « passe-haut » associé au choix d'ondelette de DONOHO est :

$$m_1(\omega) = \frac{1}{2}e^{-i\omega}$$

La matrice de transfert correspondante est alors :

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ e^{-i\omega}/2 & -e^{-i\omega}/2 \end{bmatrix}$$

Comme le filtre m_0 est un filtre d'interpolation, le déterminant de $M(\omega)$ a une forme extrêmement simple :

$$\det M(\omega) = -\frac{1}{2}e^{-i\omega}$$

On en déduit la forme de la matrice de transfert duale $\tilde{M}(\omega) = M(\omega)^{-T}$:

$$\tilde{M}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2m_0(\omega + \pi)e^{-i\omega} & 2m_0(\omega)e^{-i(\omega + \pi)} \end{bmatrix}$$

On peut en déduire les ondelettes duales

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(t) &= \delta(t) \\ \tilde{\psi}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k m_0[k] \delta\left(t - \frac{k+1}{2}\right)\end{aligned}$$

B.3 Ondelettes de DESLAURIERS–DUBUC

Les fonctions d'échelle de DESLAURIERS–DUBUC sont des fonctions d'interpolation qui vérifient une équation de raffinement dyadique et qui réalisent un optimum entre taille de support et nombre de moments nuls de l'ondelette duale, à l'instar des ondelettes de DAUBECHIES.

Plus précisément, pour un nombre de moments nuls pair $2p$ fixé, il existe un seul filtre m_0 de taille de support inférieure ou égale à $4p - 1$ qui soit un filtre d'interpolation. Ceci se prouve en considérant le système linéaire des contraintes associé, qui se trouve être un déterminant de VAN DER MONDE. Ces filtres et les fonctions d'échelles correspondantes sont dits de DESLAURIERS–DUBUC, car ils ont été exhibés pour la première fois par DESLAURIERS et DUBUC dans leur schéma d'interpolation dyadique itératif (basé sur une interpolation de LAGRANGE glissante). Des fonctions d'échelles pour différents paramètres p sont représentées en Fig. B.1.

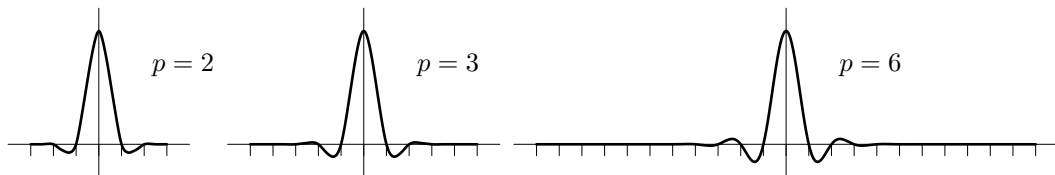


FIG. B.1 – Quelques fonctions d'échelle de DESLAURIERS–DUBUC, tracées sur leur support uniquement.

On peut vérifier que la fonction d'auto-corrélation

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(u) \overline{\phi(u+t)} du$$

d'une fonction d'échelle orthogonale ϕ est une fonction d'échelle d'interpolation. On peut vérifier qu'en prenant l'auto-corrélation d'une fonction d'échelle de DAUBECHIES, on obtient une fonction de DESLAURIERS–DUBUC.

Contrairement aux coefficients de filtres de DAUBECHIES, les coefficients de filtres de DESLAURIERS–DUBUC ont une formule explicite, et sont rationnels. Pour un paramètre pair

donné p , les coefficients du filtre m_0 sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 m_0[k] &= 0 && \text{si } |k| \geq 2p \\
 m_0[2k] &= 0 && \text{si } k \neq 0 \\
 m_0[0] &= \frac{1}{2} \\
 m_0[\pm(2k-1)] &= \frac{(-1)^{k+1}(2p)!^2}{2^{4p}p!^2(p-k)!(p+k-1)!(2k-1)} && \text{pour } k \leq p
 \end{aligned}$$

B.4 Ondelettes sur l'intervalle

Le domaine d'analyse d'un signal est très souvent borné, parce que ce signal à analyser n'est qu'un tronçon d'un signal de support infini. Les constructions de représentations sur des domaines bornés de bases d'ondelettes se font traditionnellement de deux manières différentes : la périodisation ou la construction de bases d'ondelettes sur l'intervalle avec des ondelettes de bords.

B.4.1 Périodisation

La périodisation d'une fonction définie sur \mathbb{R} est une fonction définie sur $\mathbb{R}/N\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} : L_1(\mathbb{R}) &\rightarrow L_1(\mathbb{R}/N\mathbb{Z}) \\
 f &\mapsto (x \mapsto \sum_{y \equiv x(N)} f(y))
 \end{aligned}$$

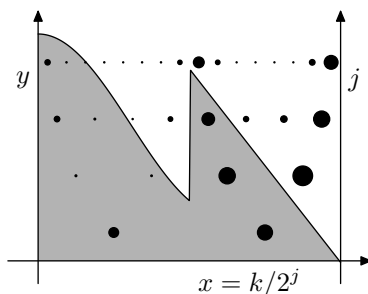


FIG. B.2 – Décomposition en ondelettes périodisées d'une fonction définie sur un intervalle. On voit que le non prolongement périodique est perçu comme une singularité en termes de décroissance des coefficients d'ondelettes, et nous voyons ainsi un cône de coefficients important près du bord.

Par périodisation de vecteurs suffisamment décroissants d'une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$, on obtient un ensemble de vecteurs qui constitue une base orthonormale de $L_2(\mathbb{R}/N\mathbb{Z})$. Le vice caché de cette construction est qu'une fonction régulière sur $[0, N]$ ne sera perçue

comme régulière (en terme de décroissance asymptotique des coefficients d'ondelettes de la base périodisée) que si la fonction est régulière en tant que fonction définie sur $\mathbb{R}/N\mathbb{Z}$, ce qui signifie qu'elle doit vérifier des conditions de prolongement périodique

$$\begin{aligned} f(0) &= f(N) \\ f'(0) &= f'(N) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= f^{(k)}(N) \end{aligned}$$

Ceci est illustré dans la figure B.2.

B.4.2 Ondelettes de bords et bases de fonctions sur l'intervalle

COHEN, DAUBECHIES, JAWERTH et VIAL ont proposé une deuxième construction de bases d'ondelettes orthogonales qui peuvent être considérées comme des véritables bases de $L_2([0,N])$. Avec ces bases, toute fonction régulière sur $[0,N]$ a des coefficients d'ondelettes qui décroissent vite, c'est-à-dire qu'il n'est plus nécessaire d'imposer des conditions de prolongement périodique. Une décomposition correspondante d'une fonction est donnée en Fig. B.3.

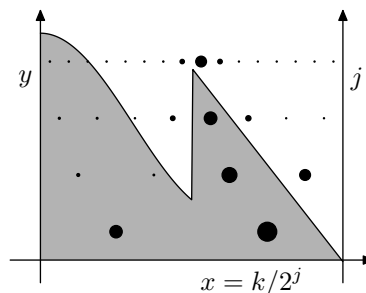


FIG. B.3 – Décomposition d'une fonction en ondelettes construites sur l'intervalle. On voit par comparaison avec la figure B.2 que cette fois, le fait que la fonction ne soit pas continûment prolongeable périodiquement n'est pas perçu comme une singularité par les coefficients d'ondelettes.

Cette construction repose sur la construction d'ondelettes de bords qui sont des combinaisons linéaires d'ondelettes tronquées. Ces ondelettes sont toujours parfaitement localisées, c'est-à-dire que des ondelettes de fines échelles ne peuvent jamais avoir un support qui touche les deux extrémités de l'intervalle $[0,N]$. Cette construction est plus satisfaisante dans la mesure où différence de valeurs ou de dérivées entre 0 ou en N ne sont pas perçues comme une singularité de la fonction. Elle a en revanche le défaut d'être plus complexe, en faisant intervenir une famille de filtres de bord. De plus, ce schéma repose explicitement sur le fait que les ondelettes de $L_2(\mathbb{R})$ dont on part sont des ondelettes de DAUBECHIES, et n'est pas généralisable simplement.

B.4.3 Ondelettes d'interpolation sur l'intervalle

Pour les ondelettes d'interpolation, DONOHO a suggéré de suivre cette même voie. Nous en emprunterons une autre, plus simple et plus intuitive, qui s'appuie sur la construction qui a originalement été proposée par DESLAURIERS et DUBUC.

Retour sur le schéma de DESLAURIERS et DUBUC

Leur schéma de raffinement est le suivant. Si une fonction f est connue sur une grille régulière (par exemple \mathbb{Z}), on construit une estimation sur une grille deux fois plus fine $1/2\mathbb{Z}$ par interpolation de LAGRANGE glissante. En chaque point entier, la valeur de l'estimation est inchangée. En chaque point demi-entier $k + 1/2$, on note $\Pi_{[k,k+1]}$ le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de degré $2p - 1$ qui coïncide avec f sur les points $k - p + 1, \dots, k$ et $k + 1, \dots, k + p$. On pose alors

$$f(k + 1/2) = \Pi_{[k,k+1]}(k + 1/2)$$

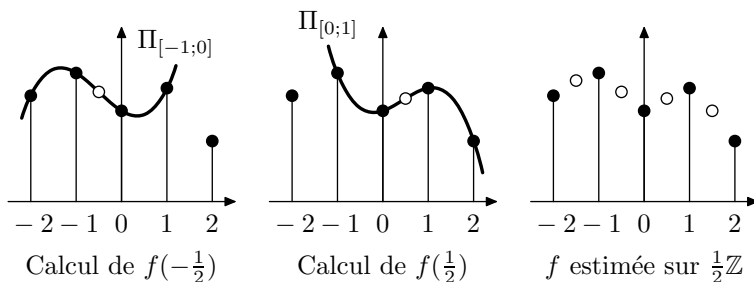


FIG. B.4 – Schéma de raffinement dyadique de DESLAURIERS–DUBUC. Les points noirs désignent les valeurs de f sur la grille entière, et les points blancs les valeurs interpolées de la grille demi-entière. Deux polynômes de LAGRANGE sont également tracés. Dans cet exemple, leur degré est 3. Les deux images de gauches indiquent comment sont calculées $f(-1/2)$ et $f(1/2)$, tandis que l'image de droite montre les valeurs de f sur la grille demi-entière.

Un exemple est représenté sur la figure B.4. Ce schéma peut être itéré indéfiniment pour obtenir une définition de f sur l'ensemble \mathcal{D} de tous les rationnels de la forme $k/2^j$. On peut montrer que si la suite originale $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est uniformément continue (i.e. $(f(k) - f(k+1))_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée), alors l'interpolée de f définie sur \mathcal{D} est également uniformément continue, et peut donc être prolongée par continuité sur \mathbb{R} tout entier¹.

Le processus d'interpolation dyadique est linéaire, et les valeurs intermédiaires s'obtiennent par filtrage :

$$f(k + 1/2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_0[2l + 1] f(k - l)$$

1. En fait, comme les ondelettes sont à support compact, l'hypothèse de continuité uniforme sur la suite $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas nécessaire. Dans ce cas, la fonction interpolée peut être prolongée en fonction continue sur \mathbb{R} .

où m_0 est le filtre de DESLAURIERS–DUBUC mentionné ci-dessus.

Ainsi, pour construire une fonction d'échelle ϕ_{jk} , on peut partir de la grille $\mathbb{Z}/2^j$ sur laquelle on définit les valeurs de ϕ_{jk} par :

$$\phi_{jk} \left(\frac{l}{2^j} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$$

On étend ensuite la définition de ϕ_{jk} sur \mathcal{D} tout entier en itérant le schéma d'interpolation dyadique, puis sur \mathbb{R} tout entier par densité. La définition d'ondelette dans ces termes ne pose pas de problème. On définit $\psi_{jk} = \phi_{j+1, 2k+1}$.

Adaptation à l'intervalle

C'est cette construction que nous pouvons étendre à l'intervalle. Le seul problème que nous avons à résoudre dans ce cas est de définir le schéma d'interpolation dyadique près du bord. Si nous partons d'une grille entière restreinte à l'intervalle $[0, N]$, et si les polynômes de LAGRANGE sont de degré 3, le schéma de raffinement de DESLAURIERS–DUBUC ne peut pas être utilisé tel quel pour estimer la valeur en $\frac{1}{2}$, car le polynôme devrait être construit sur la base des valeurs de f en $-1, 0, 1$ et 2 , mais la fonction f n'est connue que dans $\{0, \dots, N\}$. On contourne cette difficulté en utilisant un polynôme de LAGRANGE décentré, c'est-à-dire que $f(1/2)$ est estimé avec le polynôme $\Pi_{[1;2]}$. On voit donc que le même polynôme sert à estimer $f(1/2)$ et $f(3/2)$.

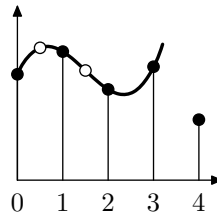


FIG. B.5 – Schéma d'interpolation décentré. Le même polynôme $\Pi_{[1;2]}$ sert à estimer les valeurs interpolées $f(3/2)$ et $f(1/2)$.

D'une manière générale, pour un ordre d'interpolation pair $2p$ quelconque, on peut adapter le schéma de DESLAURIERS et DUBUC à l'intervalle. Ceci fait intervenir $p - 1$ filtres de bord en plus du filtre de DESLAURIERS–DUBUC classique. On peut montrer que les fonctions d'échelles ainsi construites ont au moins la même régularité que celles définies sur la droite réelle toute entière. À chaque échelle j , on a $2p$ fonctions d'échelle de bord à chaque extrémité de l'intervalle :

$$\begin{cases} \phi_{jk}^g & \text{pour } 0 \leq k < 2p \text{ à gauche} \\ \phi_{jk}^d & \text{pour } N2^j - 2p < k \leq N2^j, \text{ à droite} \\ \phi_{jk} & \text{pour } 2p \leq k \leq N2^j - 2p, \text{ de forme inchangée} \end{cases}$$

Les ondelettes de bord ϕ_{jk}^g et ϕ_{jk}^d remplacent des ondelettes ϕ_{jk} dont le support ne serait pas inclus dans $[0, N]$.

Les espaces d'échelles V_j sur l'intervalle sont donc engendrés par les $N2^j + 1$ fonctions d'échelle ainsi construites. Un espace de détails W_j est encore construit par sous-échantillonnage de l'espace d'échelle V_{j+1} , en sélectionnant les ondelettes de la forme $\phi_{j+1,k}^g$, $\phi_{j+1,k}$ et $\phi_{j+1,k}^d$ d'indice k impair.

Remarques

- Il faut remarquer que la dimension naturelle d'un espace d'échelle V_j n'est plus un multiple de 2^j comme dans le cas orthogonal, mais « multiple de 2^j plus 1 ».
- La régularité des fonctions d'échelles et des ondelettes ainsi construites est au moins égale à celles des ondelettes construites sur la droite réelle entière. La raison est qu'à l'intérieur de l'intervalle $[0, N]$, ces fonctions coïncident avec des combinaisons linéaires finies d'ondelettes de la droite réelle, et que près des bords, elles sont polynômiales. Plus précisément, des ondelettes de l'intervalle ϕ_{jk}^g ou ϕ_{jk}^d sont polynômiales sur respectivement $[0, 2^{-j}]$ et $[N - 2^{-j}, N]$.

Autres constructions

Ce genre de constructions a un défaut partagé avec les ondelettes orthogonales sur l'intervalle de COHEN, DAUBECHIES, JAWERTH et VIAL. Les ondelettes de bord ont un rebond (*overshoot*) de plus en plus important quand le paramètre qui régit l'ordre d'approximation devient de plus en plus élevé (alors que les ondelettes définies sur tout l'intervalle ont une valeur absolue bornée par 1).

Ainsi,

- pour $p = 2$, $\max |\phi_{0,1}^g| > 1.04$
- pour $p = 3$, $\max |\phi_{0,1}^g| > 1.25$
- pour $p = 6$, $\max |\phi_{0,3}^g| > 6.8$
- pour $p = 12$, $\max |\phi_{0,5}^g| > 665$

Une parade que l'on peut imaginer est de prendre des filtres de bord d'ordre inférieur, mais alors la décroissance des coefficients d'ondelettes en sera affectée le long du bord.

Il existe un autre cas dans lequel il peut être utile de réduire localement la taille des filtres : quand l'échelle est très grossière (relativement à la taille de l'intervalle). Si l'intervalle considéré est $[0, 1]$, la grille entière correspondante ne contient que deux nœuds. Il n'est évidemment pas possible de faire une interpolation de LAGRANGE avec de polynômes de degré supérieur à 1. Ceci permet d'avoir une base d'ondelettes d'interpolation dans laquelle l'espace de d'échelle est de très petite dimension, même si par ailleurs l'ordre d'interpolation est très élevé.

Dans la construction d'une base d'ondelettes de DESLAURIERS–DUBUC de $\mathcal{C}([0, 1])$ le raffinement pour passer de la résolution $j = 0$ à la résolution $j = 1$ utilise un polynôme de LAGRANGE de degré 1, le raffinement de $j = 1$ à $j = 2$ un polynôme de degré 2. Les raffinements suivants se font avec un schéma de DESLAURIERS–DUBUC décentré décrit ci-dessus. Dans la figure B.6, les schémas d'interpolation glissants de LAGRANGE sont figurés à gauche, et les ondelettes de la base d'interpolation ainsi construites à droite.

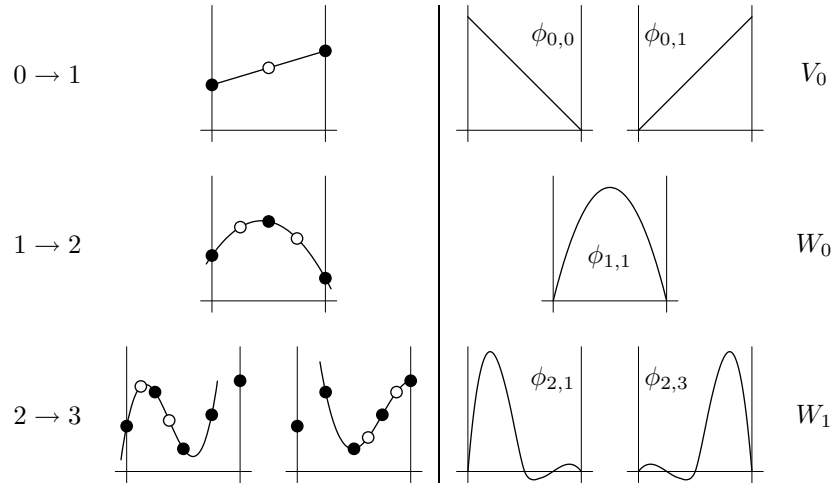


FIG. B.6 – Schémas de raffinement dyadique aux échelles basses (à gauche) et fonctions de base (à droite) pour une base d'interpolation sur l'intervalle à 4 moments nuls.

B.5 Théorèmes d'approximation uniforme

Dans la plupart des cas, la topologie utilisée pour parler de convergence de décomposition en ondelettes de fonction est la topologie L_2 . C'est une topologie naturelle pour certains problèmes de traitement du signal, et pratique.

Dans le cas des ondelettes d'interpolation, avec le choix que fait DONOHO de bases de Riesz pour les espaces de détails, la topologie qui s'impose est une topologie de norme L_∞ , notamment parce que les ondelettes duales étant des sommes finies de masses de DIRAC, elles ne sont pas dans L_2 .

Un premier théorème est dû à DONOHO, et montre qu'une fonction uniformément continue peut être approchée avec une précision arbitraire par sa décomposition sur V_j , pourvu que j soit suffisamment grand. DONOHO suppose que la fonction d'échelle ϕ a une décroissance exponentielle.

Théorème B.1 (DONOHO)

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, et si la fonction d'interpolation ϕ est à décroissance exponentielle, alors

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \phi(2^j t - k) \right| \tag{B.1}$$

est fini pour tout j et tend vers 0 quand $j \rightarrow +\infty$.

On peut proposer des variantes de ce théorème. Soit on maintient l'hypothèse selon laquelle la fonction f est uniformément continue. Dans ce cas, la décroissance imposée sur

ϕ doit être suffisamment rapide pour que les sommes

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \phi(2^j t - k) \quad (\text{B.2})$$

soient convergentes uniformément en t . Comme une fonction uniformément continue est de croissance au plus linéaire, il suffit d'imposer à la fonction ϕ :

$$\exists \epsilon > 0, M > 0 : |\phi(t)| < \frac{M}{1 + |t|^{2+\epsilon}}$$

c'est à dire une décroissance beaucoup plus faible.

Une autre approche consiste à réduire les hypothèses sur la fonction f en la supposant seulement continue sur \mathbb{R} . Dans ce cas, les fonctions ϕ doivent être à support compact, afin de garantir que les sommes (B.2) soient toujours définies.

Théorème B.2

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et si la fonction d'interpolation ϕ est à support compact, alors

$$\sup_{t \in [-M, M]} \left| f(t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \phi(2^j t - k) \right|$$

tend vers 0 quand $j \rightarrow +\infty$, et ce pour tout $M > 0$. En d'autres termes, l'approximation par des sommes de fonctions d'interpolation est convergente dans l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} , au sens de la topologie d'espace de FRÉCHET muni de la famille de seminormes $(\mathcal{N}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\mathcal{N}_n(f) = \sup_{t \in [-N, N]} |f(t)|$$

On peut énoncer un théorème similaire pour le cas d'une décomposition sur l'intervalle. Dans ce cas, les problèmes de continuité ou d'uniforme continuité ne se posent pas. Par ailleurs, quand on fait des hypothèses de régularité plus forte sur la fonction, la décroissance à travers les échelles des coefficients d'ondelettes permet de majorer explicitement l'erreur d'approximation (B.1). Ainsi, on peut montrer que si la fonction est LIPSCHITZ- α , l'erreur d'approximation pourra être bornée par $M2^{-\alpha j}$.

B.6 Ondelettes de DESLAURIERS–DUBUC triadiques

Dans certaines variantes des algorithmes d'apprentissage décrits dans les chapitres précédents, nous utilisons des ondelettes d'interpolation triadiques et non dyadiques. Nous pouvons facilement construire de telles ondelettes en adaptant le schéma dyadique ci-dessus. Au lieu d'utiliser un raffinement dyadique, qui interpole une fonction définie sur \mathbb{Z} en une fonction définie sur $2\mathbb{Z}$, le raffinement triadique produira à partir d'une fonction définie sur \mathbb{Z} une fonction définie sur $3\mathbb{Z}$.

On obtient ces ondelettes de nouveau par interpolation de LAGRANGE glissante. Pour chaque intervalle entier $[k, k + 1]$, nous prenons des entiers placés symétriquement $k - p + 1, \dots, k$ et $k + 1, \dots, k + p$, et notons $\Pi_{[k, k+1]}$ le polynôme de Lagrange qui coïncide avec f sur ces points. Nous posons alors

$$\begin{aligned} f(k + 1/3) &= \Pi_{[k, k+1]}(k + 1/3) \\ f(k + 2/3) &= \Pi_{[k, k+1]}(k + 2/3) \end{aligned}$$

Ceci est illustré dans les figures B.7-a,b. Ce schéma peut également est adapté à un intervalle fini. Dans ce cas encore, le masque d'interpolation doit être décentré près des bords afin que les points de référence utilisés soient bien dans l'intervalle, comme cela est indiqué dans la figure B.7-c.

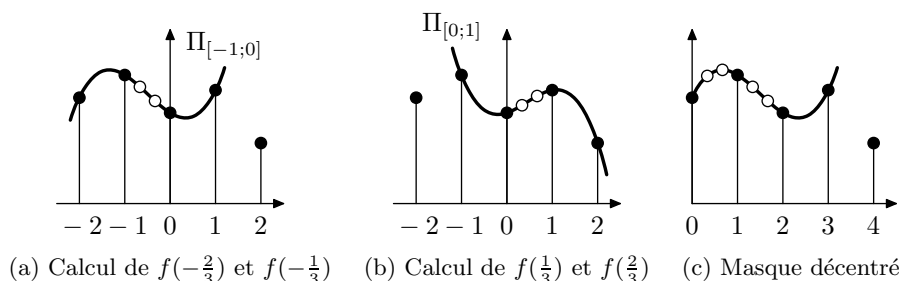


FIG. B.7 – Schéma de raffinement triadique

Pour des polynômes de Lagrange de degré 3, ce qui correspond à un choix de paramètre $p = 2$, nous avons un filtre d'interpolation

$$m_0(\omega) = \frac{81 + 120 \cos \omega + 60 \cos 2\omega - 10 \cos 4\omega - 8 \cos 5\omega}{243} \quad (\text{B.3})$$

qui définissent par convolutions infinies une fonction d'interpolation

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{3^j}\right)$$

Si nous définissons les ondelettes ϕ_{jk} comme étant $\phi(3^j x - k)$ sur la droite toute entière, et utilisons dans le cas de l'intervalle une définition similaire à celle donnée pour les ondelettes dyadiques, nous pouvons exhiber de nouvelles bases

$$\{\phi_{jk} : (j > 0 \text{ et } 3k \notin \mathbb{Z}) \text{ ou } j = 0\}$$

pour la droite réelle, et

$$\{\phi_{jk} : 0 \leq k \leq N3^j, (j > 0 \text{ et } 3k \notin \mathbb{Z}) \text{ ou } j = 0\}$$

pour l'intervalle $[0, N]$.

L'effet tunnel des ondelettes triadiques

Une différence notable entre ondelettes dyadiques et triadiques apparaît dans la construction d'ondelettes sur l'intervalle. Des ondelettes de bord, qui ont une forme différente des ondelettes de la droite réelle à cause de la proximité du bord, apparaissent à des positions où une ondelette de la droite réelle aurait eu son support inclus dans l'intervalle. Cette différence est reliée au fait que le support d'une ondelette s_w est dans le cas triadique strictement inférieur au support du filtre s_f , alors que les supports sont égaux dans le cas dyadique. En effet

$$s_w = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) s_f = s_f \quad \text{dans le cas dyadique,}$$

$$s_w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) s_f = \frac{1}{2} s_f \quad \text{dans le cas triadique.}$$

Pour les ondelettes dyadiques, la situation est différente, dans la mesure où il est courant de construire des ondelettes de bord uniquement pour remplacer des ondelettes qui déborderaient de l'intervalle si elles avaient la forme d'ondelettes de la droite réelle.

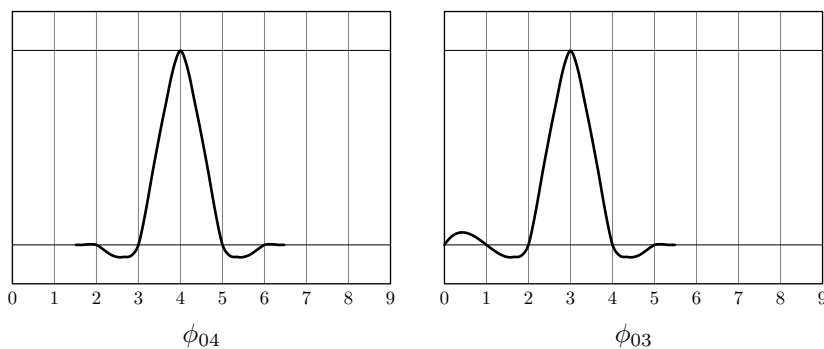


FIG. B.8 – Ondelettes triadiques sur l'intervalle. En (a), l'ondelette ϕ_{04} sur l'intervalle $[0; 9]$ n'est pas une ondelette de bord, et a comme support $[1,5; 6,5]$. En (b), l'ondelette ϕ_{03} est une ondelette de bord, et a comme support $[0; 5,5]$. Ce qui est spécifique au cas triadique est que l'ondelette ϕ_{04} déplacée d'un pas vers la droite aurait tenu dans l'intervalle, mais il se trouve que l'ondelette centrée en 3 est quand même une ondelette de bord.

Bibliographie

- [CDV93] A. COHEN, I. DAUBECHIES et P. VIAL. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(1):54–81, 1993.
- [DD87] G. DESLAURIERS et S. DUBUC. Interpolation dyadique. Dans *Fractals, dimensions non-entières et applications*, pages 44–55. Masson, Paris, 1987.
- [DD89] G. DESLAURIERS et S. DUBUC. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5:49–68, 1989.
- [Don92] D. L. DONOHO. Interpolating wavelet transforms. Rapport technique, Technical Report 408, Department of Statistics, Stanford University, 1992.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.