Master 2 Mathématique
Projet en traitement d'image

Rapport

---

par Elsa DUFILS

Année Universitaire : 2011-2012
Université d'Orléans

Introduction

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830) a qui nous devons l'analyse de Fourier, tant utilisée dans les mathématiques d'aujourd'hui, qui avec la technologie comme l'ordinateur a ouvert des possibilités infinies pour le traitement des signaux.

N'ayant pas suivi le cours de première année, ce travail s'est avéré utile, tant pour appréhender mon stage que pour ma culture personnelle.
Les outils mathématiques qui y sont développés, forment la base nécessaire pour la compréhension en traitement d'image ou d'un signal.
En analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques, et permet de leur associer un spectre en fréquences.Plus précisément, par cette transformation les signaux ou images sont représentés dans le domaine des fréquences.

Dans tout ce projet, nous allons travailler soit sur des signaux 1D, soit sur des images en niveaux de gris, qui sont considérées comme des signaux à 2 dimensions.

Sommaire

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre 1

Effets de la transformée de Fourier sur des signaux et des images

1.1 Transformée de Fourier

Définitions

Soit s un signal ou une image, sa transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{s}(\omega) = TF(s) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t}dt.$$

$\hat{s}$ s'appelle le spectre de s.

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Propriétés

- Conditions d'existence de la Transformée de Fourier :
  Une fonction u(t) admet pour transformée de Fourier la fonction $\hat{u}$ si :
  - u(t) est bornée
  - $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$ existe
  - les discontinuités de u(t) sont en nombre fini.

- Convolution :
  La première propriété que nous utiliserons souvent est la convolution $*$, qui se traduit en multiplication . dans le domaine de Fourier.

  $$u \,\hat{*}\, v = TF(u * v) = \hat{u}.\hat{v}$$

  et

  $$\hat{u.v} = TF(u.v) = \frac{1}{2\pi}\hat{u} * \hat{v}$$

- Linéarité :

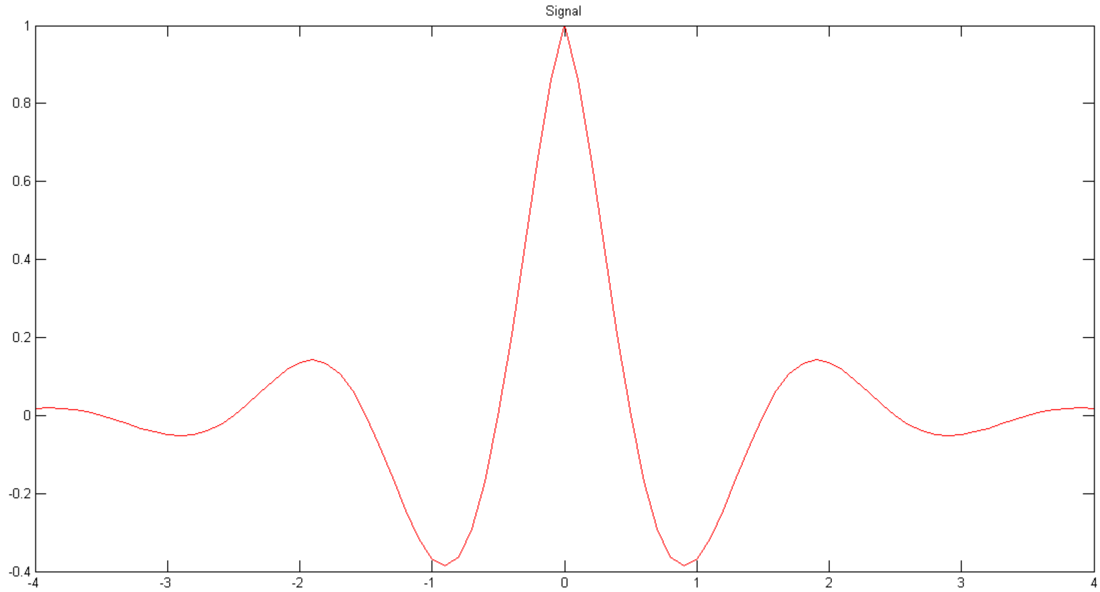
  $$u \,\hat{+}\, v = TF(u + v) = \hat{u} + \hat{v}.$$

- La grande motivation de l'utilisation de la transformée de Fourier est quelle permet d'exprimer des fonctions dans le domaine fréquentiel.

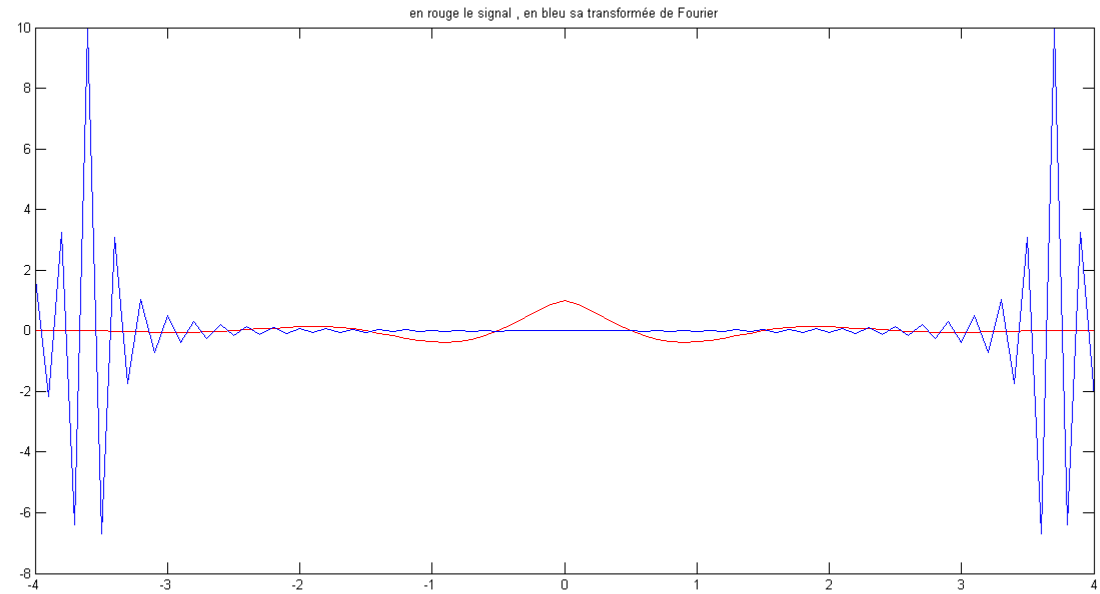
Application sur un signal

Voici un signal que nous allons étudié :

$$s = e^{-|x|}cos(\pi x)$$



Sur le signal ci-dessus , nous appliquons la transformée de Fourier :

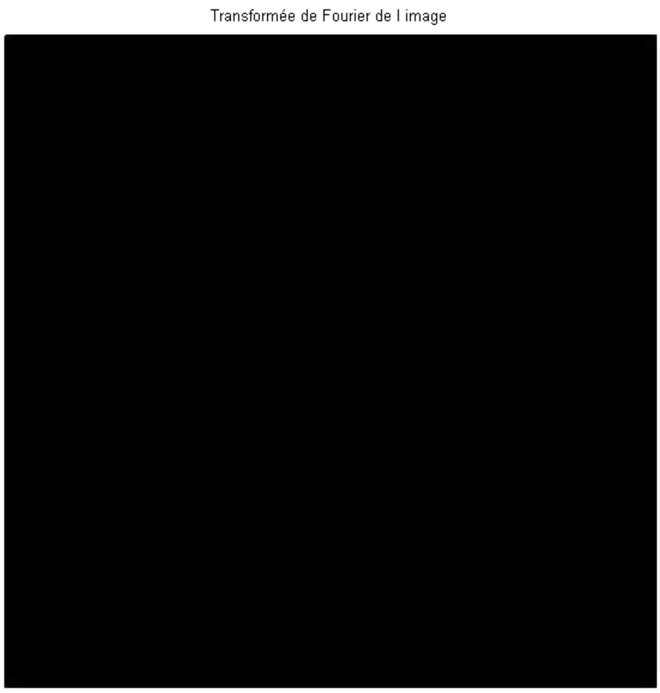


Nous voyons l'effet de périodisation qu'implique la transformée de Fourier. Elle nous renseigne aussi sur la répartition de l'énergie selon les fréquences (voir densité spectrale).

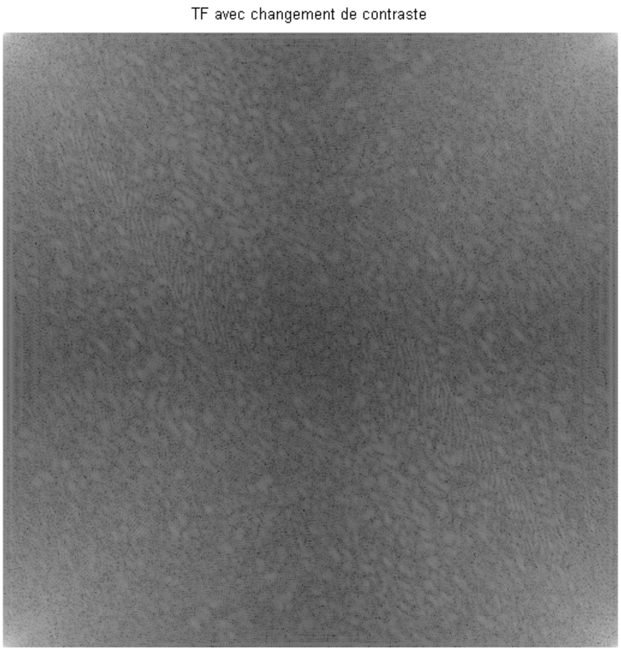
Application sur des images

- ∘ Visualisons son spectre (= sa transformée de Fourier) :

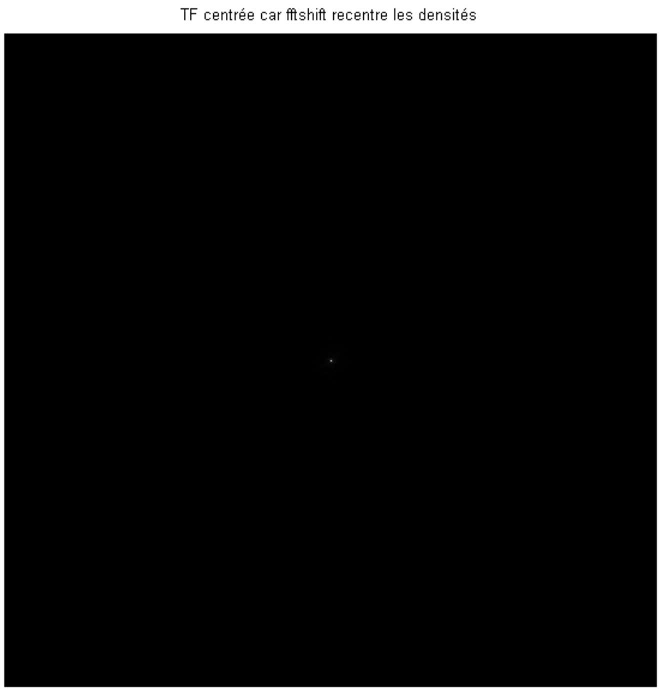
L'application de la transformée de Fourier 2D sur cette image, nous donne :



Soit en effectuant une modification du contraste :

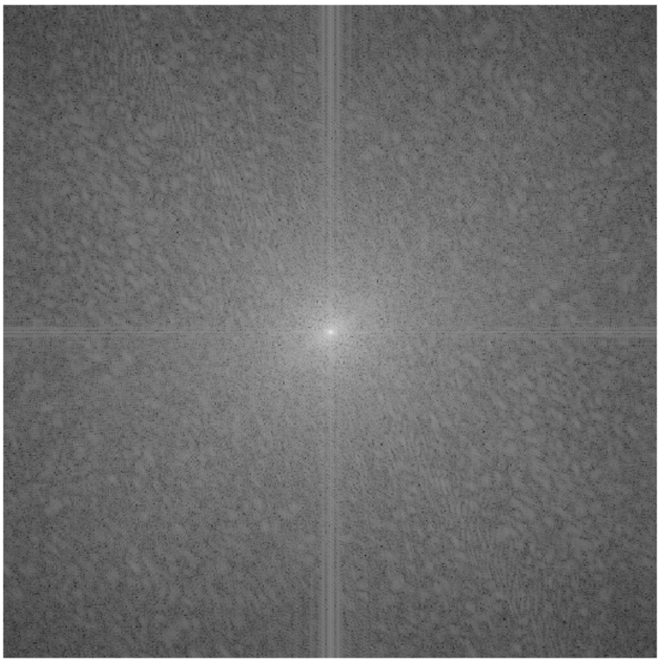


Nous constatons que les hautes fréquences se situent dans les 4 coins, tandis que les basse fréquences se retrouvent au centre.
En effectuant la commande fftshift(), nous centrons ces hautes fréquences, mais nous effectuons des échanges entre les 4 cadrans.



Plus précisément, le cadran en haut à gauche échange sa place avec celui en bas à droite, de même pour les 2 autres cadrans, regardez ci- dessous :

TF centrée avec Changement de contraste



Un changement de contraste est effectué pour plus de clarté.
Nous retrouvons l'image de départ par la transformée de Fourier inverse :

TF inverse

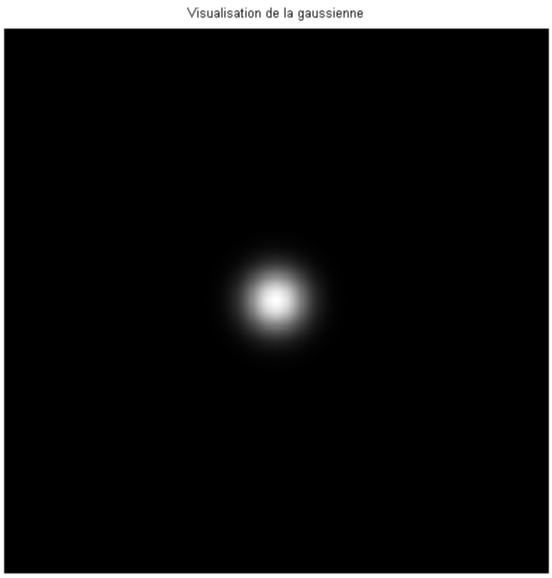
- Convolée par une gaussienne :

Nous allons voir l'effet de la transformée de Fourier d'une image convolée avec une gaussienne.
Voici la gaussienne :

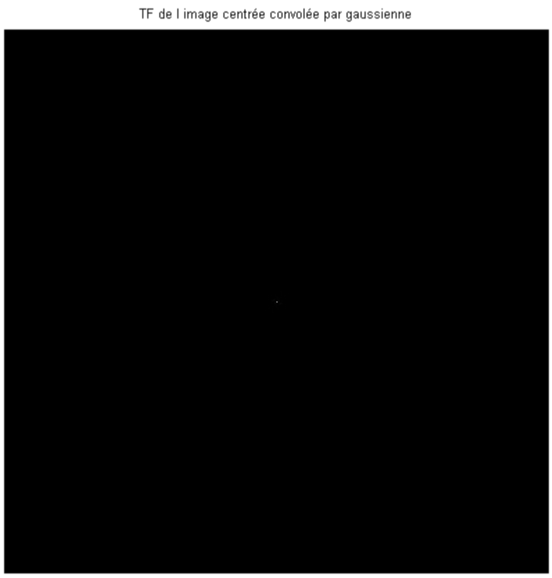
$$\sigma = 20$$

$$G = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

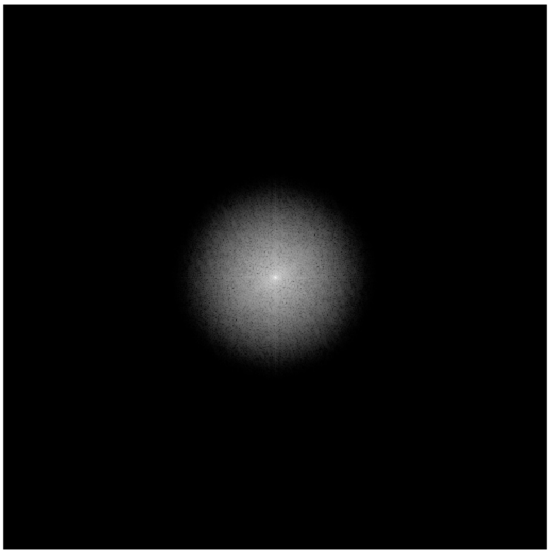
Rappelons que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.



Après convolution de notre image avec G , nous obtenons le spectre centré suivant :



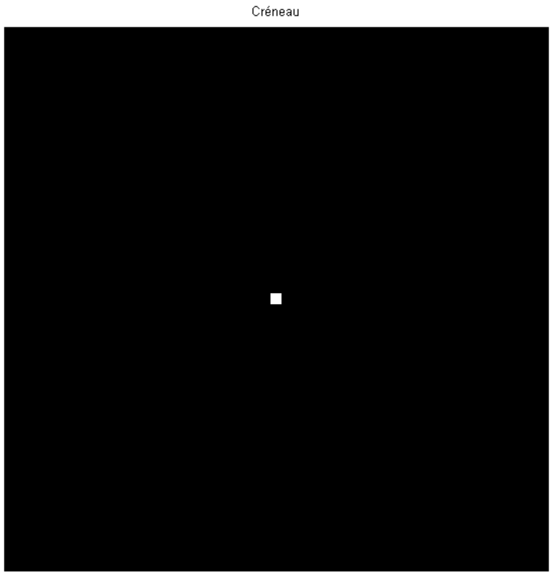
Un point blanc apparait au centre, difficile à voir.
Effectuons un changement de contraste pour y voir mieux :



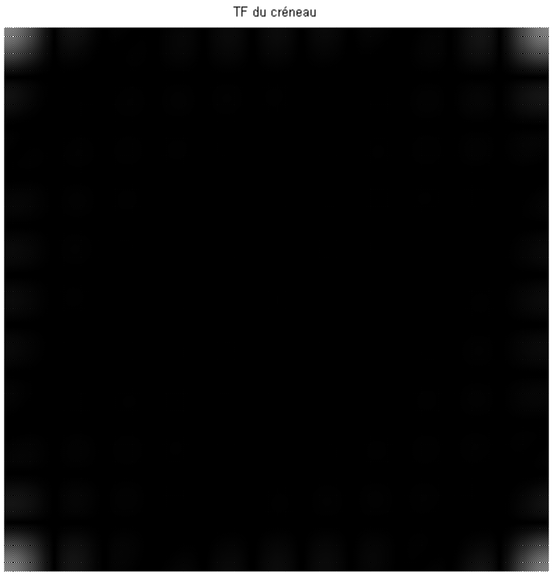
Appliquons ensuite la transformée de Fourier inverse et nous obtenons :

L'image obtenue est floue.

◦ Convolée par une fonction créneau :
Voici le créneau choisi :



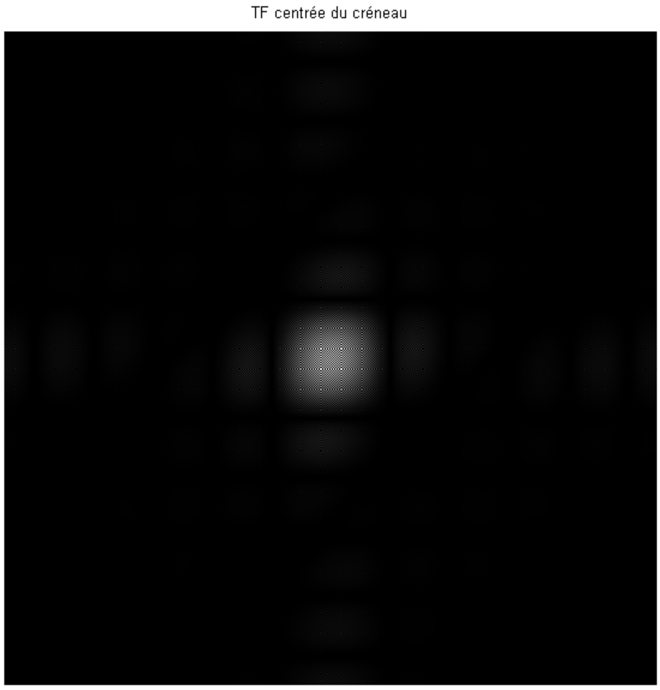
En appliquant la transformée de Fourier au créneau, nous obtenons le résultat suivant :



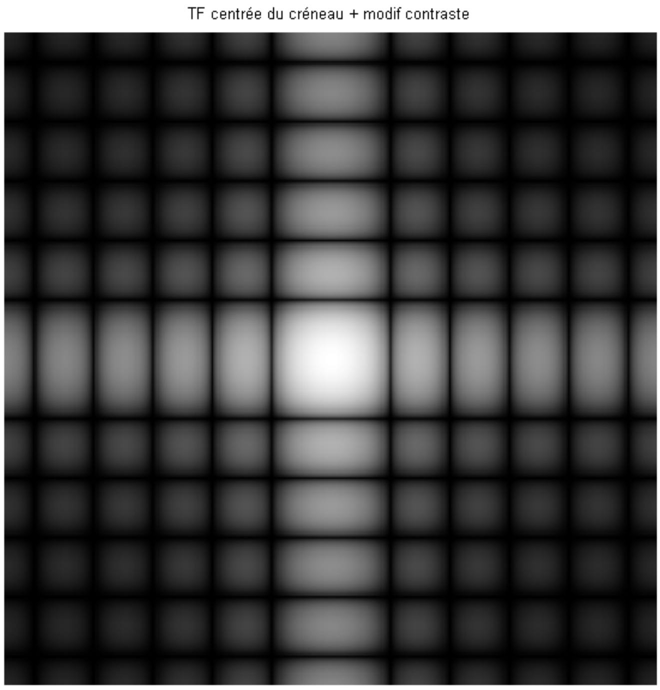
La transformée de Fourier d'un créneau est un sinus cardinal, i.e.

$$sinc(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

Ce sinus cardinal va apporter des variations aux bords.
En centrant les densités , voici le spectre obtenu :



Par changement de contraste nous avons :



Enfin, voilà le résultat après convolution de notre hibiscus avec le créneau choisi :

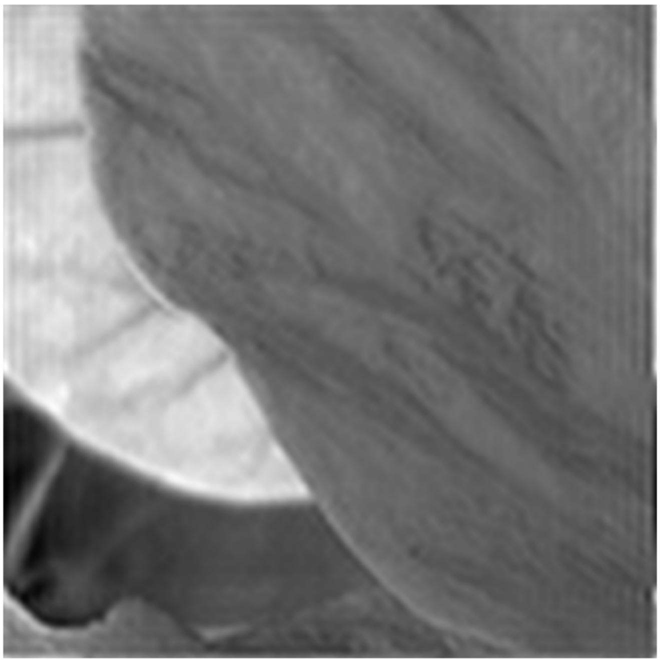
Cette image est très floue, nous observons un effet de ringing sur le cadre (voir plus loin).Nous avons l'impression de "double" contours.

1.2 Zéro-padding , aliasing , effet de ringing

- Zoom par zéro-padding :

En calculant la Transformée de Fourier de cette partie d'image, puis en la complétant par des zéros puis en appliquant la transformée de Fourier inverse, le résultat est le suivant :

zero-padding avec effet de ringing



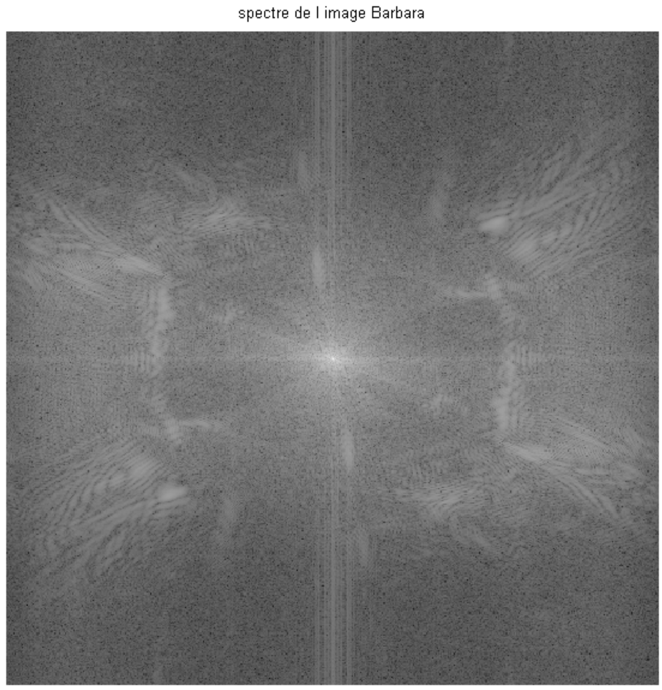
Cette méthode ajoute une discontinuité au signal temporel par un passage brutal à zéro, ce qui rajoute du flou à l'image reconstituée, et nous voyons aussi apparaitre sur les bords du cadre des traits (voir section suivante).

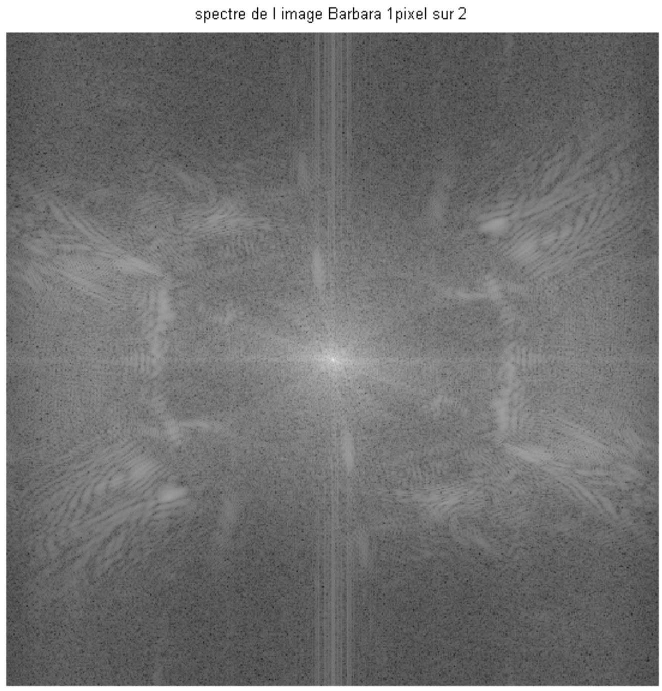
- Effet de ringing :
  Nous venons de voir sur l'image ci-dessus, ce qui s'appelle un effet de ringing. Nous l'observons bien en bas à gauche. Nous retrouvons un morceau foncé du bord gauche collé au bord droit.

- Aliasing
  Nous allons travailler sur l'image de Barbara ci-dessous :

Nous constituons une autre image en prenant 1 pixel sur 2 de l'image précédente, voici le résultat :

Nous pouvons constater l'effet d'aliasing, c'est à dire qu'il apparait sur l'image des formes (i.e. des pixels) qui n'existent pas.
Sur le genou à notre gauche, nous observons des morceaux de cercles au lieu de lignes.
Regardons les spectres :





On observe plus de cercles sur le deuxième spectre.

1.3 Densité spectrale de puissance

Définition : L'énergie spectrale est le carré du module de la transformée de Fourier d'un signal ou d'une image :

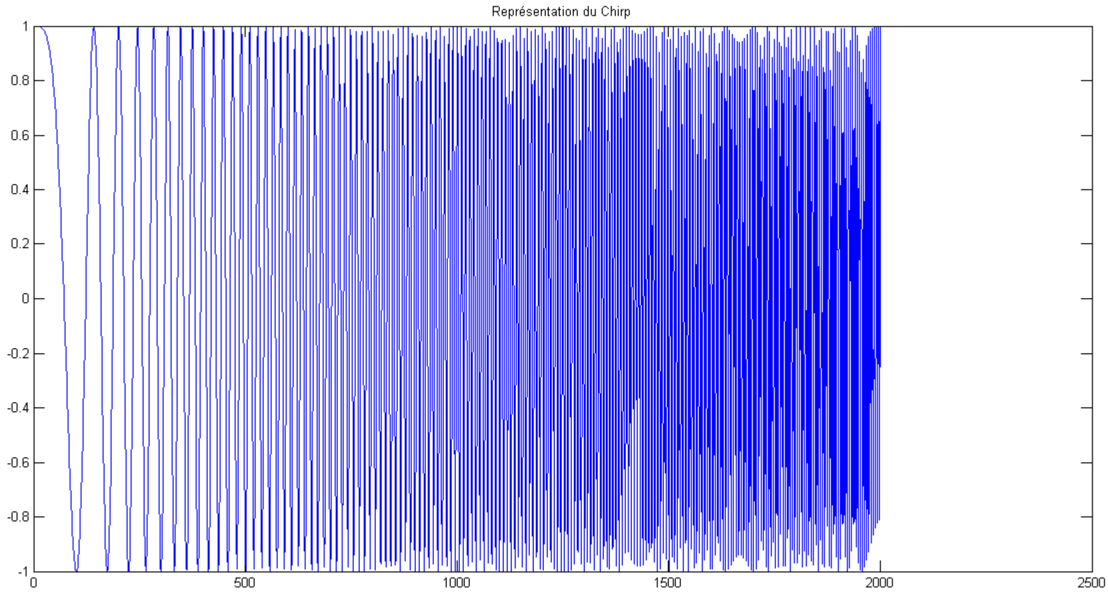
$$E = |\hat{u}|^2$$

- Cas particulier d'un Chirp :
  Un chirp est une fonction du type :

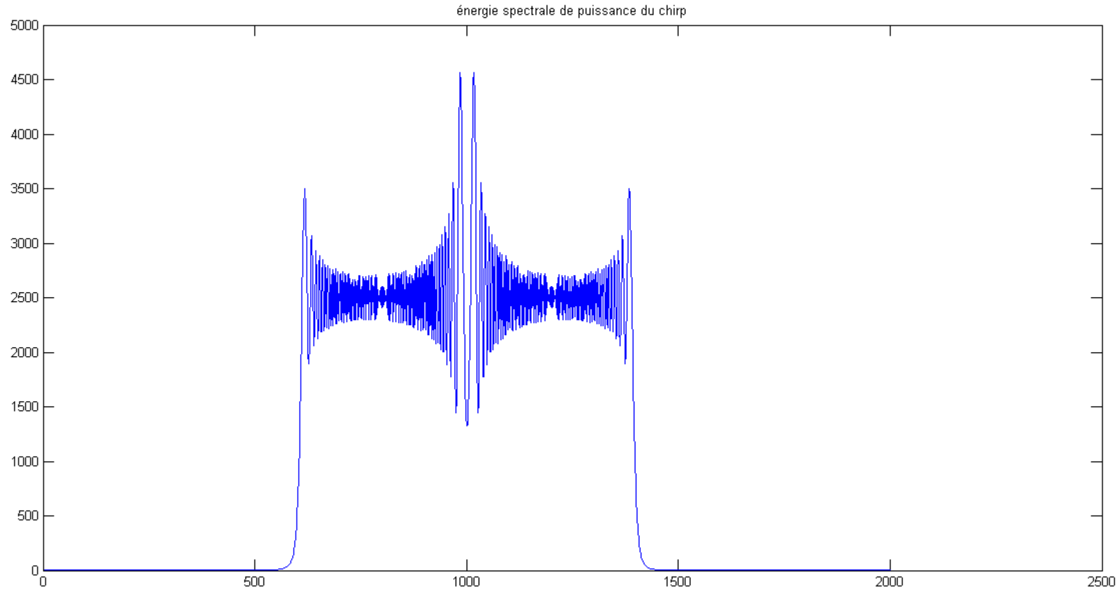
$$f(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}$$

avec A(t) l'amplitude et $\Phi(t)$ la phase.
Voici le chirp étudié, généré par la commande matlab suivante :

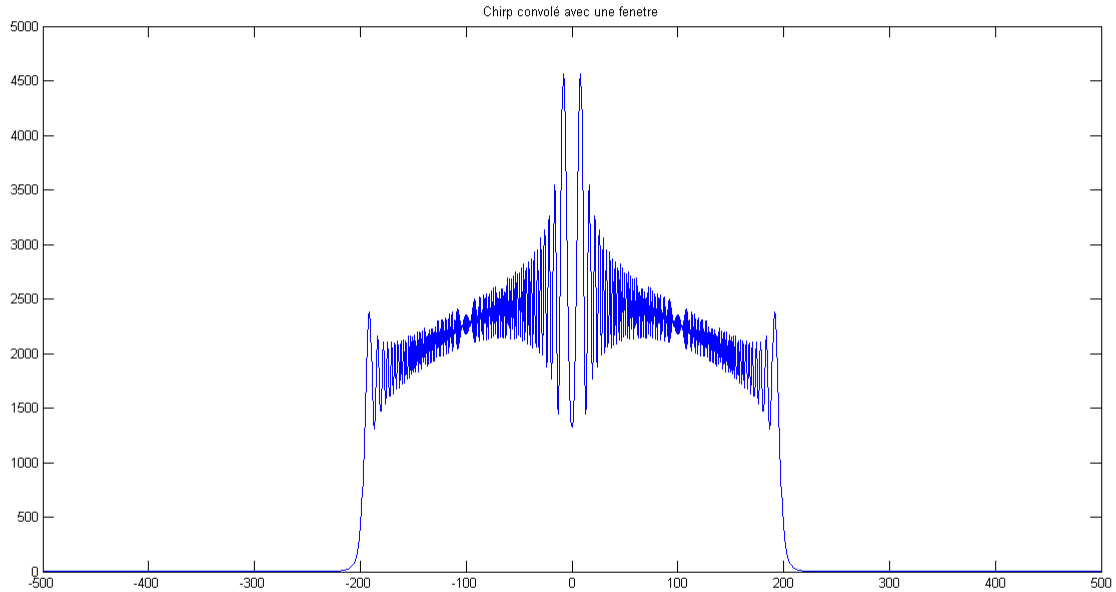
$$chirp(t, 0, 1, 100);$$



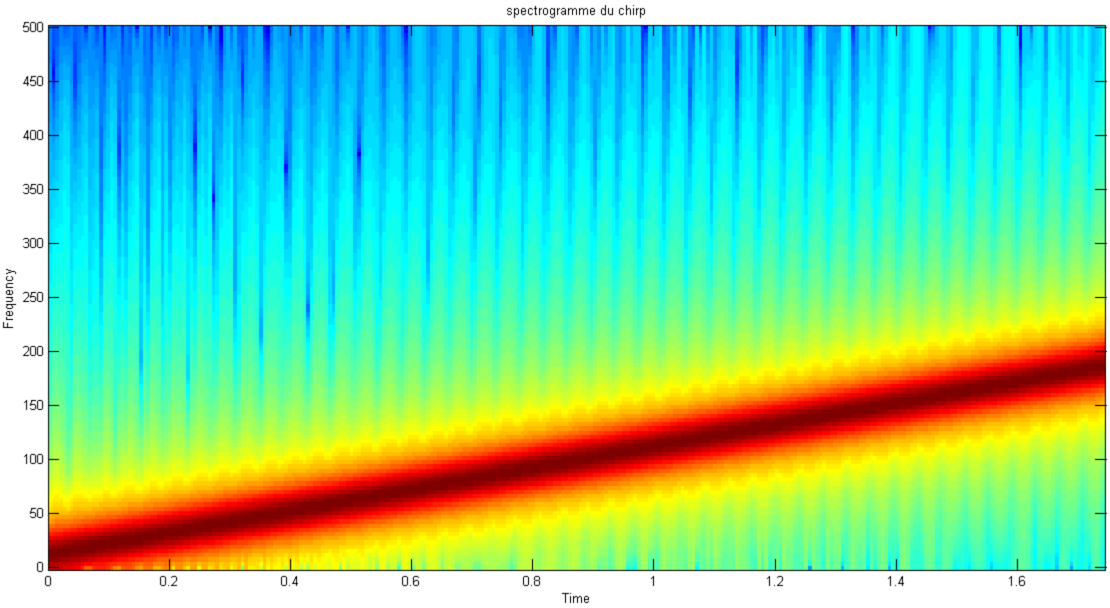
Nous remarquons que les oscillations du signal s'accentue avec le temps.
Son énergie spectrale est représentée comme suit :



Pour obtenir sa densité spectrale de puissance , nous convolons l'énergie avec une fenêtre rectangulaire de Hann (générée par Matlab aussi) :



Son spectrogramme nous donne :



Nous remarquons la croissance linéaire de la fréquence par rapport au temps. En effet plus le temps augmente, plus la fréquence croit.
Ce qui signifie que plus le signal est rapide en temps, plus sa fréquence est importante, c'est à dire qu'un changement brutal en temps se traduit par une haute fréquence.
Nous venons de faire une analyse temps-fréquence, sujet du chapitre suivant.

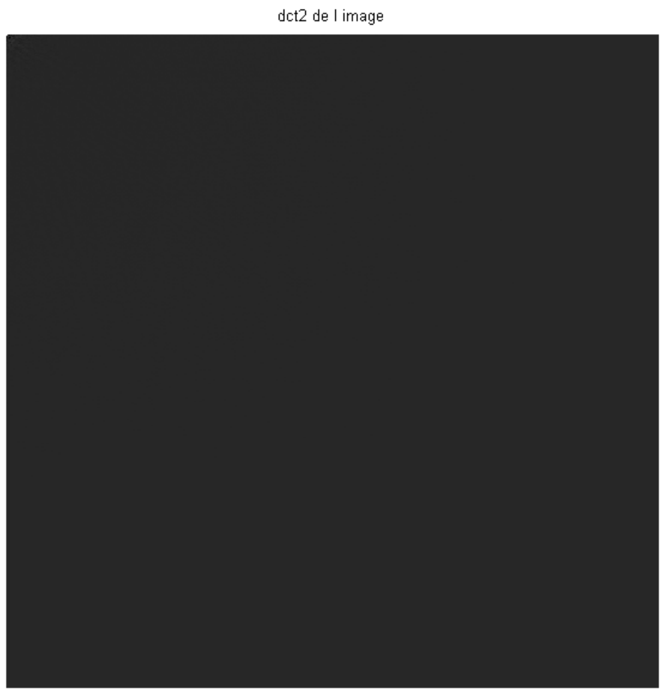
Chapitre 2

Analyse temps-fréquence

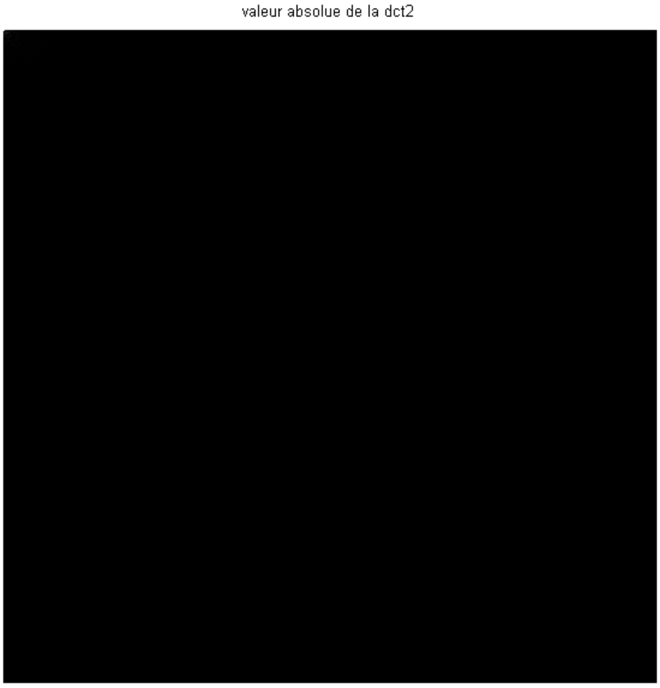
Cette partie a été motivée par la recherche de singularités dans un signal ou une image. Malheureusement, la transformée de Fourier, certes facile à mettre en oeuvre, présente l'inconvénient suivant.Elle ne permet pas une analyse totalement satisfaisante de toutes les images ou signaux. Dans le spectre, d'un signal par exemple, certains aspects temporels du signal disparaissent, par exemple le début ou la fin du signal, ou le moment d'apparition d'une singularité. Ainsi vient l'idée de faire une analyse à la fois en temps et en fréquence.

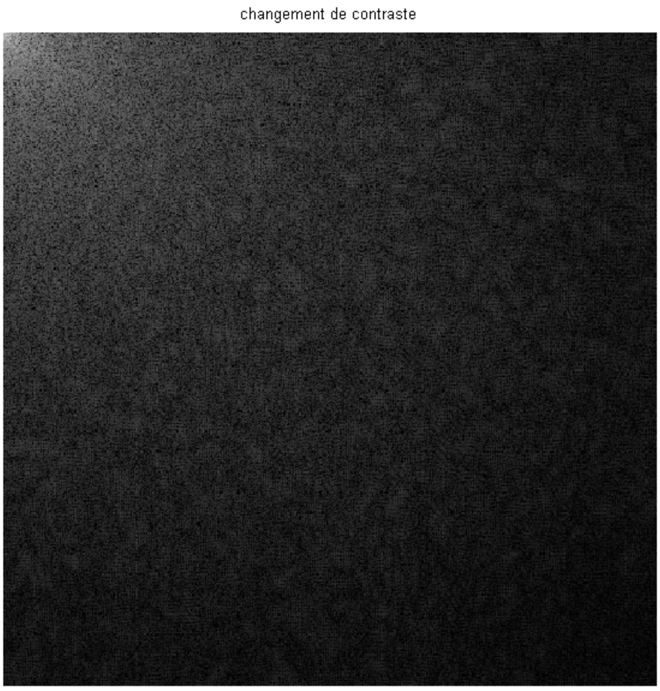
2.1 Discrete Cosinus Transform et DCT par blocs

La transformée en cosinus discrète, utilisée pour la compression d'image,est un cas particulier de la transformée de Fourier. Dans la seconde nous avons décomposé le signal en somme d'exponentielles, tandis que désormais nous allons le décomposer en somme de cosinus, comme son nom l'indique.
En appliquant la fonction dct2() de Matlab sur notre image d'hibiscus, nous obtenons :

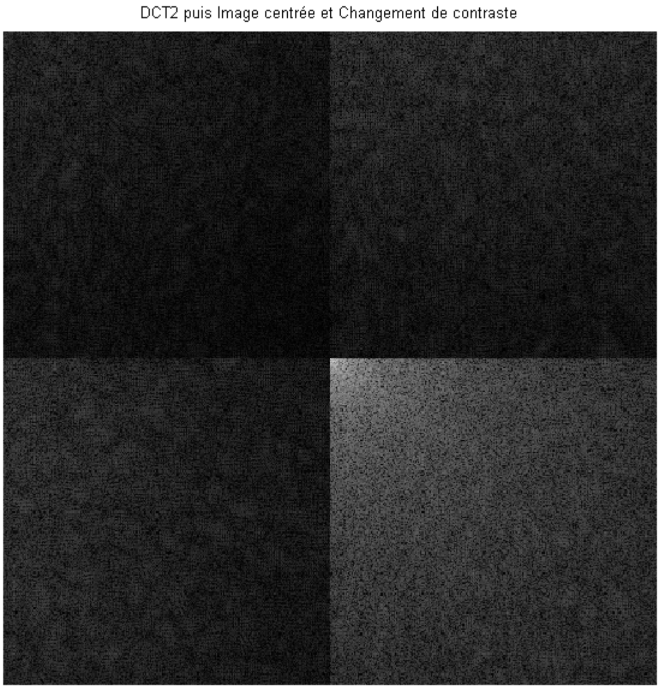


Les basse fréquences se retrouvent en haut à gauche tandis que les hautes fréquences sont en bas à droite.Nous le voyons plus aisément avec un changement de contraste.

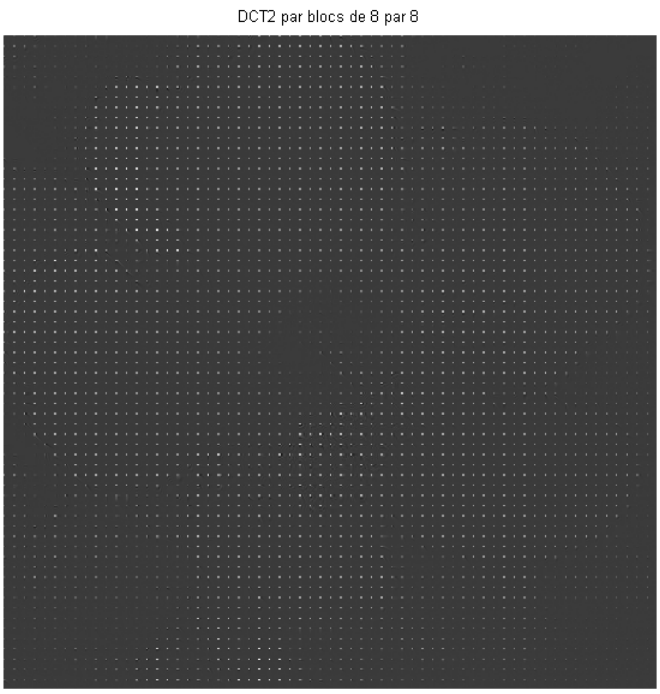




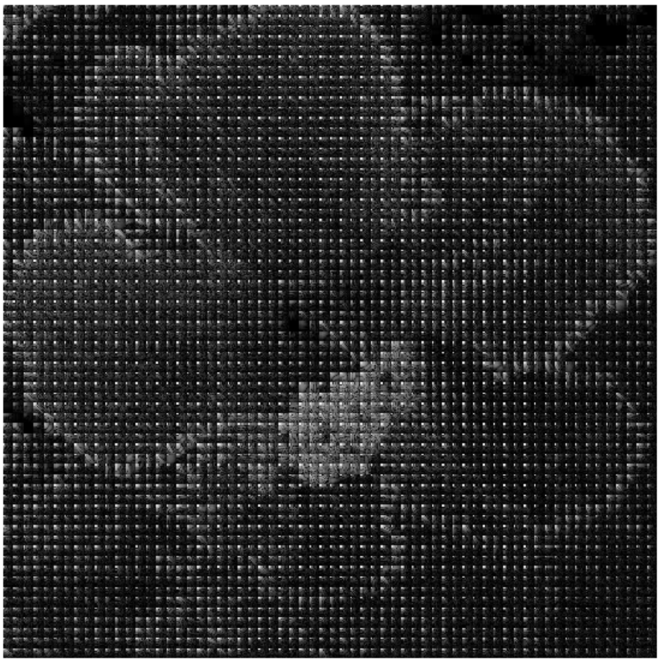
Centrons ces fréquences par fftshift() :



En appliquant iDCT2 nous récupérons l'image de départ.
De plus nous pouvons exécuter cette transformation par blocs, ici par bloc de 8 pixels sur 8, cela donne :



Nous avons ainsi calculer le spectre sur chaque bloc.
En effectuant un changement de contraste, nous voyons bien que l'image est créée de petits carrés de 8 par 8 pixels :

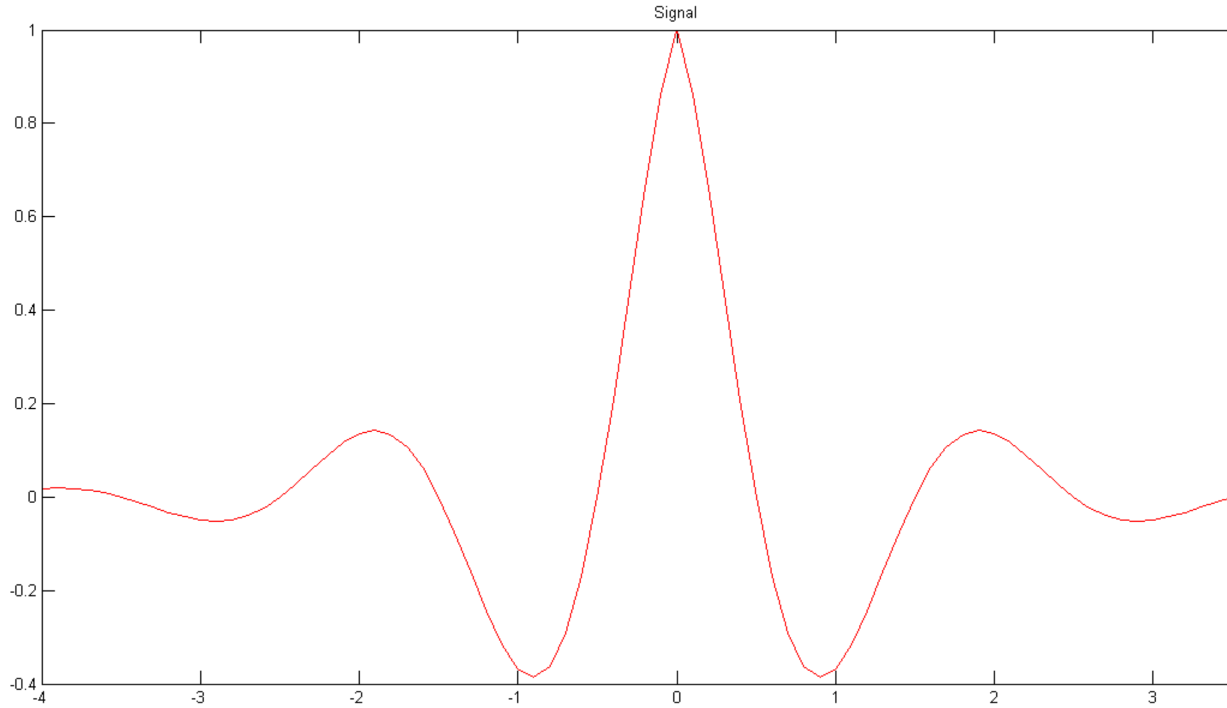


Nous avons effectuer une compression de l'image hibiscus. En fait la DCT réalise une compression avec perte d'information, comme nous pouvons le voir certains détails ont disparu.

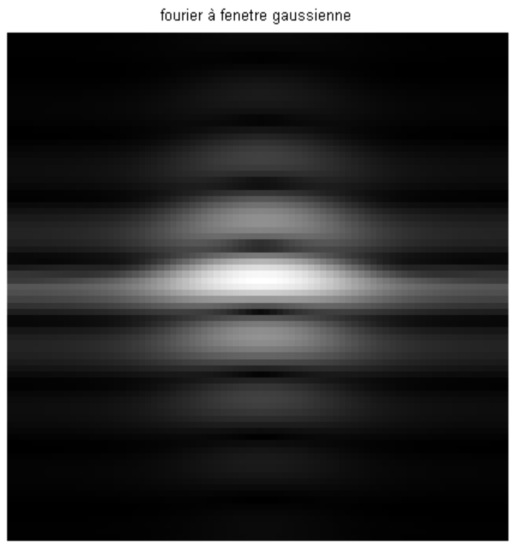
2.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

L'idée d'adapter la transformée de Fourier globale en se limitant à une fenêtre, est venue du souhait de regarder le spectre sur une partie importante, en somme de créer une transformation locale.
Nous avons vu en cours, que le choix de la fenêtre et de sa taille, influé sur la précision du résultat.
La fenêtre "glissante" permet ainsi d'obtenir et d'étudier différentes informations tout le long du signal.

Nous allons travailler sur le signal suivant :



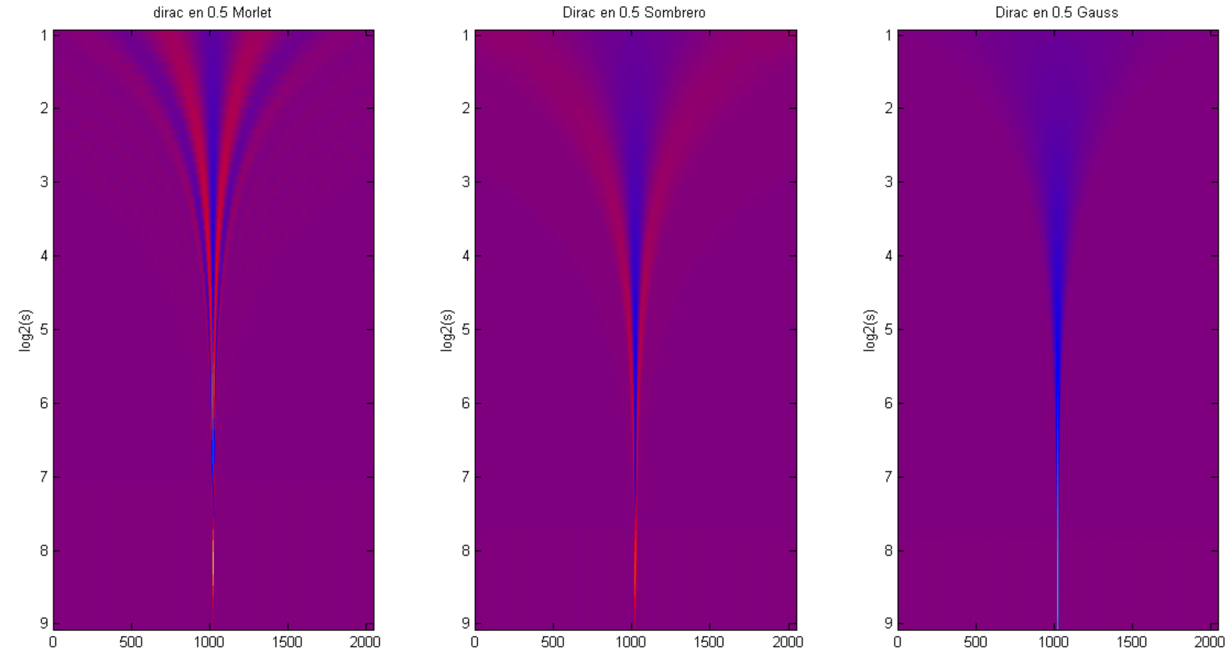
Nous prenons une fenêtre gaussienne, puis calculons la transformée de Fourier sur chaque fenêtre,et nous obtenons :



2.3 Un pas vers les ondelettes

Nous pouvons détecter des singularités par des méthodes utilisant des ondelettes (de Haar, de Morlet, du "chapeau mexicain",...).

Sur un exemple essentiel, le dirac au temps $t = 0.5$:

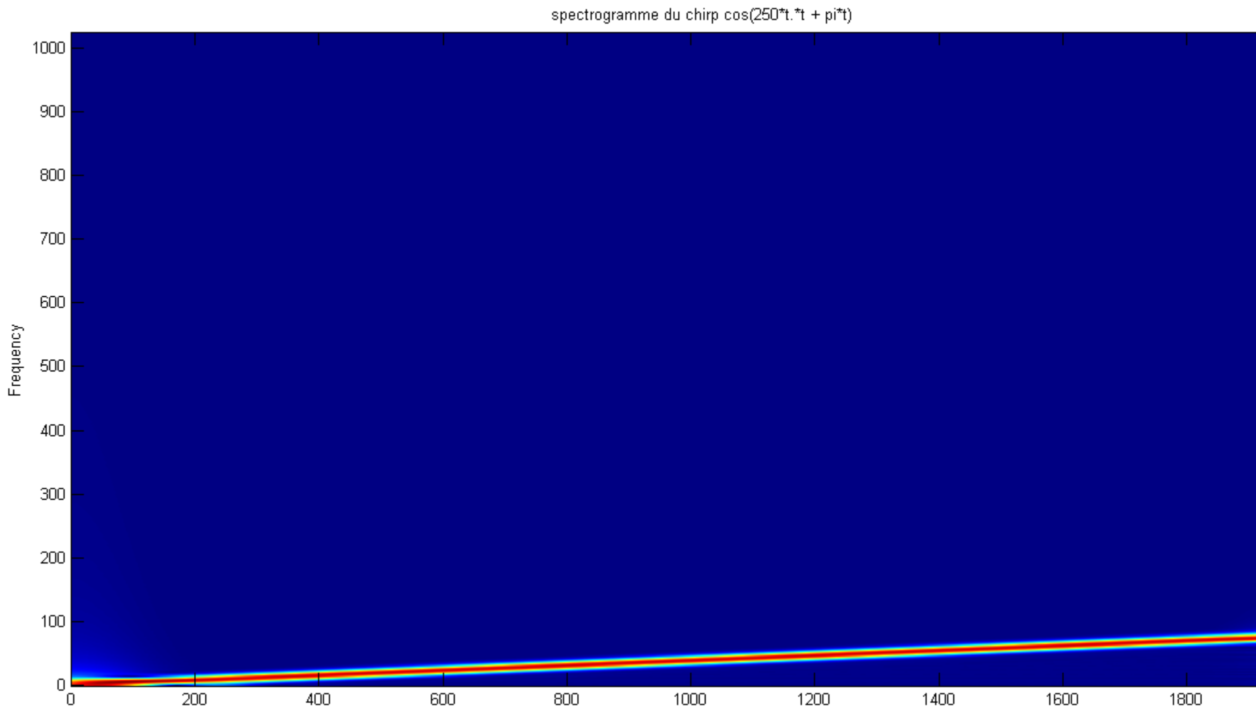


Nous voyons que l'ondelette de Morlet détecte bien la singularité qu'offre le dirac. Les deux autres ondelettes marque le dirac quand même.

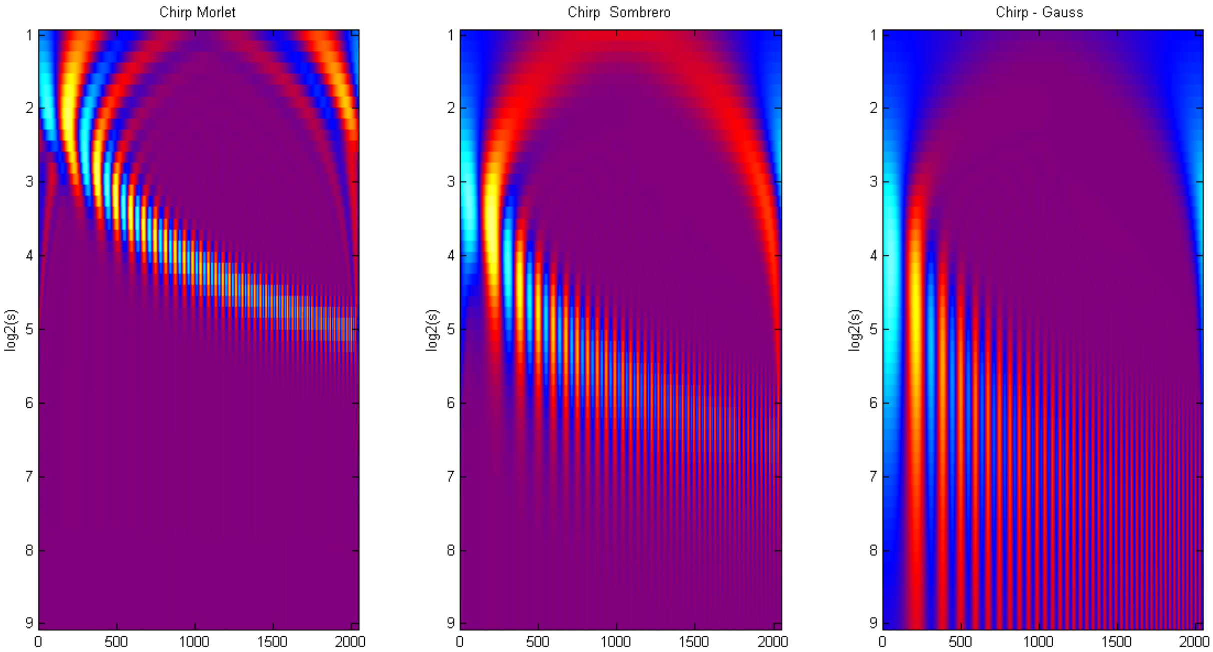
Testons différentes ondelettes sur le chirp suivant :

$$cos(250t^2 + \pi t)$$

Voici son spectrogramme :



Et voici sa représentation par les ondelettes :



Pareil l'ondelette de Morlet semble la plus appropriée pour détecter les singularités.

Ces exemples ne sont pas exhaustifs mais suffisent à prouver que les transformations en ondelettes permet de détecter plus aisément les singularités qu'avec une transformation de Fourier.

Conclusion

En conclusion, la transformée de Fourier est l'un des outil l'est plus fondamental pour le traitement du signal, mais il existe d'autres solutions suivant le problème cherché. Comme nous avons pu le voir, l'analyse par ondelettes est aussi une bonne alternative.

Remerciements

Je remercie Cécile LOUCHET, pour m'avoir donner de son temps et m'accompagner pendant toute l'élaboration de ce projet.
Ce projet m'a permis de me remettre à niveau, ainsi que de corriger certaines erreurs, qui s'étaient installées avec le temps (malheureusement !). J'ajouterai que c'est en pratiquant que la compréhension s'installe.

Références

[1] Lionel MOISAN. *Modeling and Image Processing.* 11-2005.

[2] Maïtine BERGOUGNIOUX *Mathématiques pour le Traitement du signal.* 2010, Dunod.