Traitement Numérique du Signal

Méthodes Avancées

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse
IRIT/INP-ENSEEIHT

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr

Pré-requis

Outils de représentation

- Variable complexe et Transformée en z
- Transformée de Laplace

Traitement Numérique du Signal - Base (TNS1)

- Transformée de Fourier Discrète (TFD)
  - TFD pondérée
  - algorithme rapide
- Filtrage numérique
  - filtrage linéaire (filtres invariants, causaux)
  - filtres RIF et RII
  - synthèse directe des filtres RIF (fenêtrage)
  - synthèse des filtres RII
  - implantation (structures directe, canonique, cascade/série, parallèle)

Bibliographie

- M. Bellanger, *Traitement Numérique du Signal - Théorie et Pratique*, Masson, 1994.
- F. Castanie, *Traitement Numérique du Signal - Méthodes avancées*, Polycopié ENSEEIHT, 2002.
- B. Porat, *A course in digital signal processing*, Wiley, 1997.
- J. G. Proakis and D. Manolakis, *Digital Signal Processing - Principles, Algorithms and Applications*, Pearson, 1996.
- IEEEXplore Digital Library, `http://ieeexplore.ieee.org`.
- et tout le www...

Exemples d'applications

- traitement du signal
  - débruitage, compression, détection,...
- traitement d'image
  - réhaussement de contour, compression,
  - notions de fréquence spatiale, de traitement 2D (voir 3D),...
- traitement d'antenne/de phase
  - notion de front d'onde,
- télécommunications numériques (e.g., mobiles)
  - notions de multi-trajet, d'égalisation,

$\Rightarrow$ Nécessité d'*implanter* les filtres LIT !

Filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT)

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow y$$

Propriétés

- Linéarité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[a x_1(n) + b x_2(n)\right] &= a\mathcal{F}\left[x_1(n)\right] + b\mathcal{F}\left[x_2(n)\right] \\ &= a y_1(n) + b y_2(n). \end{aligned}$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\exists h(n,k) = \mathcal{F}\left[\delta(n-k)\right] \quad \text{tel que} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n,k)$$

- Invariance dans le temps :

$$\forall n_0,\ y(n) = \mathcal{F}\left[x(n)\right] \Leftrightarrow y(n-n_0) = \mathcal{F}\left[x(n-n_0)\right]. \qquad (1)$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\forall n, \forall k,\ h(n,k) = h(n-k).$$

$\Rightarrow$ Filtre *linéaire invariant dans le temps* (LIT) caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou sa transmittance $H(z) = \mathrm{TZ}\left[h(k)\right]$
$\Rightarrow$ L'opération de filtrage devient $y(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = h(n) * x(n)$ (convolution temporelle) ou $Y(z) = H(Z)X(Z)$ (produit "fréquentiel").

Filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT)

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow y$$

Propriétés

- Linéarité :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] &= a\mathcal{F}\left[x_1(n)\right] + b\mathcal{F}\left[x_2(n)\right] \\ &= ay_1(n) + by_2(n).\end{aligned}$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\exists h(n,k) = \mathcal{F}\left[\delta(n-k)\right] \quad \text{tel que} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n,k)$$

- Invariance dans le temps :

$$\forall n_0,\ y(n) = \mathcal{F}\left[x(n)\right] \Leftrightarrow y(n-n_0) = \mathcal{F}\left[x(n-n_0)\right]. \qquad (1)$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\forall n, \forall k,\ h(n,k) = h(n-k).$$

$\Rightarrow$ Filtre *linéaire invariant dans le temps* (LIT) caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou sa transmittance $H(z) = \mathrm{TZ}\left[h(k)\right]$
$\Rightarrow$ L'opération de filtrage devient $y(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = h(n) * x(n)$ (convolution temporelle) ou $Y(z) = H(Z)X(Z)$ (produit "fréquentiel").

Filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT)

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow y$$

Propriétés

- Linéarité :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] &= a\mathcal{F}\left[x_1(n)\right] + b\mathcal{F}\left[x_2(n)\right] \\ &= ay_1(n) + by_2(n).\end{aligned}$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\exists h(n,k) = \mathcal{F}\left[\delta(n-k)\right] \quad \text{tel que} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n,k)$$

- Invariance dans le temps :

$$\forall n_0,\ y(n) = \mathcal{F}\left[x(n)\right] \Leftrightarrow y(n-n_0) = \mathcal{F}\left[x(n-n_0)\right]. \qquad (1)$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\forall n, \forall k,\ h(n,k) = h(n-k).$$

$\Rightarrow$ Filtre *linéaire invariant dans le temps* (LIT) caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou sa transmittance $H(z) = \mathrm{TZ}\left[h(k)\right]$
$\Rightarrow$ L'opération de filtrage devient $y(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = h(n) * x(n)$ (convolution temporelle) ou $Y(z) = H(Z)X(Z)$ (produit "fréquentiel").

Filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT)

$$x \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow y$$

Propriétés

- Linéarité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] &= a\mathcal{F}\left[x_1(n)\right] + b\mathcal{F}\left[x_2(n)\right] \\ &= ay_1(n) + by_2(n). \end{aligned}$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\exists h(n,k) = \mathcal{F}\left[\delta(n-k)\right] \quad \text{tel que} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n,k)$$

- Invariance dans le temps :

$$\forall n_0,\ y(n) = \mathcal{F}\left[x(n)\right] \Leftrightarrow y(n-n_0) = \mathcal{F}\left[x(n-n_0)\right]. \tag{1}$$

Condition nécessaire et suffisante :

$$\forall n, \forall k,\ h(n,k) = h(n-k).$$

$\Rightarrow$ Filtre *linéaire invariant dans le temps* (LIT) caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou sa transmittance $H(z) = \mathrm{TZ}\left[h(k)\right]$
$\Rightarrow$ L'opération de filtrage devient $y(n) = \sum_k x(k)h(n-k) = h(n) * x(n)$ (convolution temporelle) ou $Y(z) = H(Z)X(Z)$ (produit "fréquentiel").

Plan du cours

Plan du cours

Plan du cours

Quelques rappels sur les RIF

- Caractérisés par une réponse impulsionnelle finie :

$$h(k) = \begin{cases} b_k, & k = 0, \ldots, M \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Transmittance correspondante :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} h(k) z^{-k}$$

- Propriétés
  - calcul non récursif
    $\longrightarrow$ stabilité, faible sensibilité numérique
  - phase linéaire possible si symétrie de la RI

$$h(k) = \pm h(M-k), \ k = 0, \ldots, M, \ (\text{suivant parité de } M)$$

Synthèse directe (rappel)

Soit $H_{\mathrm{I}}(z)\big|_{z=e^{i2\pi f}}$ la transmittance idéale en fréquence.

- Développement en série de Fourier de $H_{\mathrm{I}}\left(e^{i2\pi f}\right) \rightarrow$ RI

$$H_{\mathrm{I}}\left(e^{i2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi f}$$

avec $c_k = h_{\mathrm{I}}(k) \propto \int_{-1/2}^{1/2} H_{\mathrm{I}}\left(e^{i2\pi f}\right) e^{-i2\pi f} df$

- Troncature fenêtrée de la RI (ordre du filtre fixé à $M = 2L + 1$),

$$h_0(k) = h_{\mathrm{I}}(k)w(k), \;\; k = -L, \ldots, L$$

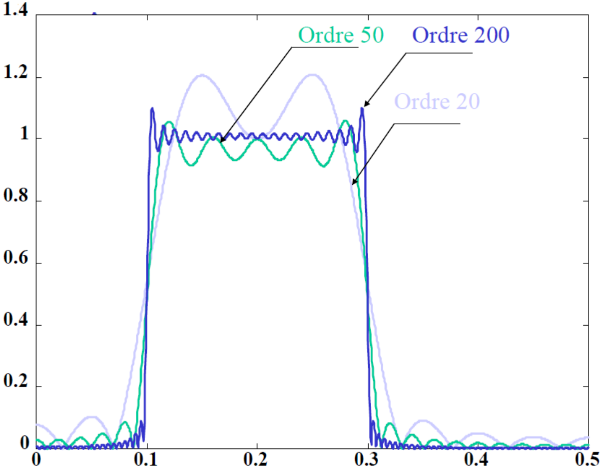
Étapes facultatives : "Itérations" (ordre M et fenêtre $w(\cdot)$),

- Décalage de la RI pour la rendre causale

$$h_{\mathrm{N}}(k) = h_0(k - k_0) \text{ (avec } k_0 \geq L)$$

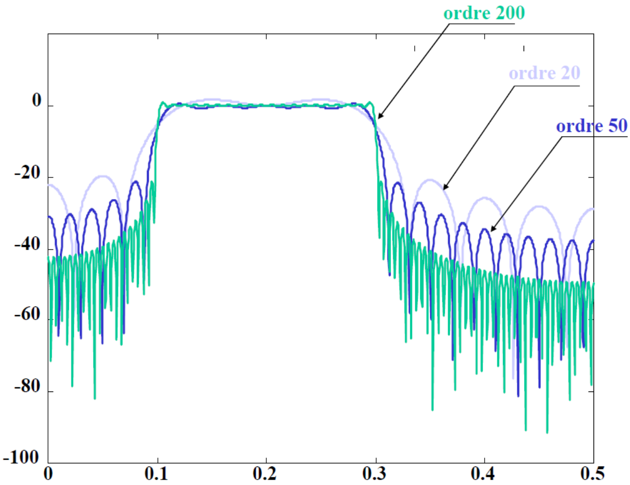
Synthèse directe (rappel)

Influence de l'ordre (fenêtre naturelle)



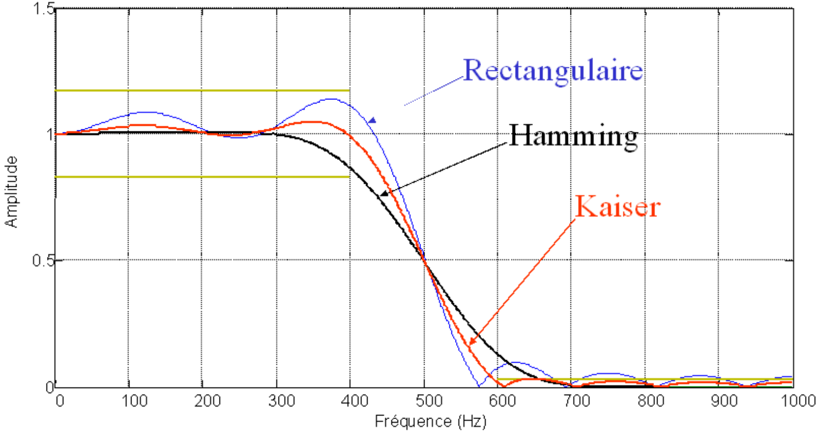
Synthèse directe (rappel)

Influence de l'ordre (fenêtre naturelle)



Synthèse directe (rappel)

Influence de la fenêtre (ordre fixé $M = 22$)



Échantillonnage en fréquence

Soit un filtre RIF dont la transmittance $H_I(z)$ est spécifiée en $(M+1)$ points $z_0, \ldots, z_M$.

- $\mathcal{H} = \{H_I(z_0), \ldots, H_I(z_M)\}$ est l'ensemble des contraintes (fortes).
- Soit l'approximation polynômiale (d'ordre M)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} L_n(z) H_I(z_n) \quad \text{avec} \quad L_n(z_m) = \delta(m-n)$$

Remarque : on a bien $H(z_m) = H_I(z_m)$ $(\forall m)$

- Le polynôme de Lagrange (unique) est

$$L_n(z) = \prod_{m \neq n}^{M} \frac{1 - z^{-1} z_m}{1 - z_n^{-1} z_m}$$

Échantillonnage en fréquence

- $H_{\mathrm{I}}(z)$ est réécrit

$$H(z) = \left[\prod_{n=0}^{M}\left(1 - z_n z^{-1}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m}{1 - z_m z^{-1}}\right]$$

avec

$$A_m = \frac{H_{\mathrm{I}}\left(z_m\right)}{\prod_{n\neq m}\left(1 - z_n z_m^{-1}\right)}$$

- Si les contraintes $\mathcal{H}$ sont spécifiées en des points équidistants sur le cercle unité $z_n = e^{i2\pi\frac{n}{M+1}}$ alors on obtient

$$H(z) = \left[\frac{1 - z^{M+1}}{M+1}\right]\underbrace{\left[\sum_{m=0}^{M}\underbrace{H_{\mathrm{I}}\left(e^{i2\pi\frac{m}{M+1}}\right)}_{\text{Gain}}\underbrace{\frac{1}{1 - e^{i2\pi\frac{m}{M+1}}z^{-1}}}_{\text{Cellule 1er ordre}}\right]}_{\text{Mise en parallèle de cellules du 1er ordre}}$$

Plan du cours

Quelques rappels sur les RII

- Caractérisés par une récurrence linéaire à coefficients constants :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{M} b_k x(n-k)$$

  où $\exists j \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $a_j \neq 0$ (avec $a_0 = 1$),

- Transmittance correspondante :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}$$

- Propriétés : performants ($\approx$ sélectifs) mais
  - (in)stabilité définie par la position des pôles
  - sensibilité numérique (propagation des erreurs)
  - temps de propagation de groupe non constant

Synthèse directe (rappel)

Soit la transmittance idéale en fréquence $H_{\mathrm{I}}(z)\big|_{z=e^{i2\pi f}}$

- Choix de la caractéristique
  - conservation de la réponse temporelle

Synthèse directe (rappel)

Soit la transmittance idéale en fréquence $H_{\mathrm{I}}(z)\big|_{z=e^{i2\pi f}}$

- Choix de la caractéristique
  - conservation de la réponse temporelle
  - conservation de la réponse harmonique
- Calcul d'un gabarit analogique à l'aide de la transformation

$$f_A = \frac{f_E}{\pi} \tan\left(\pi \tilde{f}_N\right)$$

- Synthèse de $H_A(p)$ ($p = i2\pi f_A$) satisfaisant la gabarit analogique (choix de l'ordre, du prototype...)
- Retour au plan en Z par transformation bilinéaire

$$p = 2f_E \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Approximants de Padé

- On se propose d'approcher la transmittance idéale $H_{\mathrm{I}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}$ par l'approximant rationnel

$$G_{m,n}(z) = \frac{B_m(z)}{A_n(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}}, \quad \text{avec } u_0 = 1$$

  où $B_n(\cdot)$ et $A_m(\cdot)$ sont des polynômes de degrés n et m, resp.

- On développe $G_{m,n}(z)$ en série

$$G_{m,n}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) z^{-k}$$

  et on impose

$$g(k) = \begin{cases} h(k), & \text{pour } k = 0, \ldots, n+m; \\ \text{quelconque}, & \text{pour } k \geq n+m+1 \end{cases}$$

Approximants de Padé

- Si on écrit

$$G_{m,n}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{m+n} h(k) z^{-k} + O\left(z^{-(n+m+1)}\right)$$

il vient

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}_{\text{degré } m} = \underbrace{\sum_{k=0}^{2n+m} c_k z^{-k}}_{\text{degré } 2n+m} + \epsilon \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{j=0}^{\inf(k,n)} a_j h(k-j)$$

- Nécessairement

$$c_k = 0 \quad \forall k \in \{m+1, \ldots, 2n+m\},$$

- On annule tous les termes c_k pour $k = m+1, \ldots, 2n+m$,

Approximants de Padé

- Avec $a_0 = 1$, on obtient le système linéaire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h(m+1) & \dots & h(m-n+2) \\ h(m+2) & \dots & h(m-n+3) \\ \vdots & & \vdots \\ h(m+n) & \dots & h(m+1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = - \underbrace{\begin{pmatrix} h(m+2) \\ h(m+3) \\ \vdots \\ h(m+n+1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

et

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(m) & h(m-1) & \dots & h(0) \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

ce qui conduit à $\mathbf{a} = -\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{h}$ puis $\mathbf{b} = \mathbf{H}_2\mathbf{a}_2$

Approximants de Padé

Quelques remarques

- A ordres n et m fixés, s'il existe[1], le couple $\{A_n, B_m\}$ est unique[2] (avec $a_0 = 1$), parfois noté $[m/n]$ (mais la fraction $B_m(z)/A_n(z)$ n'est pas forcément irréductible).
- Les approximants de Padé $G_{n,m} = B_m/A_n$ sont regroupés dans la table de Padé indicée par n et m.
- Les matrices $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ sont Toeplitz et Toeplitz inférieure pour lesquelles il existe des algorithmes rapides de calcul (inversion, multiplication).
- L'approximant $G_{m,n}(z)$ et la transmittance cible $H_{\mathrm{I}}(z)$ ont des RI qui coïncident exactement sur leurs $(n + m + 1)$ premiers points respectifs. Au delà, rien n'est imposé.
  $\longrightarrow$ Instabilité possible de l'approximant !

Voir aussi :

- C. S. Burrus, T. W. Parks, "Time Domain Design of Recursive Digital Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, no. 2, June 1970.

[1] CS : $\det \mathbf{H}_1 \neq 0$.
[2] Frobenius, 1881.

Plan du cours

Principe général

Soit $H_{\mathrm{I}}(f)$ la transmittance idéale en fréquence.

- On introduit un vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta}$ qui décrit complètement le filtre numérique $H_{\mathrm{N}}(f)$ (RIF ou RII) recherché d'ordre M,
- On définit l'erreur de synthèse $e(f) = H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)$,
- Si les contraintes spécifiées ne sont pas identiques dans toutes les bandes de fréquences, introduction d'une fonction de pondération $P(f)$

$$e_P(f) = P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right],$$

  et du critère d'erreur "globale" associé

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e_P(f)\|,$$

- On va chercher $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}}$ solution de

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}}\, J_{e_P}(\boldsymbol{\theta})$$

  Remarques :

  - $H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{opt}}(f)$ peut ne pas satisfaire le gabarit $\rightarrow$ on itère avec $M+1$,
  - $\boldsymbol{\theta}$ dépend de la structure de synthèse choisie.

- Structure directe :

$$H_{\mathrm{N}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}, \text{ (avec } a_0 = 1)$$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{D}} = [a_1, \ldots, a_M, b_0, \ldots, b_M]^T$

- Structure série (avec regroupement des racines complexes conjuguées) :

$$H_{\mathrm{N}}(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - p_k z^{-1})} = b_0 \prod_{k=1}^{K} H_k(z), \text{ (avec } \frac{M}{2} \leq K \leq M)$$

où $H_k(z) = \frac{1+b_{k,1}z^{-1}+b_{k,2}z^{-2}}{1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}}$ sont des structures bi-quadratiques,

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}} = \{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S},1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S},K}\}$ avec $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S},k} = [a_{k,1}, a_{k,2}, b_{k,1}, b_{k,2}]^T$

- Structure parallèle (avec existence de pôles simples) :

$$H_{\mathrm{N}}(z) = c + \sum_{k=1}^{K} H_k(z),$$

où $H_k(z) = \frac{1+b_{k,1}z^{-1}}{1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}}$ sont des structures bi-quadratiques,

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{P}} = \{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{P},1}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{P},K}\}$ avec $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{P},k} = [a_{k,1}, , a_{k,2}, b_{k,1}]^T$

Principe général

Soit $H_{\mathrm{I}}(f)$ la transmittance idéale en fréquence.

- On introduit un vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta}$ qui décrit complètement le filtre numérique $H_{\mathrm{N}}(f)$ (RIF ou RII) recherché d'ordre M,
- On définit l'erreur de synthèse $e(f) = H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)$,
- Si les contraintes spécifiées ne sont pas identiques dans toutes les bandes de fréquences, introduction d'une fonction de pondération $P(f)$

$$e_P(f) = P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right],$$

  et du critère d'erreur associé

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e_P(f)\|,$$

- On va chercher $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}}$ solution de

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}}\, J_{e_P}(\boldsymbol{\theta})$$

  Remarques :
  - $H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{opt}}(f)$ peut ne pas satisfaire le gabarit $\rightarrow$ on itère avec $M+1$,
  - $\boldsymbol{\theta}$ dépend de la structure de synthèse choisie.

Principe général

Soit $H_{\mathrm{I}}(f)$ la transmittance idéale en fréquence.

- On introduit un vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta}$ qui décrit complètement le filtre numérique $H_{\mathrm{N}}(f)$ (RIF ou RII) recherché d'ordre M,
- On définit l'erreur de synthèse $e(f) = H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)$,
- Si les contraintes spécifiées ne sont pas identiques dans toutes les bandes de fréquences, introduction d'une fonction de pondération $P(f)$

$$e_P(f) = P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right],$$

  et du critère d'erreur associé

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e_P(f)\|,$$

- On va chercher $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}}$ solution de

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} J_{e_P}(\boldsymbol{\theta})$$

  Remarques :

  - $H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{opt}}(f)$ peut ne pas satisfaire le gabarit $\rightarrow$ on itère avec $M+1$,
  - $\boldsymbol{\theta}$ dépend de la structure de synthèse choisie.

Quel choix pour la norme ?

Norme ℓ_2 : méthode des moindres carrés

- Soit le terme d'erreur évaluée en N_0 points fréquentiels

$$e_P(f_n) = P(f_n)\left[H_{\mathrm{I}}(f_n) - H_{\mathrm{N}}(f_n)\right], \; n = 0, \dots, N_0 - 1,$$

- Le critère s'écrit

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{e}_P\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N_0-1} P^2(f_n)\left[H_{\mathrm{I}}(f_n) - H_{\mathrm{N}}(f_n)\right]^2,$$

où $\mathbf{e}_P = \left[e_P(f_0), \dots, e_P(f_{N_0-1})\right]^T$,

- hypothèse : on a une solution initiale non-optimale $\boldsymbol{\theta}^{(0)} \rightarrow$ optimisation locale.
- A partir de la solution $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, on cherche l'accroissement $\Delta\boldsymbol{\theta}$ tel que

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \operatorname*{argmin}_{\Delta\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} J_{e_P}\left(\boldsymbol{\theta}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{\theta}\right)$$

Norme ℓ_2 : méthode des moindres carrés

- On développe le critère $J_{e_P}\left(\boldsymbol{\theta}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\theta}\right)$ à l'ordre 1

$$J_{e_P}\left(\boldsymbol{\theta}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\theta}\right) = J_{e_P}\left(\boldsymbol{\theta}^{(0)}\right) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial J_{e_P}}{\partial \theta_j}\Delta\theta_j$$

et on annule toutes les coordonnées du gradient ∇J_{e_P}:

$$\frac{\partial J_{e_P}}{\partial \theta_k} + \sum_{0=1}^{N-1} \frac{\partial^2 J_{e_P}}{\partial \theta_k \partial \theta_j}\Delta\theta_j = 0,\ k = 0,\dots,N-1$$

- On obtient le système linéaire

$$\mathbf{E}_1\mathbf{P}\mathbf{e} + \mathbf{E}_1\mathbf{P}\mathbf{E}_1^T\Delta\theta = 0$$

avec

$$\mathbf{e} = \left[e(f_0),\dots,e(f_{N_0-1})\right]^T,\ \mathbf{E}_1 = \left[\frac{\partial e(f_n)}{\partial \theta_k}\right]_{k,n} \text{ et } \mathbf{P} = \mathrm{diag}\left\{P^2(f_n)\right\}.$$

Norme ℓ_2 : méthode des moindres carrés

- La solution est donnée par

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = -\left(\mathbf{E}_1 \mathbf{P} \mathbf{E}_1^T\right)^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{P} \mathbf{e}.$$

Remarques :

- méthode qui repose sur le calcul des quantités $\frac{\partial e(f_n)}{\partial \theta_k}$,
  $\longrightarrow$ explicite pour la plupart des structures de synthèse,

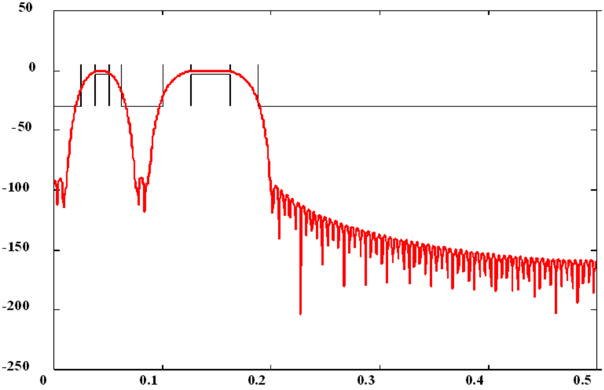
- Bellanger[3] a mené le calcul pour un filtre RIF d'ordre N avec le vecteur de paramètre $\boldsymbol{\theta} = [H_1, \ldots, H_{N-1}]^T$ où $H_k = \mathrm{TFD}\,[\mathrm{h(n)}]$,

- pas de contrainte de stabilité de la solution,
  $\longrightarrow$ stabilité des solutions non garantie !

[3] M. Bellanger, *Traitement Numérique du Signal*, Masson, 1994.

Norme ℓ_2 : méthode des moindres carrés

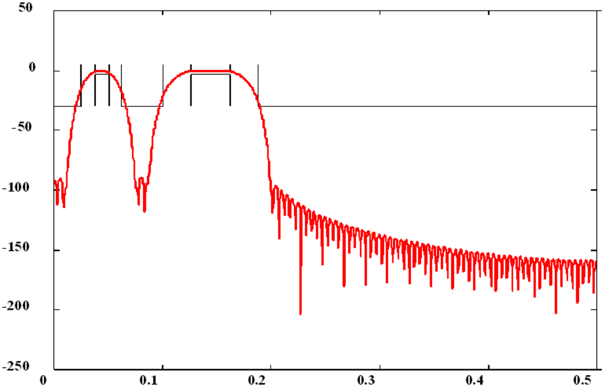
Exemple de synthèse d'un RIF



$\longrightarrow$ Flexibilité dans les bandes affaiblies non exploitée !

Norme ℓ_2 : méthode des moindres carrés

Exemple de synthèse d'un RIF



$\rightarrow$ Flexibilité dans les bandes affaiblies non exploitée !

Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

- Considérons un filtre RIF à phase linéaire

$$H_{\mathrm{N}}(f) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \cos(2\pi f k),$$

- Le critère s'écrit pour $\boldsymbol{\theta} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]^T$

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e_P(f)\|_\infty = \sup_{f \in [0, \frac{1}{2}]} \left| P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right] \right|,$$

Propriété

$$\|\mathbf{e}_P(f)\|_\infty \text{ est minimal sur un compact } \mathcal{A} \in [0, \tfrac{1}{2}]$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, (f_0, \ldots, f_M) \in \mathcal{A}^{M+1},\ \forall i \in \{1, \ldots, M\},$$
$$e(f_i) = -e(f_{i-1}) = \pm\delta \text{ et } |e(f_i)| = \max_{f \in \mathcal{A}} |e(f)| = \delta$$

i.e., existence de $(M+1)$ extrema :

$e(f_i)$ est un maximum, $e(f_{i+1})$ est un minimum,...

Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

- Si $f_0, \dots, f_M$ connus alors $\boldsymbol{\theta}$ calculé par simple inversion matricielle :

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} \Leftrightarrow \{e(f_i) = \delta\}_i$$

$\rightarrow$ On ne connaît pas $f_0, \dots, f_{M-1}$!

- Nouveau problème d'optimisation :

$$\{\delta, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}\} = \underset{\delta, \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}}{\mathrm{argmin}} \left| P(f_i)\left[H_{\mathrm{I}}(f_i) - H_{\mathrm{N}}(f_i)\right] - (-1)^i \delta \right|_{i=0,\dots,M}$$

avec $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M)$,

- Minimisation alternée (algorithme itératif) :

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbf{f}^{(r)}\right\} &= \underset{\mathbf{f}}{\mathrm{argmin}} \left| P(\mathbf{f}) \left[H_{\mathrm{I}}(\mathbf{f}) - H_{\mathrm{N}}^{(r-1)}(\mathbf{f})\right] - (-1)^i \delta^{(r-1)} \right| \\
\left\{\delta^{(r)}, \boldsymbol{\theta}^{(r)}\right\} &= \underset{\delta, \boldsymbol{\theta}}{\mathrm{argmin}} \left| P\left(f_i^{(r)}\right) \left[H_{\mathrm{I}}\left(f_i^{(r)}\right) - H_{\mathrm{N}}\left(f_i^{(r)}\right)\right] - (-1)^i \delta \right|_i
\end{aligned}$$

Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

A partir d'une solution non-optimale $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ et $\delta^{(0)}$, à l'itération r

- calcul de l'erreur $e_P^{(r-1)}(f) = P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}^{(r-1)}(f)\right]$,
- localisation des extrema de $e_P^{(r-1)}(f)$, i.e., de $\left(f_0^{(r)}, \ldots, f_M^{(r)}\right)$ t.q.

$$e_P^{(r-1)}\left(f_i^{(r)}\right) > \delta^{(r-1)},$$

- calcul de $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ et $\delta^{(r)}$ par résolution des (M+1) équations linéaires

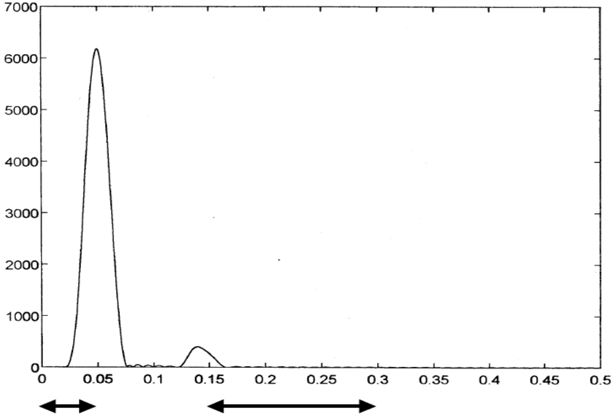
$$P\left(f_i^{(r)}\right)\left[H_{\mathrm{I}}\left(f_i^{(r)}\right) - H_{\mathrm{N}}^{(r)}\left(f_i^{(r)}\right)\right] = \pm\delta^{(r)}$$

i.e., inversion du système

$$\begin{pmatrix} H_{\mathrm{I}}\left(f_0^{(r)}\right) \\ \vdots \\ H_{\mathrm{I}}\left(f_M^{(r)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(2\pi f_0^{(r)}\right) & \ldots & \cos\left(2\pi f_0^{(r)}(M-1)\right) & \frac{(-1)^0}{P\left(f_0^{(r)}\right)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\left(2\pi f_M^{(r)}\right) & \ldots & \cos\left(2\pi f_M^{(r)}(M-1)\right) & \frac{(-1)^M}{P\left(f_M^{(r)}\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0^{(r)} \\ \vdots \\ h_{M-1}^{(r)} \\ \delta^{(r)} \end{pmatrix}$$

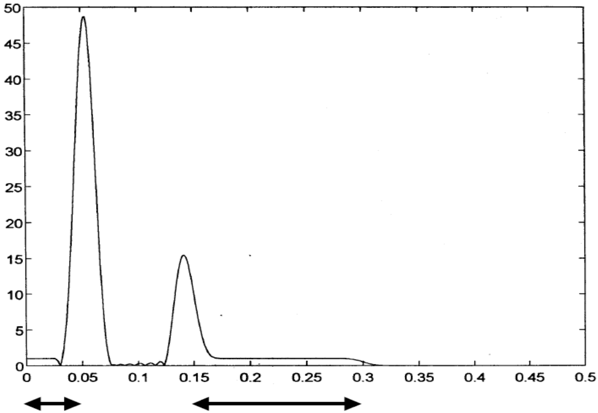
Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Exemple de synthèse d'un RIF (itération 1)



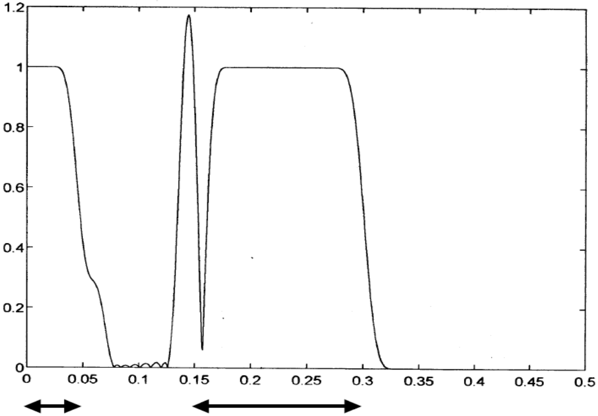
Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Exemple de synthèse d'un RIF (itération 11)



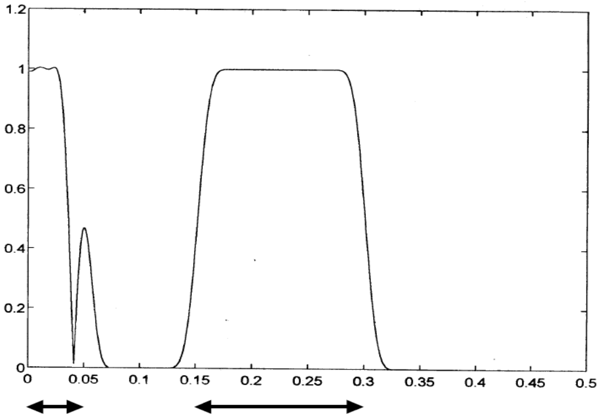
Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Exemple de synthèse d'un RIF (itération 12)



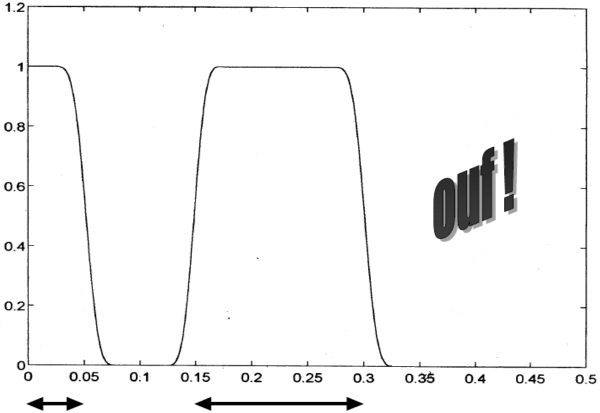
Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Exemple de synthèse d'un RIF (itération 17)



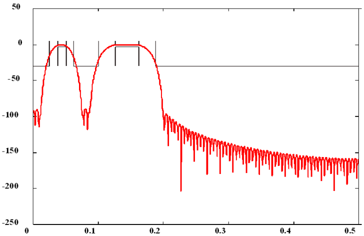
Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

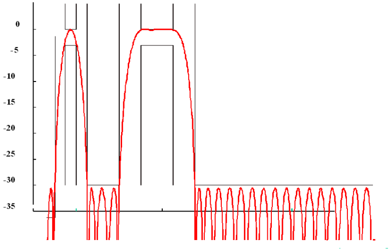
Exemple de synthèse d'un RIF (itération 21)



Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Comparaison ℓ_2/ℓ_∞





Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

Critères d'arrêt :

- nombre d'itérations R,
- erreur : $\left\|e_p^R(f)\right\| <$ seuil,
- évolution de l'erreur : $\left\|e_p^{R-1}(f)\right\| - \left\|e_p^R(f)\right\| <$ seuil,

Avantages :

- méthode optimale (!),
- ondulations d'amplitude constante en bandes passantes et affaiblies,
- ordre de filtre minimum,

Inconvénients :

- Coûteux en temps de calcul (méthode itérative, inversion matricielle),

Norme ℓ_∞ : algorithme de Remez

A propos de la méthode de synthèse :

- convergence de l'algorithme non démontrée,
  $\longrightarrow$ comportement "correct" si initialisation "correcte"
  $\longrightarrow$ solution non-optimale nécessaire !
- algorithme codé sous Matlab,
- extension à la synthèse d'un filtre RII proposée par Bellanger[4].

Quelques remarques plus générales :

- minimisation d'une norme ℓ_∞ aussi appelée approximation au sens de Chebyshev,
- minimiser le max. de l'erreur : approximation de *minimax*,
- méthode générale d'approximation polynômiale,
  $\longrightarrow$ dans le cadre du TNS, algorithme de synthèse de *Parks-McClellan*[5].

[4] M. Bellanger, *Traitement Numérique du Signal*, Masson, 1994.

[5] T. W. Parks *et al.*, "Chebyshev approximation for non recursive digital filters with linear phase", *IEEE. Trans. Circuit Theory, vol. 19, no. 2, March 1972.*

Filtres propres (RIF)

- Considérons un filtre RIF à phase linéaire

$$H_{\mathrm{N}}(f) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \cos(2\pi f k) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{c}(f),\ \text{avec } \mathbf{c}(f) = [\cos(2\pi f k)]_k,$$

- Le critère[6] s'écrit pour $\boldsymbol{\theta} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]^T$

$$J_e(\boldsymbol{\theta}) = \|e(f)\|_2^2 = \int_{f_1}^{f_2} |H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)|^2\, df,$$

- Si le filtre idéal a une transmittance constante $H_{\mathrm{I}}(f_1) \approx \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{c}(f_1)$ dans la bande $[f_1, f_2]$, $J_e(\boldsymbol{\theta})$ se réécrit

$$J_e(\boldsymbol{\theta}) = \int_{f_1}^{f_2} \left|\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{c}(f_1) - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{c}(f)\right|^2 df = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{Q}_{\mathrm{rif}} \boldsymbol{\theta}$$

$$\text{avec } \mathbf{Q}_{\mathrm{rif}} = \int_{f_1}^{f_2} [\mathbf{c}(f_1) - \mathbf{c}(f)]\, [\mathbf{c}(f_1) - \mathbf{c}(f)]^T\, df$$

[6] $\|\cdot\|_2$ est la norme ℓ_2 au sens des fonctions dans $\mathcal{C}^0([f_1, f_2])$

Filtres propres (RIF)

- Le problème de synthèse se résume à la recherche de

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}}\, J_e(\boldsymbol{\theta}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}}\, \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{Q}_{\mathrm{rif}} \boldsymbol{\theta}$$

$\longrightarrow$ solution donnée par analyse du quotient de Rayleigh $R_{\mathbf{Q}_{\mathrm{rif}}}(\cdot)$!

Propriété : Soient $\mathbf{A}$ une matrice hermitienne et $R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ alors

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda_{\min}$$

et

$$\mathbf{x}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}}\, R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x}^{\mathrm{opt}} = \mathbf{v}_{\min}$$

où $\mathbf{v}_{\min}$ est le vect. propre associé à la plus petite val. propre $\lambda_{\min}$ de $\mathbf{A}$.

Filtres propres (RII)

- Considérons un filtre RII de transmittance

$$H_{\mathrm{N}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

- Si $x(n) = \delta(n)$ à l'entrée, on veut $y(n) = h_{\mathrm{I}}(n)$ (RI idéale) à la sortie[7] :

$$\sum_{k=0}^{M-1} b_k h_{\mathrm{I}}(n-k) \approx \sum_{k=0}^{M-1} a_k \delta(n-k)$$

- L'erreur[8] s'écrit pour $n = 0, \ldots, N_0$:

$$e(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k h_{\mathrm{I}}(n-k) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \delta(n-k),$$

[7] S.-C. Pei and J.-J. Shyu, "Design of 1-D and 2-D IIR Eigenfilters", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 4, April 1994.

[8] Attention : $e(n) \neq h_{\mathrm{I}}(n) - h_{\mathrm{N}}(n)$!

Filtres propres (RII)

- On définit les vecteurs paramètre et erreur :

$$\boldsymbol{\theta} = [a_0, \ldots, a_{M-1}, b_0, \ldots, b_{M-1}]^T, \quad \mathbf{e} = [e(0), \ldots, e(N_0)]^T$$

- Sous forme matricielle, on a

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e} \quad \text{où} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} h_{\mathrm{I}}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ h_{\mathrm{I}}(1) & h_{\mathrm{I}}(0) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_{\mathrm{I}}(M-1) & h_{\mathrm{I}}(M-2) & \ldots & h_{\mathrm{I}}(0) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} h_{\mathrm{I}}(M) & h_{\mathrm{I}}(M-1) & \ldots & h_{\mathrm{I}}(1) \\ h_{\mathrm{I}}(M+1) & h_{\mathrm{I}}(M) & & h_{\mathrm{I}}(2) \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ h_{\mathrm{I}}(N_0) & h_{\mathrm{I}}(N_0-1) & \ldots & h_{\mathrm{I}}(N_0-M+1) \end{pmatrix}.$$

Filtres propres (RII)

- Le critère quadratique (pondéré) s'écrit :

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{e}_P\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N_0} P^2(n)e^2(n),$$

avec $\mathbf{e}_P = [e_P(0), \ldots, e_P(N_0)]^T$ et $e_P(n) = P(n)e(n)$,

- Or $\|\mathbf{e}_P\|_2^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$ avec $\mathbf{P} = \mathrm{diag}\left\{P^2(n)\right\}$ (et $\mathbf{e} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$), d'où

$$J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{Q}_{\mathrm{rii}}\boldsymbol{\theta},$$

avec $\mathbf{Q}_{\mathrm{rii}} = \mathbf{HPH}$,

- Le problème de synthèse se résume à la recherche de

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\mathrm{argmin}}\, J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}{\mathrm{argmin}}\, \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{Q}_{\mathrm{rii}}\boldsymbol{\theta}$$

$\rightarrow$ solution donnée par analyse du quotient de Rayleigh $R_{\mathbf{Q}_{\mathrm{rii}}}(\cdot)$!

Méthodes d'optimisation : bilan

Méthode des moindres carrés

- $\boldsymbol{\theta}$ dépend de la structure de synthèse : quelconque (ou presque),
- $J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{e}_P\|_2^2 = \sum_n P^2(f_n)\left[H_{\mathrm{I}}(f_n) - H_{\mathrm{N}}(f_n)\right]^2$,

$\rightarrow$ optimisation par inversion matricielle,

Algorithme de Remez

- $\boldsymbol{\theta} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]^T$ pour un RIF à phase linéaire,
- $J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e_P(f)\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_f \left|P(f)\left[H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right]\right|$,

$\rightarrow$ procédure itérative : optimisation par minimisation alternée,

Filtres propres (RIF)

- $\boldsymbol{\theta} = [h_0, \ldots, h_{M-1}]^T$ pour un RIF à phase linéaire,
- $J_e(\boldsymbol{\theta}) = \|e(f)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int \left|H_{\mathrm{I}}(f) - H_{\mathrm{N}}(f)\right|^2 df$,

$\rightarrow$ optimisation par analyse spectrale (SVD de $\mathbf{Q}_{\mathrm{rif}}$),

Filtres propres (RII)

- $\boldsymbol{\theta} = [a_0, \ldots, a_{M-1}, b_0, \ldots, b_M - 1]^T$,
- $J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) = \|e(f)\|_2^2 = \sum_n P^2(n)\left(\sum_k b_k h_{\mathrm{I}}(n-k) - a_k\delta(n-k)\right)^2$,

$\rightarrow$ optimisation par analyse spectrale (SVD de $\mathbf{Q}_{\mathrm{rii}}$),

Plan du cours

Stabilisation des solutions

- Pour s'assurer de la stabilité de

$$H_{\mathrm{N}}(z) = \frac{V(z)}{\prod_{k=0}^{M-1}\left(1 - p_k z^{-1}\right)},$$

il faudrait résoudre le problème d'optimisation contraint

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} J_{e_P}(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{s.c.} \quad \left\{|p_k| < 1\right\}_{k=0}^{M-1}$$

$\rightarrow$ possible avec $\boldsymbol{\theta} = \left[p_0, \ldots, p_{M-1}\right]^T$ (structure série/cascade),
$\rightarrow$ sinon bon courage !

- *Alternative :* optimisation non contrainte puis stabilisation,

Stabilisation des solutions

- Soit p_0 un pôle instable d'ordre 1, i.e., $|p_0| > 1$,
- La transmittance $H_{\mathrm{N}}(z)$ se factorise :

$$H_{\mathrm{N}}(z) = \frac{1}{1 - p_0 z^{-1}} H'_{\mathrm{N}}(z), \quad \text{avec } H'_{\mathrm{N}}(p_0) \neq 0$$

- Soit le filtre passe tout

$$G(z) = \frac{1}{p_0} \frac{1 - p_0 z^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{p_0^*}\right) z^{-1}}, \quad \text{avec } |G(z)| = 1$$

- On pose

$$\tilde{H}_{\mathrm{N}}(z) = G(z) H_{\mathrm{N}}(z) = \frac{1}{p_0 \left(1 - \left(\frac{1}{p_0^*}\right) z^{-1}\right)} H'_{\mathrm{N}}(z),$$

  - p_0 n'est pas un pôle (instable) de $\tilde{H}_{\mathrm{N}}(z)$,
  - $1/p_0^*$ est un pôle stable de $\tilde{H}_{\mathrm{N}}(z)$ car $|1/p_0^*| = 1/|p_0| < 1$,
  - et surtout $\left|\tilde{H}_{\mathrm{N}}(z)\right| = \left|H_{\mathrm{N}}(z)\right|$.

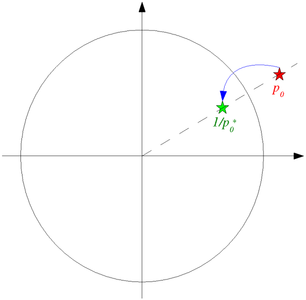
Stabilisation des solutions

- Interprétation dans le plan :

$$p_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{p_0^*} = \frac{1}{r_0} e^{i\theta_0}$$



- Récursivement sur $H'_{\mathrm{N}}(z)$, chaque pôle p_k à l'extérieur de $\mathcal{C}(0,1)$ est remplacé par son réfléchi $1/p_k^*$.

Remarque

Même procédure sur le numérateur $V(z) \Rightarrow$ filtre à phase minimale.

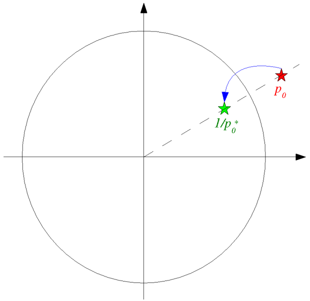
Stabilisation des solutions

- Interprétation dans le plan :

$$p_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{p_0^*} = \frac{1}{r_0} e^{i\theta_0}$$



- Récursivement sur $H'_{\mathrm{N}}(z)$, chaque pôle p_k à l'extérieur de $\mathcal{C}(0,1)$ est remplacé par son réfléchi $1/p_k^*$.

Remarque
Même procédure sur le numérateur $V(z) \Rightarrow$ filtre à phase minimale.

Plan du cours

Plan du cours

Quelques rappels
Représentation à virgule fixe

- Tout nombre x est codé

$$x_q = \underbrace{(\pm)}_{\text{bit de signe}}, \overbrace{b_{n_\mathrm{E}}, \ldots, b_0}^{\text{partie entière}}, \underbrace{b_{-1}, \ldots, b_{n_\mathrm{F}}}_{\text{partie fractionnaire}}$$

avec $b_j \in \{0, 1\}$

- Contraintes :

$$\text{Quantum :} \quad \Delta q = 2^{-n_\mathrm{F}}$$

$$\text{Dynamique :} \quad x_\mathrm{q}^\mathrm{max} = \sum_{j=-n_\mathrm{F}}^{n_\mathrm{E}} 2^j = 2^{n_\mathrm{E}+1} - 2^{-n_\mathrm{F}}$$

Exemple : $n_\mathrm{E} = 2$, $n_\mathrm{F} = 2$

$$x_\mathrm{q}^\mathrm{max} = \underbrace{1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2}_{=7} + \underbrace{1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}}_{=3/4}$$

$$= 8 - 1/4$$

Quelques rappels
Représentation à virgule fixe

- Quantification (non-)biaisée,

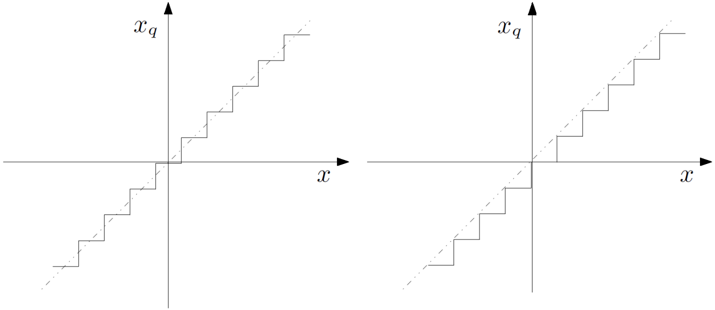
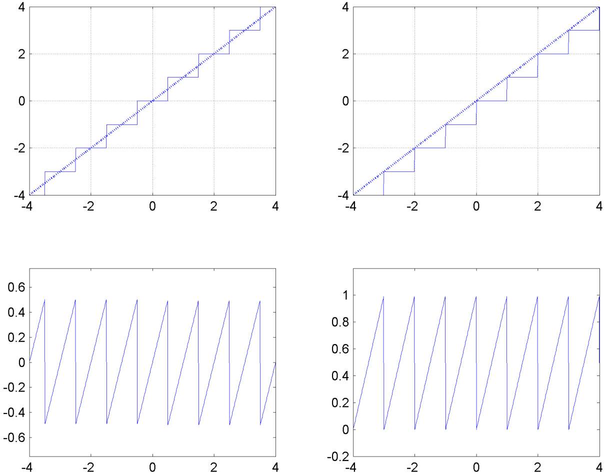
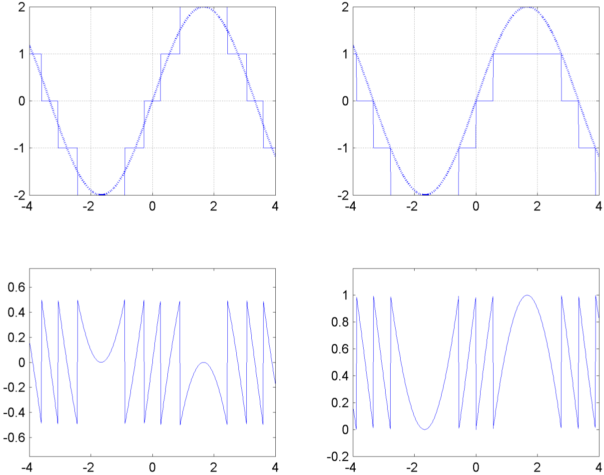


Figure: Quantification non-biaisée (gauche) et biaisée (droite).

Quelques rappels
Représentation à virgule fixe



Quelques rappels
Représentation à virgule fixe



Quelques rappels
Effets numériques

Erreur de quantification $e_q(t) = x(t) - x_{q(t)}$

- modèle déterministe e_{q} :

$$|e_{\mathrm{q}}(t)| \leq \begin{cases} \Delta q, & \text{si quantification biaisée;} \\ \frac{\Delta q}{2}, & \text{si quantification non biaisée.} \end{cases}$$

- modèle aléatoire $e_{\mathrm{q}}(t)$ avec les hypothèses simplificatrices[9]
  - $e_{\mathrm{q}}(t)$ indépendant de $x(t)$,
  - bruit blanc : $R_{e_{\mathrm{q}}}(\tau) = \mathrm{E}\left[e_{\mathrm{q}}(t)e_{\mathrm{q}}(t-\tau)\right] = \sigma_e^2\delta(\tau)$,
  - moments d'ordre 1 et 2 définis par :

$$\mathrm{E}\left[e_{\mathrm{q}}(t)\right] = \begin{cases} \frac{\Delta q}{2}, & \text{si quantification biaisée;} \\ 0, & \text{si quantification non biaisée.} \end{cases}$$

$$\mathrm{var}\left[e_{\mathrm{q}}(t)\right] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta q^2}{12},$$

[9] Conditions de validité : $\mathrm{var}\left[x\right] = \sigma_x^2 \gg \Delta q^2$, en pratique $\sigma_x > 3\Delta q$.

Quelques rappels
Effets numériques

Dépassement

- Si $x = x^{\max} + \Delta q$ alors

$$x_{\mathrm{q}} = \begin{cases} -x_{\mathrm{q}}^{\max}, & \text{en absence de protection;} \\ x_{\mathrm{q}}^{\max}, & \text{avec protection.} \end{cases}$$

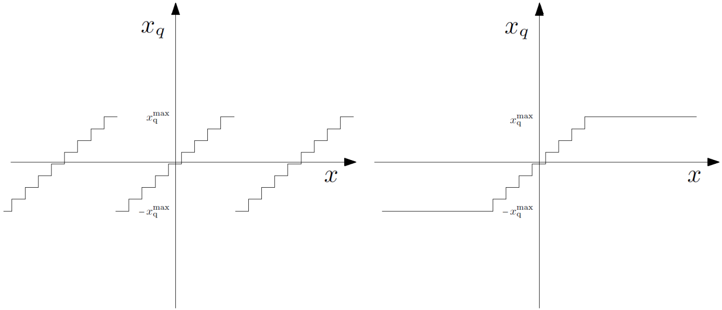


Figure: Effet du dépassement sans (gauche) et avec (droite) protection.

Plan du cours

Quantification de l'entrée

CAN $\Rightarrow$ bruit d'entrée $e_x(n)$ qui se propage dans le filtre

$$x_{\mathrm{q}}(n) \approx x(n) + e_x(n) \Rightarrow y_{\mathrm{q}}(n) \approx y(n) + e_y(n)$$

Modèle déterministe ($x(n) = \mathit{constante}$)

- erreur de sortie bornée :

$$\begin{aligned} |e_y(n)| &= \left| \sum_k e_x(n-k)h(k) \right| \\ &\leq \sum_k |e_x(n-k)h(k)| \\ &\leq \frac{\Delta q}{2} \sum_k |h(k)| \quad \text{(si quantification non-biaisée)} \end{aligned}$$

Quantification de l'entrée

CAN $\Rightarrow$ bruit d'entrée $e_x(n)$ qui se propage dans le filtre

$$x_{\mathrm{q}}(n) \approx x(n) + e_x(n) \Rightarrow y_{\mathrm{q}}(n) \approx y(n) + e_y(n)$$

Modèle déterministe ($x(n) = \mathit{constante}$)

- erreur de sortie bornée :

$$\begin{aligned} |e_y(n)| &= \left| \sum_k e_x(n-k)h(k) \right| \\ &\leq \sum_k |e_x(n-k)h(k)| \\ &\leq \frac{\Delta q}{2} \sum_k |h(k)| \quad \text{(si quantification non-biaisée)} \end{aligned}$$

Quantification de l'entrée

Modèle aléatoire ($x(t) \neq constante$)

- Bruit blanc en entrée :

$$R_{e_x}(\tau) = \frac{\Delta q^2}{12}\delta(\tau) \Leftrightarrow S_{e_x}(f) = \frac{\Delta q^2}{12}$$

- Densité spectrale de puissance (relation de Wiener-Lee) :

$$S_{e_y}(f) = |H(f)|^2 \frac{\Delta q^2}{12}$$

- Puissance totale :

$$P_{e_y} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{e_y}(f) df = \frac{\Delta q^2}{12} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 df$$

et d'après l'égalité de Parseval :

$$P_{e_y} = \frac{\Delta q^2}{12} \sum_n |h(n)|^2.$$

Plan du cours

Quantification des coefficients

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{q}} = \boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta} \Rightarrow H_{\mathrm{q}}(z) = \frac{B(z)+\Delta B(z)}{A(z)+\Delta A(z)}$$

Sensibilité : déplacement des pôles (et/ou zéros)

- Soit le polynôme :

$$A(z) = \sum_k a_k z^{-k} = \prod_m \left(1 - p_m z^{-1}\right)$$

- On montre que :

$$\frac{\partial p_m}{\partial a_k} = \frac{p_m^{M-k}}{\prod_{j\neq m}(p_j - p_m)}$$

$\rightarrow$ déplacement grand si $\exists j \neq m$ tel que $p_j - p_m \approx 0$

- conséquence (pour un RII stable) :
  si $M \uparrow \Rightarrow$ dans le cercle $C(0,1)$, densité des pôles $\uparrow \Rightarrow$ sensibilité $\uparrow$!
  $\rightarrow$ en pratique, implantation de cellule d'ordre 2 ($\forall$ structure)

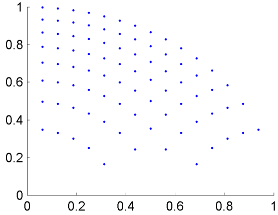
Quantification des coefficients

Cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

$$A_{\mathrm{q}}(z) = 1 + a_{1,\mathrm{q}} z^{-1} + a_{2,\mathrm{q}} z^{-2} = (1 - p_{1,\mathrm{q}} z^{-1})(1 - p_{2,\mathrm{q}} z^{-1})$$
$$\text{avec } p_{i,\mathrm{q}} = \frac{1}{2}\left(-a_{1,\mathrm{q}} \pm \sqrt{a_{1,\mathrm{q}}^2 - 4a_{2,\mathrm{q}}}\right)$$

Position des pôles stables dans le plan en z

- Nombre fini de couples $(a_{1,\mathrm{q}}, a_{2,\mathrm{q}})$ tels que $p_{i,\mathrm{q}}$ dans le cercle unité.



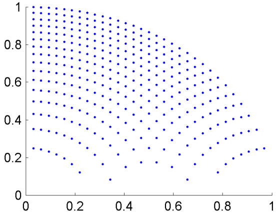


Figure: Position des pôles et zéros avec quantification de quantum $\Delta q = 2^{-3}$ (gauche) et $\Delta q = 2^{-4}$ (droite).

Quantification des coefficients

Cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

Position des pôles stables dans le plan (a_1, a_2)

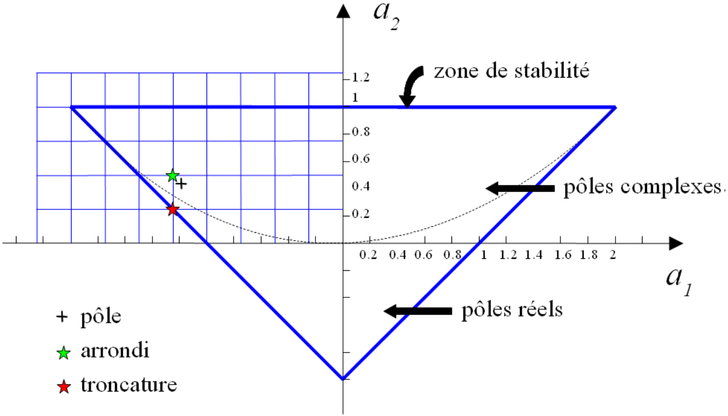


Figure: Position des pôles stables avec quantification de quantum $\Delta q = 2^{-2}$.

Quantification des coefficients

Cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

Position des pôles stables dans le plan (a_1, a_2)

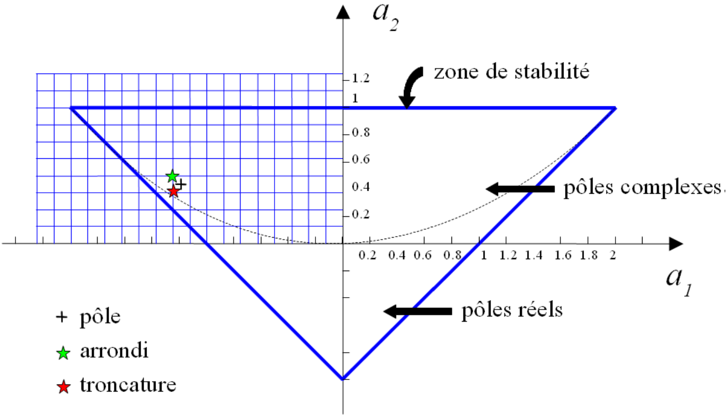


Figure: Position des pôles stables avec quantification de quantum $\Delta q = 2^{-3}$.

Plan du cours

Quantification des calculs

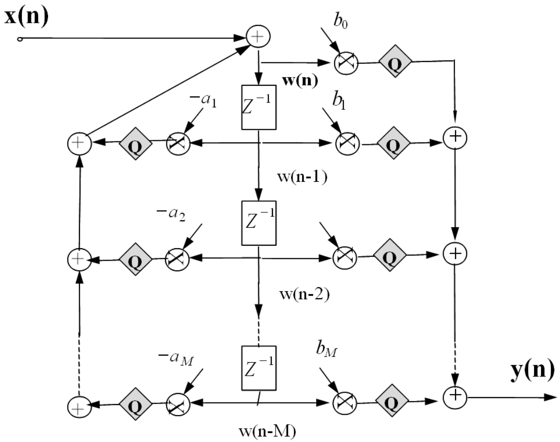


Figure: Localisation des opérateurs de quantification dans une structure D-N.

Quantification des calculs

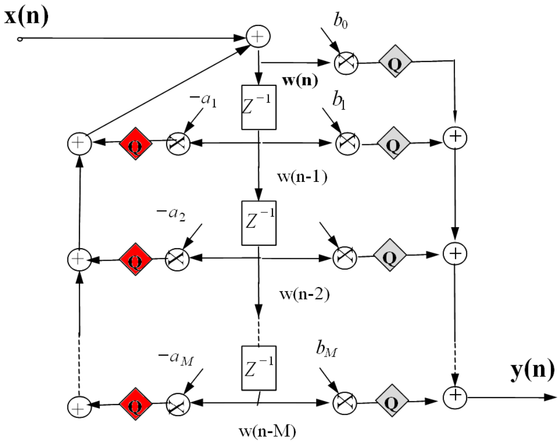


Figure: Localisation des opérateurs de quantification dans une structure D-N.

$\rightarrow$ Erreur réinjectée : $w_{\mathrm{q}}(n) = \mathrm{Q}\left[-\sum_k \mathrm{Q}\left[a_k w_{\mathrm{q}}(n-k)\right] + x(n)\right]$

Quantification des calculs
Entrées constantes

$$w_{\mathrm{q}}(n) = \mathrm{Q}\left[-\sum_k \mathrm{Q}\left[a_k w_{\mathrm{q}}(n-k)\right] + x(n)\right]$$

$\longrightarrow$ équation non linéaire récursive

Comportements possibles, suivant les conditions initiales :

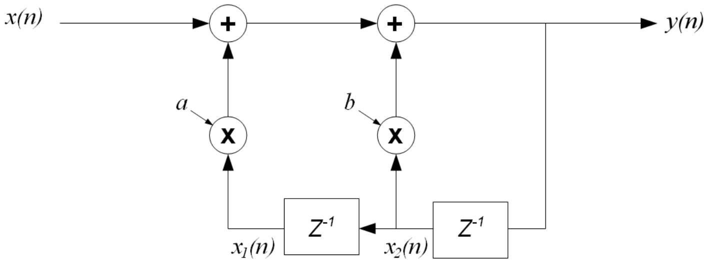
- attracteur ponctuel (point fixe),
  $\longrightarrow$ entrée constante $\Rightarrow$ sortie constante
- attracteur périodique : cycle-limite,
  $\longrightarrow$ non satisfaisant car générateur de signal périodique !
  $\longrightarrow$ amplitude d'oscillation A_a bornée par les bornes

$$A_a \leq \frac{\Delta q}{2} \sum_k |h(k)| \quad \text{et} \quad A'_a \leq \frac{\Delta q}{2} \sup_f |H(f)|$$

  (cas d'un opérateur de quantification non-biaisé)
- autres attracteurs (étrange, ponctuel périodique,...) : ...

Quantification des calculs

Entrées constantes : cas de la cellule purement récursive d'ordre 2



Quantification des calculs

Entrées constantes : cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

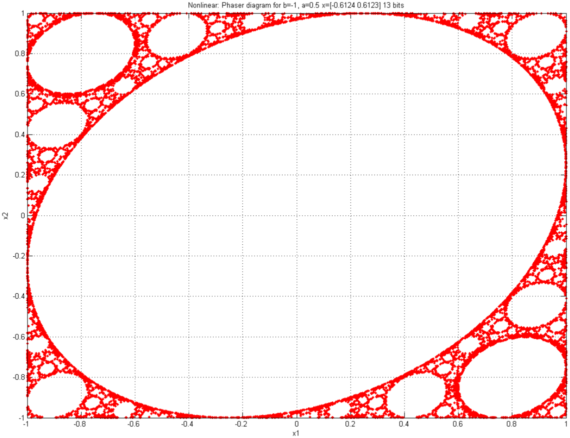


Figure: Trajectoire de $(x_1(n), x_2(n))$ avec $L = 13$.

d'après [Ling *et al*, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2003]

Quantification des calculs

Entrées constantes : cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

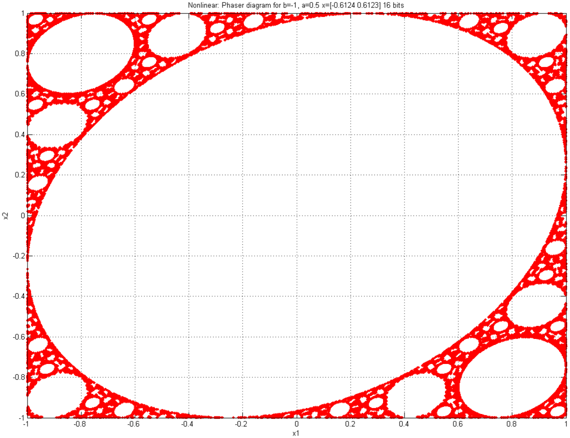


Figure: Trajectoire de $(x_1(n), x_2(n))$ avec $L = 16$.

d'après [Ling *et al*, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2003]

Quantification des calculs

Entrées constantes : cas de la cellule purement récursive d'ordre 2

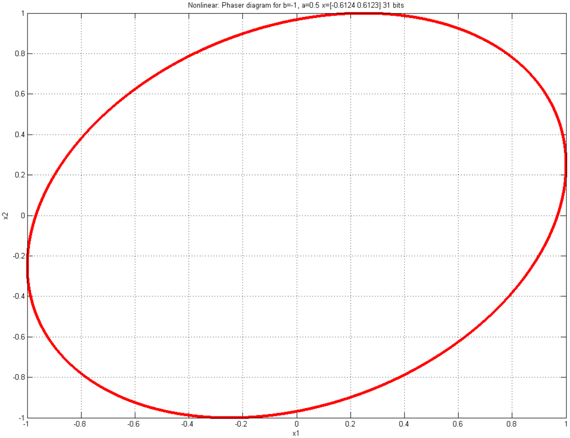


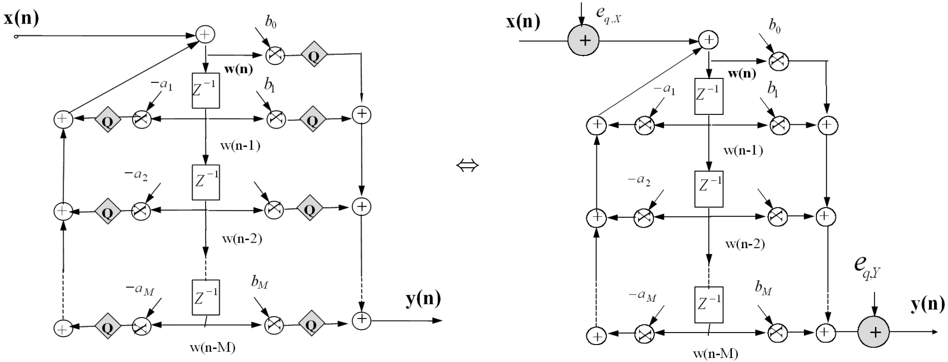
Figure: Trajectoire de $(x_1(n), x_2(n))$ avec $L = 31$.

d'après [Ling *et al*, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2003]

Quantification des calculs

Entrées variables : bruit de calcul

Modèle aléatoire du bruit de quantification



$$\text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{var}\left[e_{\mathrm{q},x}(t)\right] & = M\sigma_e^2 = M\frac{\Delta q^2}{12} \\ \mathrm{var}\left[e_{\mathrm{q},y}(t)\right] & = (M+1)\sigma_e^2 = (M+1)\frac{\Delta q^2}{12} \end{cases}$$

Quantification des calculs

Entrées variables : bruit de calcul

- Bruit de quantification en sortie :

$$\Delta y = e_{\mathrm{q},x}(t) * h(t) + e_{\mathrm{q},y}(t)$$

- Densité spectrale du bruit de quantification en sortie :

$$\begin{aligned} S_{\Delta y}(f) &= |H(f)|^2 S_{e_{\mathrm{q},x}}(f) + S_{e_{\mathrm{q},y}}(f) \\ &= \frac{M\Delta q^2}{12}\left(|H(f)|^2 + \frac{M+1}{M}\right) \end{aligned}$$

- Puissance du bruit de quantification en sortie :

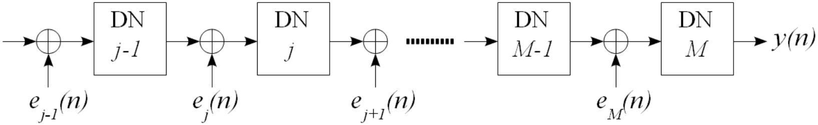
$$\begin{aligned} \sigma^2_{\Delta y} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{\Delta y}(f) df \\ &= \frac{M\Delta q^2}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(|H(f)|^2 + \frac{M+1}{M}\right) df \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Puissance $\uparrow$ linéairement avec M.

Quantification des calculs

Entrées variables : bruit de calcul

Cas d'une structure cascade (e.g., cellules DN d'ordre 2)



- Transmittance entre la $j$ième cellule et la sortie (rang M) :

$$T_j(f) = \prod_{k=j}^{M} H_k(f)$$

où $H_k(f) = \frac{B_k(f)}{A_k(f)}$ est la transmittance d'une cellule élementaire.

- Récurrence sur la densité spectrale en sortie de la Mième cellule :

$$S_{\Delta y}^{(M)}(f) = S_{e_M}(f) |H_M(f)|^2 + S_{\Delta y}^{(M-1)} |H_M(f)|^2$$

d'où

$$S_{\Delta y}^{(M)}(f) = \sum_{j=1}^{M} S_{e_j}(f) |T_j(f)|^2 = \sum_{j=1}^{M} \left[S_{e_j}(f) \prod_{k=j}^{M} |H_k(f)|^2 \right]$$

Quantification des calculs

Entrées variables : bruit de calcul

Cas d'une structure cascade (e.g., cellules DN d'ordre 2)

$$S_{\Delta_y}^{(M)}(f) = \sum_{j=1}^{M} S_{e_j}(f)|T_j(f)|^2 = \sum_{j=1}^{M} \left[S_{e_j}(f) \prod_{k=j}^{M} |H_k(f)|^2 \right]$$

Pour minimiser le bruit de calcul total :

1. Minimisation de $|T_j(f)| = \prod_{k=j}^{M} |H_k(f)|$, i.e., $\sup_f |H_k(f)|$
   $\rightarrow$ appariement judicieux des pôles et zéros de $T_j(f)$, i.e., des couples $\{A_k(\cdot), B_k(\cdot)\}_k$
2. Optimiser l'ordre des $H_k(f)$: la $H_M(f)$ filtre M bruits de calculs
   $\rightarrow$ ranger les cellules tels que $\sup_f |H_1(f)| \geq \ldots \geq \sup_f |H_M(f)|$

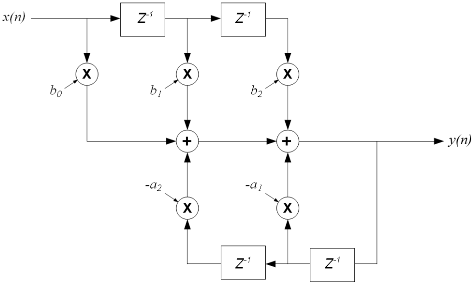
Plan du cours

Structures non-standards

Non-standards ?...

... c'est à dire qui ne sont pas

- directes,



$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z)$$

d'où

$$y(n) = -\sum_k a_k y(n-k) + \sum_k b_k x(n-k)$$

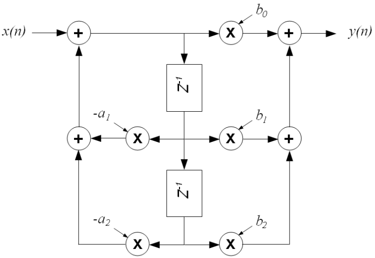
$\Rightarrow$ $(2M+1)$ additions/multiplications + 2 files d'attente

Structures non-standards

Non-standards ?...

... c'est à dire qui ne sont pas

- directes,
- canoniques,



$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) = \underbrace{\left(\frac{X(z)}{A(z)}\right)}_{W(Z)} N(z)$$

d'où

$$\begin{cases} y(n) & = & \sum_k b_k w(n-k) \\ w(n) & = & -\sum_k a_k w(n-k) + x(n) \end{cases}$$

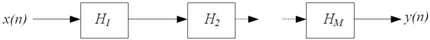
$\Rightarrow (2M+1)$ additions/multiplications $+$ 1 file d'attente

Structures non-standards

Non-standards ?...

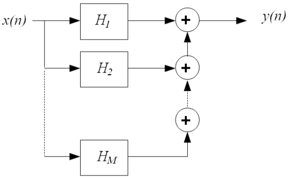
... c'est à dire qui ne sont pas

- directes,
- canoniques,
- décomposées : cascade ou parallèle.



Factorisation pôles/zéros

$$H(z) = G \prod_k H_k(z)$$



Décomposition en éléments simples

$$H(z) = C + \sum_k H_k(z)$$

Structures non-standards

Non-standards ?...

... c'est à dire qui ne sont pas

- directes,
- canoniques,
- décomposées : cascade ou parallèle.

Motivations

- faible sensibilité aux erreurs numériques,
  objectif déjà rencontré dans la structure cascade : appairage des pôles/zéros[10]
- adéquation algorithmes-architectures (A^3),
- interprétation plus "physique" des paramètres en jeu $\boldsymbol{\theta}$.

[10] M. Bellanger, *Traitement Numérique du Signal*, Masson, 1994.

Plan du cours

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Soit le polynôme en z défini par $(m = 1, \ldots, M)$

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k} z^{-k} \quad \text{avec } p_{m,0} = 1.$$

On introduit le polynôme réciproque

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m(z) &= z^{-m} P_m\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} p_{m,m-k} z^{-k} \end{aligned}$$

Exemple $(m = 3)$:

$$\begin{aligned} P_3(z) &= p_{3,0} + p_{3,1} z^{-1} + p_{3,2} z^{-2} + p_{3,3} z^{-3} \\ \Leftrightarrow \quad & \\ \tilde{P}_3(z) &= p_{3,3} + p_{3,2} z^{-1} + p_{3,1} z^{-2} + p_{3,0} z^{-3} \end{aligned}$$

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Soit le produit scalaire entre 2 polynômes par défini par :

$$\langle F(z), G(z)\rangle = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}(0,1)} R_M(z)F(z)G^{\dagger}(z)z^{-1}dz$$

où

- $G(z) = \sum_k g_k z^{-k} \Leftrightarrow G^{\dagger}(z) = \sum_k g_k^* z^k$ ($= G(1/z)$ dans le cas de coefficients réels)
- $\mathcal{C}(0,1)$ est le cercle unité
- $R_M(z) = \left[P_M\left(z\right) P_M\left(z^{-1}\right)\right]^{-1}$

Il s'écrit également

$$\langle F\left(z\right), G\left(z\right)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_M\left(e^{j\theta}\right) F\left(e^{j\theta}\right) G^*\left(e^{j\theta}\right) d\theta$$

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Soient les familles de polynômes réciproques $\{P_0(z), \ldots, P_M(z)\}$ et $\left\{\tilde{P}_0(z), \ldots, \tilde{P}_M(z)\right\}$ construites de la manière suivante

$$\begin{cases} P_m(z) = P_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \tilde{P}_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_m(z) = k_m P_{m-1}(z) + z^{-1} \tilde{P}_{m-1}(z) \end{cases}$$

avec $m = 1, \ldots, M$ et $P_0(z) = \tilde{P}_0(z) = 1$.

Une formulation matricielle de cette récurrence prograde s'écrit

$$\begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente ($|k_m| \neq 1$), la récurrence rétrograde est

$$\begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-k_m^2} \begin{pmatrix} 1 & -k_m \\ -k_m z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix}$$

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Soient les familles de polynômes réciproques $\{P_0(z), \ldots, P_M(z)\}$ et $\left\{\tilde{P}_0(z), \ldots, \tilde{P}_M(z)\right\}$ construites de la manière suivante

$$\begin{cases} P_m(z) = P_{m-1}(z) + k_m z^{-1}\tilde{P}_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_m(z) = k_m P_{m-1}(z) + z^{-1}\tilde{P}_{m-1}(z) \end{cases}$$

avec $m = 1, \ldots, M$ et $P_0(z) = \tilde{P}_0(z) = 1$.
Une formulation matricielle de cette récurrence prograde s'écrit

$$\begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente ($|k_m| \neq 1$), la récurrence rétrograde est

$$\begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-k_m^2} \begin{pmatrix} 1 & -k_m \\ -k_m z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix}$$

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Soient les familles de polynômes réciproques $\{P_0(z), \ldots, P_M(z)\}$ et $\left\{\tilde{P}_0(z), \ldots, \tilde{P}_M(z)\right\}$ construites de la manière suivante

$$\begin{cases} P_m(z) = P_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \tilde{P}_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_m(z) = k_m P_{m-1}(z) + z^{-1} \tilde{P}_{m-1}(z) \end{cases}$$

avec $m = 1, \ldots, M$ et $P_0(z) = \tilde{P}_0(z) = 1$.
Une formulation matricielle de cette récurrence prograde s'écrit

$$\begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_m z^{-1} \\ k_m & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente ($|k_m| \neq 1$), la récurrence rétrograde est

$$\begin{pmatrix} P_{m-1}(z) \\ \tilde{P}_{m-1}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - k_m^2} \begin{pmatrix} 1 & -k_m \\ -k_m z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_m(z) \\ \tilde{P}_m(z) \end{pmatrix}$$

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

Alors on a les propriétés fondamentales suivantes[11,12]:

- les suites de polynômes $\{P_0(z), \ldots, P_M(z)\}$ et $\left\{\tilde{P}_0(z), \ldots, \tilde{P}_M(z)\right\}$ sont orthogonales à la base canonique, i.e.,

$$\begin{aligned} \left\langle P_m(z), z^{-k} \right\rangle &= 0, \quad k = 1, \ldots, m \\ \left\langle \tilde{P}_m(z), z^{-k} \right\rangle &= 0, \quad k = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- la suite de polynômes $\left\{\tilde{P}_0(z), \ldots, \tilde{P}_M(z)\right\}$ définit une base orthogonale, i.e.,

$$\left\langle \tilde{P}_j(z), \tilde{P}_k(z) \right\rangle = \alpha_j \delta(j-k) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

[11] A. H. Gray, Jr. and J. D. Markel, “Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis,” *IEEE Trans. Audio. Electroacoust.*, vol. 21, no. 6, pp. 491-500, Dec. 1973.

[12] A. H. Gray, Jr., and J. D. Markel, “On Autocorrelation Equations as Applied to Speech Analysis,” *IEEE Trans. Audio. Electroacoust.*, vol. 21, no. 2, pp. 69-79, April 1973.

Quelques idées empruntées à la prédiction linéaire

De plus, on a

- Si $|k_m| \neq 1$ $(m = 1, \ldots, M)$, la suite $\{k_0, \ldots, k_M\}$ est complètement définie par la suite $\{p_{M,0}, \ldots, p_{M,M}\}$
  $\Rightarrow$ Tout polynôme $P_M(z)$ est représenté de manière unique par $\{p_{M,0}, \ldots, p_{M,M}\}$ ou $\{k_1, \ldots, k_M\}$!
- Les racines $z_1, \ldots, z_M$ de $P_M(z)$ sont dans le cercle unité sous la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\forall m \in \{1, \ldots, M\}, \ |z_m| < 1 \Leftrightarrow \forall m \in \{1, \ldots, M\}, \ |k_m| < 1$$

- Calcul des k_m : récursion de Levinson-Durbin

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_{m-1,j} & = & \frac{1}{1-k_m^2} \left(p_{m,j} - k_m p_{m,m-j}\right), \ \forall j \in \{1, \ldots, m-1\} \\ k_m & = & p_{m,m}, \ \forall m \in \{1, \ldots, M\} \end{array} \right.$$

Application à la synthèse de filtres RIF

Soit le filtre RIF à implanter de transmittance $H(z) = P_M(z)$ et la transmittance réciproque $\tilde{H}(z) = \tilde{P}_M(z)$. Les sorties $Y_M(z)$ et $\tilde{Y}_M(z)$ des filtres d'entrée $X(z)$ sont

$$\begin{cases} Y_M(z) = P_M(z)X(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = \tilde{P}_M(z)X(z) \end{cases}$$

La récurrence prograde permet d'écrire :

$$\begin{cases} Y_M(z) = \left[P_{M-1}(z) + k_M z^{-1}\tilde{P}_{M-1}(z)\right] X(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = \left[k_M P_{M-1}(z) + z^{-1}\tilde{P}_{M-1}(z)\right] X(z) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} Y_M(z) = Y_{M-1} + k_M z^{-1}\tilde{Y}_{M-1}(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = k_M Y_{M-1} + z^{-1}\tilde{Y}_{M-1}(z) \end{cases}$$

avec $Y_{M-1}(z) = P_{M-1}(z)X(z)$ et $\tilde{Y}_{M-1}(z) = \tilde{P}_{M-1}(z)X(z)$.

Application à la synthèse de filtres RIF

Soit le filtre RIF à implanter de transmittance $H(z) = P_M(z)$ et la transmittance réciproque $\tilde{H}(z) = \tilde{P}_M(z)$. Les sorties $Y_M(z)$ et $\tilde{Y}_M(z)$ des filtres d'entrée $X(z)$ sont

$$\begin{cases} Y_M(z) = P_M(z)X(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = \tilde{P}_M(z)X(z) \end{cases}$$

La récurrence prograde permet d'écrire :

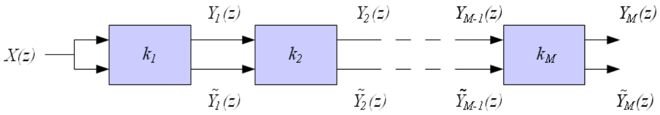
$$\begin{cases} Y_M(z) = \left[P_{M-1}(z) + k_M z^{-1}\tilde{P}_{M-1}(z)\right] X(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = \left[k_M P_{M-1}(z) + z^{-1}\tilde{P}_{M-1}(z)\right] X(z) \end{cases}$$

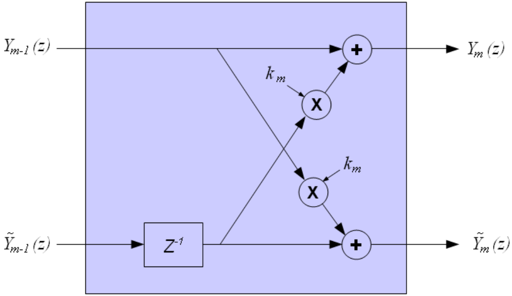
d'où

$$\begin{cases} Y_M(z) = Y_{M-1} + k_M z^{-1}\tilde{Y}_{M-1}(z) \\ \tilde{Y}_M(z) = k_M Y_{M-1} + z^{-1}\tilde{Y}_{M-1}(z) \end{cases}$$

avec $Y_{M-1}(z) = P_{M-1}(z)X(z)$ et $\tilde{Y}_{M-1}(z) = \tilde{P}_{M-1}(z)X(z)$.

Application à la synthèse de filtres RIF





Application à la synthèse de filtres RIF

Bilan - méthode de synthèse du filtre RIF de transmittance $H(z) = P_M(z)$

- On se donne les coefficients $\{p_{M,0}, \ldots, p_{M,M}\}$,
- On pose $k_M = p_{M,M}$,
- Pour $m = M, \ldots, 2$, récursion rétrograde de Levinson-Durbin
  - Pour $j = 0, \ldots, m-1$, calcul des coefficients de $P_m(z)$

$$p_{m-1,j} = \frac{1}{1-k_m^2}\left(p_{m,j} - k_m p_{m,m-j}\right)$$

  - On pose $k_{m-1} = p_{m-1,m-1}$
- Implantation du treillis.

Application à la synthèse de filtres RII
Cellules purement récursives

Soit le filtre RII à implanter de transmittance $H(z) = \frac{1}{A_M(z)}$.
On génère la base orthogonale de polynômes $\left\{\tilde{A}_0(z), \dots, \tilde{A}_M(z)\right\}$ et on réécrit le système de récurrence prograde initial

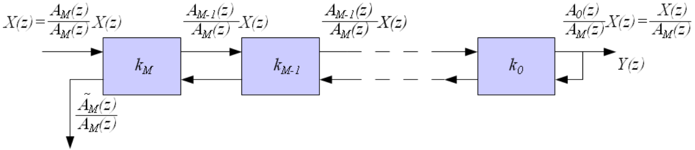
$$\begin{cases} A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1}\tilde{A}_{m-1}(z) \\ \tilde{A}_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1}\tilde{A}_{m-1}(z) \end{cases}$$

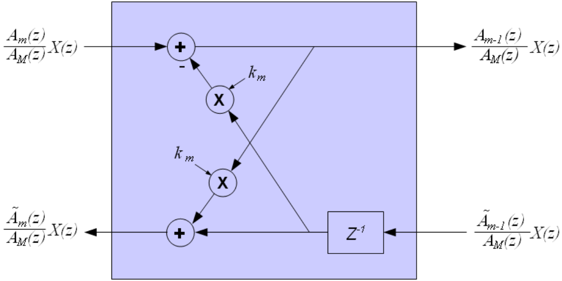
comme

$$\begin{cases} A_{m-1}(z) = A_m(z) - k_m z^{-1}\tilde{A}_{m-1}(z) \\ \tilde{A}_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1}\tilde{A}_{m-1}(z) \end{cases}$$

Application à la synthèse de filtres RII

Cellules purement récursives





Application à la synthèse de filtres RII

Soit le filtre RII à implanter de transmittance $H(z) = \frac{P_M(z)}{A_M(z)}$.
On génère la base orthogonale de polynômes $\left\{\tilde{A}_0(z), \dots, \tilde{A}_M(z)\right\}$ puis on décompose $P_M(z)$ sur cette base

$$P_M(z) = \sum_{m=0}^{M} \nu_m \tilde{A}_m(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \sum_{m=0}^{M} \nu_m \frac{\tilde{A}_m(z)}{A_M(z)}.$$

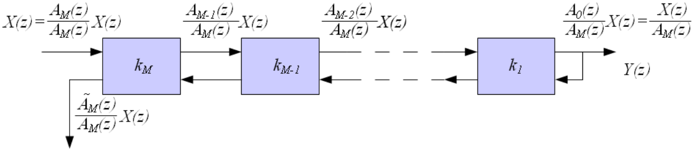
où on réécrit le système de récurrence prograde initial

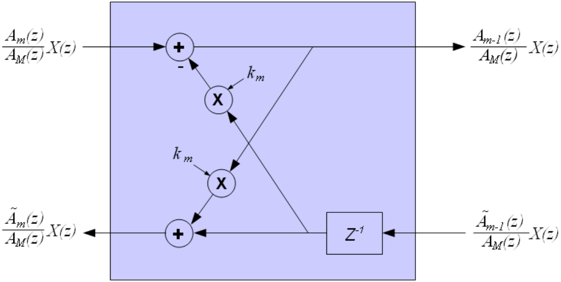
$$\left\{ \begin{array}{l} A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \tilde{A}_{m-1}(z) \\ \tilde{A}_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1} \tilde{A}_{m-1}(z) \end{array} \right.$$

comme

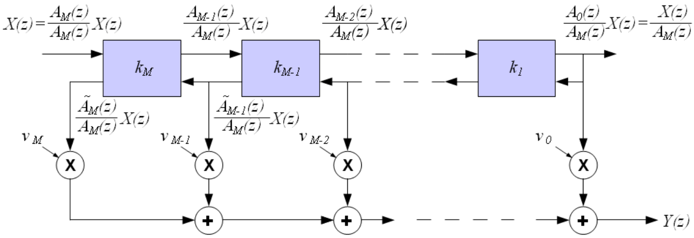
$$\left\{ \begin{array}{l} A_{m-1}(z) = A_m(z) - k_m z^{-1} \tilde{A}_{m-1}(z) \\ \tilde{A}_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1} \tilde{A}_{m-1}(z) \end{array} \right.$$

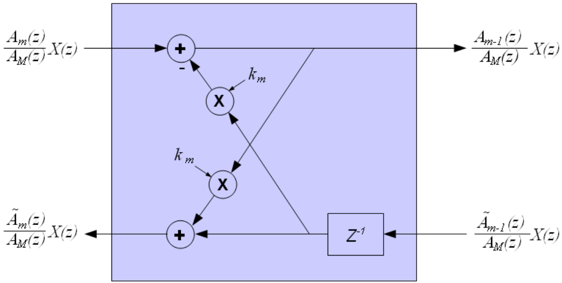
Application à la synthèse de filtres RII



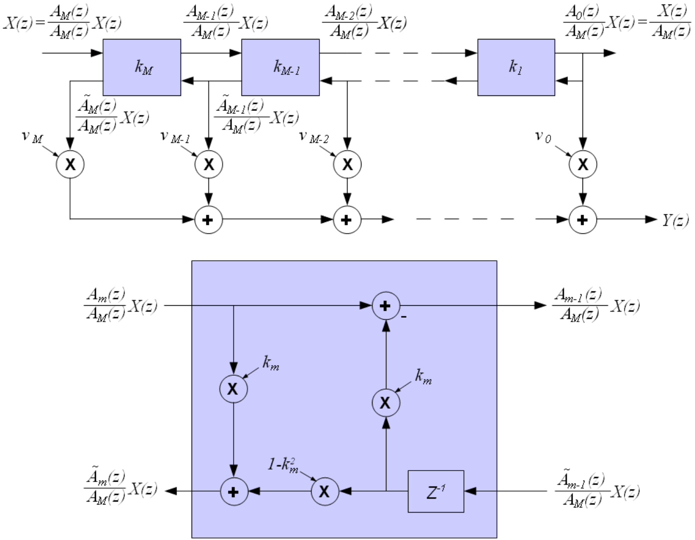


Application à la synthèse de filtres RII





Application à la synthèse de filtres RII



Application à la synthèse de filtres RII

Dans la décomposition sur la base

$$P_M(z) = \sum_{m=0}^{M} \nu_m \tilde{A}_m(z)$$

les coefficients $\{\nu_0, \ldots, \nu_M\}$ sont calculés à l'aide de la récursion rétrograde $(m = M, \ldots, 2)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_{m-1}(z) & = & P_m(z) - \nu_m \tilde{P}_{m-1}(z) \\ \nu_{m-1,m-1} & = & p_{m-1,m-1}. \end{array} \right.$$

où $P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k} z^{-k}$ et $\nu_0 = p_{0,0}$.

Plan du cours

Décomposition en fractions “continues”

Soit le filtre à implanter de transmittance

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^k}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^k}.$$

On cherche à écrire $H(z)$ sous la forme d'une fraction continue...
Plusieurs formes existent[13], par exemple

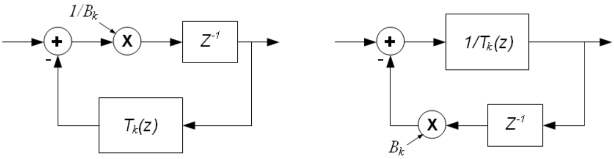
$$H(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots \\ B_M z + \frac{1}{A_M}\end{matrix}}}}$$

[13] Voir les conditions énoncées par Mitra & Sherwood (1972).

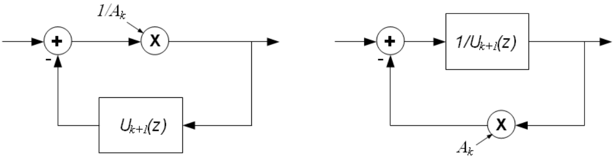
Décomposition en fractions "continues"

On introduit les opérateurs élémentaires

- $U_k(z) = \frac{1}{B_k z + T_k(z)}$ $(k = 1, \ldots, M)$



- $T_k(z) = \frac{1}{A_k + U_{k+1}(z)}$, $(k = 1, \ldots, M-1)$ avec $T_M(z) = \frac{1}{A_M}$.



Décomposition en fractions "continues"

La transmittance

$$H(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots \\ B_M z + \frac{1}{A_M}\end{matrix}}}}$$

se réécrit

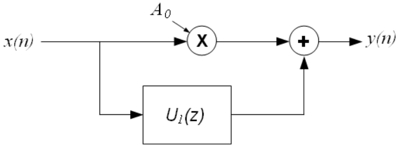
$$H(z) = A_0 + U_1(z)$$

avec

- $U_1(z) = \frac{1}{B_1 z + T_1(z)}$,
- $T_1(z) = \frac{1}{A_1 + U_2(z)}$,
- $U_2(z) = \frac{1}{B_2 z + T_2(z)}$,
- ...
- $T_M(z) = \frac{1}{A_M}$.

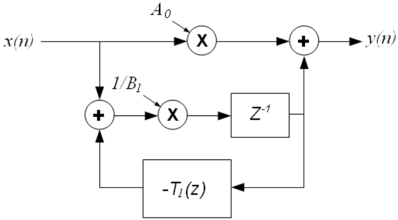
Décomposition en fractions "continues"

D'où la structure en échelle (récursivité) avec $U_1(z) = \frac{1}{B_1 z + T_1(z)}$



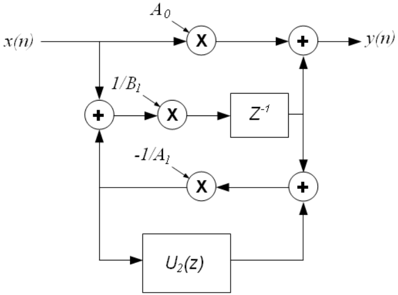
Décomposition en fractions “continues”

D'où la structure en échelle (récursivité) avec $T_1(z) = \frac{1}{A_1 + U_2(z)}$



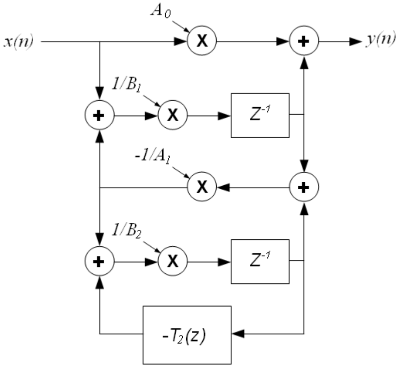
Décomposition en fractions “continues”

D'où la structure en échelle (récursivité) avec $U_2(z) = \frac{1}{B_2 z + T_2(z)}$



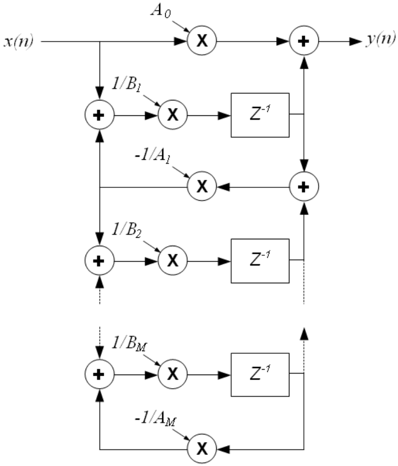
Décomposition en fractions "continues"

D'où la structure en échelle (récursivité) avec $T_2(z) = \frac{1}{A_2+U_3(z)}$



Décomposition en fractions "continues"

D'où la structure en échelle (récursivité)



Décomposition en fractions "continues"

Calcul des $\{A_0, \ldots, A_M\}$ *et* $\{B_1, \ldots, B_M\}$
Algorithme (récursif) d'Euclide : division euclidienne + inversion du reste.

Exemples

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{72z^2 + 78z + 9}{24z^2 + 18z^2 + 1} \\ &= 3 + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3z + \frac{1}{4}}}} \end{aligned}$$

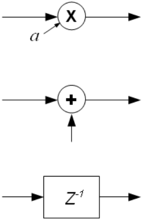
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{720z^2 + 240z + 12}{720z^3 + 600z^2 + 72z + 1} \\ &= \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3z + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5z + \frac{1}{6}}}}}} \end{aligned}$$

Plan du cours

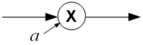
Systèmes multi-cadences ?

Système mono-cadence

- amplificateur ($\times$),
- sommateur ($+$),
- retard ($\times z^{-1}$).

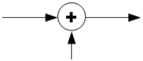


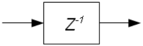
Systèmes multi-cadences ?



Système mono-cadence

- amplificateur ($\times$),
- sommateur ($+$),
- retard ($\times z^{-1}$).

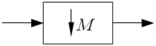




Système multi-cadence

Opérateurs supplémentaires :

- décimateur,
- interpolateur.



Sous-échantillonnage (décimation)

Soit le signal $y_D(n)$ version sous-échantillonnée (décimée) par un facteur M du signal $x(n)$:

$$y_D(n) = x(nM), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dans le plan en z, le signal sous-échantillonné est représenté par

$$Y_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} \omega_M^k\right)$$

où $\omega_M = e^{\frac{j2\pi}{M}}$.

Démonstration

- On introduit $x_M(n) = x(n)u_M(n)$ où

$$u_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ divisible par } M; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \omega_M^{-kn}$$

- On a $Y_D(z) = X_M\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$,
- On montre que $X_M(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\omega_M^k z\right)$.

Sous-échantillonnage (décimation)

Soit le signal $y_D(n)$ version sous-échantillonnée (décimée) par un facteur M du signal $x(n)$:

$$y_D(n) = x(nM), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dans le plan en z, le signal sous-échantillonné est représenté par

$$Y_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} \omega_M^k\right)$$

où $\omega_M = e^{\frac{j2\pi}{M}}$.

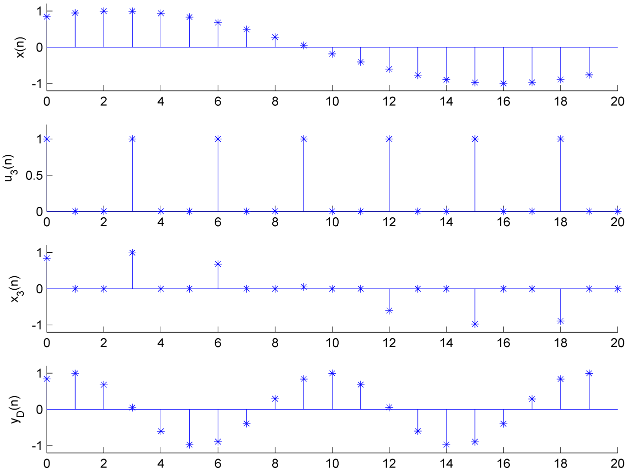
Démonstration

- On introduit $x_M(n) = x(n)u_M(n)$ où

$$u_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ divisible par } M; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \omega_M^{-kn}$$

- On a $Y_D(z) = X_M\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$,
- On montre que $X_M(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\omega_M^k z\right)$.

Sous-échantillonnage (décimation)

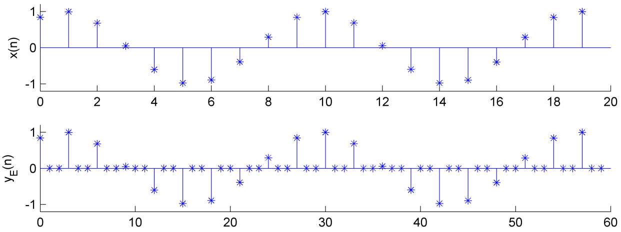


Sur-échantillonnage (insertion)

De même, soit le signal $y_E(n)$ version sur-chantillonnée (interpolation par insertion de zéro) par un facteur L du signal $x(n)$:

$$y_E(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{si } n \text{ est divisible par } L; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur-échantillonnage (insertion)



Sur-échantillonnage (insertion)

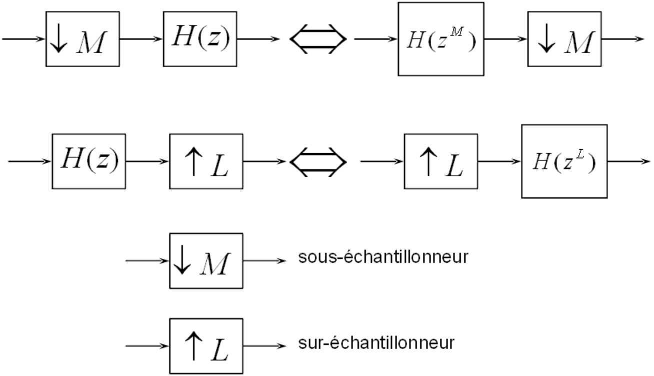
De même, soit le signal $y_E(n)$ version sur-chantillonnée (interpolation par insertion de zéro) par un facteur L du signal $x(n)$:

$$y_E(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{si } n \text{ est divisible par } L; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le plan en z, le signal sur-échantillonné est représenté par

$$Y_E(z) = X\left(z^L\right).$$

Identités nobles[14]



[14] P. P. Vaidyanathan, "Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial," *Proc. of the IEEE*, vol. 78, no. 1, pp. 56-93, Jan. 1990.

Représentation polyphase[15]

On décompose la réponse impulsionnelle en deux sous-suites d'échantillons (pairs et impairs):

$$\{h(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{h(2m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \cup \{h(2m+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

La transmittance résultante s'écrit

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) z^{-n} \\ &= \underbrace{\sum_{m} h(2m) z^{-2m}}_{E_0\left(z^2\right)} + \underbrace{\sum_{m} h(2m+1) z^{-(2m+1)}}_{z^{-1}E_1\left(z^2\right)} \end{aligned}$$

avec les deux sous-suites :

$$\begin{aligned} E_0(z) &= \mathrm{TZ}\left[e_0(n)\right] &= \mathrm{TZ}\left[h(2m)\right] \\ E_1(z) &= \mathrm{TZ}\left[e_1(n)\right] &= \mathrm{TZ}\left[h(2m+1)\right] \end{aligned}$$

[15] M. Bellanger, *Traitement Numérique du Signal*, Masson, 1994.

Représentation polyphase

Pour généraliser, on décompose la RI sur les M sous-suites (polyphases) provenant de sous-échantillonnage de facteur M:

$$\{h(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{\ell=0}^{M-1} \{h\left(Mm+\ell\right)\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

La transmittance résultante s'écrit

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) z^{-n} \\ &= E_0\left(z^M\right) + z^{-1}E_1\left(z^M\right) + \ldots + z^{-(M-1)}E_{M-1}\left(z^M\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{M-1} z^{-\ell} E_\ell\left(z^M\right) \end{aligned}$$

avec les M sous-suites ($\ell = 1, \ldots, M-1$):

$$E_\ell(z) = \mathrm{TZ}\left[e_\ell(m)\right] \quad \text{avec} \quad e_\ell(m) = h(Mm+\ell).$$

Représentation polyphase

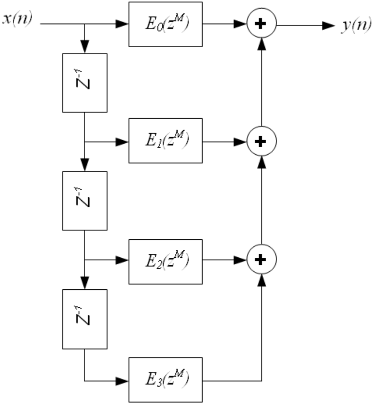
Example $M = 4$

Soit un filtre RIF d'ordre 11

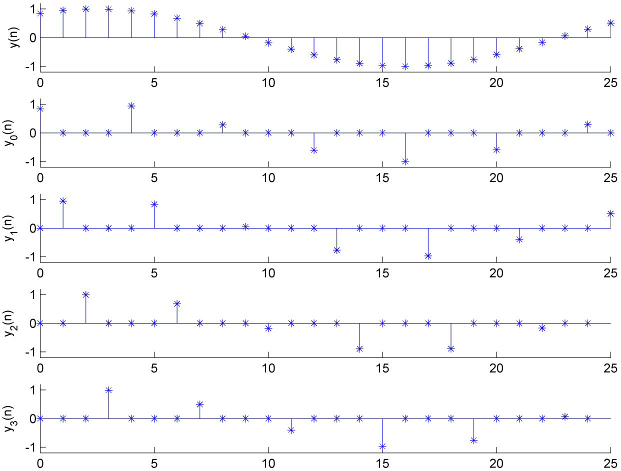
$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{10} b_k z^{-n} \\
&= E_0(z^4) + z^{-1} E_1(z^4) \\
+ & \quad z^{-2} E_2(z^4) + z^{-3} E_3(z^4)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
E_0(z) &= b_0 + b_4 z^{-1} + b_8 z^{-2} \\
E_1(z) &= b_1 + b_5 z^{-1} + b_9 z^{-2} \\
E_2(z) &= b_2 + b_6 z^{-1} + b_{10} z^{-2} \\
E_3(z) &= b_3 + b_7 z^{-1}
\end{aligned}
$$



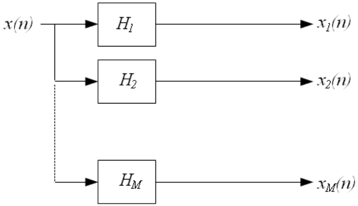
Représentation polyphase



Plan du cours

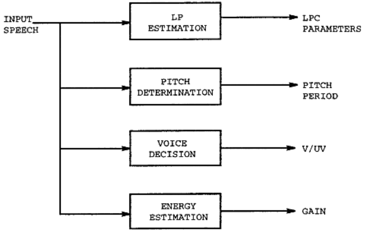
Multi-cadence et banc de filtres

Banc de filtres : analyse



Multi-cadence et banc de filtres

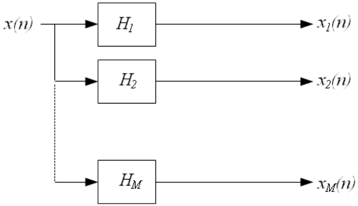
Vocodeur LPC (cours "Compression parole et musique", Corinne Mailhes)



Multi-cadence et banc de filtres

- Enjeu n°1 : complexité des calculs

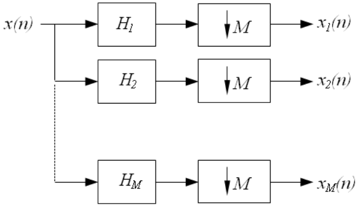
Banc de filtres : analyse



Multi-cadence et banc de filtres

- Enjeu n°1 : complexité des calculs
  $\Rightarrow$ réduire la cadence (sous-échantillonnage)

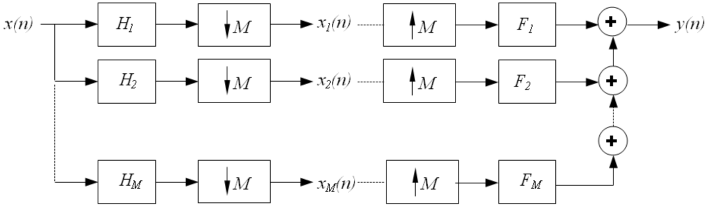
Banc de filtres : analyse



Multi-cadence et banc de filtres

- Enjeu n°1 : complexité des calculs
  $\Rightarrow$ réduire la cadence (sous-échantillonnage)
- Enjeu n°2 : reconstruction ($\Leftrightarrow$ synthèse)

Banc de filtres : analyse/synthèse



Multi-cadence et banc de filtres

Applications

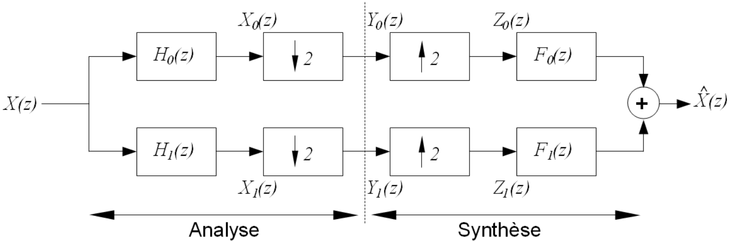
- Vocodeurs[16],
  - Ici, slide 43
  - Ici, slide 27-28
- Décomposition en sous-bandes : codage avec perte[17],
  - Ici, slide 39
- Décomposition en sous-bandes : analyse multi-résolution[18],
  - Ici
- Décomposition en sous-bandes : estimation spectrale,
  - Bonacci *et al.*, ICASSP 2002.
  - Bonacci *et al.*, EUSIPCO 2002.

[16] Cours “Compression parole et musique”, Corinne Mailhes.
[17] Cours “Compression”, Corinne Mailhes.
[18] Cours “Représentation et analyse des signaux”, Marie Chabert.

Plan du cours

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

Soit le problème générique d'analyse/synthèse $X(z) \to \hat{X}(z)$ défini par



D'après ce qui précède (sur/sous-échantillonnage):

$$\begin{cases} Y_m(z) = & \frac{1}{2}\left[X_m\left(z^{1/2}\right) + X_m\left(-z^{1/2}\right)\right] \\ Z_m(z) = & Y_m\left(z^2\right) \end{cases}$$

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

Avec $X_m(z) = H_m(z)X(z)$ et $\hat{X}(z) = F_0(z)Z_0(z) + F_1(z)Z_1(z)$, il vient:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right]X(z)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right]X(-z)\\ &= T(z)X(z) + A(z)X(-Z)\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} T(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction de distorsion} \\ A(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction d'}\textit{aliasing} \end{cases}$$

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

Avec $X_m(z) = H_m(z)X(z)$ et $\hat{X}(z) = F_0(z)Z_0(z) + F_1(z)Z_1(z)$, il vient:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right]X(z)\\ &\quad + \frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right]X(-z)\\ &= T(z)X(z) + A(z)X(-Z)\end{aligned}$$

où

$$\left\{\begin{array}{lcll} T(z) &=& \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction de distorsion}\\ A(z) &=& \frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction d'}\textit{aliasing}\end{array}\right.$$

Mais l'opérateur $\mathcal{R} : X(z) \to X(-z)$ n'est pas un filtre LIT donc :

Il n'existe pas $\{h(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\hat{x}(n) = h(n) * x(n)$...

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

Avec $X_m(z) = H_m(z)X(z)$ et $\hat{X}(z) = F_0(z)Z_0(z) + F_1(z)Z_1(z)$, il vient:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right]X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right]X(-z) \\ &= T(z)X(z) + A(z)X(-Z)\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} T(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction de distorsion} \\ A(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right] & \text{est la fonction d'}\textit{aliasing} \end{cases}$$

Mais l'opérateur $\mathcal{R} : X(z) \to X(-z)$ n'est pas un filtre LIT donc :

Il n'existe pas $\{h(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\hat{x}(n) = h(n) * x(n)$...

... sauf si la condition de non-repliement est vérifiée :

$$A(z) = H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$$

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

La condition de non-repliement s'énonce :

$$\frac{F_0(z)}{H_1(-z)} = -\frac{F_1(z)}{H_0(-z)} = C(z)$$

En sortie de la chaîne d'analyse/synthèse

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{H_0(z)H_1(-z)}_{V(z)} - \underbrace{H_1(z)H_0(-z)}_{V(-z)}\right] C(z)X(z) \\ &= T(z)X(z)\end{aligned}$$

avec $T(z) = \frac{1}{2}\left[V(z) - V(-z)\right] C(z)$.
Une condition suffisante (mais non nécessaire) est $C(z) = 1$, alors

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)

Solution historique

Filtres Miroirs en Quadrature (FMQ/QMF) définis par les relations

$$\begin{cases} C(z) &= 1 \\ H_1(z) &= H_0(-z) \end{cases} \tag{2}$$

Dans ce cas

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)^2 - H_0(-z)^2\right] X(z)$$

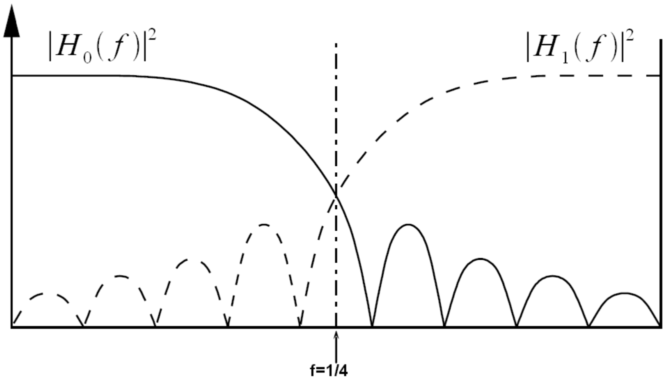
Sur le cercle $C(0,1)$, la relation (2) se résume à

$$H_1\left(e^{2i\pi f}\right) = H_0\left(-e^{2i\pi f}\right) = H_0\left(e^{2i\pi(f+1/2)}\right)$$

Si on considère les modules de H_1 et H_0, alors il vient que $\left|H_1\left(e^{2i\pi f}\right)\right|$ est le réfléchi de $\left|H_0\left(e^{2i\pi f}\right)\right|$ par rapport au plan $f = \frac{1}{4}$.

$\rightarrow$ Si H_0 est un filtre passe-bas, alors H_1 est un passe-haut.

Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)



Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)
Représentation polyphase

Avec $H_1(z) = H_0(-z)$:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)^2 - H_0(-z)^2\right] X(z)$$

On décompose $H_0(z)$ selon ses 2 termes biphases :

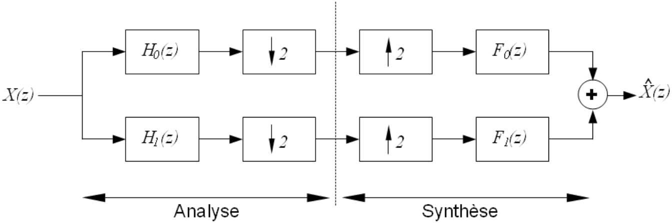
$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1\left(z^2\right).$$

Les filtres d'analyse s'écrivent donc :

$$\begin{pmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1} E_1\left(z^2\right) \end{pmatrix}$$

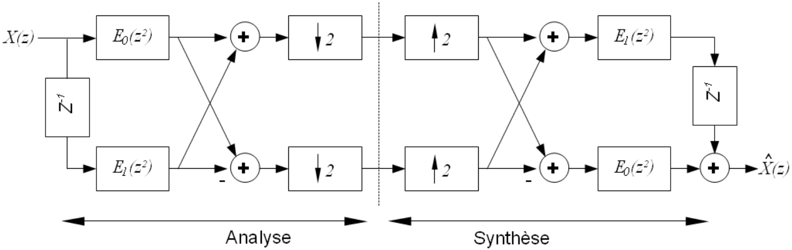
Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)
Représentation polyphase

Problème analyse/synthèse :



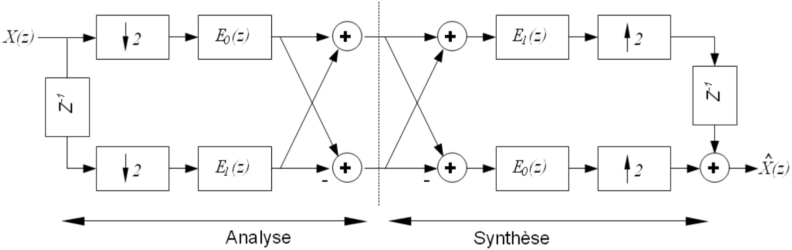
Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)
Représentation polyphase

Condition de non-repliement et décomposition polyphase :



Filtres Miroirs en Quadrature (QMF)
Représentation polyphase

Identités nobles :



Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

Sur le cercle $C(0,1)$, on écrit $T\left(e^{2i\pi f}\right) = \left|T\left(e^{2i\pi f}\right)\right| e^{i\phi(2\pi f)}$
Plusieurs cas intéressants possibles :

- Si $T(z)$ est un passe-tout, i.e, $\left|T\left(e^{2i\pi f}\right)\right| = d$, alors

$$\left|\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right| = d\left|X\left(e^{2i\pi f}\right)\right|$$

$\longrightarrow$ Filtres à conservation d'amplitude (mais distorsion de phase).

- Si $T(z)$ est à phase linéaire, i.e, $\phi(2\pi f) = \alpha 2\pi f + \beta$, alors

$$\begin{aligned}\arg\left[\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right] &= \arg\left[T\left(e^{2i\pi f}\right)\right] + \arg\left[\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right] \\ &= \alpha 2\pi f + \beta + \arg\left[\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right]\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Filtres à conservation de phase (mais distorsion d'amplitude).

Problème d'analyse/synthèse à 2 voies

- Si le banc de filtre a ni distorsion d'amplitude, ni distorsion de phase

$$\exists L \geq 1, \;\; T(z) = Kz^{-L}$$

Alors en sortie

$$\begin{aligned} \left|\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right| &= K\left|X\left(e^{2i\pi f}\right)\right| \\ \arg\left[\hat{X}\left(e^{2i\pi f}\right)\right] &= \arg\left[X\left(e^{2i\pi f}\right)\right] - L2\pi f \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Sortie retardée et amplifiée/atténuée.
$\longrightarrow$ Banc de filtres à reconstruction parfaite.

Banc de filtres à reconstruction parfaite

On introduit le filtre produit $V(z) = H_0(z)H_1(-z)$

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{H_0(z)H_1(-z)}_{V(z)} - \underbrace{H_1(z)H_0(-z)}_{V(-z)}\right] X(z)$$

Pour avoir $T(z) = Kz^{-L}$ dans la chaîne d'analyse/synthèse (L impair) :

$$T(z) = \tfrac{1}{2}\left[V(z) - V(-z)\right] = Kz^{-L}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v(2n+1) & = K\delta(2n+1-L) \\ v(2n) & \text{quelconque} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$V(z) = Kz^{-L} + \textstyle\sum_n v(2n)z^{-2n}.$$

Banc de filtres à reconstruction parfaite

Trois méthodes de synthèse :

1. On constuit $V(z)$ tel que

$$v(n) = \begin{cases} K\delta(n-L) & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{quelconque} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

   puis on factorise $V(z) = H_0(z)H_1(z)$.

2. On se donne $H_0(z)$ et on résoud (calcul matriciel)

$$H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) = Kz^{-L}$$

3. On choisit $\{H_0(z), H_1(z)\}$ dans des familles qui conviennent
   $\longrightarrow$ CQF...

Filtres conjugués en quadrature (CQF)

On choisit H_0 et H_1 tels que

$$\begin{cases} H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 1 & \text{(a)} \\ H_1(z)H_1(z^{-1}) + H_1(-z)H_1(-z^{-1}) = 1 & \text{(b)} \\ H_0(z)H_1(z^{-1}) + H_0(-z)H_1(-z^{-1}) = 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

Propriété

Soit $H_0(z)$, RIF vérifiant (a). Alors[19]

- $H_0(z)$ est de longueur paire (ordre impair),
- Une CNS pour que $H_1(z)$ RIF vérifie (b) et (c) est

$$H_1(z) = \pm z^{-L} H_0(-z^{-1}), \quad L \text{ impair}$$

Dans ce cas, $T(z) = z^{-L}$.

[19] Vetterli, *IEEE Trans. SP*, 1992.

Filtres conjugués en quadrature (CQF)

Solution "classique" de Smith et Barnwell (pour L impair et $z = e^{2i\pi f}$) :

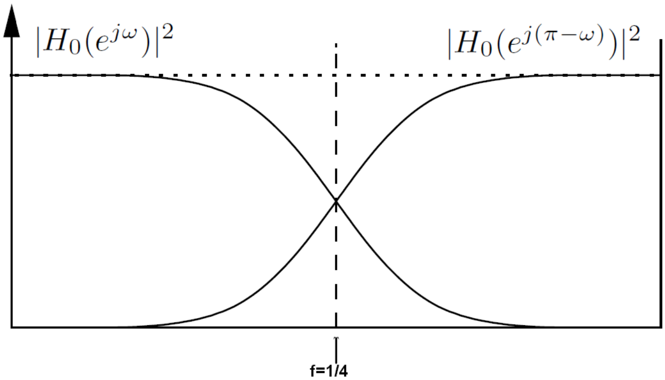
$$H_1(z) = -z^{-L}\tilde{H}_0(-z) \quad \text{avec} \quad \tilde{H}_0(z) = H_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

On a alors :

- symétrie en puissance :

$$\left|H_0\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2 + \left|H_0\left(e^{j(2\pi f + \pi)}\right)\right|^2 = 1.$$

Filtres conjugués en quadrature (CQF)



Filtres conjugués en quadrature (CQF)

Solution "classique" de Smith et Barnwell (pour L impair et $z = e^{2i\pi f}$) :

$$H_1(z) = -z^{-L}\tilde{H}_0(-z) \quad \text{avec} \quad \tilde{H}_0(z) = H_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

On a alors :

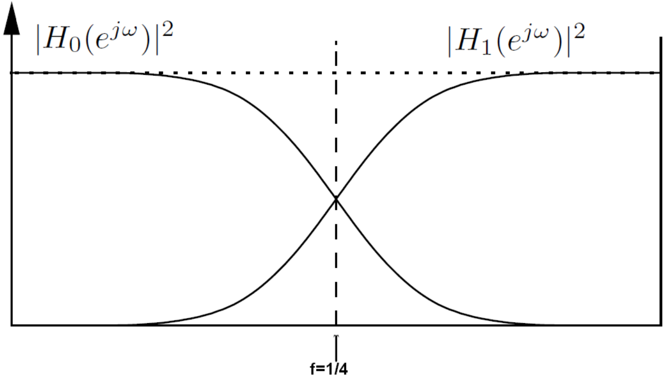
- symétrie en puissance :

$$\left|H_0\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2 + \left|H_0\left(e^{j(2\pi f+\pi)}\right)\right|^2 = 1.$$

- complémentarité en puissance :

$$\left|H_0\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2 + \left|H_1\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2 = 1.$$

Filtres conjugués en quadrature (CQF)



Filtres conjugués en quadrature (CQF)

Banc de filtres complètement défini par $H_0(z)$:

$$\begin{array}{ll} h_0(n) & \text{donné} \\ h_1(n) & = (-1)^n h_0(L-n) \\ f_0(n) & = h_0(L-n) \\ f_1(n) & = -(-1)^n h_0(n) \end{array}$$

Remarques

- Si $H_0(z)$ est un filtre RII stable, $H_1(z)$ est instable !
  $\longrightarrow$ réalisation non-applicable...
  $\longrightarrow$ implantation à l'aide de RIF.
- Si $H_0(z)$ est causal, $H_0\left(-\frac{1}{z}\right)$ est anticausal. D'où le retard introduit z^{-L} !
  ($H_1(z)$ devient causal si $L \geq$ordre du filtre RIF $H_0(z)$).

Filtres conjugués en quadrature (CQF)
Synthèse par factorisation spectrale

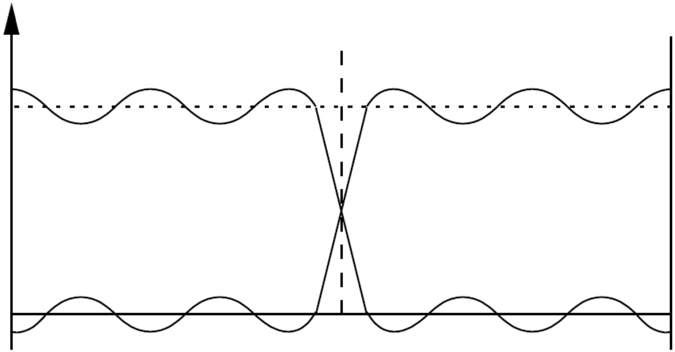
On pose $P(z) = H_0(z)\tilde{H}_0(-z)$ (filtre demi-bande). On a alors :

$$P(z) + P(-z) = 1, \text{ i.e., } P(z) = \frac{1}{2} + \sum_k p(2k+1)z^{-(2k+1)}.$$

1. Synthèse d'un filtre demi-bande $Q(z)$ à phase nulle tel que

$$Q(e^{j2\pi f}) + Q(e^{j(2\pi f+\pi)}) = 1. \tag{3}$$

Filtres conjugués en quadrature (CQF)
Synthèse par factorisation spectrale



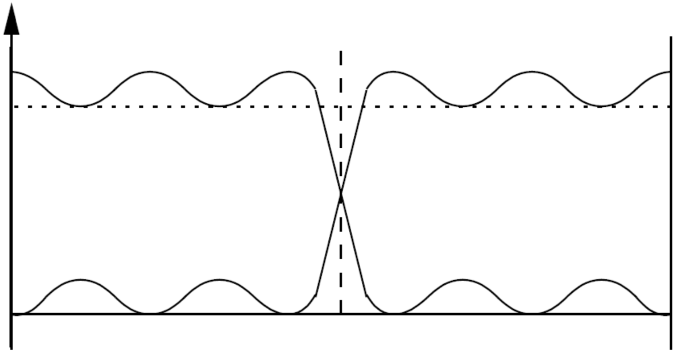
Filtres conjugués en quadrature (CQF)
Synthèse par factorisation spectrale

On pose $P(z) = H_0(z)\tilde{H}_0(-z)$ (filtre demi-bande). On a alors :

$$P(z) + P(-z) = 1, \text{ i.e., } P(z) = \frac{1}{2} + \sum_k p(2k+1)z^{-(2k+1)}.$$

1. Synthèse d'un filtre demi-bande $Q(z)$ à phase nulle tel que
$$Q(e^{j2\pi f}) + Q(e^{j(2\pi f + \pi)}) = 1. \tag{4}$$
2. On pose $q'(n) = q(n) + \epsilon\delta(n)$ tel que $Q'(e^{j2\pi f}) = |H_0(e^{j2\pi f})|^2 \geq 0$.

Filtres conjugués en quadrature (CQF)
Synthèse par factorisation spectrale



Filtres conjugués en quadrature (CQF)
Synthèse par factorisation spectrale

On pose $P(z) = H_0(z)\tilde{H}_0(-z)$ (filtre demi-bande). On a alors :

$$P(z) + P(-z) = 1, \text{ i.e., } P(z) = \frac{1}{2} + \sum_k p(2k+1)z^{-(2k+1)}.$$

1. Synthèse d'un filtre demi-bande $Q(z)$ à phase nulle tel que
$$Q(e^{j2\pi f}) + Q(e^{j(2\pi f + \pi)}) = 1. \tag{5}$$
2. On pose $q'(n) = q(n) + \epsilon\delta(n)$ tel que $Q'(e^{j2\pi f}) = |H_0(e^{j2\pi f})|^2 \geq 0$.
3. On factorise $Q'(z) = A\prod_i(1 - a_i z^{-1})(1 - a_i^{-1} z^{-1})$ (avec $|a_i| \leq 1$)
4. On définit le facteur spectral à minimum de phase
$H_0(z) = \sqrt{\frac{A}{1+2\epsilon}}\prod_i(1 - a_i z^{-1})$.

Filtres conjugués en quadrature (CQF)

Autre méthode proposée par Daubechies[20] :

$$P(z) = (1 + z^{-1})^k (1 + z)^k R(z)$$

sous les contraintes

- $R(z)$ symétrique ($R(z^{-1}) = R(z)$),
- $R(z)$ positif pour $z = e^{j2\pi f}$
- $R(z)$ de degré minimal.

Puis factorisation de $P(z)$ avec zeros à l'intérieur de $C(0, 1)$
$\longrightarrow$ Famille des filtres à minimum de phase de Daubechies.

Limitations des CQF :

- 1 seul degré de liberté pour l'analyse/synthèse: $H_0(z)$,
- pas de banc avec filtres d'analyse et synthèse réels à phase linéaire.

[20] Daubechies, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1998.

Banc de filtres bi-orthogonaux

On choisit H_0 et H_1 tels que $C(z) = -z^{-L}$ et

$$\begin{cases} H_0(z)F_0(z) + H_0(-z)F_0(-z) = 2 \\ H_1(z) = -z^L F_0(z^{-1}), \ L \text{ impair} \\ F_1(z) = z^{-L} H_0(-z) \end{cases}$$

Dans ce cas, $T(z) = z^L$. On pose $P(z) = H_0(z)F_0(z)$ et il vient :

$$P(z) + P(-z) = 2$$

Methode de synthèse :

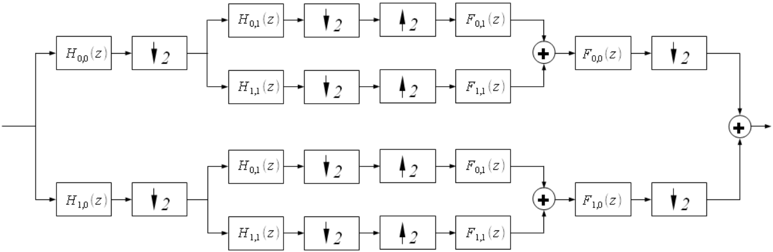
1. On se donne $P(z)$ (demi-bande, phase nulle, coefficients réels)
2. on factorise $P(z) = H_0(z)F_0(z)$

$\longrightarrow$ 2 degrés de libertés.
$\longrightarrow$ banc de filtres à phase linéaire possible.

Plan du cours

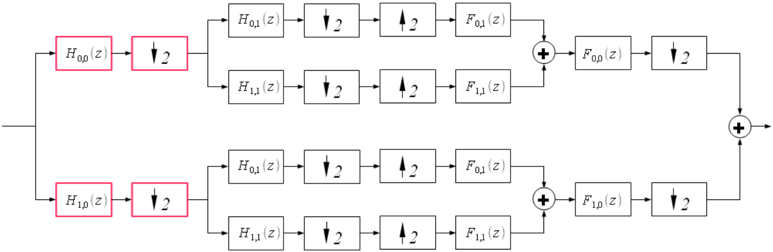
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



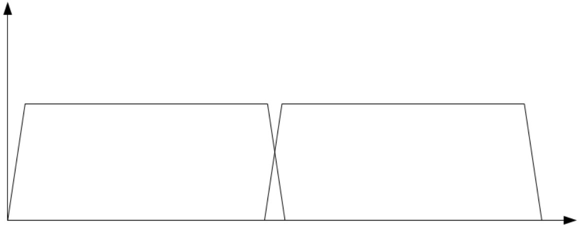
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



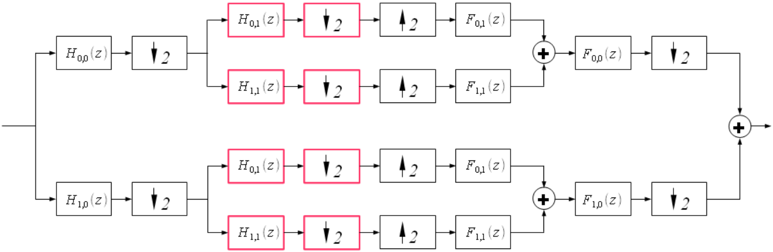
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



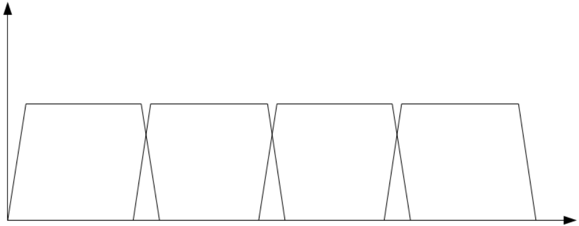
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



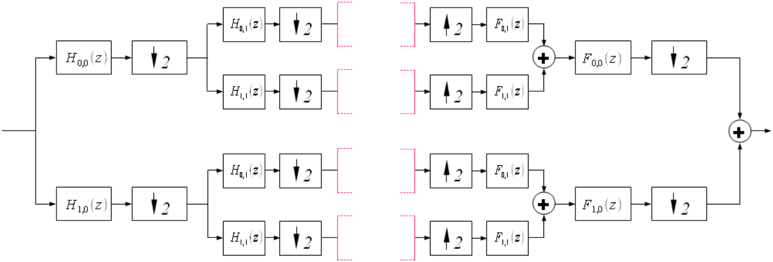
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



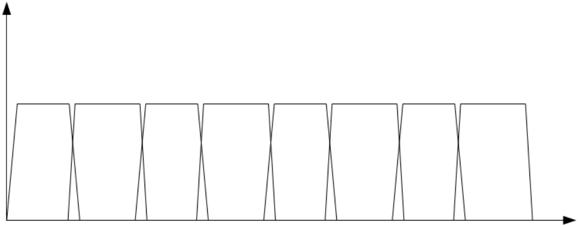
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



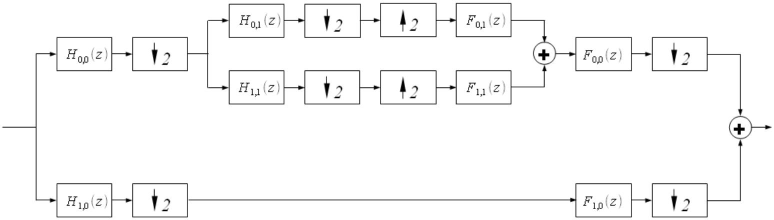
Décomposition arborescente complète

(Décomposition en paquets d'ondelettes)



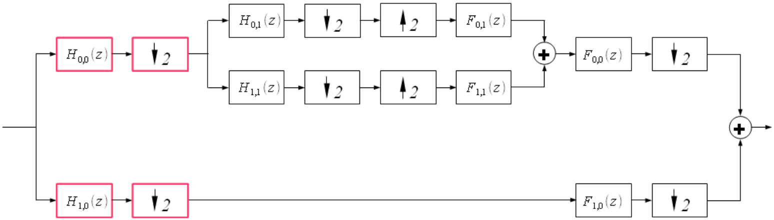
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



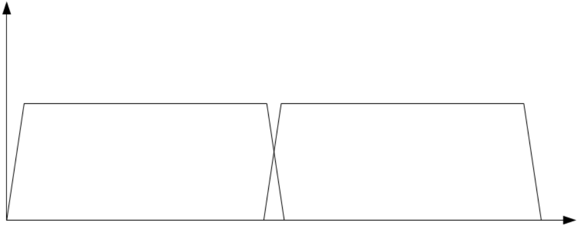
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



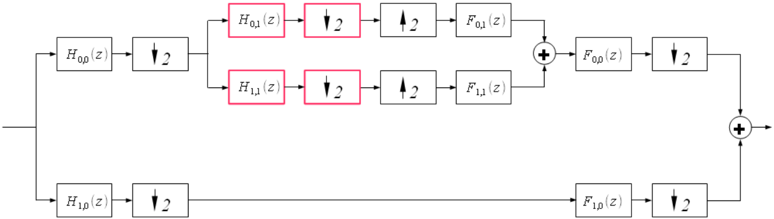
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



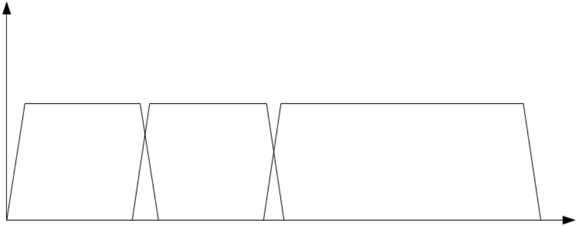
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



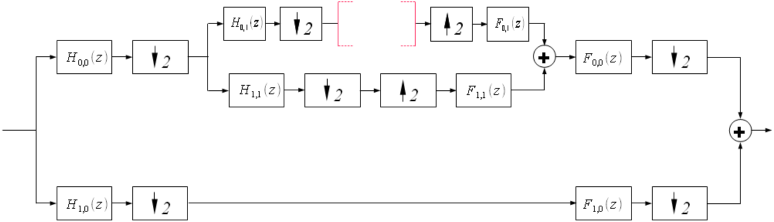
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



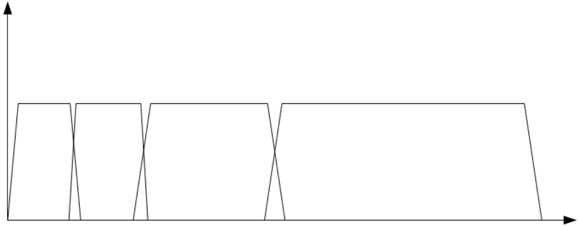
Décomposition arborescente dyadique

(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)

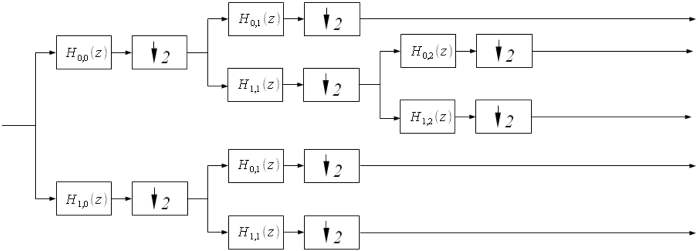


Décomposition arborescente dyadique

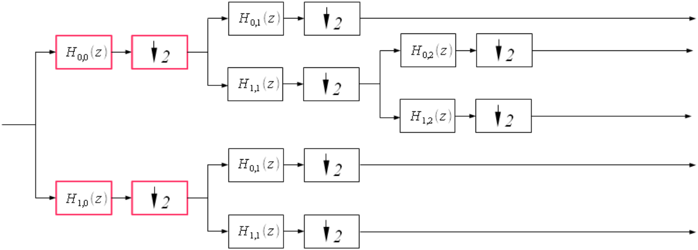
(Décomposition en ondelettes discrètes dyadique)



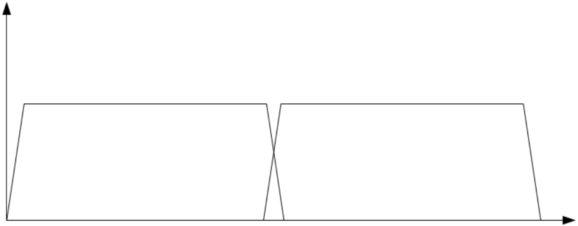
Décomposition en sous-bande optimale



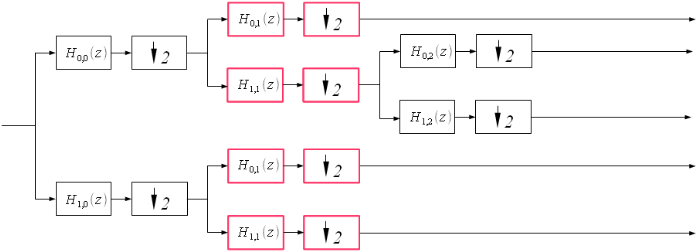
Décomposition en sous-bande optimale



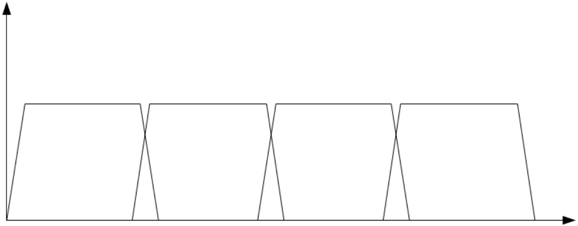
Décomposition en sous-bande optimale



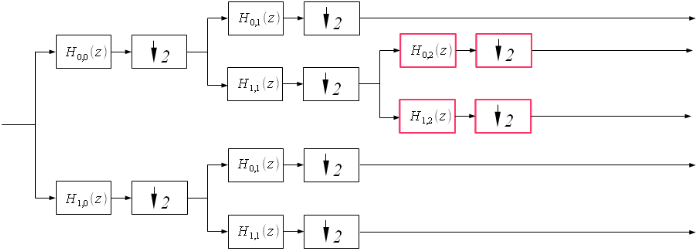
Décomposition en sous-bande optimale



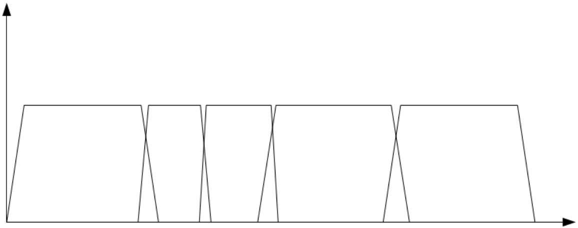
Décomposition en sous-bande optimale



Décomposition en sous-bande optimale

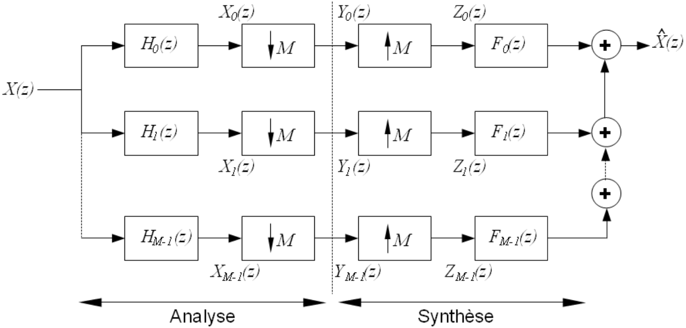


Décomposition en sous-bande optimale



Décomposition directe à M voies

Les parties "analyse" et "synthèse" comportent M filtres en parallèle.



Décomposition directe à M voies

Comme précédemment, les propriétés de sur/sous-échantillonnage conduisent à:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[X\left(\omega_M^m z\right)\sum_{k=0}^{M-1} H_k(\omega_M^m z)F_k(z)\right]\\ &= \sum_{m=0}^{M-1} X\left(\omega_M^m z\right)A_m(z)\end{aligned}$$

avec $A_m(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(\omega_M^m z)F_k(z)$.

Décomposition directe à M voies

Matriciellement :

$$\hat{X}(z) = \mathbf{a}(z)^T \mathbf{x}(z) = \frac{1}{M}\mathbf{f}(z)^T \mathbf{H}(z)^T \mathbf{x}(z)$$

avec

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_0(z) \\ A_1(z) \\ \vdots \\ A_{M-1}(z) \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}(z)} = \frac{1}{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{h}(z)^T \\ \mathbf{h}(\omega_m z)^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\omega_m^{M-1} z)^T \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(z)}$$

et

$$\mathbf{h}(z) = \begin{pmatrix} H_0(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(z) = \begin{pmatrix} X(z) \\ \vdots \\ X(\omega_M^{M-1} z) \end{pmatrix}..$$

Décomposition directe à M voies

Mais, les opérateurs

$$\mathcal{R}_m : X(z) \to X\left(\omega_M^m z\right)$$

ne sont pas des filtres LIT (sauf pour $m = 0$). Les conditions de non-repliement s'énoncent alors :

$$A_m(z) = 0, \quad \text{pour } m \neq 0$$

Si on se donne les filtres d'analyse (i.e., $\mathbf{H}(z)$), le problème se ramène à résoudre

$$\frac{1}{M}\mathbf{f}(z) = \mathbf{H}(z)^{-1}\mathbf{a}(z) \quad \text{avec} \quad \mathbf{a}(z) = \begin{pmatrix} T(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le problème de reconstruction parfaite, $T(z) \propto z^{-N}$.

Décomposition directe à M voies
Représentation polyphase

Les représentations polyphases des filtres d'analyse et synthèse sont

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{m=0}^{m-1} z^{-m} E_{k,m}\left(z^M\right) \\ F_k(z) &= \sum_{m=0}^{m-1} z^{-m} E'_{k,m}\left(z^M\right) \quad \triangleq \sum_{m=0}^{m-1} z^{-M-1-m} R_{k,m}\left(z^M\right) \end{aligned}$$

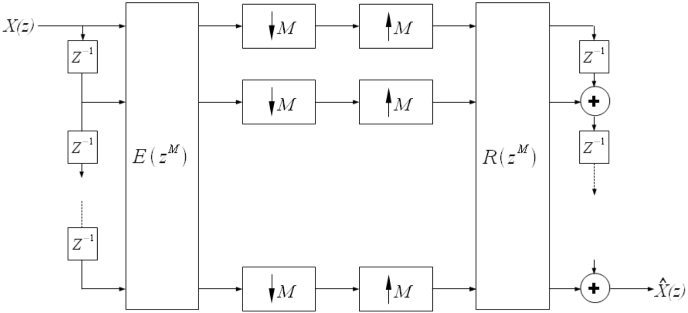
On définit les matrices polyphases

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(z^M\right) \quad \text{tel que} \quad \left[\mathbf{E}\left(z^M\right)\right]_{k,m} = E_{k,m}\left(z^M\right) \\ &\mathbf{R}\left(z^M\right) \quad \text{tel que} \quad \left[\mathbf{R}\left(z^M\right)\right]_{k,m} = R_{k,m}\left(z^M\right) \end{aligned}$$

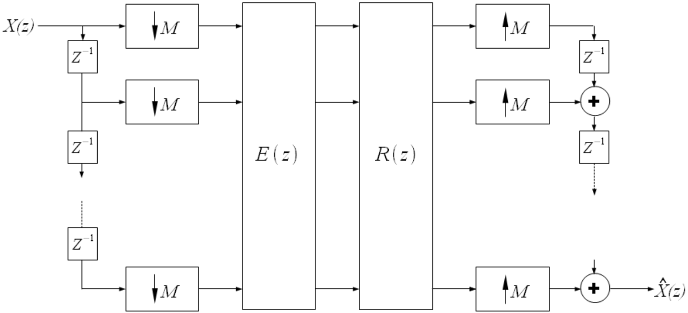
et

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{R}(z)\,\mathbf{E}(z)\,.$$

Décomposition directe à M voies
Représentation polyphase

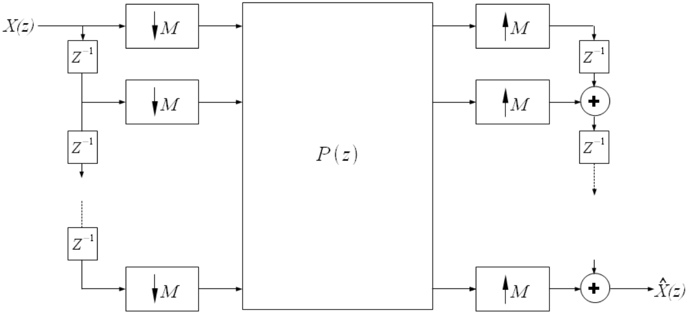


Décomposition directe à M voies
Représentation polyphase



Décomposition directe à M voies

Représentation polyphase



Décomposition directe à M voies

Représentation polyphase

Vaidyanathan a énoncé de nombreuses propriétés[21,22].

Condition nécessaire et suffisante au non-repliement

$\mathbf{P}(z)$ est pseudo-circulante, i.e.,

- $\mathbf{P}(z)$ est Toeplitz,
- $P_{k,0}(z) = z^{-1}P_{0,M-k}(z)$, $k = 1, \ldots, M-1$

$$P(z) = [P_{k,m}(z)]_{k,m} = \begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \ldots & P_{M-1}(z) \\ z^{-1}P_{M-1}(z) & P_0(z) & \ldots & P_{M-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}P_1(z) & \ldots & z^{-1}P_{M-1}(z) & P_0(z) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la fonction de transfert $T(z)$ est

$$T(z) = z^{-(M-1)} \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} P_{0,k}\left(z^M\right).$$

[21] Vaidyanathan, *IEEE Trans. ASSP*, 1987.

[22] Vaidyanathan and Mitra, *IEEE Trans. ASSP*, 1988.

Décomposition directe à M voies
Représentation polyphase

Condition nécessaire et suffisante à la reconstruction parfaite

On a $T(z) \propto z^{-L}$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée

- $\mathbf{P}(z)$ est para-unitaire (et stable), i.e.,

$$\mathbf{P}(z)\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{I}_M$$

  avec $\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{z}\right)^T$ (pour des filtres à coefficients réels).
- $\exists K \in \mathbb{Z},\ \det\left[\mathbf{R}(z)\right]\det\left[\mathbf{E}(z)\right] \propto z^{-K}$,
- dans le cas de RIF, $\exists K \in \mathbb{Z},\ \det\left[\mathbf{E}(z)\right] \propto z^{-K}$,

Une solution possible : filtres $\{H_0, \ldots, H_{M-1}\}$ para-unitaires :

$$\tilde{\mathbf{H}}(z)\mathbf{H}(z) = \mathbf{I}_M,$$

ce qui induit des filtres complémentaires en puissance :

$$\left|H_0(e^{j2\pi f})\right|^2 + \ldots + \left|H_{M-1}(e^{j2\pi f})\right|^2 = 1.$$

Plan du cours

Cas du banc de filtres CQF

On rappelle que $C(z) = 1$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_0(z) & = & H_1(-z) \\ F_1(z) & = & -H_0(-z) \end{array} \right.$$

Banc de filtres orthogonaux (2 voies)

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2 & \text{(a)} \\ H_1(z)H_1(z^{-1}) + H_1(-z)H_1(-z^{-1}) = 2 & \text{(b)} \\ H_0(z)H_1(z^{-1}) + H_0(-z)H_1(-z^{-1}) = 0 & \text{(c)} \end{array} \right.$$

est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lll} \langle h_0(n), h_0(n-2k) \rangle & = \delta(k) & \text{(a')} \\ \langle h_1(n), h_1(n-2k) \rangle & = \delta(k) & \text{(b')} \\ \langle h_0(n), h_1(n-2k) \rangle & = 0 & \text{(c')} \end{array} \right.$$

avec $\langle a(n), b(n) \rangle = \sum_n a(n)b(n)$ (a et b réels).

Cas du banc de filtres CQF

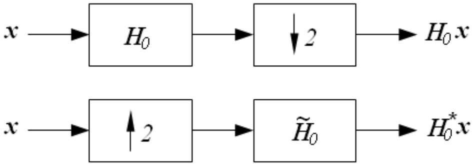
On introduit

$$\mathbf{x} = [\ldots, x(-1), x(0), x(1), \ldots]^T$$

et la matrice

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ldots & 0 & h_0(M-1) & h_0(M-2) & h_0(M-3) & \ldots & h(0) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & h_0(M-1) & \ldots & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & \ldots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

alors



avec $\tilde{h}_0(n) = h_0(M-1-n) = f_0(n)$ (M impair).

Cas du banc de filtres CQF

Que représente l'opérateur $\mathrm{P}_{\mathbf{H}_0} = \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}_0$ *?*

- On a, d'après (a), $\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^* = \mathbf{I}$,
- $\rightarrow$ Projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{V}_0 \triangleq \langle \mathbf{H}_0^* \rangle$ engendré par les colonnes de $\mathbf{H}_0^*$, c'est à dire les lignes de $\mathbf{H}_0$.

Peut-on compléter l'espace $\mathcal{V}_0$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) \triangleq \left\{ x(n), n \in \mathbb{Z} / \|\mathbf{x}\|_2 < \infty \right\}$ *?*

- On a, d'après (c), $\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_1^* = \mathbf{0}$,
- $\rightarrow \langle \mathbf{H}_0^* \rangle \perp \langle \mathbf{H}_1^* \rangle$
- $\rightarrow \mathcal{V}_0$ et $\mathcal{W}_0 \triangleq \langle \mathbf{H}_1^* \rangle$ sont en somme directe orthogonale

Corrolaire

$$\mathbf{H}_0^* \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_1 = \mathbf{I}.$$

Cas du banc de filtres CQF

Que représente l'opérateur $\mathrm{P}_{\mathbf{H}_0} = \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}_0$ *?*

- On a, d'après (a), $\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^* = \mathbf{I}$,
- $\rightarrow$ Projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{V}_0 \triangleq \langle \mathbf{H}_0^* \rangle$ engendré par les colonnes de $\mathbf{H}_0^*$, c'est à dire les lignes de $\mathbf{H}_0$.

Peut-on compléter l'espace $\mathcal{V}_0$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) \triangleq \left\{ x(n), n \in \mathbb{Z} / \left\| \mathbf{x} \right\|_2 < \infty \right\}$ *?*

- On a, d'après (c), $\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_1^* = \mathbf{0}$,
- $\rightarrow \langle \mathbf{H}_0^* \rangle \perp \langle \mathbf{H}_1^* \rangle$
- $\rightarrow \mathcal{V}_0$ et $\mathcal{W}_0 \triangleq \langle \mathbf{H}_1^* \rangle$ sont en somme directe orthogonale

Corrolaire

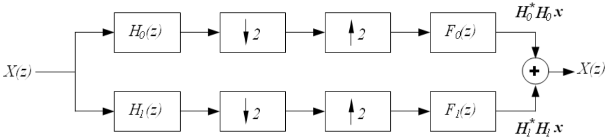
$$\mathbf{H}_0^* \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_1 = \mathbf{I}.$$

Cas du banc de filtres CQF

Interprétation

Le banc de filtre CQF définit une décomposition en sous-espaces de $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) = \mathcal{V}_0 \oplus^\perp \mathcal{W}_0$$



On itère :

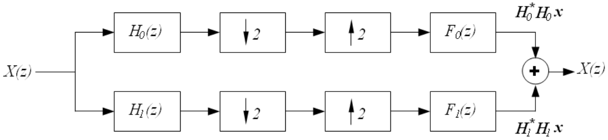
$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) & = \mathcal{V}_0 \oplus^\perp \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{V}_0 & = \mathcal{V}_1 \oplus^\perp \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 & = \mathcal{V}_2 \oplus^\perp \mathcal{W}_2 \\ \dots & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{M} \underbrace{\mathcal{W}_i}_{\text{détails}} \oplus^\perp \underbrace{\mathcal{V}_M}_{\text{approx.}}$$

Cas du banc de filtres CQF

Interprétation

Le banc de filtre CQF définit une décomposition en sous-espaces de $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) = \mathcal{V}_0 \oplus^\perp \mathcal{W}_0$$



On itère :

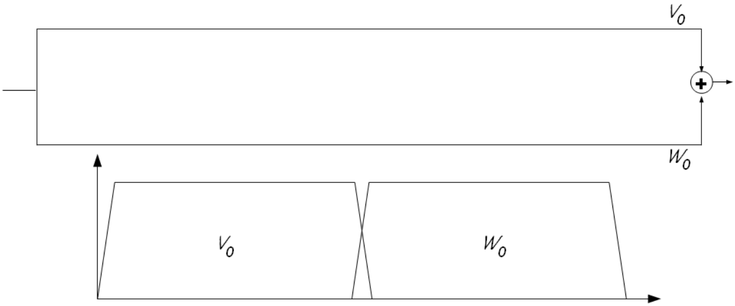
$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) & = \mathcal{V}_0 \oplus^\perp \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{V}_0 & = \mathcal{V}_1 \oplus^\perp \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 & = \mathcal{V}_2 \oplus^\perp \mathcal{W}_2 \\ \ldots & \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{M} \underbrace{\mathcal{W}_i}_{\text{détails}} \oplus^\perp \underbrace{\mathcal{V}_M}_{\text{approx.}}$$

Cas du banc de filtres CQF
Décomposition dyadique

$$\boldsymbol{x} = [x(0), \ldots, x(15)]$$

Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique



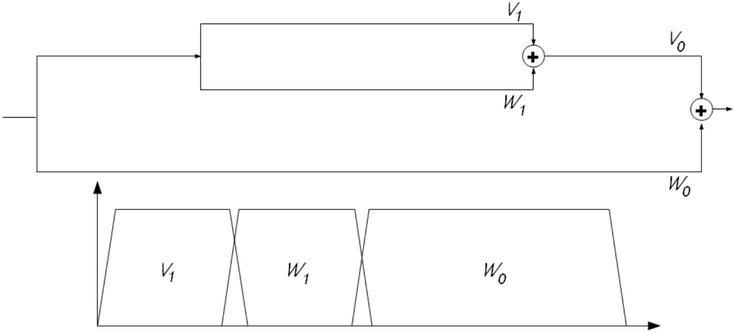
Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{x} = [x(0), \ldots, x(15)] \arrow[dl, "\text{HF}"'] \arrow[dr, "\text{BF}"] & \\
\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_0} = [x_{\mathcal{W}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{W}_0}(7)]} & & \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_0} = [x_{\mathcal{V}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{V}_0}(7)]
\end{tikzcd}$$

Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique



Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique

$$\boldsymbol{x} = [x(0), \ldots, x(15)]$$

HF

BF

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_0} = [x_{\mathcal{W}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{W}_0}(7)]}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_0} = [x_{\mathcal{V}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{V}_0}(7)]$$

HF

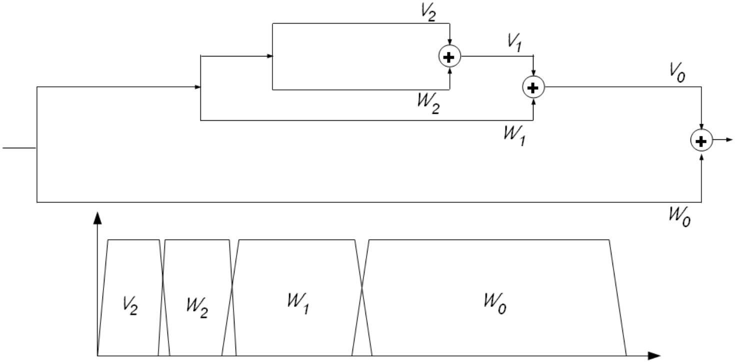
BF

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_1} = [x_{\mathcal{W}_1}(0), \ldots, x_{\mathcal{W}_1}(3)]}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_1} = [x_{\mathcal{W}_1}(0), \ldots, x_{\mathcal{V}_1}(3)]$$

Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique



Cas du banc de filtres CQF
Décomposition dyadique

$$\boldsymbol{x} = [x(0), \ldots, x(15)]$$

HF

BF

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_0} = [x_{\mathcal{W}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{W}_0}(7)]}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_0} = [x_{\mathcal{V}_0}(0), \ldots, x_{\mathcal{V}_0}(7)]$$

HF

BF

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_1} = [x_{\mathcal{W}_1}(0), \ldots, x_{\mathcal{W}_1}(3)]}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_1} = [x_{\mathcal{W}_1}(0), \ldots, x_{\mathcal{V}_1}(3)]$$

HF

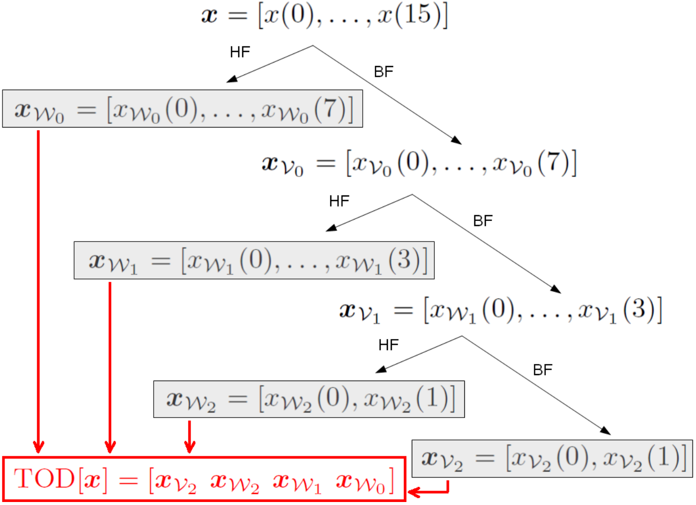
BF

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{W}_2} = [x_{\mathcal{W}_2}(0), x_{\mathcal{W}_2}(1)]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_2} = [x_{\mathcal{V}_2}(0), x_{\mathcal{V}_2}(1)]}$$

Cas du banc de filtres CQF

Décomposition dyadique



Traitement Numérique du Signal

Méthodes Avancées

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse
IRIT/INP-ENSEEIHT

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr