DEFINITION ET METHODES GENERALES D'ETUDE DES FILTRES ANALOGIQUES

Pierre Le Bars
(avec la collaboration de Francis Gary)
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

DEFINITION ET METHODES GENERALES D'ETUDE DES FILTRES ANALOGIQUES

Dans toute la suite, on s'intéressera à des systèmes ayant une entrée x(t) et une sortie y(t).

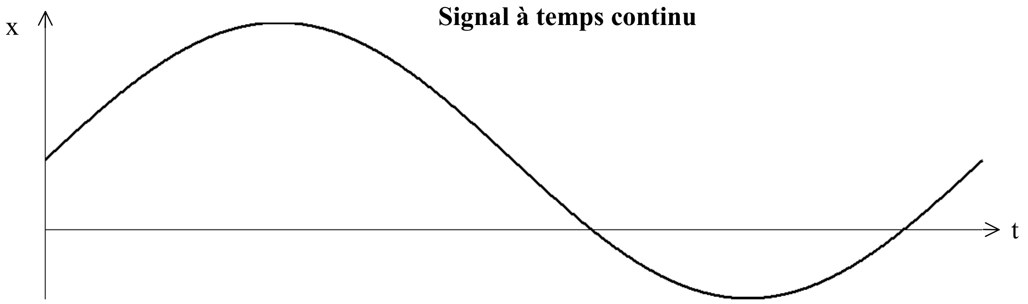
I/ Classification des signaux

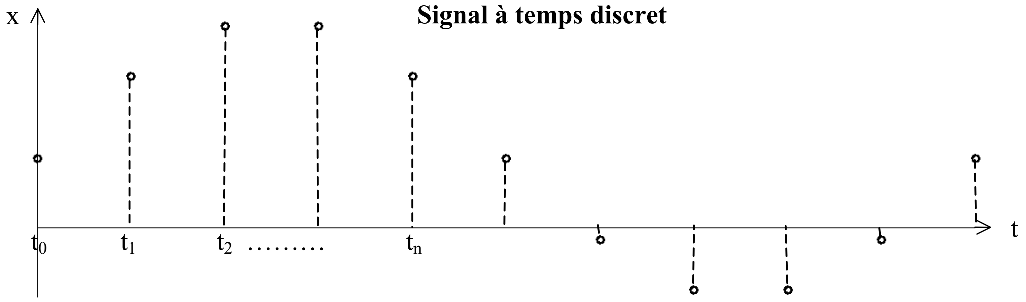
La grandeur d'entrée x est généralement variable au cours du temps : x = x(t).
On peut classer les signaux en s'intéressant soit à la variable temps, soit à la valeur (ou amplitude) de x(t).

-1- Signaux à temps continu et signaux à temps discret

Pour un signal à temps continu, la valeur de x(t) est définie pour toutes les valeurs de t (théoriquement de $-\infty$ à $+\infty$).

Par opposition, pour un signal à temps discret, on ne connaît la valeur de x qu'à des instants t_n parfaitement définis ; le signal x est une suite de valeurs $x_n = x(t_n)$ (opération **d'échantillonnage**). On a souvent $t_n = n.T_E$, T_E étant la période d'échantillonnage.

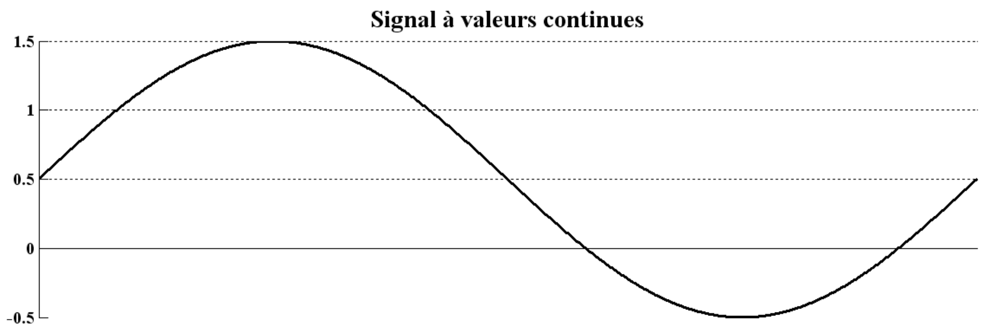


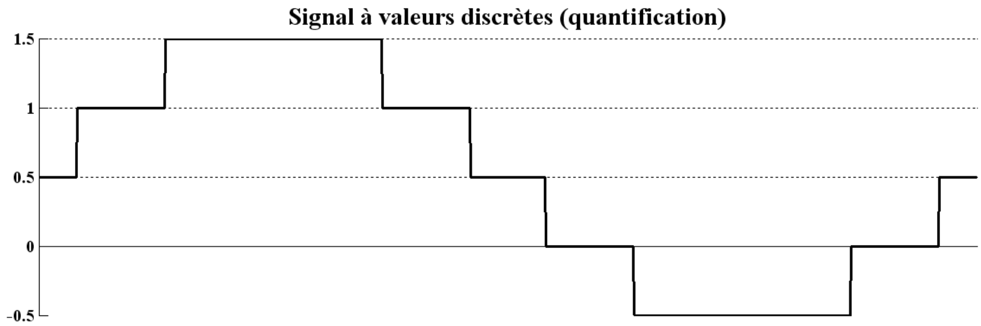


-2- <u>Signal à valeurs continues et signal à valeurs discrètes</u>

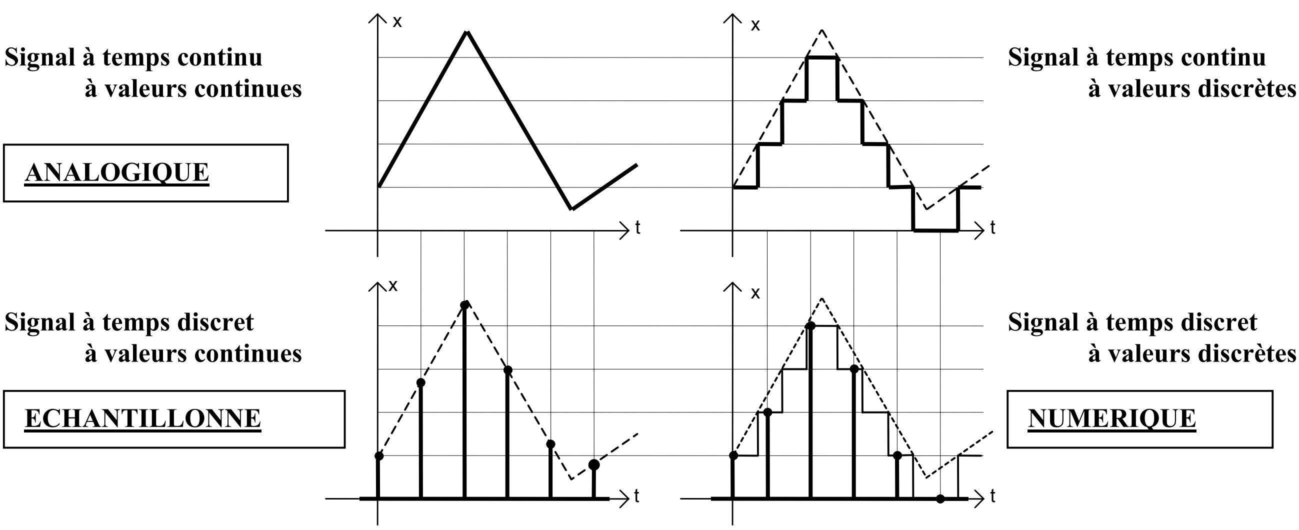
Pour un signal à valeurs continues, l'amplitude x peut prendre toutes les valeurs sur un intervalle donné, par exemple $\left[-V_{Sat}\,;+V_{Sat}\right]$ pour la sortie d'un amplificateur opérationnel. Par contre, pour un signal à valeurs discrètes, x ne peut prendre que des valeurs discrètes x_0, x_1, x_2, …, x_n (quantification).

Voir par exemple les appareils de mesures à aiguille (valeurs continues) et les appareils de mesures à affichage numérique (valeurs discrètes).





-3- <u>Résumé</u>



Par échantillonnage on passe d'un signal à temps continu à un signal à temps discret, et une conversion analogique – numérique (accompagnée d'une quantification liée au nombre de bits limités) transforme un signal à valeurs continues en un signal à valeurs discrètes.

Un signal analogique est un signal à temps continu et à valeurs continues.

Nous étudierons dans un premier temps (EN21) les systèmes analogiques : les signaux d'entrée et de sortie sont des signaux analogiques.

II/ Filtre analogique

-1- Définition

Un filtre analogique est un système analogique **LINEAIRE** et **INVARIANT DANS LE TEMPS.**

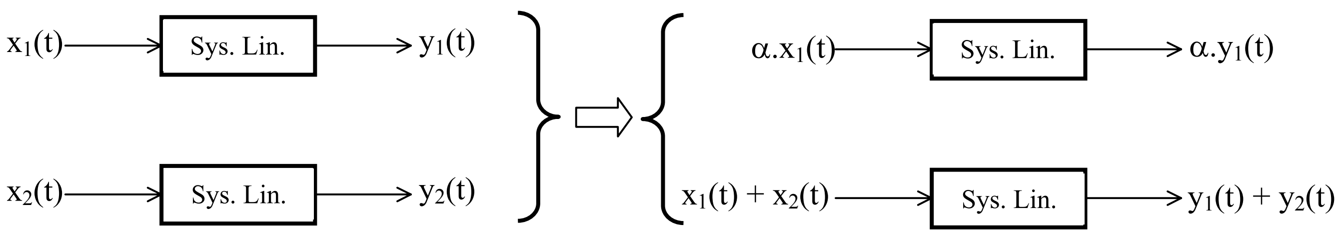
-2- Linéarité

Soient $y_1(t)$ la réponse d'un système électronique à une excitation $x_1(t)$ et $y_2(t)$ la réponse du même système à une excitation $x_2(t)$.

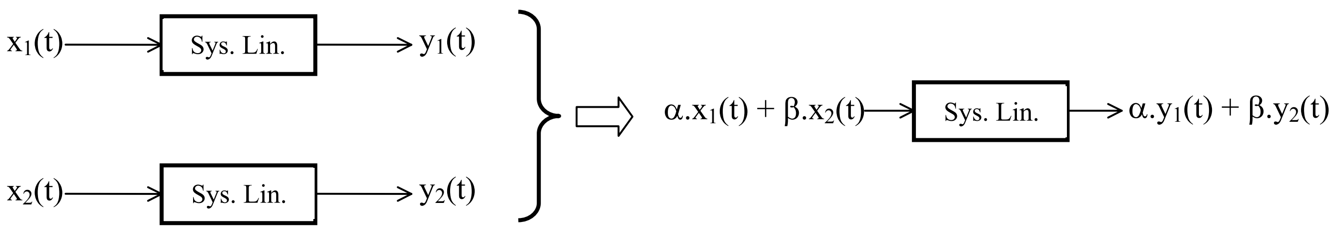
Le système est linéaire si :

1. La réponse à $\alpha.x_1(t)$ est $\alpha.y_1(t)$, α étant une constante quelconque.
2. La réponse à $x_1(t)+x_2(t)$ est $y_1(t)+y_2(t)$ (théorème de superposition).

On peut résumer ces deux propriétés par le schéma ci-dessous :



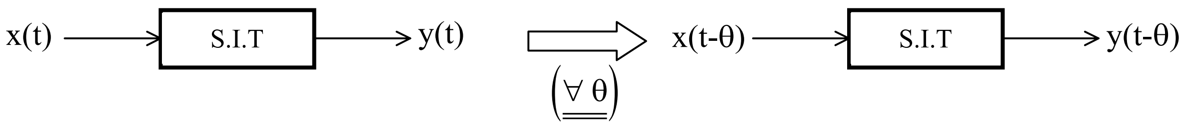
D'une manière générale, si le système est linéaire, la réponse à $\alpha.x_1(t)+\beta.x_2(t)$ est $\alpha.y_1(t)+\beta.y_2(t)$, α et β étant deux constantes :



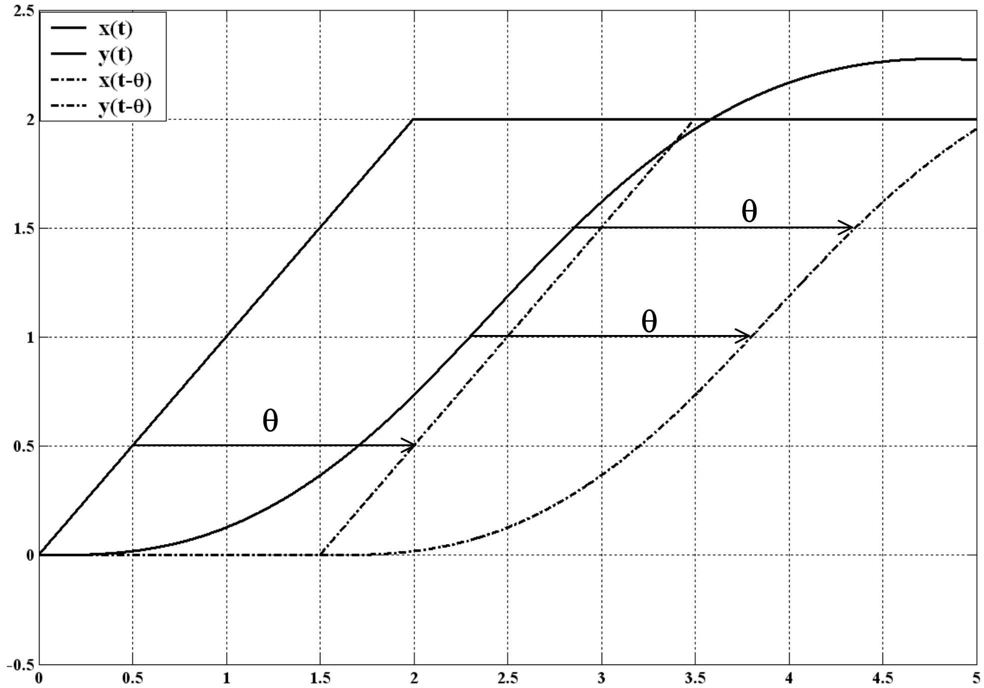
-3- Invariance temporelle

Soit y(t) la réponse du système à une excitation x(t).

Le système est invariant dans le temps si, pour toutes valeurs de θ, la réponse à $x(t-\theta)$ (x(t) retardé de θ) est $y(t-\theta)$ (y(t) retardé de θ) :



(S.I.T. = Système Invariant dans le Temps)



-4- Exemples de filtres

Les circuits comportant des éléments R, L ou C sont des filtres. Il en est de même pour les circuits comportant des amplificateurs opérationnels à condition que :

1. La réaction sur l'amplificateur opérationnel soit correcte (réaction sur l'entrée -. Dans le cas d'une réaction sur l'entrée +, l'amplificateur opérationnel est utilisé en commutation).
2. Les sorties des amplificateurs opérationnels ne soient pas saturées.

Un filtre peut en particulier être défini par une équation différentielle à coefficients constants :

$$b_0.y + b_1.\frac{dy}{dt} + ... + b_n.\frac{d^n y}{dt^n} = a_0.x + a_1.\frac{dx}{dt} + ... + a_m.\frac{d^m x}{dt^m}$$

Les boucles à verrouillage de phase (P.L.L.) sont également des filtres.

Par contre les modulateurs ou les échantillonneurs ne sont pas des filtres ; un échantillonneur par exemple est un système linéaire, mais non invariant dans le temps.

-5- Etude d'un filtre

Soit un système électronique analogique réputé être un filtre, c'est à dire être un système linéaire (attention s'il y a des amplificateurs opérationnels : les réactions sont-elles correctes ?) et invariant dans le temps. On se pose deux questions :

1. Recherche d'un modèle mathématique approprié à l'étude.
2. Connaissant le modèle, peut-on déterminer y(t) pour toute excitation x(t) ?

Il existe plusieurs méthodes (équation différentielle, étude en régime harmonique, réponse indicielle, réponse impulsionnelle, transformée de Laplace) que nous allons étudier rapidement.

III/ Equation différentielle

-1- Rappels

L'équation différentielle étant connue, l'excitation x(t) étant donnée, comment obtenir la réponse y(t) ?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{a_0.x + a_1.\frac{dx}{dt} + \ldots + a_m.\frac{d^m x}{dt^m} = b_0.y + b_1.\frac{dy}{dt} + \ldots + b_n.\frac{d^n y}{dt^n}} \longrightarrow y(t)$$

$$\mathbf{y(t) = y_L(t) + y_E(t)}$$

① $\mathbf{y_L(t) =}$ solution générale de l'équation sans second membre (régime libre) :

$$b_0.y_L + b_1.\frac{dy_L}{dt} + \ldots + b_n.\frac{d^n y_L}{dt^n} = 0$$

On peut passer par l'équation caractéristique :

$$b_0 + b_1.p + \ldots + b_n.p^n = 0$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les racines de cette équation :

$$y_L(t) = K_1.e^{p_1.t} + K_2.e^{p_2.t} + \ldots + K_n.e^{p_n.t}$$ [1]

② $\mathbf{y_E(t) =}$ une solution particulière de l'équation complète (régime établi).

③ ⇒ expression générale de y(t) : $\mathbf{y(t) = y_L(t) + y_E(t)}$

④ Recherche des constantes $K_1, K_2, \ldots, K_n$ à partir des conditions initiales.
Pour un système d'ordre n, il faut n conditions initiales :

$$y(0^+),\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+},\ \ldots,\ \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^+}$$

[1] Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de racines multiples

-2- Limites de la méthode

Il y a essentiellement deux limites à cette méthode :

1. Chaque excitation x(t) nécessite une étude particulière (recherche de la solution particulière de l'équation complète et recherche des n conditions initiales).
2. Certains filtres ne sont pas directement définis par une équation différentielle. Un filtre passe-bas idéal par exemple est tel que si $x(t) = X_M.\cos(\omega.t)$,

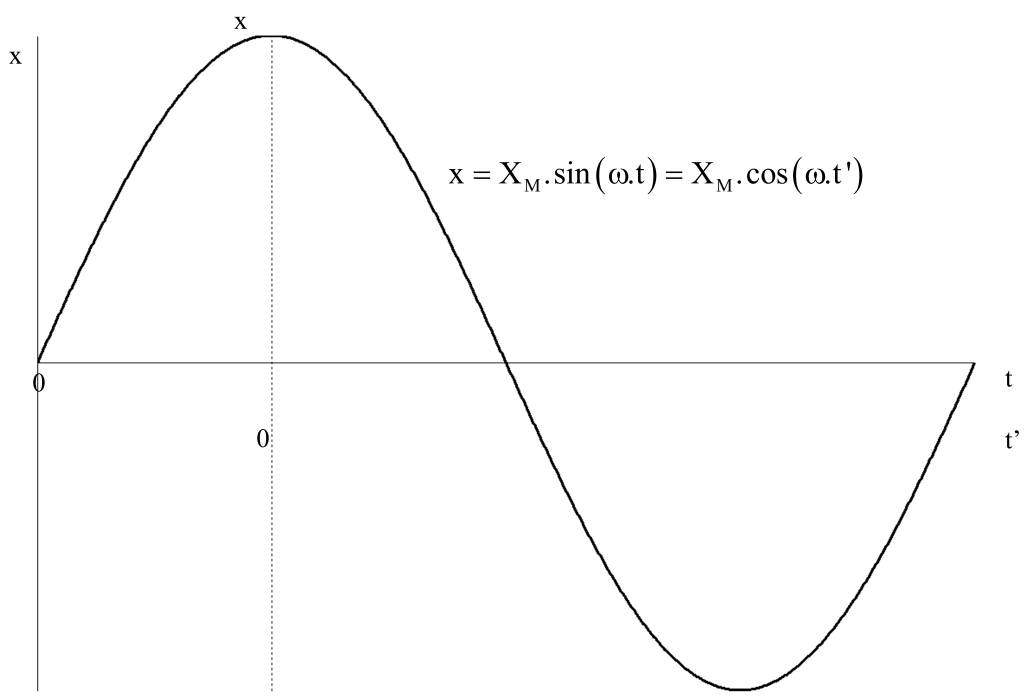
$$y(t) = \begin{cases} X_M.\cos(\omega.t) & \text{si} \quad \omega \le \omega_C \\ 0 & \text{si} \quad \omega > \omega_C \end{cases}.$$

D'où l'idée d'utiliser des excitations testes (régime harmonique, réponse indicielle, réponse impulsionnelle) et de chercher à se ramener à ces cas particuliers.

IV/ Réponse harmonique

-1- Définition

On étudie, en fonction de la fréquence, la réponse du système à une excitation $x(t) = X_M.\cos(\omega.t)$, ou, ce qui revient au même compte tenu de l'invariance temporelle, $x(t) = X_M.\sin(\omega.t)$.



Remarque : le signal $x(t) = X_M.\cos(\omega.t)$ est défini pour $t \in]-\infty ; +\infty[$. Il s'agit donc de l'étude en **régime sinusoïdal permanent**

Mathématiquement, on peut écrire que :

$$x(t) = X_M.\cos(\omega.t) = \frac{X_M}{2}.\left[e^{j.\omega.t} + e^{-j.\omega.t}\right]$$

On fera l'étude mathématique en utilisant une excitation $x(t) = A.e^{j.\omega.t}$ **<u>qui n'a aucune réalité physique</u>**. Il ne faudra pas oublier que pratiquement un tel signal est toujours associé à son complexe conjugué $A.e^{-j.\omega.t}$ et qu'on étudie physiquement la réponse à la somme $A.e^{j.\omega.t} + A.e^{-j.\omega.t}$ (linéarité des filtres).

-2- <u>Importance du régime harmonique</u>

Soit un filtre et une excitation $x(t) = e^{j.\omega.t}$. La réponse est alors une fonction du temps et de la pulsation ω ; nous la noterons $y_\omega(t)$:

$$x(t) = e^{j.\omega.t} \longrightarrow \boxed{\text{S.L.I.T.}} \longrightarrow y_\omega(t)$$

(S.L.I.T. = Système Linéaire Invariant dans le Temps)

L'invariance temporelle nous dit que :

$$x'(t) = x(t-\theta) = e^{j.\omega.(t-\theta)} \longrightarrow \boxed{\text{S.L.I.T.}} \longrightarrow y'_\omega(t) = y_\omega(t-\theta) \qquad \underline{\underline{\forall\,\theta}}$$

Or : $e^{j.\omega.(t-\theta)} = e^{-j.\omega.\theta}.e^{j.\omega.t}$. θ étant donné, $e^{-j.\omega.\theta}$ est une constante. La linéarité du filtre nous permet de dire que ;

$$x'(t) = e^{-j.\omega.\theta}.e^{j.\omega.t} = \alpha.e^{j.\omega.t} \longrightarrow \boxed{\text{S.L.I.T.}} \longrightarrow y'_\omega(t) = \alpha.y_\omega(t) = e^{-j.\omega.\theta}.y_\omega(t) \qquad \left(\alpha = e^{-j.\omega.\theta}\right)$$

On a donc : $\qquad y_\omega(t-\theta) = e^{-j.\omega.\theta}.y_\omega(t) \qquad \underline{\underline{\forall\,\theta}}$

En particulier pour t = 0 : $y_\omega(-\theta) = e^{-j.\omega.\theta}.y_\omega(0)$

Si on pose $\tau = -\theta$, on obtient pour toutes valeurs de τ : $y_\omega(\tau) = e^{j.\omega.\tau}.y_\omega(0)$, ou plus simplement (τ étant une variable muette) : $\underline{y_\omega(t) = e^{j.\omega.t}.y_\omega(0)}$.

Autrement dit : **la réponse à une excitation sinusoïdale est une sinusoïde de même fréquence.** Les signaux d'entrée et de sortie ayant la même forme, il est facile de les comparer expérimentalement : mesures d'amplitudes (ou de valeurs efficaces) et de déphasage.

En posant $y_\omega(0) = T(j.\omega) \in \mathbb{C}$ il vient : $\underline{y_\omega(t) = T(j.\omega).e^{j.\omega.t}}$.

Un filtre, pour la réponse harmonique, pourra être caractérisé par sa **fonction de transfert T(j.ω)**.

<u>TRADUCTION PHYSIQUE</u>

$$\boxed{\mathbf{x(t) = X_M.\cos(\omega.t)} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{S.L.I.T.}\\ (\,T(j.\omega)\,)\end{array}} \longrightarrow \mathbf{y(t) = X_M.\left|T(j.\omega)\right|.\cos\left\{\omega.t + Arg\left[T(j.\omega)\right]\right\}}}$$

Pour déterminer la réponse du filtre à une excitation x(t) quelconque, l'idée consiste à essayer d'exprimer x(t) sous la forme d'une somme de sinusoïdes et d'utiliser la linéarité du filtre.

-3- Séries de Fourier[2]- Spectre

3.1. Définitions

Toute fonction périodique de période T_0 (pulsation ω_0, fréquence f_0) peut être décomposée en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.\cos(2.\pi.n.f_0.t) + b_n.\sin(2.\pi.n.f_0.t) \qquad \text{(forme n°1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n.\cos(2.\pi.n.f_0.t + \varphi_n) \qquad \text{(forme n°2)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X'_n.e^{j.2;\pi.n.f_0.t} \qquad \text{(forme n°3)}$$

Ces trois formes sont identiques et nous utiliserons de préférence la troisième (voir paragraphe précédent), en utilisant des fréquences négatives $-n.f_0$:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X'_n.e^{j.2;\pi.n.f_0.t}} \qquad \text{(relation A)}$$

Pour passer d'une forme à l'autre, il suffit d'utiliser les relations d'Euler :

$$\cos(2.\pi.n.f_0.t) = \frac{1}{2}.\left[e^{j.2.\pi.n.f_0.t} + e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}\right] \quad \text{et} \quad \sin(2.\pi.n.f_0.t) = \frac{1}{2.j}.\left[e^{j.2.\pi.n.f_0.t} - e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}\right]$$

Les coefficients a_n, b_n, c_n et φ_n sont réels, alors que les coefficients X'_n peuvent être complexes.

3.2. Equivalences

$$c_n.\cos(2.\pi.n.f_0.t + \varphi_n) = \underbrace{c_n.\cos\varphi_n}_{a_n}.\cos(2.\pi.n.f_0.t) \underbrace{- c_n.\sin\varphi_n}_{b_n}.\sin(2.\pi.n.f_0.t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = c_n.\cos\varphi_n \\ b_n = -c_n.\sin\varphi_n \end{cases}$$

ou inversement :

$$\begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} \\ \tan\varphi_n = -\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

[2] FOURIER : né en 1768, mort en 1830. Séries trigonométriques : 1810.

En utilisant la notation complexe :

$$c_n.\cos\left(2.\pi.n.f_0.t+\varphi_n\right)=\frac{c_n}{2}.\left[e^{j.(2.\pi.n.f_0.t+\varphi_n)}+e^{-j.(2.\pi.n.f_0.t+\varphi_n)}\right]$$

$$=\underbrace{\frac{c_n.e^{j.\varphi_n}}{2}}_{X'_n}.e^{j.2.\pi.n.f_0 t}+\underbrace{\frac{c_n.e^{-j.\varphi_n}}{2}}_{X'_{-n}}.e^{-j.2.\pi.n.f_0 t}$$

Soit :

$$\left.\begin{array}{l} X'_n=\dfrac{c_n.e^{j.\varphi_n}}{2} \\ X'_{-n}=\dfrac{c_n.e^{-j.\varphi_n}}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_n=2.\left|X'_n\right| \\ \varphi_n=\mathrm{Arg}\left(X'_n\right)\end{array}\right.$$

On remarque que, c_n étant un nombre réel : $\underline{\mathbf{X'_{-n}=\left(X'_n\right)^*}}$ (complexes conjugués)

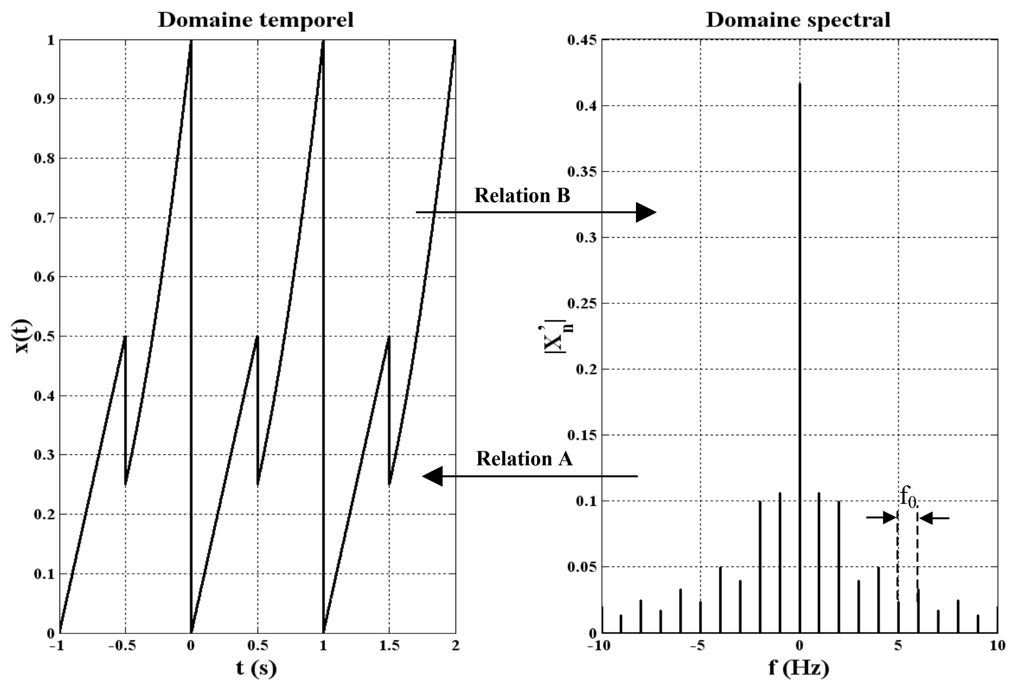
3.3. Spectre

Fourier a montré que :

$$\boxed{X'_n=\frac{1}{T_0}.\int_{(T_0)}x(t).e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}.dt} \qquad \text{(relation B)}$$

x(t) étant connu, on en tire les X'_n par la relation B. Inversement, les X'_n étant connus, on en tire x(t) par la relation A. On peut donc représenter un signal périodique de deux façons :

1. Représentation temporelle : fonction x(t), visible à l'oscilloscope par exemple
2. Représentation fréquentielle ou spectrale : X'_n



(En toute rigueur, il faut aussi connaître $\mathrm{Arg}(X'_n)$)

Exemple : la note LA est un signal à 440 Hz. Mais les représentations spectrales d'un LA émis par un piano ou une flûte sont différentes.

En modifiant légèrement la relation A :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X'_n.e^{j.2;\pi.n.f_0.t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n.f_0.e^{j.2;\pi.n.f_0.t} \qquad \text{en posant : } X'_n = X_n.f_0$$

On a donc :

$$X_n = \frac{X'_n}{f_0} = \underbrace{\frac{1}{f_0}.\frac{1}{T_0}}_{1}.\int_{(T_0)} x(t).e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}.dt = \int_{(T_0)} x(t).e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}.dt$$

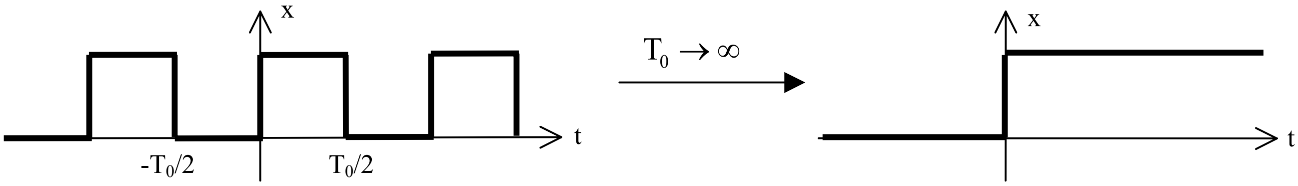
En résumé, on a les 3 relations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n.f_0.e^{j.2;\pi.n.f_0.t} & \text{(relation C)} \\ X_n = \displaystyle\int_{(T_0)} x(t).e^{-j.2.\pi.n.f_0.t}.dt & \text{(relation D)} \\ X_{-n} = X_n^{*} & \text{(relation E)} \end{cases}$$

-4- Transformée de Fourier

Problème : que se passe-t-il si le signal x(t) n'est pas périodique ?

On peut passer d'une fonction périodique à une fonction non périodique en faisant tendre la période T_0 vers l'infini. Par exemple, on passe ainsi d'un signal carré à un échelon :



Si $T_0 \to \infty$, la distance f_0 entre deux raies devient infiniment petite : $f_0 \to 0$, notée df mathématiquement. La variable discrète $n.f_0$ devient une variable continue f et le signe Σ devient $\int$ (voir en mathématique la définition des intégrales par une somme de Darboux).

On pourra donc écrire :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j.2.\pi.f.t}.df} \qquad \text{(relation F)}$$

où X(f).df joue le même rôle que $X_n.f_0$, c'est à dire que X(f) et X_n jouent des rôles comparables. On aura donc :

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j.2.\pi.f.t}.dt} \qquad \text{(relation G)}$$

X(f) (représentation spectrale) est la transformée de Fourier de x(t) (représentation temporelle). Connaissant x(t) on en tire X(f) par la relation G et réciproquement, la connaissance de X(f) permet par la relation F de remonter à x(t).
La relation E s'écrit maintenant :

$$X(-f) = \left[X(f)\right]^* \qquad \text{(relation H)}$$

-5- Application à l'étude d'un filtre

Si on connaît la réponse du filtre à une excitation de la forme $e^{j.2.\pi.f.t}$ pour toutes les fréquences f (c'est à dire si on connaît la fonction de transfert $T(j.\omega) = T(j.2.\pi.f)$), on connaît la réponse à une excitation x(t) quelconque :

$$e^{j.2.\pi.f.t} \longrightarrow \boxed{\textbf{Filtre}} \longrightarrow y_\omega(t) = T(j.2.\pi.f).e^{j.2.\pi.f.t}$$

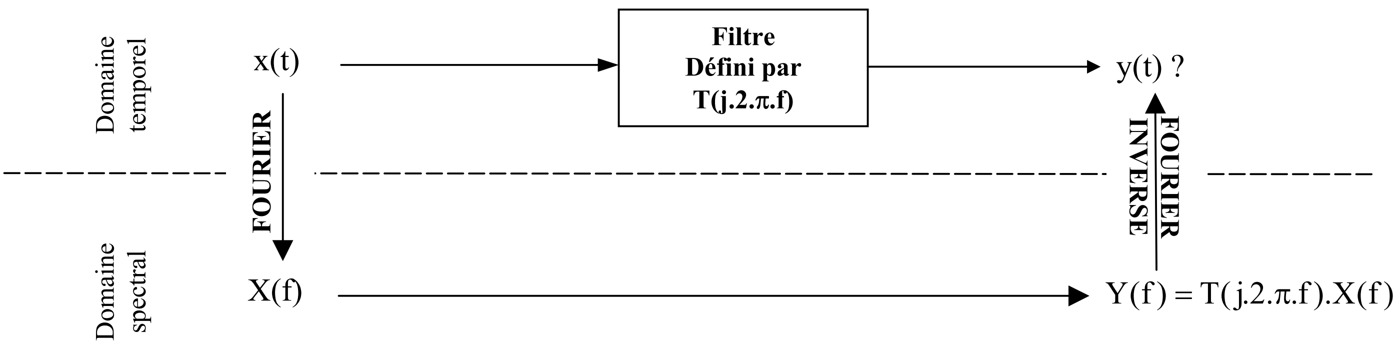
Linéarité :

$$X(f).e^{j.2.\pi.f.t} \longrightarrow \boxed{\textbf{Filtre}} \longrightarrow X(f).y_\omega(t) = X(f).T(j.2.\pi.f).e^{j.2.\pi.f.t}$$

Pour une fréquence f donnée, X(f) est une constante
Linéarité :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j.2.\pi.f.t}.df \longrightarrow \boxed{\textbf{Filtre}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f).T(j.2.\pi.f)}_{Y(f)}.e^{j.2.\pi.f.t}.df$$

On peut résumer la méthode par le schéma ci-dessous :



-6- Intérêt de la méthode

Cette méthode est simple expérimentalement : T(j.ω) est connue par des mesures d'amplitudes (ou de valeurs efficaces) et de déphasage :

$$x(t) = X_M.\cos(\omega.t) = \sqrt{2}.X_{eff}.\cos(\omega.t) \;\Rightarrow\; y(t) = Y_M.\cos(\omega.t+\varphi) = \sqrt{2}.Y_{eff}.\cos(\omega.t+\varphi)$$

$$\begin{cases} |T(j.\omega)| = \dfrac{Y_M}{X_M} = \dfrac{Y_{eff}}{X_{eff}} \\ \text{Arg}\left[T(j.\omega)\right] = \varphi \quad \text{(déphasage de y(t) par rapport à x(t))} \end{cases}$$

Par contre, théoriquement cette méthode peut conduire à des calculs longs et compliqués.

<u>Remarque</u> Théoriquement, T doit être connue pour des fréquences positives et négatives. On ne dispose pas expérimentalement de générateur délivrant des fréquences négatives ; ceci n'est pas gênant car la relation H nous dit que :

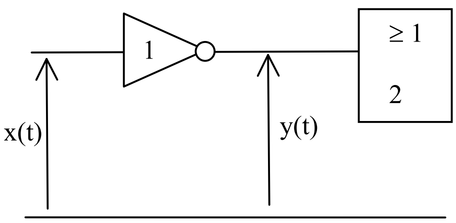
$$T(-j.\omega) = \left[T(j.\omega)\right]^* \;\Rightarrow\; \begin{cases} |T(-j.\omega)| = |T(j.\omega)| \\ \text{Arg}\left[T(-j.\omega)\right] = -\text{Arg}\left[T(j.\omega)\right] \end{cases}$$

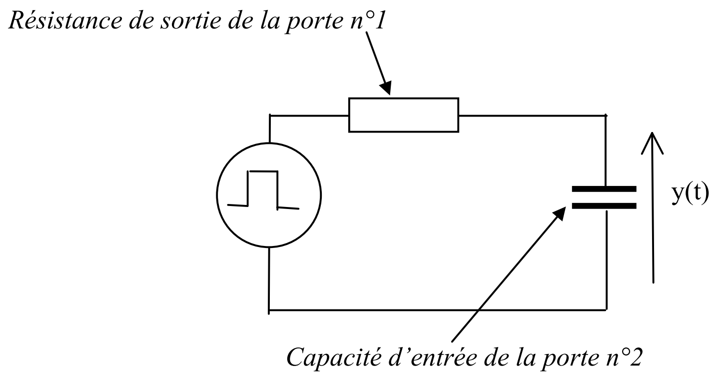
V/ Réponse indicielle

On est souvent amené à connaître la réponse d'un système pour une excitation x(t) présentant des discontinuités :

- comportement à la mise sous tension
- commutations
- x(t) est un signal carré
- …

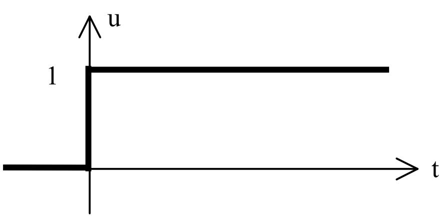
Considérons par exemple deux portes CMOS en cascade :





Le schéma équivalent ci-dessus permet de déterminer y(t).

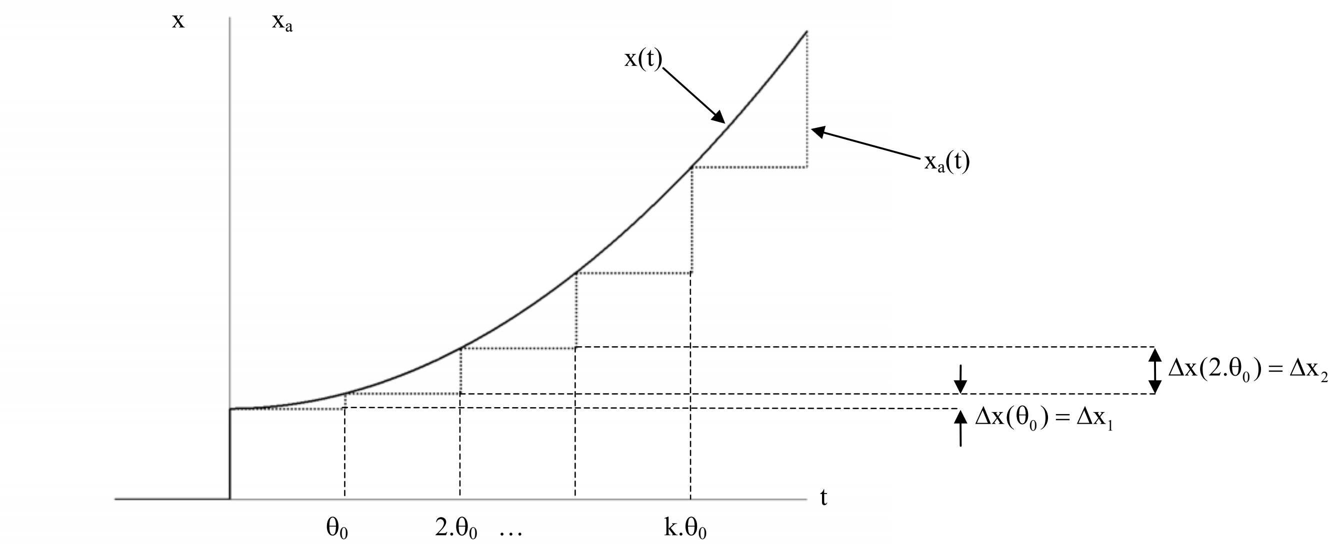
On prend donc comme excitation teste un échelon unité u(t), encore appelé échelon de Heaviside[3]



$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

[3] Heaviside : né en 1850, mort en 1925. Physicien anglais ayant étudié la propagation des ondes radio. Vers 1890, il introduit le calcul symbolique.

La réponse à cet échelon, qu'on notera i(t), s'appelle la **réponse indicielle**.
Problème : la réponse indicielle i(t) permet-elle de connaître la réponse y(t) à une excitation quelconque x(t) ?
L'idée est de décomposer x(t) à l'aide d'échelon :



Le signal $x_a(t)$ est une approximation, en « marches d'escalier », du signal x(t) (voir les signaux échantillonnés et bloqués). On a évidemment :

$$x(t) = \lim_{\theta_0 \to 0} x_a(t)$$

On peut écrire :

$$x_a(t) = x(0).u(t) + \Delta x_1.u(t-\theta_0) + \Delta x_2.u(t-2.\theta_0) + ...$$

$$= x(0).u(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k.u(t-k.\theta_0)$$

En suivant le même type de raisonnement que le passage de la série à la transformée de Fourier, lorsque θ_0 tend vers 0, θ_0 devient un infiniment petit noté dθ et de même Δx_k devient un dx_k. La variable discrète k. θ_0 devient une variable continue θ et :

$$dx_k = \left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{k.\theta_0=\theta} .d\theta$$

D'où :

$$x(t) = x(0).u(t) + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{d\theta}.u(t-\theta).d\theta$$

Signal d'entrée	Signal de sortie	Propriété utilisée
u(t)	i(t)	
x(0).u(t)	x(0).i(t)	linéarité
$u(t-\theta)$	$i(t-\theta)$	Invariance temporelle
$\frac{dx}{d\theta}.u(t-\theta)$	$\frac{dx}{d\theta}.i(t-\theta)$	Linéarité : pour θ donné, dx/dθ est une constante
$x(t) = x(0).u(t) + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{d\theta}.u(t-\theta).d\theta$	$y(t) = x(0).i(t) + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{d\theta}.i(t-\theta).d\theta$	linéarité

On a donc :

$$\underline{y(t) = x(0).i(t) + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{d\theta}.i(t-\theta).d\theta}$$

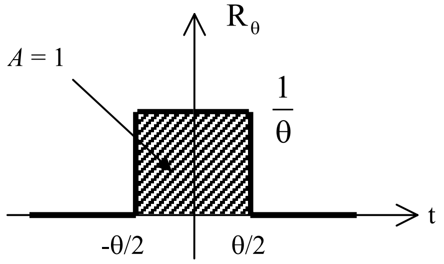
La réponse indicielle i(t) permet de connaître la réponse y(t) à une excitation x(t) quelconque (présentant en général une discontinuité à t = 0).

Intérêt de cette méthode : elle est simple théoriquement, l'équation différentielle se ramenant à $b_0.y + b_1;\frac{dy}{dt} + ... + b_n.\frac{d^ny}{dt^n} = a_0$ pour t > 0 (le second membre est une constante).
Par contre, expérimentalement, les mesures sont plus délicates (mesures de dépassement, temps de montée, temps de réponse …). Cette méthode est cependant utilisée expérimentalement pour les systèmes lents (systèmes rencontrés en AU).
Exemple : $\tau = 100\,s \Rightarrow f_C = \frac{1}{2.\pi.\tau} \approx \frac{1}{600}$ Hz. Une étude en régime harmonique nécessite une première mesure à $f \approx \frac{f_C}{10} \approx \frac{1}{6000}$ Hz, soit une sinusoïde de période supérieure à 1h30min !
L'étude de la réponse indicielle dure environ $7.\tau$, soit 12 min.

VI/ Réponse impulsionnelle

-1- L'impulsion de Dirac[4] δ

1.1. Définition

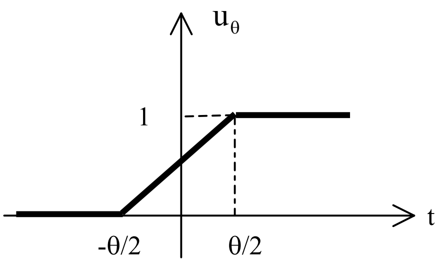


Soit R_θ la fonction rectangle de durée θ et d'amplitude 1/θ (aire *A* = 1)
Par définition :

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\theta \to 0} R_\theta(t)}$$

1.2. Propriétés

- Parité : $\delta(t) = \delta(-t)$ $(\forall\, t \neq 0 : \delta(t) = 0\,!)$
- Soit la fonction u_θ (échelon unité avec temps de montée non nul)



$|t| > \frac{\theta}{2} : \frac{du_\theta}{dt} = 0$ et $|t| < \frac{\theta}{2} : \frac{du_\theta}{dt} = \frac{1}{\theta}$

On a donc : $\frac{du_\theta}{dt} = R_\theta(t)$

Si $\theta \to 0 : u_\theta(t) \to u(t) \Rightarrow \boxed{\delta(t) = \frac{du}{dt}}$

[4] Dirac : né en 1902, mort en 1984. Physicien anglais prix Nobel en 1933

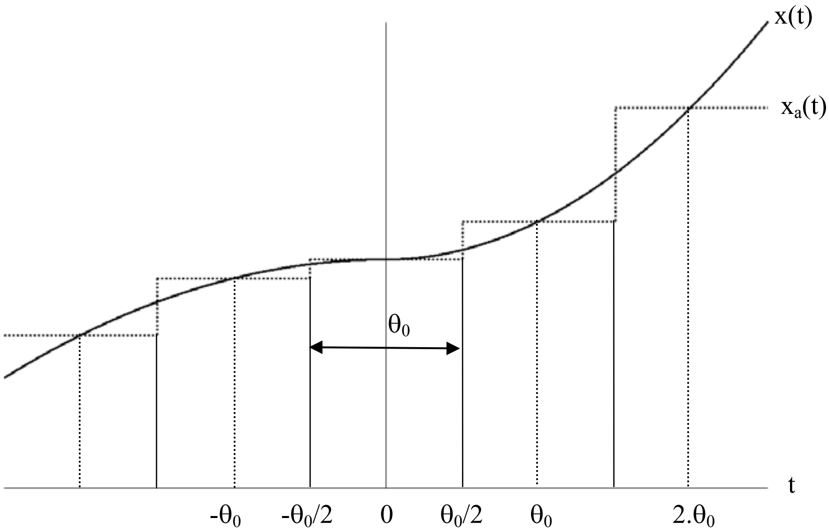
- $$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(t).\delta(t-t_0).dt = f(t_0)} \quad \text{si } t_1 < t_0 < t_2$$

  En particuler si $t_0 = 0$:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).dt = f(0)$$

-2- Décomposition d'un signal

L'idée est comparable à celle utilisée pour exprimer un signal à l'aide de la fonction échelon unité u(t) :



$$x_a(t) = \sum_k x(k.\theta_0).\theta_0.R_{\theta_0}\left(t - k.\theta_0\right)$$

$$\text{et} : x(t) = \lim_{\theta_0 \to 0} x_a(t)$$

La suite du raisonnement est toujours la même : lorsque $\theta_0 \to 0$:

$$k.\theta_0 \quad \to \theta \text{ (variable continue)}$$

$$R_\theta(t) \to \delta(t)$$

$$\theta_0 \quad \to d\theta$$

$$\sum \quad \to \int$$

D'où

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).\delta(t-\theta).d\theta}$$

(On retrouve, avec des notations différentes, la troisième propriété de $\delta(t)$)

-3- <u>Réponse impulsionnelle</u>

Soit g(t) la réponse du filtre à une excitation $x(t) = \delta(t)$. Cette réponse est appelée **réponse impulsionnelle**.

Voir le raisonnement suivi pour la réponse indicielle :

Signal d'entrée	Signal de sortie	Propriété utilisée
$\delta(t)$	$g(t)$	
$\delta(t-\theta)$	$g(t-\theta)$	Invariance temporelle
$x(\theta).\delta(t-\theta)$	$x(\theta).g(t-\theta)$	Linéarité : pour θ donné, x(θ) est une constante
$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).\delta(t-\theta).d\theta$	$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).g(t-\theta).d\theta$ (Produit de convolution)	linéarité

La réponse y(t) est le produit de convolution de l'excitation x(t) et de la réponse impulsionnelle g(t)

-4- <u>Intérêt</u>

Expérimentalement, on ne sait pas réaliser une impulsion idéale δ(t). Par contre cette réponse impulsionnelle est très utile théoriquement, et facilement utilisable avec la transformée de Laplace[5] : $\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=1$.

D'où :

$$T(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=Y(p) \text{ si } X(p)=1, \text{ c'est à dire si } x(t)=\delta(t)$$

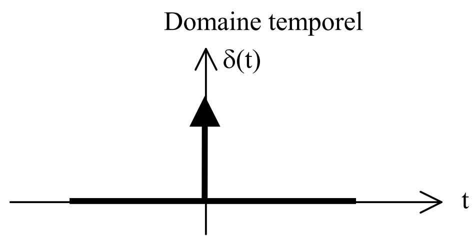
La fonction de transfert T(p) est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

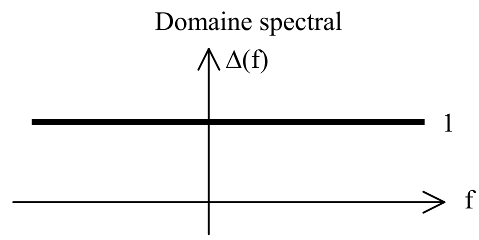
-5- <u>Réponse impulsionnelle et réponse harmonique</u>

Soit $\Delta(f)=\mathscr{F}\left[\delta(t)\right]$ la transformée de Fourier de l'impulsion δ(t) :

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t).e^{-j.2.\pi.f.t}.dt=\left[e^{-j.2.\pi.f.t}\right]_{t=0}=1 \Rightarrow T(j.2.\pi.f)=\frac{G(f)}{\Delta(f)}=G(f)$$

La fonction de transfert $T(j.\omega) = T(j.2.\pi.f)$ est la transformée de Fourier G(f) de la réponse impulsionnelle g(t).

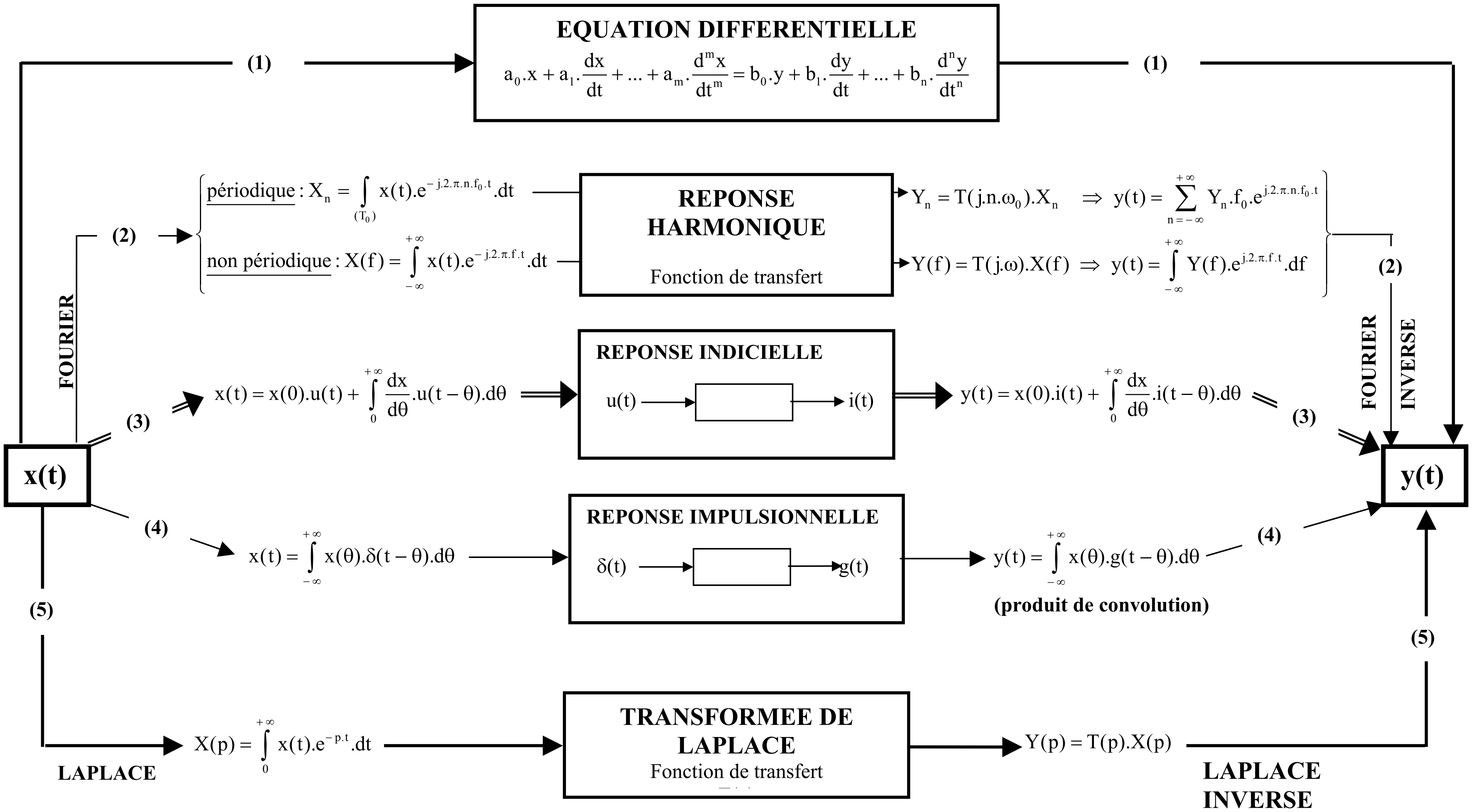




Autrement dit, en une seule expérience on étudie le comportement pour toutes les fréquences, en n'en privilégiant aucune.

[5] Laplace : Né en 1740, mort en 1827

Annexe 1 : Méthodes générales d'étude des filtres analogiques – Tableau résumé



Annexe 2 : Relations entre les différentes méthodes d'étude

EQUATION DIFFERENTIELLE (1)

$$a_0.x + a_1.\frac{dx}{dt} + ... + a_m.\frac{d^m x}{dt^m} = b_0.y + b_1.\frac{dy}{dt} + ... + b_n.\frac{d^n y}{dt^n}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FOURIER}} X(f)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{FOURIER}} Y(f) = T(j.2.\pi.f).X(f)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \xleftrightarrow{\text{FOURIER}} (j.\omega)^k \times$$

$$\mathbf{T(j.\omega)} = \frac{\mathbf{a_0 + a_1.j.\omega + ... + a_m.(j.\omega)^m}}{\mathbf{b_0 + b_1.j.\omega + ... + b_n.(j.\omega)^n}}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LAPLACE}} X(p)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{LAPLACE}} Y(p) = T(p).X(p)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \xleftrightarrow{\text{LAPLACE}} p^k \times$$

$$\mathbf{T(p)} = \frac{\mathbf{a_0 + a_1.p + ... + a_m.p^m}}{\mathbf{b_0 + b_1.p + ... + b_n.p^n}}$$

REPONSE HARMONIQUE (2)

T(j.ω)

$$j.\omega \leftrightarrow p$$

TRANSFORMEE DE LAPLACE (5)

T(p)

$$T(j.2.\pi.f) = \mathcal{F}[g(t)]$$

$$T(p) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$$T(p) = p.\mathcal{L}[i(t)]$$

REPONSE IMPULSIONNELLE (4)

g(t)

$$\delta(t) = \frac{du}{dt} \Rightarrow i(t) = \int_0^{+\infty} g(t-\theta).d\theta$$

REPONSE INDICIELLE (3)

i(t)

Légende : $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p) =$ Transformée de Laplace de y(t) ; $\mathcal{F}[y(t)] = Y(f) =$ Transformée de Fourier de y(t)