1 Les circuits électriques : rappels

L'étude théorique d'un circuit est basée sur les lois de l'électromagnétisme. Les grandeurs physiques recherchées sont habituellement le courant[1] i qui circule dans un élément et la tension (ou différence de potentiel) e aux bornes de cet élément. Un élément de circuit linéaire satisfait la relation :

$$e(i_1 + i_2) = e(i_1) + e(i_2) \tag{1}$$

Nous utiliserons la convention suivante : soit A et B deux points qui bornent un élément du circuit. Soit i le courant qui circule dans l'élément de A vers B et soit v_n le potentiel au point n. La différence de potentiel e aux bornes de l'élément est alors

$$e \equiv v_B - v_A \tag{2}$$

tandis que la chute de tension v aux bornes de cet élément s'écrit

$$v \equiv v_A - v_B\,. \tag{3}$$

Tout élément d'un circuit linéaire peut s'écrire comme une combinaison de trois éléments de base : résistance R, capacitance C et inductance L. Le tableau donne les définitions de ces quantités et leurs relations avec le courant et la tension.

Quantité	Symbole	Unité	Symbole	Correspondance
Charge	q	coulomb	C	
Courant	i	ampère	A	Cs^{-1}
Tension	v (ou e)	volt	V	JC^{-1}
Résistance	R	ohm	Ω	$VA^{-1} = JsC^{-2}$
Capacitance	C	farad	F	$CV^{-1} = C^2J^{-1}$
Inductance	L	henry	H	$VsA^{-1} = Js^2C^{-2}$
Puissance	P	watt	W	$VA = Js^{-1}$

Un courant sera normalement activé dans un circuit lorsqu'une tension e y est appliquée. Si e varie avec le temps, de même i dépendra du temps. On note souvent les grandeurs qui varient dans le temps par des lettres minuscules (v, i, e), les grandeurs constantes par des lettres majuscules (V, I, E).

1.1 Lois de Kirchhoff

La première loi de Kirchhoff, ou **loi des nœuds**, établit l'interdépendance des courants en un nœud, ou point de jonction, d'un circuit : en tout temps, la somme algébrique des courants arrivant à un nœud est nulle,

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{4}$$

C'est une application de la loi de la conservation de la charge : puisque la charge ne peut être créée ni détruite, le flux total de charge (le courant) *vers* le nœud est nul.

[1] Nous utilisons dans ce chapitre la même notation, i, pour le courant électrique et pour le complexe unitaire. Le contexte devrait cependant permettre de les distinguer facilement !

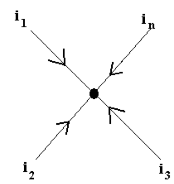

FIG. 1 – Loi des nœuds.

La deuxième loi de Kirchhoff ou **loi des mailles** est une application de la loi de conservation de l'énergie. Si l'on déplace une charge le long d'une maille d'un circuit et qu'on la ramène à son point de départ, la somme des changements de potentiel ressentis par cette charge doit être nulle. La figure représente une telle maille entrant dans la constitution du circuit où A,

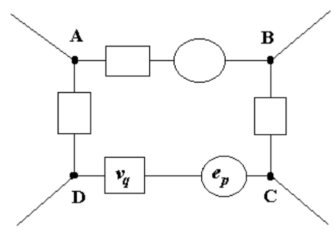

FIG. 2 – Loi des mailles.

B, C et D représentent des nœuds. Les petits rectangles sont les éléments du circuit. On a également fait figurer une source de tension externe e sur la branche DC. Supposons qu'il y a n éléments dans la maille. Un nombre l de ceux-ci sont associés à une différence de tension e_p et un nombre m à une chute de tension v_q, avec $l + m = n$. La seconde loi de Kirchhoff s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{l} e_p + \sum_{p=1}^{m} v_p = 0 \;\; \textbf{(Loi des mailles)} \tag{5}$$

c'est-à-dire que la somme des différences de potentiel est égale à la somme des chutes de tension pour tout trajet fermé.

1.2 Eléments de circuit

Comme on l'a dit plus haut, tout circuit linéaire peut être représenté comme une combinaison de résistances, capacitances et inductances pures. La loi d'Ohm s'applique aux résistances mais pas aux deux autres sortes d'éléments, qu'on appelle éléments réactifs. Voyons comment écrire les relations entre courant et tension pour ces éléments.

Résistance. La loi d'Ohm établit la relation entre le courant i circulant dans une résistance pure R à l'instant t et la tension v_R aux bornes de cette résistance au même instant, qui s'écrit

$$v_R = v_A - v_B = Ri \;\; \textbf{(Loi d'Ohm)} \tag{6}$$

Condensateur. Un condensateur est un élément constitué de deux armatures conductrices (appelées électrodes) en influence totale et séparées par un isolant polarisable (diélectrique). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. Le condensateur est globalement neutre ; si on applique une tension v_c entre les deux plaques, les charges électriques négatives (électrons) en provenance de la borne négative de la source tendent à se déplacer sur la plaque correspondante tandis que les charges positives (manque d'électrons) se rassemblent sur l'autre. La capacité du condensateur donne la mesure de cet effet. Pour un condensateur de capacité C, les charges q et $-q$ sur chaque plaque sont

$$q = Cv_c \,. \tag{7}$$

Si la tension varie au cours du temps, la variation de charge qui s'en suit correspond à une circulation de courant dans la branche du circuit où se trouve le condensateur. On peut donc écrire

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt} \,. \tag{8}$$

Ceci implique donc que

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \,. \tag{9}$$

Dans le cas d'une alimentation continue constante, $dv_c/dt = 0$ et le condensateur correspond à un circuit ouvert : il n'y a pas de passage de courant, $i(t) = 0$.

Inductance. On appelle inductance un bobinage d'un fil conducteur éventuellement enroulé autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Si la bobine est traversée par un flux d'induction magnétique Φ variable, une tension v est induite à ses bornes. La loi de Faraday donne :

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \tag{10}$$

S'il n'y a pas d'induction dans un élément du circuit provenant d'un autre élément de ce circuit, on peut caractériser chaque élément inductif du circuit par son inductance L telle que

$$\Phi = Li. \tag{11}$$

On a donc aux bornes d'un tel élément

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{12}$$

Dans le cas d'un courant continu constant $i(t) = I =$cte, soit $di/dt = 0$: une inductance pure parcourue par un courant continu est un court-circuit, $v_L(t) = 0$.

1.3 Combinaison des éléments d'un circuit

Résistances. Soit deux résistances en série. La première loi de Kirchoff implique qu'un même courant y circule. La deuxième loi de Kirchoff et la loi d'Ohm donnent quant à elles

$$v_A - v_C = v_A - v_B + v_B - v_C = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i \,. \tag{13}$$

Deux résistances en série sont donc équivalentes à une seule résistance totale R_s

$$R_s = R_1 + R_2 \tag{14}$$

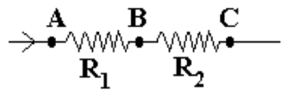

FIG. 3 – Deux résistances en série.

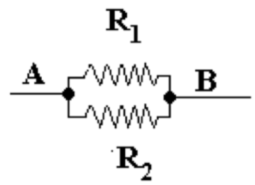

FIG. 4 – Deux résistances en parallèle.

Soit maintenant deux résistances en parallèle. On doit avoir : $i = i_1 + i_2$ et $v_A - v_B = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_t i$. On en tire que :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{15}$$

Condensateurs. Soit deux condensateurs en série. On a alors $q_1 = q_2 = q$ car le point B est neutre, $v_1 = v_B - v_A = q/C_1$ pour le condensateur 1, et $v_2 = v_C - v_B = q/C_2$ pour le condensateur 2, d'où $v_1 + v_2 = v_C - v_A = q(1/C_1 + 1/C2)$. Pour la capacité totale C_s on a donc

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ou} \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,. \tag{16}$$

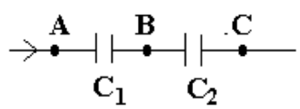

FIG. 5 – Deux capacités en série.

Par contre, si les deux condensateurs sont en parallèle, on doit avoir $q = q_1 + q_2$, mais aussi $v_B - v_A = q/C_1 = q/C_2$, d'où on obtient :

$$C_p = C_1 + C_2\,. \tag{17}$$

Inductances. Pour deux inductances en série ou en parallèle, le développement est similaire et on obtient

$$L_s = L_1 + L_2\,. \tag{18}$$

et

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ou} \quad L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\,. \tag{19}$$

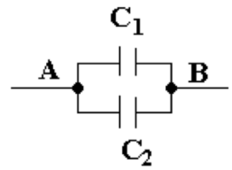

FIG. 6 – Deux capacités en parallèle.

Exercice Montrer les relations précédentes.

Exercice Montrer que la chute de tension v_{R_2} aux bornes de la résistance R_2 pour le circuit en figure 7 (diviseur de potentiel) est donnée par $v_{R_2} = R_2 e/(R_1 + R_2)$.

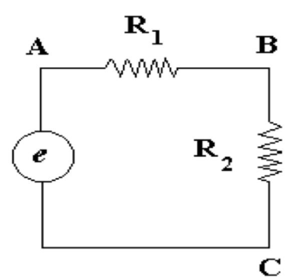

FIG. 7 – Circuit diviseur de potentiel.

1.4 Mise en équations : un exemple

Les relations entre courant et tension pour les éléments réactifs L et C font intervenir des dérivées ou des intégrales par rapport au temps. De ce fait, les équations d'un circuit comprenant de tels éléments seront intégro-différentielles. Une équation intégro-différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction, et qui contient *dérivées et primitives* de cette fonction. Il est parfois utile de récrire l'équation comme une équation différentielle en choisissant comme fonction inconnue la primitive d'ordre plus élevée. Les méthodes que nous allons développer dans ce cours s'appliquent cependant aussi bien aux équations différentielles que intégro-différentielles, même si nous nous concentrerons sur le premier cas.

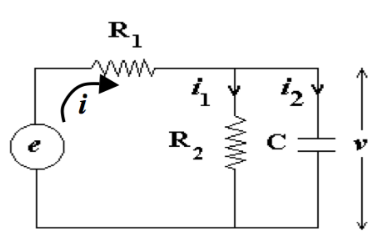

FIG. 8 – Exemple de circuit.

Exemple. Comme application des lois fondamentales, nous allons calculer l'état du circuit schématisé ci-dessus soumis à une excitation extérieure. Un générateur externe, que nous supposerons de résistance négligeable (si ce n'était pas le cas, il faudrait effectuer la transformation $R_1 \rightarrow R_1' = R_1 + R_g$, où R_g est la résistance interne du générateur), exerce une excitation.

La première loi de Kirchhoff s'écrit $i = i_1 + i_2$. Aux bornes de la capacité C, on a $v = q/C$ et $i/2 = Cdv/dt$. La loi d'Ohm pour la résistance R_2 s'écrit $v = R_2 i_2$ et la deuxième loi de Kirchhoff donne $e = R_1 i + v$. En combinant ces équations on trouve facilement

$$e(t) = R_1 C \frac{dv(t)}{dt} + (1 + \frac{R_1}{R_2})v(t). \tag{20}$$

On a donc une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène, où la tension appliquée e joue le rôle de l'excitation externe et $v(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

2 Notation complexe en électronique

2.1 Réponse du circuit RLC en régime harmonique

On appelle **régime harmonique** l'état d'un système soumis à une excitation sinusoïdale. D'après ce que nous venons de voir, la réponse du circuit RLC à une sollicitation sinusoïdale (en d'autres termes, son comportement en régime harmonique) est identique à ce que nous avons obtenu pour l'oscillateur mécanique. Par analogie, on obtient la *fonction de transfert* du circuit RLC : si $\tilde{v}_s(\omega)$ et $\tilde{v}_e(\omega)$ sont les amplitudes complexes en entrée et en sortie, définies comme au premier cours, nous obtenons

$$\frac{\tilde{v}_s(\omega)}{\tilde{v}_e(\omega)} = T(\omega) = \frac{1/LC}{1/LC - \omega^2 + i\omega R/L} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega R/L} \tag{21}$$

avec $w_0^2 = 1/LC$ la pulsation propre du circuit.

2.2 Impédance complexe

Il sera utile, en conclusion de ce chapitre, de revenir sur la notation complexe et de préciser la manière dont elle est utilisée couramment en électronique pour l'étude des circuits en régime alternatif, c'est-à-dire soumis à une tension sinusoïdale. Nous avons déjà vu que toute fonction sinusoïdale peut être mathématiquement représentée par une exponentielle complexe, avec la convention que le signal mesurable correspond à la partie réelle de l'expression complexe : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$ avec $\tilde{x}(t) = Ae^{i((\omega t+\varphi))}$. Nous savons aussi qu'un opérateur linéaire (addition, multiplication par une quantité indépendante du temps, différentiation ou intégration par rapport au temps, etc.) peut être appliqué à la représentation complexe d'un signal alternatif sans perdre la correspondance avec le signal mesurable.

Soit alors[2] $\mathrm{i}(t) = I\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\tilde{i})$ le courant circulant dans un élément de circuit de bornes A et B et $v = v_A - v_B$ la chute de tension aux bornes de l'élément. Dans le cas des trois éléments de circuits que nous avons considérés, la résistance, le condensateur ou l'inductance, i et v sont reliés par une relation linéaire.

[2]Rappelons que nous avons choisi d'indiquer, pour toute fonction sinusoïdale $x(t)$, avec $\tilde{x}$ la fonction complexe oscillante dont $x(t)$ est la partie réelle, et avec $\hat{x}$ son amplitude : $\tilde{x} = \hat{x}\exp(i\omega t)$.

Ainsi, dans le cas d'une **résistance**, on a

$$\mathrm{Re}(\tilde{v}) = v = R\mathrm{i} = RI\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(R\tilde{i}) \tag{22}$$

et donc :

$$\tilde{v} = R\,\tilde{i}\,. \tag{23}$$

Si l'élément du circuit est un **condensateur**, on a

$$\mathrm{Re}(\tilde{i}) = \mathrm{i} = C\frac{dv}{dt} = \mathrm{Re}(C\frac{d\tilde{v}}{dt}) = \mathrm{Re}(C\,i\omega\tilde{v}) \tag{24}$$

d'où

$$\tilde{v} = \frac{1}{i\omega C}\,\tilde{i}\,. \tag{25}$$

Finalement, dans le cas d'une **inductance**,

$$\mathrm{Re}(\tilde{v}) = v = L\frac{d\mathrm{i}}{dt} = \mathrm{Re}(L\frac{d\tilde{i}}{dt}) = \mathrm{Re}(L\,i\omega\tilde{i}) \tag{26}$$

ce qui implique que

$$\tilde{v} = i\omega L\,\tilde{i}\,. \tag{27}$$

Remarquons que, comme la partie oscillante des fonctions complexes considérées ici est toujours égale à $\exp(i\omega t)$, les relations précédentes sont aussi valables pour les amplitudes complexes de courant et tensions :

$$\hat{v} = R\,\hat{i}\,, \tag{28}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{i\omega C}\,\hat{i}\,, \tag{29}$$

$$\hat{v} = i\omega L\,\hat{i}\,. \tag{30}$$

On est ainsi amené à introduire la notion d'impédance complexe Z, définie par la relation :

$$\tilde{v} = Z(\omega)\,\tilde{i} \tag{31}$$

ou, de manière équivalente,

$$\hat{v} = Z(\omega)\,\hat{i}\,. \tag{32}$$

Nous avons déjà assez d'expérience dans l'étude des systèmes linéaires pour interpréter l'impédance complexe dans les termes que nous avons utilisé dans les paragraphes précédentes : on peut dire que l'impédance complexe est la fonction de transfert associée à chaque élément de circuit, permettant de déterminer l'amplitude (complexe) de la réponse de cet élément (la tension v) pour une sollicitation (le courant i) sinusoïdal *de pulsation* ω.

Les expressions de Z pour les différents éléments de circuit sont donc

Résistance	$Z_R(\omega) = R$
Condensateur	$Z_C(\omega) = 1/i\omega C$
Inductance	$Z_L(\omega) = i\omega L$

L'introduction des impédances complexes des trois éléments de base (résistance, capacitance et inductance) permet de simplifier la résolution de l'état d'un circuit en régime alternatif. En effet, les impédances complexes des divers éléments d'un circuit se combinent de la même façon que si ces éléments étaient des résistances pures. Pour deux éléments quelconques en série,

$$Z_s = Z_1 + Z_2 \,, \tag{33}$$

tandis que pour deux éléments en parallèle,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \,. \tag{34}$$

Attention cependant à ne pas oublier que les relations simples Rcomp, Ccomp et Lcomp ne sont valables que pour une excitation sinusoïdale ! Cependant, les résultats valables pour des signaux sinusoïdaux permettent en réalité d'aborder le cas de signaux périodiques plus complexes, grâce à une décomposition astucieuse, comme nous le verrons au chapitre **??**.