Propagation d'ondes dans un cable électrique

Lors de l'étude des circuits électriques ou électroniques, nous nous étions placés dansles cadre de l'ARQS (ou ARQP) qui consiste à ne pas prendre en compte les temps de propagation des signaux lorsque les distances à parcourir sont si faibles que ces temps ne sont pas détectables.

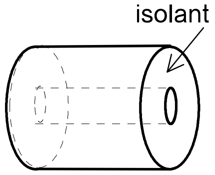
Mais pour des transmissions téléphoniques d'une ville à une autre, les distances deviennent suffisamment importantes pour que ces effets de délais dus à la propagation soient sensibles.

Nous allons les décrire dans le cas d'une propagation d'un signal dans un câble coaxial.

I. Description du câble coaxial

1. Constitution

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, séparés par un isolant.



Imaginons qu'un générateur placé au début du câble émette une impulsion ; celle ci va se propager dans le câble.

A une abscisse x et à un instant t donnés, on pourra mesurer la différence de potentiel u(x,t) entre les deux conducteurs, ainsi que les intensités i(x,t) qui passent dans les deux conducteurs.

2. Modélisation : schéma équivalent

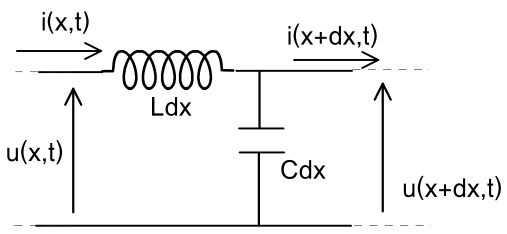
Comme toujours lorsque les grandeurs utiles évoluent en fonction de la position, on découpe le système en petits morceaux.

Donc ici par tranches comprisent entre les abscisses x et x + dx.

Les deux conducteurs en regard constituent un condensateur, dont la capacité sera proportionnelle à dx car la taille des plaques y est proportionnelle ;

Les courants génèrent des champs magnétiques fonction du temps, donc des effets inductifs que l'on peut décrire par une bobine dont l'inductance sera proportionnelle à dx.

On peut donc modéliser l'élément de longueur dx du câble coaxial par le schéma électrique équivalent :



Où L est une inductance linéïque, et C une capacité linéïque.

Notons que nous avons dans cette description négligé tout effet résistif des conducteurs, ou de qualité imparfaite de l'isolant.

II. Equation de propagation

1. Utilisation des lois des noeuds et mailles

L'application des lois des mailles et nœuds donne les deux équations suivantes (au premier ordre) :

$u(x,t) - u(x+dx,t) = Ldx\dfrac{\partial i}{dt}$ et $i(x,t) = i(x+dx,t) + Cdx\dfrac{\partial u}{\partial t}$

dont on déduit les deux équations aux dérivées partielles $\boxed{-\dfrac{\partial u}{\partial x} = L\dfrac{\partial i}{dt} \quad \text{et} \quad -\dfrac{\partial i}{\partial x} = C\dfrac{\partial u}{\partial t}}$.

2 . Combinaison de ces équations

On dérive la première par rapport à x et la seconde par rapport à t et on élimine la dérivée seconde de i entre les deux équations ; on obtient alors l'équation de propagation pour u :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}.$$

De même en éliminant u : $\boxed{\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\,\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0}$.

On retrouve donc l'équation de d'Alembert, caractérisant une propagation à la vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{LC}}}.$$

III.Impédance caractéristique

La notion "d'impédance" a été définie pour l'étude des composants d'un circuit électrique fonctionnant en régime sinusoïdal.

Elle relie la différence de potentiel et le courant qui parcourt ce composant par une relation, en notation complexe, $\underline{U} = Z\,\underline{I}$.

Nous nous placerons donc pour la suite en régime sinusoïdal.

Se placer en régime sinusoïdal consiste à considérer que les fonctions u(x,t) et i(x,t) sont des fonctions sinusoïdales du temps.

Le câble est donc à son entrée alimenté en régime sinusoïdal (ou encore dit monochromatique).

1. Relation de dispertion

Pour une onde monochromatique de tension se propageant dans le sens des x positifs, on aura :
$u(x,t) = U_o \cos(\omega t - kx)$.

En reportant dans l'équation de propagation, il vient $\boxed{k = \dfrac{\omega}{v}}$.

On obtiendrait la mâme relation pour une onde se propageant dans le sens des x négatifs.

2. Lien entre potentiel et intensité pour une onde monochromatique

a) Cas d'une onde monochromatique se propageant dans le sens des x positifs

Le signal réel $u_+(x,t) = U_o \cos(\omega t - kx)$ se représente en notation complexe par :
$\underline{U}_+ = \underline{U}_o \exp j(\omega t - kx)$;

De même l'intensité $i_+(x,t)$ sera représentée en notation complexe par $\underline{I}_+ = \underline{I}_o \exp j(\omega t - kx)$.

En reportant ces expressions dans l'équation obtenue à partir de la loi des mailles :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Il vient : - (- j) k $\underline{U_o}$ = L j ω $\underline{I_o}$

Donc $\underline{U_o} = L\,\frac{\omega}{k}\,\underline{I_o}$ et en tenant compte de la relation de dispertion $\underline{U_o} = L\ v\,\underline{I_o}$

$$\underline{U_o} = L\sqrt{\frac{1}{LC}}\,\underline{I_o} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\underline{I_o}$$

Soit encore $\underline{U}_+ = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\underline{I}_+$ correspondant à une impédance :

$$\boxed{\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

appelée “impédance caractéristique du câble

b) Cas d’une onde monochromatique se propageant dans le sens des x négatifs

On procède de même pour $u_-(x,t) = U_o \cos(\omega t + kx)$;

Par rapport au cas précédent, seul le signe devant k change, ce qui introduit un seul changement de signe dans les équations suivantes.

Donc on aura $\underline{U}_- = -\underline{Z}_c\,\underline{I}_-$ avec la même expression pour $\underline{Z}_c$.

c) Superposition d’ondes monochromatiques de sens opposés

La solution générale de l’éqution de d’Alembert à une dimension d’espace s’écrit comme la superposition d’ondes se propageant en sens contraires.

Dans le cas d’ondes monochroamtiques, la solution générale en tension s’écrira donc en notation complexe sous la forme :

$$\boxed{\underline{U} = \underline{U_o}^+ \ \exp j(\omega t - kx) + \underline{U_o}^- \ \exp j(\omega t + kx)\ ;}$$

L’intensité correspondante sera donnée par le théorème de superposition : somme des intensités données par chacune de ces tensions :

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{Z_c}\left[\underline{U}_o^+ \exp j\,(\omega\, t - kx) - \underline{U}_o^- \exp j\,(\omega\, t + kx)\right]}$$

On notera la différence de signe au centre de l’expression !! (et valable car Z_c est un réel).

3. Généralisation

Pour des ondes qui ne sont pas monochromatiques, la tension et l'intensité sont aussi liées par les relations imposées par les lois des mailles ou des noeuds.

Ainsi pour une onde se propageant dans le sens des x croissants :
décrite par une tension $u_+ = u_+ (t - x/v) = u_+(\alpha)$ et une intensité $i_+ = i_+ (t - x/v) = i_+ (\alpha)$:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\,\frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{entraine} \quad \frac{1}{v}\frac{d u_+}{d\alpha} = L\,\frac{d i_+}{d\alpha} \quad \text{avec} \quad vL = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c$$

Soit après intégration (les constantes sont nulles car elles le sont en l'absence de signal) :

$u_+ = Z_c\, i_+$

On procèdde de même avec une onde en sens des x décroissants, qui conduira à $u_- = - Z_c\, i_-$.

Par superposition, à une onde en tension $u(x,t) = u_+(t - x/v) + u_-(t + x/v)$ correspondra une onde en intensité $i(x,t) = \frac{1}{Z_c}\,[\, i_+(t - x/v) - i_-(t + x/v)\,]$.