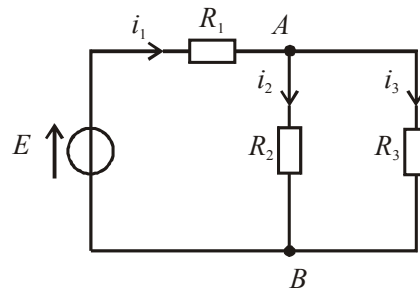


# MÉTHODES DE RÉOLUTION DES RÉSEAUX LINÉAIRES EN COURANT CONTINU

## I. DEUX FACONS DE POSER LE PROBLÈME

On considère le circuit suivant. Nous cherchons à connaître l'état électrique du circuit, c'est à dire connaître les potentiels des différents nœuds (par rapport à un potentiel de référence choisi que l'on appelle la masse et qui est l'un des nœuds du circuit).

Il y a 3 intensités inconnues. On a 2 nœuds, donc 1 nœud indépendant. On peut choisir le point  $B$  comme potentiel de référence :  $V_B = 0$ .



### L1 Première façon de raisonner : recherche des intensités des branches

Il y a trois inconnues :  $i_1, i_2, i_3$ . Il faut donc un système à trois équations et trois inconnues : loi des nœuds en  $A$  et deux lois des mailles (par exemple maille  $E, R_1$  et  $R_2$  puis maille  $R_2, R_3$ ) :

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ E = R_1 i_1 + R_2 i_2 \\ R_2 i_2 = R_3 i_3 \end{cases}$$

On peut en déduire les intensités puis le potentiel  $V_A$ .

**Inconvénient : les calculs deviennent très vite très lourds car il y a souvent beaucoup d'inconnues.**

### L2 Deuxième façon de raisonner : recherche des potentiels des nœuds

On cherche les potentiels des nœuds. Pour cela, on utilise la méthode de la loi des nœuds en termes de potentiel que l'on met en place sur cet exemple. Il y a  $(2 - 1) = 1$  nœud indépendant. La méthode consiste à écrire la loi des nœuds en termes de potentiel, c'est à dire exprimer les intensités  $i_1, i_2, i_3$  à l'aide des potentiels des points  $A$  et  $B$  ( $V_B = 0$ ). Nous obtenons :

$$i_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1} ; i_2 = \frac{E_2 - V_A}{R_2} ; i_3 = \frac{0 - V_A}{R_3}$$

La loi des nœuds en  $A$  donne :  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

La loi des nœuds en termes de potentiel s'écrit donc :

$$\frac{E_1 - V_A}{R_1} + \frac{E_2 - V_A}{R_2} + \frac{0 - V_A}{R_3} = 0$$

Nous en déduisons immédiatement  $V_A$ . Nous sommes donc ramenés à un système à une équation et une inconnue.

## II. LOI DES NŒUDS EN TERMES DE POTENTIEL (LDN)

### II.1 Exposé de la méthode

Soit un circuit linéaire comprenant  $n$  nœuds. Choisissons un potentiel de référence (masse souvent imposée par l'énoncé). Il y a  $(n - 1)$  nœuds indépendants.

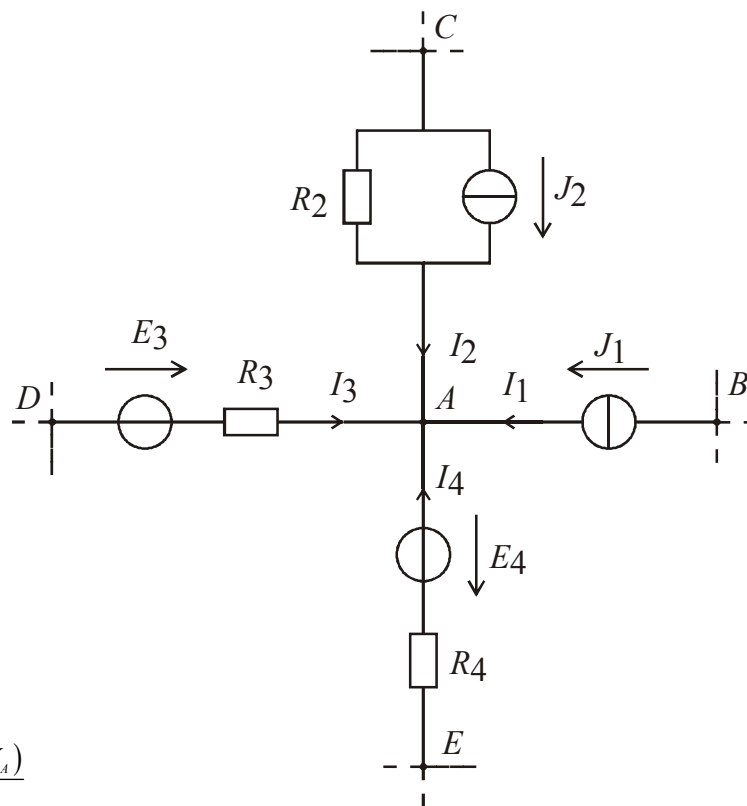
#### Méthode systématique pour obtenir les $(n - 1)$ équations

- S'il y a un générateur de tension entre un nœud et la masse, le potentiel de ce nœud est connu. **Il est inutile d'écrire la loi des nœuds en ce point.**
- Sinon écrire la loi des nœuds en  $A$ 
  - 1) Si dans une branche on a un générateur de courant  $J$ , l'intensité dans la branche vaut  $J$ .
  - 2) Sinon écrire l'intensité dans les branches sous la forme d'une différence de potentiel entre deux nœuds en faisant intervenir des résistances (d'où le nom de loi des nœuds en termes de potentiel).

Considérons une partie d'un circuit où on met en évidence les nœuds  $A, B, C, D$  et  $E$ .

Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiel au nœud  $A$  en introduisant les courants qui arrivent au nœud  $A$  :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$



- calcul de  $I_1$  :  $I_1 = J_1$
- calcul de  $I_2$  :  $I_2 = J_2 + \frac{(V_C - V_A)}{R_2}$
- calcul de  $I_3$  : Il faut donc exprimer  $I_3$  en fonction de  $V_D, E_3, R_3$  et  $V_A$ .  
 $V_D - V_A = -E_3 + R_3 I_3$ . D'où  $I_3 = \frac{(V_D + E_3 - V_A)}{R_3}$
- calcul de  $I_4$  : Il faut exprimer  $I_4$  en «termes de potentiel».  
 $V_E - V_A = E_4 + R_4 I_4$ . On en déduit immédiatement que :  $I_4 = \frac{(V_E - E_4 - V_A)}{R_4}$

On a  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

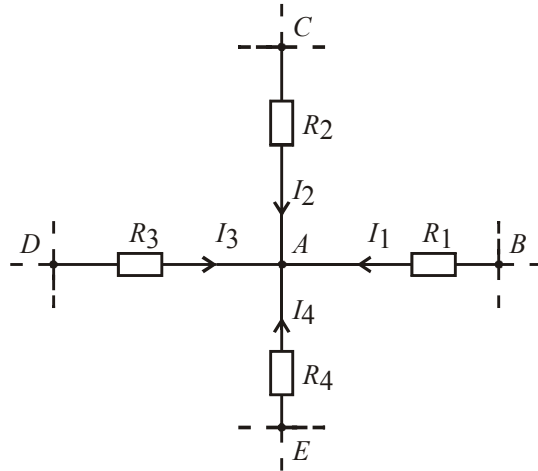
La loi des nœuds en termes de potentiel en  $A$  s'écrit donc :

$$J_1 + J_2 + \frac{(V_C - V_A)}{R_2} + \frac{(V_D + E_3 - V_A)}{R_3} + \frac{(V_E - E_4 - V_A)}{R_4} = 0$$

## II.2 Une conséquence de la LDN en termes de potentiel : le théorème de Millman

Nous n'utiliserons le théorème de Millman qu'avec des circuits comprenant des résistances (ou impédances en régime sinusoïdal forcé) et des générateurs de courant.

Ce théorème découle directement de la loi des nœuds en termes de potentiel.



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\frac{(V_B - V_A)}{R_1} + \frac{(V_C - V_A)}{R_2} + \frac{(V_D - V_A)}{R_3} + \frac{(V_E - V_A)}{R_4} = 0$$

d'où :

**Théorème de Millman :**

$$V_A = \frac{\frac{V_B}{R_1} + \frac{V_C}{R_2} + \frac{V_D}{R_3} + \frac{V_E}{R_4}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)}$$

**Moyen mnémotechnique pour appliquer le théorème de Millman. On compte le nombre de branches qui sont parcourues effectivement par un courant (ici quatre – voir cours sur les AO où les courants d'entrée sont nuls). On considère les quatre résistances reliées au nœud A. Au dénominateur, on a donc la somme des 4 conductances. Au numérateur, on fait la somme de 4 termes : conductance × potentiel de l'autre côté de la résistance.**

On l'écrit parfois sous la forme :  $V_A (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) = G_1 V_B + G_2 V_C + G_3 V_D + G_4 V_E$

Ce résultat est très pratique pour les montages comprenant des amplificateurs opérationnels. Il existe un théorème de Millman généralisé pour des circuits comprenant des générateurs de courant mais il est préférable d'utiliser directement la loi des nœuds en termes de potentiel où le sens physique des expressions apparaît clairement.

Une erreur fréquemment commise est d'appliquer le théorème de Millman avec des différences de potentiel.

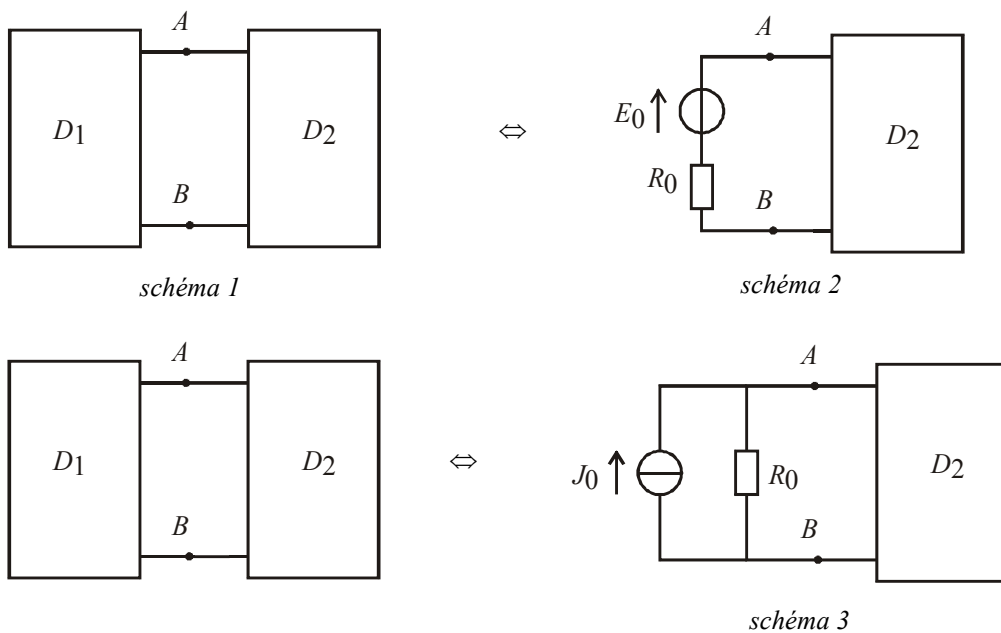
### III. THÉORÈMES DE THÉVENIN ET NORTON

Soient 2 points  $A$  et  $B$  quelconques d'un circuit linéaire. On met en évidence 2 dipôles  $D_1$  et  $D_2$  entre ces deux points,  $D_1$  et/ou  $D_2$  comportant des générateurs de tension et/ou de courant.

**Théorème de Thévenin** : on peut modéliser le dipôle  $D_1$  par l'association série d'un générateur de tension de f.e.m.  $E_0$  et d'une résistance  $R_0$ .

- $E_0$  est la **tension à vide** aux bornes de  $D_1$ ,
- $R_0$  est la résistance équivalente au dipôle  $D_1$  en éteignant tous les **générateurs indépendants**.

Éteindre un générateur de tension ( $U = E$ ) revient à le remplacer par un interrupteur fermé ( $U = 0$ ). Éteindre un générateur de courant ( $I = J$ ) revient à le remplacer par un interrupteur ouvert ( $I = 0$ ).



**Théorème de Norton** : on peut modéliser le dipôle  $D_1$  par l'association parallèle d'un générateur de courant de courant électromoteur  $J_0$  et d'une résistance  $R_0$  (la même que dans le modèle de Thévenin).

$J_0$  est le **courant de court-circuit** qui circulerait dans un fil reliant  $A$  et  $B$ .

Les 3 schémas sont équivalents :  $J_0 = \frac{E_0}{R_0}$ .

Le passage de la représentation de Thévenin à celle de Norton et inversement permet de simplifier les montages.

Le dipôle  $D_2$  est dans le même état électrique dans les schémas 1, 2 et 3. L'utilisation du théorème de Thévenin (ou de Norton) permet de trouver l'état électrique du dipôle 2 plus simplement avec le schéma 2 (ou schéma 3) qu'avec le schéma 1 puisqu'on réduit le nombre de nœuds.

*Remarque : Les théorèmes de Thévenin et de Norton ne sont pas valables si on fait des calculs de puissance.*

## IV. COMMENT ABORDER UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE ?

### IV.1 Simplifier le circuit

- Utiliser les lois **d'association série, parallèle** de résistances (attention aux simplifications abusives...).
- Le théorème de Thévenin ou de Norton [1] permet de réduire le nombre de nœuds du circuit. On peut dans certains cas simplifier le montage en utilisant la **transformation Thévenin-Norton puis Norton-Thévenin**.

### IV.2 Écriture des équations

- Penser aux **diviseurs de tension**, ou de **courant** pour les cas simples.
- Pour un circuit série, écrire la **loi des mailles** (choisir une grandeur commune au circuit série –  $i$  par exemple).
- Pour un circuit comprenant plusieurs nœuds :

1<sup>ère</sup> possibilité souvent très rapide :

- **1<sup>ère</sup> étape** : On cherche les potentiels des  $(n - 1)$  nœuds indépendants. Écrire  $(n-1)$  fois la **loi des nœuds en termes de potentiels ou le théorème de Millman**.

*Remarque importante* : si entre deux nœuds, on a une fem : une des équations s'écrit :  $V_A - V_B = e$ .

- **2<sup>ème</sup> étape** : On en déduit les autres potentiels et les intensités des branches.

**Méthode pour trouver  $u_{DE} = V_D - V_E$  avec  $D$  et  $E$  points quelconques :**

- a) penser au diviseur de tension
- b) cas particulier où  $A$  et  $B$  sont des nœuds et  $A, D, E$  et  $B$  sur la même branche :
  1. calculer l'intensité dans la branche  $AB$ .
  2. en déduire immédiatement la tension  $u_{DE}$ .

2<sup>ème</sup> possibilité : souvent utilisée pour les régimes transitoires (modélisation d'un câble coaxial) :

Écrire les équations fondamentales de l'électrocinétique : **loi des mailles et loi des nœuds**.

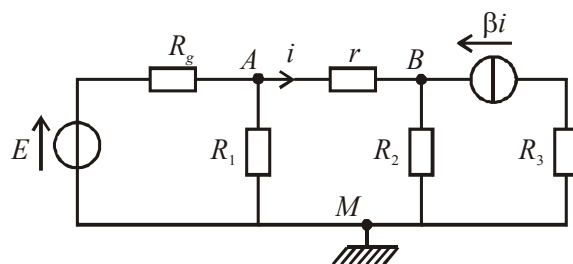
### IV.3 Utilisation de la méthode

Cette méthode s'applique aux circuits linéaires en régime continu, variable et sinusoïdal forcé.

Le cas des circuits non linéaires est plus délicat. Il faut d'abord faire des hypothèses de fonctionnement (voir cours sur les diodes) pour se ramener à des zones de fonctionnement linéaire. A la fin des calculs, il ne faut pas oublier de vérifier les hypothèses pour s'assurer de la cohérence des calculs.

## V. EXERCICES

### V.1 Utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiel



Le circuit comprend trois nœuds :  $A, B$  et  $M$ . On choisit le point  $M$  comme masse.

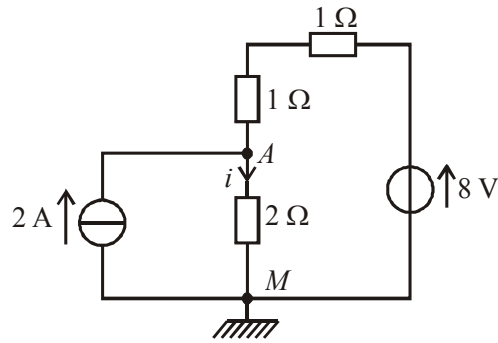
On a deux nœuds indépendants. Il faut donc écrire un système à deux équations et deux inconnues : loi des nœuds en termes de potentiel en  $A$  et en  $B$  :

$$\begin{cases} \frac{E - V_A}{R_g} - \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{r} = 0 \\ \frac{V_A - V_B}{r} + \beta i - \frac{V_B}{R_2} = 0 \quad \text{avec } i = \frac{V_A - V_B}{r} \end{cases}$$

*Attention : ne pas écrire que le courant qui passe dans  $R_3$  vaut  $\frac{0 - V_B}{R_3}$ . C'est faux puisqu'on ne connaît pas la tension aux bornes du générateur de courant qui est d'ailleurs un générateur lié.*

### V.2 Utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiel

On considère le montage suivant. Calculer numériquement l'intensité  $i$ .



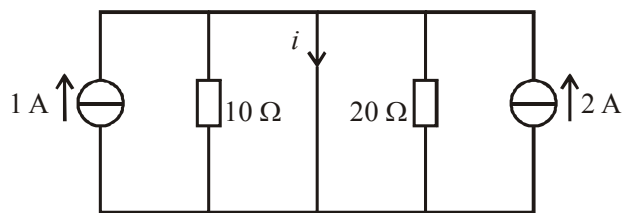
1<sup>ère</sup> étape : recherche du potentiel  $V_A$  avec la loi des nœuds en termes de potentiel.

Simplifier le montage avec deux résistances en série.

$$\text{LDN en } A : 2 + \frac{8 - V_A}{2} - \frac{V_A}{2} = 0, \text{ soit } V_A = 6 \text{ V}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ étape : on en déduit } i : i = \frac{V_A}{2} = 3 \text{ A}$$

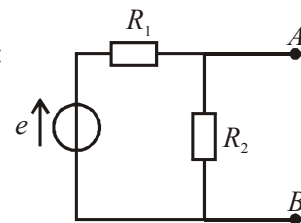
### V.3 Calcul du courant dans un court-circuit



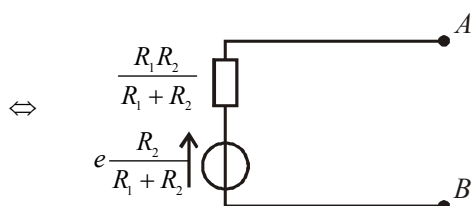
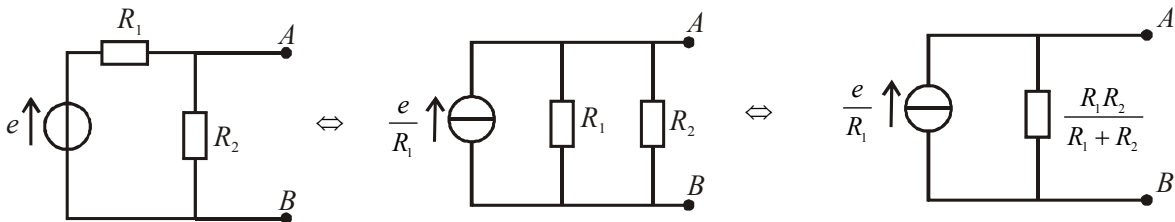
Les résistances  $10 \Omega$  et  $20 \Omega$  sont court-circuitées. Aucun courant ne les traverse. On a :  $i = 1 + 2 = 3 \text{ A}$

### V.4 Schéma équivalent de Thévenin et de Norton

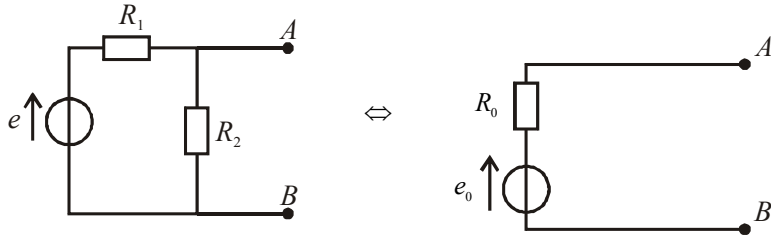
Déterminer le schéma équivalent de Thévenin du montage suivant :



a) Transformation Thévenin – Norton.



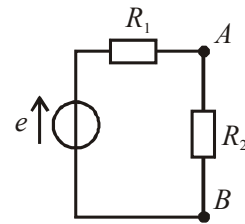
b) Théorème de Thévenin



- $e_0$  = tension à vide aux bornes de  $AB$  :

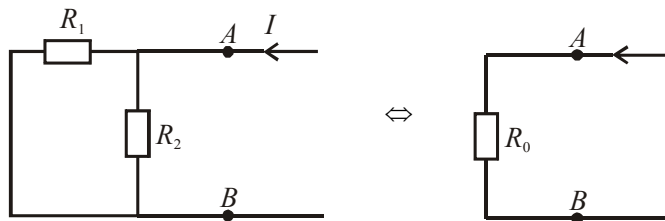
**On peut redessiner le circuit en enlevant les fils reliés aux points  $A$  et  $B$  puisqu'au courant ne circule dans ces fils.**

On reconnaît un diviseur de tension, donc :  $e_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e$

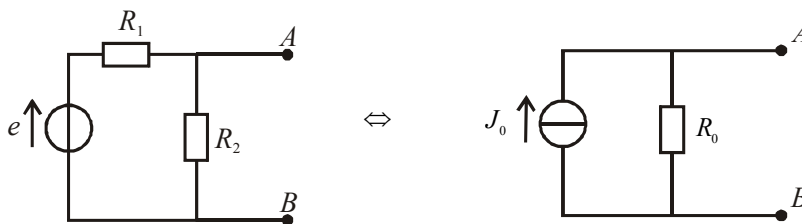


- $R_0$  = résistance équivalente lorsqu'on éteint tous les générateurs indépendants.

On redessine le montage. Attention, il faut laisser les fils reliés aux points  $A$  et  $B$ . En effet, pour calculer une résistance équivalente, il faut « la faire fonctionner », c'est-à-dire injecter un courant qui rentre en  $A$  et qui ressort en  $B$ . **On a donc deux résistances en parallèle et non en série...**  $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

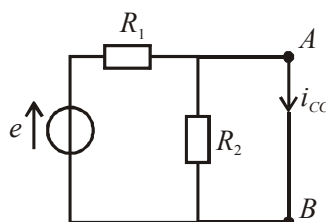


c) Théorème de Norton



- $J_0$  = courant de court-circuit

Attention à l'orientation du courant dans le court-circuit. Si  $i_{CC}$  est orienté de  $A$  vers  $B$ , alors  $i_{CC} = J_0$  puisque si on fait un court-circuit sur le schéma de Norton, la résistance  $R_0$  est court-circuitée et le courant qui passe de  $A$  vers  $B$  à travers le fil est bien  $J_0$ .



La résistance  $R_2$  est court-circuitée. Aucun courant ne passe dans  $R_2$ , on peut donc l'enlever. On en déduit que

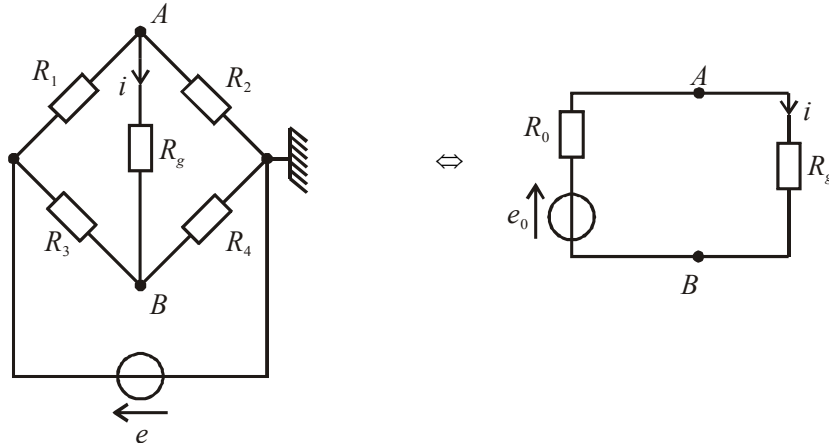
$$i_{cc} = J_0 = \frac{e}{R_1}$$

- $R_0 =$  résistance équivalente lorsqu'on éteint tous les générateurs indépendants. Voir paragraphe b).

On vérifie que :  $e_0 = R_0 J_0$

### V.5 Pont de Wheatstone

On considère le montage en pont suivant. Calculer directement le courant  $i$  qui passe dans  $R_g$  est assez compliqué puisqu'il y a 4 nœuds. On va utiliser le théorème de Thévenin au dipôle  $AB$  qui va alimenter la résistance  $R_g$ . On représente ci-dessous le schéma du montage et le schéma équivalent.



#### a) Calcul de la tension à vide

Pour calculer la tension à vide, on redessine le montage sachant qu'au courant ne rentre en  $A$  et  $B$ . On reconnaît alors deux diviseurs de tension permettant de calculer facilement  $V_A$  et  $V_B$  puis d'en déduire  $e_0$ .

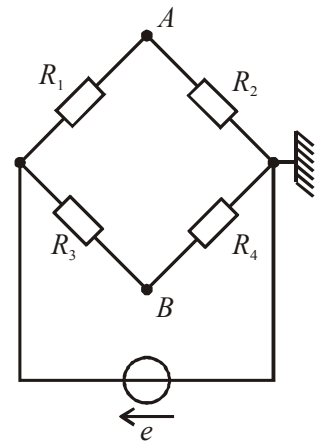
On choisit un potentiel de référence comme masse.

La tension aux bornes de  $R_2$  vaut  $V_A - 0 = V_A$ .

Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont en série. On a un diviseur de tension, donc  $V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e$

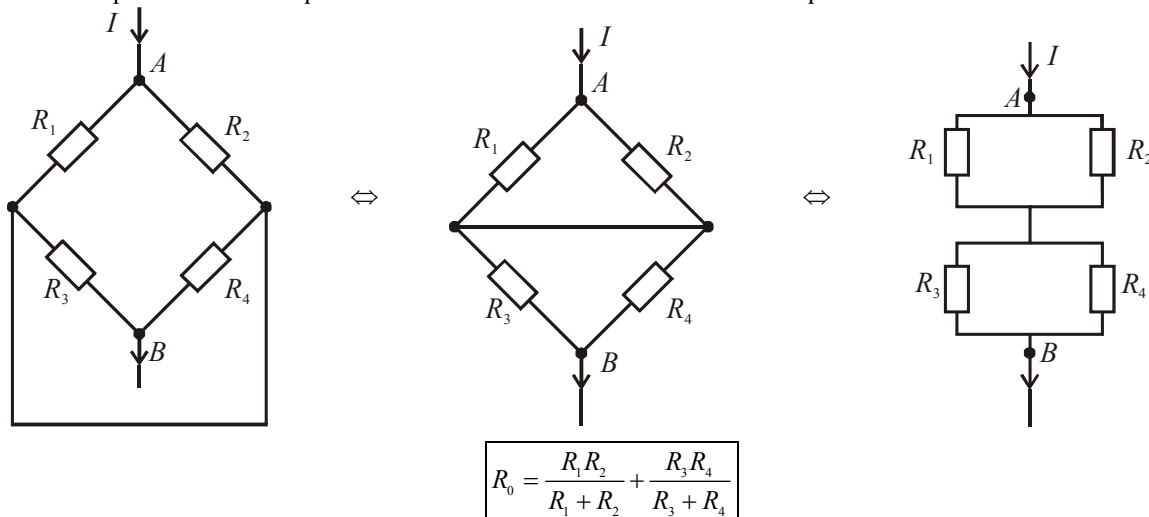
Les résistances  $R_3$  et  $R_4$  sont en série. On a un diviseur de tension, donc  $V_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} e$

On a donc  $e_0 = u_{AB} = V_A - V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e - \frac{R_4}{R_3 + R_4} e$ , d'où  $e_0 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e$ .



#### b) Calcul de la résistance équivalente ou résistance interne

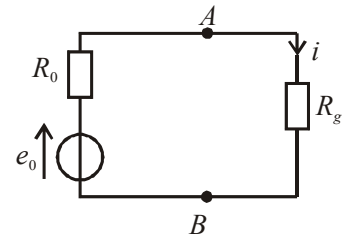
On éteint tous les générateurs indépendants et on redessine le schéma équivalent en faisant bien apparaître un courant  $I$  qui rentre en  $A$  et qui sort en  $B$ . On met en évidence l'association parallèle de certaines résistances.





c) Calcul de l'intensité  $i$  et condition d'équilibre du pont

La loi des mailles s'écrit :  $e_0 = (R_0 + R_g)i$ , d'où  $i = \frac{e_0}{R_0 + R_g}$



On dit que le **pont est équilibré** si le courant qui circule dans  $R_g$  est nul, c'est-à-dire  $e_0 = 0$ , soit

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

Le « produit en croix des résistances est nul ».

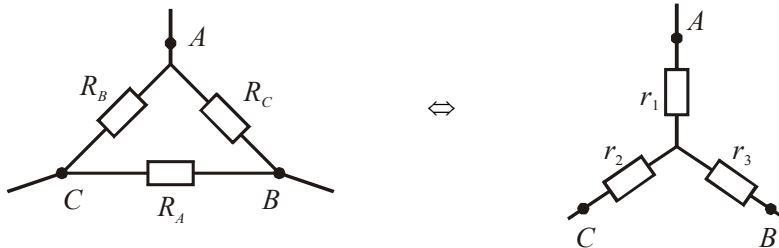
Application : mesure d'une résistance inconnue  $R_1$  connaissant  $R_2, R_3$  et  $R_4$ .

**V.6 Transformation de Kennely – Équivalence triangle-étoile**

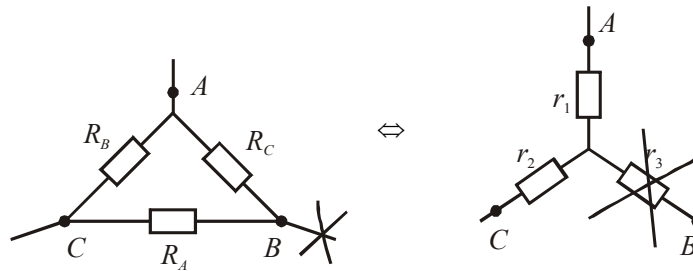
On veut transformer le montage en triangle en un montage plus simple.

On va montrer que le montage en triangle est équivalent au montage en étoile, c'est l'équivalence triangle-étoile ou transformation de Kennely avec  $r_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$ .

Moyen mnémotechnique : la résistance  $r_1$  est reliée au nœud  $A$ . On considère au numérateur les deux résistances reliées au nœud  $A$  et au dénominateur, on fait la somme des trois résistances.



- Supposons que l'on coupe la connexion en  $B$ . On a les deux schémas équivalents suivants :



Aucun courant ne sort par le point  $B$ . On peut supprimer la résistance  $r_3$ . Les résistances  $R_A$  et  $R_B$  sont en série. Si

on injecte un courant en  $A$ , il ressort en  $C$ , on a donc :  $r_1 + r_2 = \frac{R_B (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$  (eq. 1)

- De même, si on coupe en  $C$ , on a :  $r_1 + r_3 = \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$  (eq. 2)

- De même, si on coupe en  $A$ , on a :  $r_2 + r_3 = \frac{R_A (R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$  (eq. 3)

$$(2) + (3) - (1) : 2r_3 = \frac{R_A (R_B + R_C) + R_C (R_A + R_B) - R_B (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = \frac{2R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

d'où  $r_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$ . On obtient de même  $r_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$  et  $r_2 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$ .