



**CONSERVATOIRE NATIONAL DES  
ARTS ET METIERS**



## **ELECTRONIQUE ANALOGIQUE**

**PHR002 / ELE 004 / DUT GEII 1iere année**

-----  
-----

**Didier LE RUYET / Pierre PROVENT**

**Janvier 2010**

# TABLE DES MATIERES

<b>1</b>	<b>RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction	5
1.2	Matériaux en électricité	5
1.3	Courant électrique, Champ électrique et différence de potentiel	5
1.4	Lois fondamentales	6
1.4.1	Loi des mailles	6
1.4.2	Loi des nœuds	7
1.5	Générateurs idéaux	8
1.5.1	Générateur de tension idéal	8
1.5.2	Générateur de courant idéal	8
<b>2</b>	<b>LES DIPOLES PASSIFS ELEMENTAIRES</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction	9
2.2	Caractéristique d'un dipole	9
2.3	Les dipôles passifs élémentaires	10
2.3.1	Résistance	10
2.3.2	Bobine d'induction	10
2.3.3	Condensateur	10
2.4	Lois générales des dipôles passifs	11
2.5	Association de dipôles de même nature	12
2.6	Régime sinusoïdal	13
2.7	Diagrammes de Fresnel et lois des dipôles en régime sinusoïdal	14
2.8	Notation complexe et impédance complexe	17
<b>3</b>	<b>PUISSANCE ET ENERGIE</b>	<b>23</b>
3.1	Définitions	23
3.2	Cas particuliers	24
3.2.1	Energie consommée dans une résistance	24
3.2.2	Energie dans une bobine	25
3.2.3	Energie dans un condensateur	26
3.3	Puissance active, réactive, apparente et complexe dans un dipole quelconque	28
3.4	Force électromotrice et force contre électromotrice	30
3.4.1	Générateur et force électromotrice	30
3.4.2	Récepteur et force contre électromotrice	31
<b>4</b>	<b>METHODES D'ANALYSE DES RESEAUX</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction	33
4.2	Méthode des courants des mailles	34
4.3	Théorème de Millman	35
4.4	Théorème de superposition	36
4.5	Théorème de Thévenin et de Norton	38
4.5.1	Grandeurs caractéristiques d'un dipôle	38
4.5.2	Théorème de Thévenin	38
4.5.3	Théorème de Norton	38
4.5.4	Relation entre les deux théorèmes	39
4.6	Théorème de Kennely	39
<b>5</b>	<b>FACTEUR DE QUALITE ET CIRCUIT RESONNANT</b>	<b>41</b>

5.1	Oscillations libres dans un circuit LC .....	41
5.2	Facteur de qualité d'un circuit .....	42
5.2.1	Définition .....	42
5.2.2	Facteur de qualité d'un élément réactif réel .....	42
5.2.3	Généralisation du facteur de qualité .....	44
5.3	Le circuit résonnant série .....	44
<b>6</b>	<b>LES QUADRIPOLES .....</b>	<b>50</b>
6.1	Définitions .....	50
6.2	Description matricielle du quadripôle .....	50
6.2.1	Matrices impédances .....	50
6.2.2	Matrices admittances .....	55
6.2.3	Matrices hybrides .....	57
6.2.4	Matrice de transfert ou matrice chaîne .....	58
6.3	Schémas équivalents du quadripôle .....	58
6.3.1	Représentation matricielle impédance .....	59
6.3.2	Représentation matricielle admittance .....	59
6.3.3	Représentation matricielle hybride .....	59
6.4	Association de quadripôles .....	59
6.4.1	Association série .....	59
6.4.2	Association parallèle .....	60
6.4.3	Association en cascade .....	61
6.5	Grandeurs caractéristiques d'un quadripôle .....	62
6.6	Adaptation d'impédance .....	64
<b>7</b>	<b>FILTRAGE, DIAGRAMMES DE BODE .....</b>	<b>67</b>
7.1	Introduction au filtrage .....	67
7.1.1	Définitions .....	67
7.2	Echelle logarithmique et diagramme de Bode .....	70
7.3	Fonctions de transfert de base .....	72
7.3.1	Intégrateur .....	72
7.3.2	Dérivateur .....	72
7.3.3	Intégrateur réel ou filtre passe bas du premier ordre .....	73
7.3.4	Dérivateur réel .....	75
7.3.5	Filtre passe-haut du premier ordre .....	76
7.3.6	filtre passe bas du second ordre .....	78
7.3.7	filtre passe haut du second ordre .....	82
7.3.8	Fonctions de transfert quelconques .....	82
<b>8</b>	<b>L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL IDEAL .....</b>	<b>85</b>
8.1	Généralités .....	85
8.1.1	Introduction .....	85
8.1.2	Caractéristiques de l'amplificateur opérationnel idéal .....	85
8.1.3	Caractéristiques de l'amplificateur opérationnel réel 741 .....	86
8.2	AOP utilisé avec contre-réaction ou en boucle fermée .....	87
8.3	Montages amplificateurs .....	88
8.3.1	Amplificateur inverseur .....	88
8.3.2	Amplificateur non inverseur .....	89
8.3.3	Suiveur de tension ou adaptateur d'impédance .....	90
8.4	Montages opérationnels .....	90
8.4.1	Additionneur inverseur .....	90
8.4.2	Soustracteur (ou différentiateur) .....	91
8.4.3	Additionneur non inverseur .....	92
8.4.4	Intégrateur .....	92
8.4.5	Dérivateur .....	93
8.4.6	Amplificateur logarithmique .....	93
8.5	Montages convertisseurs .....	94
8.5.1	Convertisseur Courant-Tension .....	94
8.6	Impact de la bande passante de l'AOP .....	95

<b>9</b>	<b>STRUCTURES CLASSIQUES POUR REALISER DES FILTRES ACTIFS.....</b>	<b>97</b>
9.1	Introduction .....	97
9.2	Cellule de Rauch.....	97
9.3	Cellule de Rauch pour filtre passe-bas du second ordre.....	97
9.4	Structure de Sallen et Key ou structure à source de tension commandée.....	98
9.5	Structure de Sallen et Key pour filtre passe-bas du second ordre .....	99
9.6	Transformation passe-bas -> passe-haut.....	100
9.7	Structure de Rauch pour filtre passe-haut du second ordre.....	100
9.8	Structure de Sallen et Key pour filtre passe-haut du second ordre .....	101
<b>10</b>	<b>REALISATION DE FILTRES.....</b>	<b>103</b>
10.1	Le gabarit.....	103
10.2	Différents types de filtres.....	103
10.3	Etude du filtre passe-bas de Butterworth .....	104
10.3.1	Introduction .....	104
10.3.2	Détermination de l'ordre N du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit .....	105
10.3.3	Détermination de la fonction de transfert du filtre .....	106
10.3.4	Détermination des pôles du filtre de Butterworth .....	106
10.4	Etude du filtre passe-bas de Tchebychev .....	109
10.4.1	Introduction.....	109
10.4.2	Présentation du filtre de Tchebychev .....	109
10.4.3	Calcul du taux d'ondulation dans la bande passante .....	110
10.4.4	Détermination de l'ordre N du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit .....	112
10.4.5	Détermination de la fonction de transfert du filtre .....	113
<b>11</b>	<b>MONTAGES AOP EN REGIME NON LINEAIRE.....</b>	<b>114</b>
11.1	Contre-réaction positive sur un AOP : fonctionnement en boucle fermée.....	114
11.2	Comparateur de tension simple .....	115
11.2.1	Montages de base .....	115
11.2.2	Limitation de la tension de sortie de l'AOP .....	116
11.3	Comparateur à hystérésis ou Trigger de Schmitt.....	116
11.3.1	Justification d'un tel comparateur .....	116
11.3.2	Comparateur à hystérésis ou trigger de Schmitt.....	117
11.3.3	Variante de trigger.....	119
11.4	Oscillateur à relaxation ou multivibrateur astable.....	119
11.4.1	Introduction .....	119
11.4.2	Analyse théorique.....	120
11.4.3	Variante d'oscillateur à relaxation: générateur de signaux triangulaires .....	121

# 1 RAPPELS D'ELECTROCIQUETIQUE

## 1.1 Introduction

L'électrocinétique étudie la circulation des courants électriques dans les circuits électriques composés d'un ensemble d'éléments appelés composants comme les générateurs (piles, ...), les composants passifs (résistance, bobine d'induction, condensateur) et les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel, ...). Ces éléments sont reliés entre eux par des fils conducteurs.

## 1.2 Matériaux en électricité

Les électrons se déplacent dans les solides plus ou moins facilement selon le matériau. La charge d'un électron est égale à  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb. On distingue 3 types de matériaux :

- ✓ Les conducteurs : matériaux dans lesquels un champ très faible suffit à fournir une énergie permettant le déplacement des électrons libres (porteurs de charges arrachés à chaque atome). On a un à deux électrons libres en moyenne par atome. La concentration en électrons dépend du matériau ; par exemple pour le cuivre, on a  $10^{28}$  électrons par  $m^3$ .
- ✓ Les isolants : pas d'électron libre. La qualité de l'isolant dépend de la pureté du matériau
- ✓ Les semi-conducteurs : la concentration en électrons dépend du matériau et de la température. Les électrons sont disposés dans des bandes permises séparées par des bandes dites interdites. Une certaine quantité d'énergie permet de faire passer des électrons d'une bande permise pleine (bande de valence) vers la bande vide (bande de conduction) générant ainsi des trous électriquement équivalents à des charges positives dans la bande de valence. Les semi-conducteurs sont utilisés dans la plupart des circuits actifs.

## 1.3 Courant électrique, Champ électrique et différence de potentiel

Au XVIIIe siècle, le phénomène électrique est étudié, expérimenté, enseigné ; il enthousiasme les cours et les salons. Mais il faut attendre 1799 et l'invention de la pile par Volta pour pouvoir disposer d'une source de courant. L'Italien Alessandro Volta découvre en 1799 que le contact de deux métaux différents produit un courant électrique. Volta "empile" alternativement des disques de zinc, d'argent et de carton imbibé de solution salée dans laquelle des ions positifs ou négatifs se déplacent. La pile, qu'il présente en 1800 à Napoléon à l'Académie des Sciences, ouvre une nouvelle ère car elle permet d'obtenir un courant continu et donc permanent.



Figure 1 : prototype de la pile de Volta

En 1819, André-Marie Ampère introduit la notion de courant électrique et la distingue fermement de celle de la tension électrique. Il donne une forme mathématique à cette nouvelle science ce qui lui permet d'en calculer les effets. Ampère réalise l'expérience suivante : une bobine de conducteur est alimentée par une pile. Il

émet l'hypothèse que, lorsqu'elle est alimentée, la bobine est traversée par une grandeur qu'il appelle courant électrique, que cette grandeur possède un sens, qu'il choisit arbitrairement du pôle + de la pile vers le pôle - et une intensité dont il montrera l'expression mathématique à l'aide d'autres expériences.



Figure 2 : Représentation par Ampère de ses courants élémentaires.

Le débit de charge ou courant électrique est donné par la relation :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \text{I s'exprime en ampère.}$$

Les lois du courant électrique ont été étudiées par Ampère (1755-1836) au début du 19<sup>ème</sup> siècle. Par convention le sens du courant est le sens contraire du déplacement des électrons.

Remarque : à l'époque d'Ampère, l'électron était inconnu (il sera découvert en 1897 par J.J. Thomson), il ne savait pas que le sens de parcours du courant qu'il a choisi est inverse à celui de déplacement des électrons qui génèrent ce courant électrique. On gardera néanmoins par la suite le sens défini par Ampère. Le sens arbitraire de circulation du courant électrique va du pôle + du générateur vers le pôle -.

Le déplacement d'ensemble des électrons n'est possible que s'ils sont soumis à une force électrostatique. Cette force est due à l'existence d'un champ électrique ( $F = qE$ ) créé par une différence entre le nombre d'électrons présents sur les bornes - et + du générateur. Là où il y a plus d'électrons, autrement dit le point où la charge négative est la plus grande, c'est la borne -.

La différence de potentiel entre deux points A et B d'un circuit  $V_{AB} = V_A - V_B$  peut-être vue comme un moyen simple de quantifier cette différence de nombres d'électrons, et l'intensité comme une façon commode de quantifier le nombre d'électrons se déplaçant dans un conducteur. On a la relation :

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Les différences de potentiel s'exprime en volt et le champ électrique  $\|\vec{E}\|$  s'exprime en volt par mètre.

## 1.4 Lois fondamentales

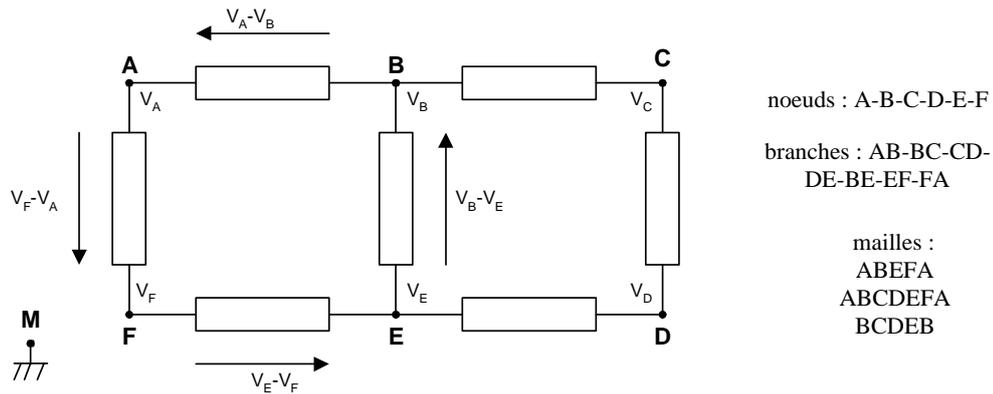
Un réseau ou circuit électrique est un ensemble de conducteurs reliant entre eux des éléments appelés composants : résistance, condensateur, bobine de self-induction, diode, transistor, ...

Dans un réseau électrique, on distingue :

- le nœud : point de raccordement entre au moins deux conducteurs
- la branche : portion du réseau compris entre deux nœuds
- la maille : partie du réseau qui se referme sur elle-même

### 1.4.1 Loi des mailles

Soit le réseau suivant :

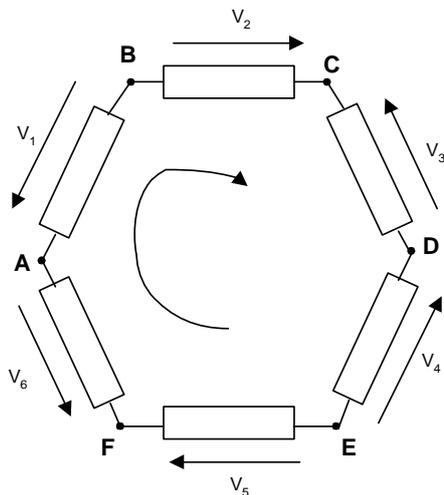


Soit une charge  $q$  se déplaçant le long d'une maille ; chaque nœud de la maille se trouve à un potentiel bien défini par rapport à un nœud d'origine ou de référence commune  $M$  dont le potentiel est appelée masse.

$q$  se déplace le long de la maille ABEFA et subit des variations d'énergie potentielle le long du parcours. On a :

$$q(V_A - V_B + V_B - V_E + V_E - V_F + V_F - V_A) = q(0) = 0$$

car la charge  $q$  est revenue au point initial.



On choisit un sens arbitraire de parcours sur la maille : par exemple le sens des aiguilles d'une montre.  
 Les différences de potentiel sont des grandeurs algébriques et ont des orientations arbitraires.  
 Par convention, les différences de potentiel  $v_i$  des flèches parcourues dans le même sens que le parcours seront comptées positivement .

$$v_1 = V_A - V_B$$

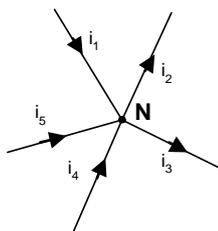
On a ici :  $-v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 - v_6 = 0$

**Définition :** La somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle. Cette loi est baptisée loi des mailles ou première loi de Kirschhoff.

Mathématiquement on a :  $\sum_i v_i = 0$

### 1.4.2 Loi des nœuds

Le mouvement des charges, créant le courant est soumis aux lois de la physique : conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et de la charge (de la matière).



On choisit un sens arbitraire pour chaque courant. Par convention, les courants  $i_i$  se dirigeant dans le même sens que les flèches seront comptés positivement .

Soit le nœud  $N$  un point de raccordement de plusieurs conducteurs traversés par des courants.

En un nœud, il ne peut y avoir accumulation de charges.

On a donc ici :

$$i_1 + i_4 + i_5 = i_2 + i_3$$

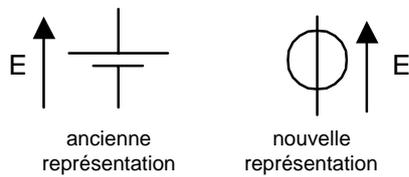
**Définition :** La somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant. Cette loi est baptisée loi des nœuds ou seconde loi de Kirschhoff.

Mathématiquement on a : 
$$\sum_i i_i = 0$$

## 1.5 Générateurs idéaux

### 1.5.1 Générateur de tension idéal

Un générateur de tension idéal délivre une différence de potentiel indépendante du courant qu'il délivre. On représente ce générateur par les symboles suivants :

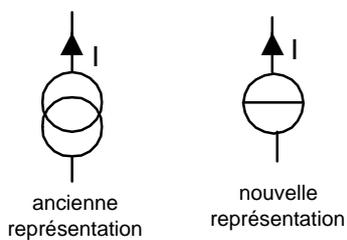


Ce générateur de tension n'existe pas en pratique, la différence de potentiel en sortie d'un générateur de tension décroît en fonction du courant de sortie.

### 1.5.2 Générateur de courant idéal

Un générateur de courant idéal délivre un courant indépendamment de la différence de potentiel entre ses bornes.

On représente ce générateur par les symboles suivants :



## 2 LES DIPOLES PASSIFS ELEMENTAIRES

### 2.1 Introduction

Les composants utilisés en électronique présentent des bornes électriques ou pôles permettant leur connexion dans un réseau. On distingue :

- les dipôles ( 2 pôles) comme les résistances, les condensateurs, les bobines, les piles, les diodes, ...
- les quadripôles (4 pôles) comme par exemple les transformateurs, les filtres.

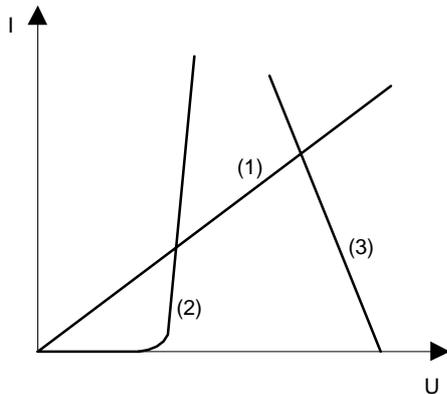
### 2.2 Caractéristique d'un dipole

Soit un dipole traversé par un courant électrique  $I$  et dont la différence de potentiel entre ses bornes est  $U$ . La caractéristique de ce dipole est la courbe  $I=f(U)$ . Suivant l'allure de cette courbe, on peut distinguer différentes familles de dipole.

**Dipole linéaire** : la caractéristique  $I=f(U)$  est une droite d'équation  $I=aU+b$ . Par exemple, les résistances et les générateurs de tension et de courant idéaux sont des dipôles linéaires. Si la caractéristique  $I=f(U)$  n'est pas une droite le dipole est non linéaire

**Dipole passif** : un dipôle est passif si son intensité de court-circuit est nulle et si la différence de potentiel à ses bornes est nulle en circuit ouvert. Dit autrement, pour un dipole passif, on a  $I=0$  si  $U=0$ . Les trois circuits passifs principaux sont la résistance, la bobine d'induction et la capacité. Dans les autres cas, on dit que le dipole est actif.

Exemple :



Le dipole 1 est linéaire et passif (il s'agit d'une résistance)

Le dipole 2 est non linéaire et passif (diode)

Le dipole 3 est linéaire et actif (générateur de tension non parfait)

Le dipole 4 est linéaire et actif (générateur de tension parfait)

## 2.3 Les dipôles passifs élémentaires

### 2.3.1 Résistance<sup>1</sup>

Une résistance est un dipôle constitué par un matériau conducteur et caractérisé par sa résistance  $R$  exprimée en ohm ( $\Omega$ )

La résistance s'obtient comme suit :

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

Où  $\rho$  est la résistivité en  $\Omega m$ ,  $l$  est la longueur et  $s$  est la section du conducteur.

Pratiquement  $\rho$  varie entre  $10^{-8}$  et  $10^{-6} \Omega m$  (cuivre  $1,5 \cdot 10^{-8} \Omega m$ )

Il existe également des résistances dont la résistance varie en fonction d'un paramètre comme la température (thermistance).

### 2.3.2 Bobine d'induction

La bobine d'induction est un dipôle constitué d'un conducteur métallique enroulé autour d'un support cylindrique. Lorsqu'un courant traverse celle-ci, elle produit un champ magnétique dans l'espace environnant

Le coefficient d'induction ou inductance qui s'exprime en henry (H) est le suivant :

$$L = \mu N^2 \frac{s}{l}$$

$N$  est le nombre de spires.  $s$  est la section du conducteur métallique en  $m^2$  et  $l$  est la longueur du support cylindrique.  $\mu$  en H/m est la perméabilité :

$$\mu = \mu_0 \mu_R$$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  est la perméabilité dans le vide et  $\mu_R$  est la perméabilité relative milieu/vide.

Une bobine pure n'existe pas. En pratique, elle est toujours en série avec une petite résistance.

### 2.3.3 Condensateur

Un condensateur est formé de deux conducteurs dont l'un entoure complètement l'autre (condensateur cylindrique) ou de deux conducteurs plans séparés par un isolant (condensateur plan).

On démontre qu'il existe un coefficient positif  $C$  ne dépendant que de la géométrie du condensateur tel que la charge électrique totale  $Q$  d'un condensateur<sup>2</sup> soit donnée par :

$$Q = CV \text{ en Coulomb}$$

où  $V$  est la différence de potentiel entre les armatures du condensateur.

La capacité  $C$  s'exprime en farad (F). Pour un condensateur plan, on a :

---

<sup>1</sup> Certains auteurs utilisent la terminologie résistor pour bien distinguer le nom du dipôle. Dans ce document, nous utiliserons le mot résistance pour désigner le dipôle et sa valeur.

<sup>2</sup> On rappelle que la charge élémentaire d'un électron est égale à  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb

$$C = \varepsilon \frac{S}{e}$$

S est la surface de l'armature du condensateur et e est la distance entre les deux armatures.

$\varepsilon$  est la permittivité en F/m :

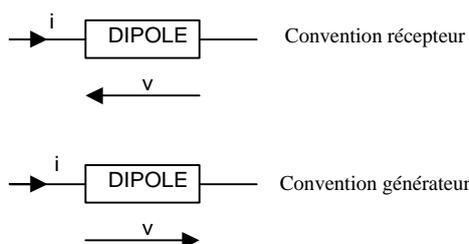
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_R$$

$\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$  est la permittivité du vide et  $\varepsilon_R$  est la permittivité relative milieu/vide.

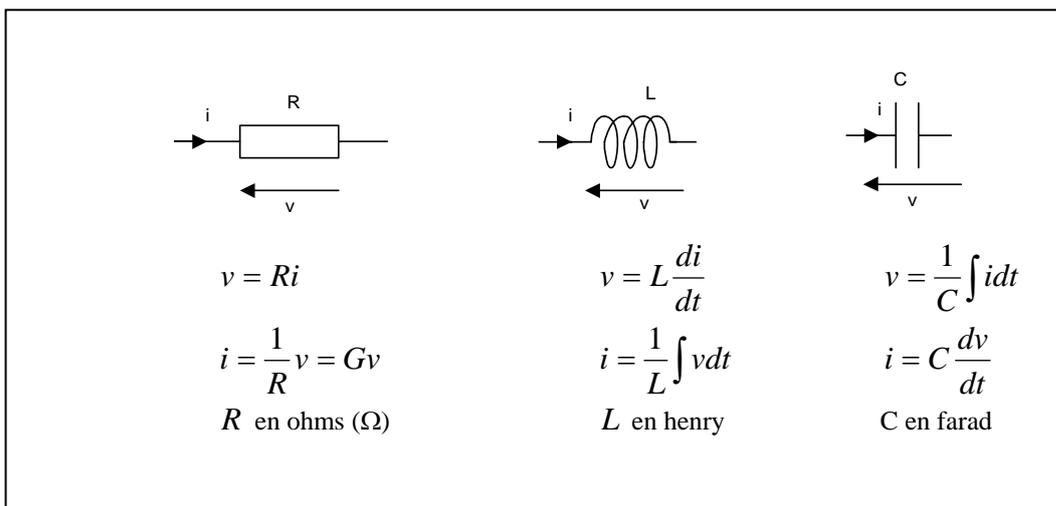
Comme 1 farad représente une très grande capacité, on utilise généralement les sous-multiples comme le microfarad ( $1 \mu F = 10^{-6}$  F), le nanofarad ( $1 nF = 10^{-9}$  F) et le picofarad ( $1 pF = 10^{-12}$  F).

## 2.4 Lois générales des dipôles passifs

Il existe deux choix pour l'orientation du courant  $i$  et de la différence de potentiel  $v$



Nous allons maintenant rappeler les lois générales des 3 types de dipôles passifs élémentaires : résistance, bobine et condensateur :



remarques :

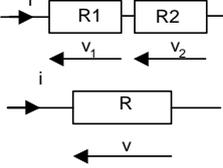
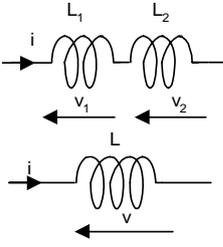
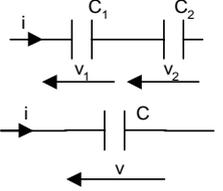
Dans une bobine, le courant ne peut pas subir une variation brutale :  $\frac{di}{dt} = +\infty$  impliquerait une différence de potentiel  $v = +\infty$ .

De la même façon, la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brutalement instantanément :  $\frac{dv}{dt} = +\infty$  impliquerait un courant  $i = +\infty$ .

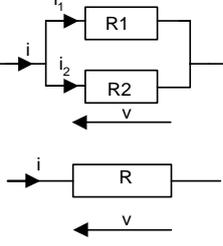
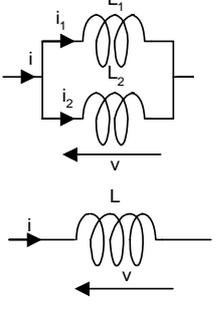
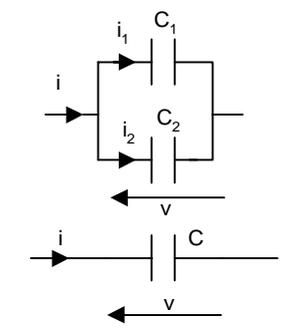
En continu, la bobine est un court-circuit et le condensateur est un circuit ouvert.

## 2.5 Association de dipôles de même nature

en série :

 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>Ri = R_1i + R_2i</math>  <math>\Rightarrow R = R_1 + R_2</math> </p> <p>Généralisation :</p> $R = \sum_i R_i$	 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>L \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}</math>  <math>\Rightarrow L = L_1 + L_2</math> </p> <p>Généralisation :</p> $L = \sum_i L_i$	 <p> <math>v = v_1 + v_2</math>  <math>\frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}</math> </p> <p>Généralisation :</p> $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$
--	---	--

en parallèle :

 <p> <math>i = i_1 + i_2</math>  <math>\frac{v}{R} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}</math>  <math>\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}</math> </p>		
---	---	---

<p>Généralisation :</p> $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$	$i = i_1 + i_2$ $\frac{1}{L} \int v dt = \frac{1}{L_1} \int v dt + \frac{1}{L_2} \int v dt$ $\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ <p>Généralisation :</p> $\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$	$i = i_1 + i_2$ $C \frac{dv}{dt} = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt}$ $\Rightarrow C = C_1 + C_2$ <p>Généralisation :</p> $C = \sum_i C_i$
--	--	--

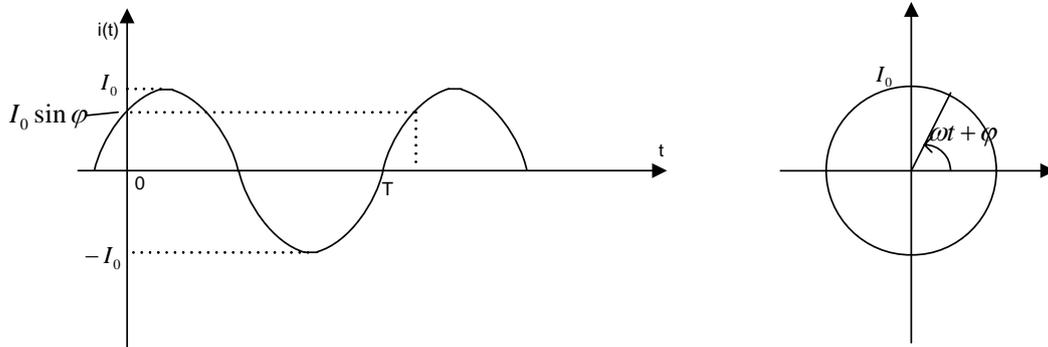
## 2.6 Régime sinusoïdal

Après avoir rappelé les lois générales, nous allons nous intéresser au régime sinusoïdal qui est le régime de fonctionnement le plus souvent utilisé en électronique.

Soit un courant variant en fonction du temps selon la loi sinusoïdale suivante :

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$I_0$  est l'amplitude maximum du signal en ampère.



Soit  $\Phi(t) = \omega t + \varphi$  la phase du courant fonction linéaire en fonction du temps en radian.

$\varphi$  est la phase à l'origine :  $\varphi = \Phi(0)$

En dérivant  $\Phi$  par rapport au temps on obtient la pulsation  $\omega$  :

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} \text{ en radian/seconde}$$

La fréquence  $f$  est le nombre de périodes par seconde.  $f$  s'obtient en divisant la pulsation par  $2\pi$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \omega \text{ en seconde}^{-1} \text{ ou Hertz}$$

On a la relation suivante entre la fréquence  $f$  et la période  $T$  :

$$f = \frac{1}{T}$$

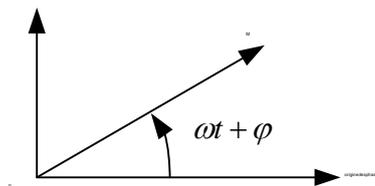
Pour éviter des calculs fastidieux lors de l'étude des associations de dipôles en série et en parallèle on utilise deux méthodes pratiques:

- le diagramme de Fresnel
- la notation complexe

## 2.7 Diagrammes de Fresnel et lois des dipôles en régime sinusoïdal

D'une manière générale, un diagramme de Fresnel permet de représenter une fonction sinusoïdale

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi) \text{ par un vecteur } \vec{x} = \vec{OM}.$$



Le vecteur  $\vec{x} = \vec{OM}$  tourne autour du point d'origine  $O$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . Sa longueur est égale à  $X_0$  et l'angle entre l'axe origine des phases et  $\vec{x}$  est égal à  $\omega t + \varphi$ .

En pratique, comme tous les vecteurs considérés tournent autour de  $O$  avec la même vitesse angulaire  $\omega$ , on simplifie la représentation en considérant les vecteurs à l'instant  $t = 0$ . On notera le vecteur  $\vec{x} [X_0 \ \varphi]$

Les diagrammes de Fresnel permettent de représenter graphiquement  $i$  et  $v$  par des vecteurs  $\vec{i} [I_0 \ \varphi_i]$  et  $\vec{v} [V_0 \ \varphi_v]$  dans une base orthonormée.

Reprenons l'expression du courant  $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ . Supposons pour simplifier les notations que la phase à l'origine  $\theta = 0$ . On a donc  $i(t) = I_0 \sin \omega t$

Nous allons appliquer les lois générales aux dipôles résistance, bobine et condensateur.

Cas de la résistance :

$$v = Ri$$

$$v = RI_0 \sin \omega t = V_0 \sin \omega t \text{ avec } V_0 = RI_0$$

Les deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{v}$  sont en phase

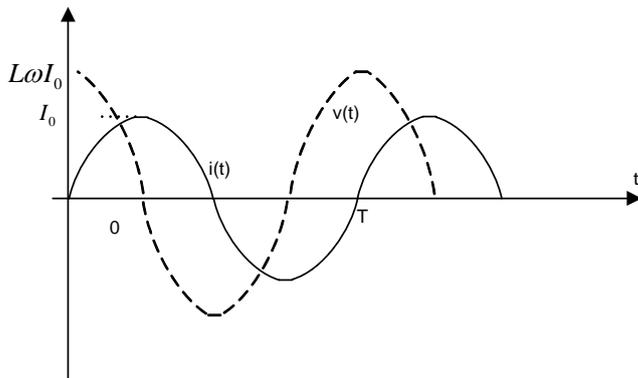
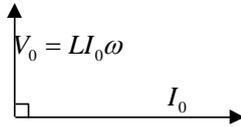


Cas de la bobine :

$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t)$$

$$v = LI_0 \omega \cos \omega t = V_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = LI_0 \omega$$

Pour la bobine, le vecteur  $\vec{v}$  est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur le vecteur  $\vec{i}$ .

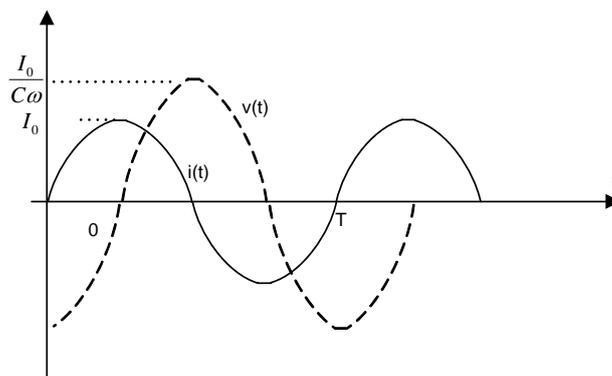
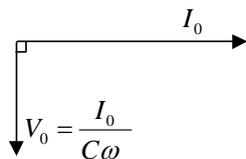


Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_0 \sin \omega t dt$$

$$v = -\frac{I_0}{C\omega} \cos \omega t = V_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ avec } V_0 = \frac{I_0}{C\omega}$$

Pour le condensateur, le vecteur  $\vec{v}$  est en retard de  $\frac{\pi}{2}$  sur le vecteur  $\vec{i}$ .



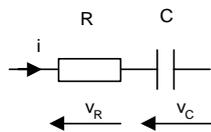
Pour les unités,  $R$ ,  $L\omega$  et  $\frac{1}{C\omega}$  sont homogènes à des ohms ( $\Omega$ ).

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L\omega \rightarrow 0$ , la bobine se comporte comme un court-circuit. et  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ , le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $L\omega \rightarrow \infty$ , la bobine se comporte comme un circuit ouvert et  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ , le condensateur se comporte comme un court circuit.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'association de dipôles de nature différentes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :

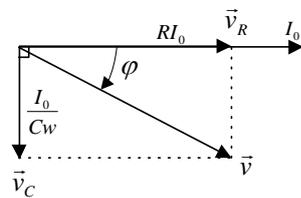


$$i = I_0 \sin \omega t$$

$$v_R = RI_0 \sin \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_0}{C\omega} \cos \omega t = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$v = v_R + v_C = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



le vecteur  $\vec{v}$  est la somme des vecteurs  $\vec{v}_R$  et  $\vec{v}_C$

$\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{i}$  ( $\vec{i}$  ici  $\vec{i}$  est négatif)

On a :

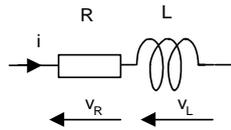
$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + \frac{I_0^2}{C^2 \omega^2}} = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right) + k\pi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$$v = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)\right)$$

Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :

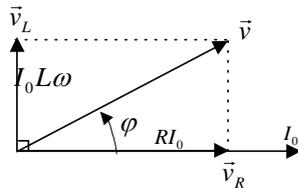


$$i = I_0 \sin \omega t$$

$$v_R = RI_0 \sin \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L_0 \omega I_0 \cos \omega t = L_0 \omega I_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = v_R + v_L = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



le vecteur  $\vec{v}$  est la somme des vecteurs  $\vec{v}_L$  et  $\vec{v}_R$

$\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{i}$  (ici  $\varphi$  est positif)

On a :

$$V_0 = \sqrt{R^2 I_0^2 + L^2 \omega^2 I_0^2} = I_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

$$v = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= I_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)$$

## 2.8 Notation complexe et impédance complexe

Dans le cas du régime sinusoïdal, on utilise les nombres complexes pour simplifier les calculs des dipôles de nature différente.

Une grandeur sinusoïdale (courant ou différence de potentiel) est caractérisé par deux nombres : l'amplitude et la phase instantanée  $\Phi(t) = \omega t + \theta$ .

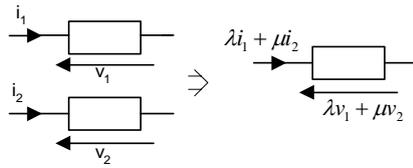
Il est donc naturel de représenter une grandeur sinusoïdale par un nombre complexe lorsque le circuit est linéaire et que les opérations à effectuer sont aussi linéaires.

**Définition :** un circuit est linéaire si :

soumis à un courant  $i_1(t) = I_0 \cos \omega t$ , la différence de potentiel est  $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

soumis à un courant  $i_2(t) = I_0 \sin \omega t$ , la différence de potentiel est  $v_2(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$

alors soumis à la combinaison linéaire  $\lambda i_1(t) + \mu i_2(t)$ , la différence de potentiel est de la forme  $\lambda v_1(t) + \mu v_2(t)$



Posons  $\lambda = 1$  et  $\mu = j$ . La différence de potentiel associée à la combinaison linéaire

$\underline{i}(t) = i_1(t) + ji_2(t) = I_0(\cos \omega t + j \sin \omega t) = I_0 \exp(j\omega t)$  est la suivante :

$$\underline{v}(t) = v_1(t) + jv_2(t) = V_0(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = V_0 \exp(j\omega t + j\varphi)$$

Dans le reste de ce document, on se limitera à l'étude des circuits linéaires avec des opérateurs linéaires (addition, multiplication par constante, dérivation, intégration).

Si le courant est de la forme  $i_1(t) = I_0 \cos \omega t = \Re(\underline{i}(t))$  partie réelle de  $\underline{i}(t)$ , la différence de potentiel

$$v_1(t) = V_0(\cos \omega t + \varphi) = \Re(\underline{v}(t)) \text{ partie réelle de } \underline{v}(t).$$

De même la différence de potentiel  $v_2(t)$  associé au courant  $i_2(t) = I_0 \sin \omega t = \Im(\underline{i}(t))$  est

$$v_2(t) = V_0(\sin \omega t + \varphi) = \Im(\underline{v}(t))$$

On définit l'impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un dipôle comme suit :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$

avec  $\underline{i} = I_0 \exp(j\omega t)$  et  $\underline{v} = V_0 \exp(j\omega t + j\varphi)$

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= |\underline{Z}| \exp(j \arg(\underline{Z})) \\ &= \frac{V_0 \exp(j\omega t + j\varphi)}{I_0 \exp(j\omega t)} \\ &= \frac{V_0}{I_0} \exp(j\varphi) \end{aligned}$$

Le module de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  est égal à :

$$|\underline{Z}| = \frac{V_0}{I_0}$$

et l'argument de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  est égal à :

$$\arg(\underline{Z}) = \varphi$$

On a donc :

$$\underline{Z} = \frac{V_0}{I_0} \exp(j\varphi)$$

Cas de la résistance :

Nous avons vu que

$$v = Ri$$

On a :

$$v = RI_0 \exp(j\omega t)$$

L'impédance complexe de la résistance est donc :  $\underline{Z} = R$

On retrouve les résultats obtenus en utilisant le diagramme de Fresnel.

Cas de la bobine :

$$v = L \frac{di}{dt}$$

calculons  $\frac{di}{dt}$  :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= I_0 \left[ \frac{d}{dt} \cos(\omega t) + j \frac{d}{dt} \sin(\omega t) \right] \\ &= I_0 [-\omega \sin(\omega t) + j\omega \cos(\omega t)] \\ &= I_0 \omega j \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{j} \sin(\omega t) \right] \\ &= jI_0 \omega [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = j\omega \underline{i} \end{aligned}$$

dérivée revient donc à multiplier par  $j\omega$

On a :

$$v = L \frac{di}{dt} = jL\omega \underline{i} = jL\omega I_0 \exp(j\omega t)$$

L'impédance complexe de la bobine est donc :  $\underline{Z} = jL\omega$

Cette expression peut aussi s'écrire  $\underline{Z} = L\omega \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$  comme  $\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2} = j$

Cas du condensateur :

$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

calculons  $\int i dt$  :

$$\begin{aligned} \int i dt &= \int I_0 \cos(\omega t) dt + j \int I_0 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) - j \frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ &= -\frac{I_0 j}{\omega} \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{j} \sin(\omega t) \right] \\ &= \frac{I_0}{j\omega} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = \frac{1}{j\omega} \underline{i} \end{aligned}$$

intégrer revient donc à diviser par  $j\omega$

On a :

$$\underline{v} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} = \frac{1}{jC\omega} I_0 \exp(j\omega t)$$

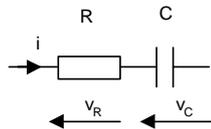
L'impédance complexe du condensateur est donc :  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

Cette expression peut aussi s'écrire  $\underline{Z} = \frac{1}{C\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$  comme

$$\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j = \frac{1}{j}$$

Comme dans le paragraphe précédent sur le diagramme de Fresnel, nous allons maintenant étudier l'association de dipôles de nature différentes en utilisant les impédances complexes.

Cas de l'association d'une résistance et d'une capacité en série :



$i$  sinusoïdal  $\Rightarrow \underline{i} = I_0 \exp(j\omega t)$

$$v_R \Rightarrow \underline{v}_R = R\underline{i}$$

$$v_C \Rightarrow \underline{v}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_C = \left[ R + \frac{1}{jC\omega} \right] \underline{i} = \underline{Z}\underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\varphi)$  :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

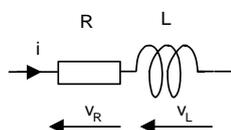
$$\varphi = -\arctan \frac{1}{RC\omega}$$

A partir de ce calcul il est possible d'exprimer  $u(t)$

Par exemple, si  $i(t) = I_0 \sin \omega t$  alors nous aurons :

$$u(t) = I_0 |\underline{Z}| \sin(\omega t + \varphi)$$

Cas de l'association d'une résistance et d'une bobine en série :



$$i \text{ sinusoidal} \Rightarrow \underline{i} = I_0 \exp(j\omega t)$$

$$v_R \Rightarrow \underline{v}_R = R\underline{i}$$

$$v_L \Rightarrow \underline{v}_L = jL\omega \underline{i}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L = [R + jL\omega] \underline{i} = \underline{Z}\underline{i}$$

On retrouve le module et l'argument de  $\underline{Z} = |Z|\exp(j\varphi)$  :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

$$\varphi = \arctan \frac{L\omega}{R}$$

Si  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , on a la relation  $i(t) = \Re(\underline{i})$

$$\underline{v} = [R + jL\omega]I_0 \exp(j\omega t)$$

$$= |Z|\exp(j\varphi)I_0 \exp(j\omega t)$$

$$= |Z|I_0 \exp(j\omega t + j\varphi)$$

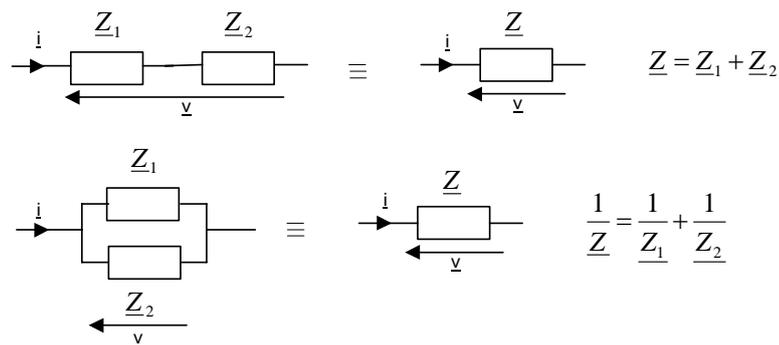
$$v(t) = \Re(\underline{v}) = |Z|I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

En résumé :

Si  $i(t) = I_0 \cos(\omega t) = \Re(\underline{i})$  et  $v(t) = \Re(\underline{v})$

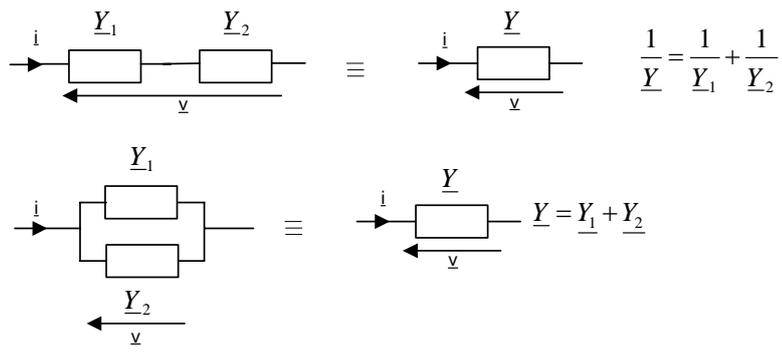
Si  $i(t) = I_0 \sin(\omega t) = \Im(\underline{i})$  et  $v(t) = \Im(\underline{v})$

On retrouve avec les impédances complexes les mêmes lois que celles établies pour l'association de résistances de même nature :

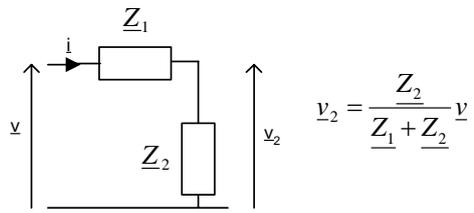


On a ainsi vu que l'utilisation de l'impédance complexe permet de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques ce qui simplifie grandement l'étude de l'association de circuits de nature différente en régime sinusoidal.

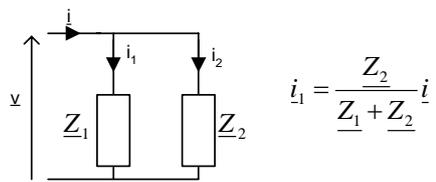
On retrouve avec les admittances complexes les mêmes lois que celles établies pour l'association de condensateurs de même nature :



Diviseur de tension



Diviseur de courant



### 3 PUISSANCE ET ENERGIE

#### 3.1 Définitions

Si on applique une différence de potentiel  $v = v_A - v_B$  entre deux points A et B d'un dipole, les charges se déplaçant de B vers A subissent une variation d'énergie potentielle<sup>3</sup>

Pour une charge élémentaire  $dq$  se déplaçant de B vers A, le travail ou l'énergie potentielle  $dW$  s'exprime comme suit :

$$dW = vdq \quad \text{pendant le temps } dt$$

Le déplacement de la charge élémentaire  $dq$  sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel

entre les points A et B en un temps  $dt$  induit un courant  $i = \frac{dq}{dt}$ .

D'où l'énergie potentielle :  $dW = vidt$

Le travail fourni (cas d'un générateur) ou reçu (cas d'un récepteur) par l'élément du circuit entre A et B entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} vidt \quad W \text{ en Joules}$$

**Définition** : la puissance instantanée  $p_i(t)$  fournie ou reçue par le dipole entre A et B est la dérivée de  $W$  par rapport au temps.

$$p_i = \frac{dW}{dt}$$

$p_i$  peut donc aussi être définie comme suit :

$$p_i = vi$$

La puissance instantanée  $p_i$  est le produit de la différence de potentiel  $v(t)$  par le courant  $i(t)$ .

Si  $p_i > 0$ , le dipôle est récepteur ; si  $p_i < 0$  le dipôle est générateur.

**Définition** : la valeur moyenne d'une fonction quelconque  $x(t)$  sur l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  est

$$x_{MOY} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

Si  $x(t)$  est périodique de période  $T$ , alors on a :

$$x_{MOY} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$$

Si  $x(t)$  est sinusoïdale, alors  $x_{MOY} = 0$

---

<sup>3</sup> Par convention, on utilisera des lettres minuscules pour les variables et des lettres majuscules pour les constantes

La puissance moyenne  $P$  est calculée sur un intervalle de temps  $[t_1; t_2]$  comme suit :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dW = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p_i dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v i dt$$

Si  $v$  et  $i$  sont sinusoidaux de période  $T$ , le calcul de la puissance moyenne  $P$  se fait sur l'intervalle de temps  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v i dt \quad P \text{ en watts}$$

**Définition** : la valeur efficace d'une fonction périodique  $x(t)$  centrée (de valeur moyenne nulle) de période  $T$  est :

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Si la fonction  $x(t)$  est sinusoidale, on a :  $x(t) = X_0 \sin \omega t$

$$x_{EFF}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T X_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T X_0^2 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt = \frac{X_0^2}{2}$$

$$\text{D'où } x_{EFF} = \frac{X_0}{\sqrt{2}}$$

## 3.2 Cas particuliers

### 3.2.1 Energie consommée dans une résistance

Cas  $V$  et  $I$  continus :

$$V = RI$$

La puissance moyenne est égale à la puissance instantanée  $P$  :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V I dt = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

L'énergie dissipée thermiquement sur l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V I dt = VI(t_2 - t_1) = \frac{V^2}{R}(t_2 - t_1) = P(t_2 - t_1)$$

Cas  $v$  et  $i$  sinusoidaux :

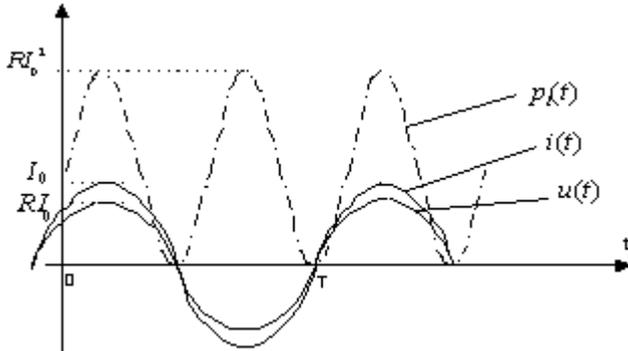
$$i = I_0 \sin \omega t \text{ et } v = Ri = V_0 \sin \omega t = RI_0 \sin \omega t$$

$$p_i = RI_0^2 \sin^2 \omega t = RI_0^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right)$$

L'énergie dissipée  $W$  pendant une période  $T$  est :

$$W = \int_0^T p_i dt = \int_0^T RI_0^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt$$

$$W = \frac{RI_0^2}{2} T \quad \text{et} \quad P = \frac{RI_0^2}{2} = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_0 I_0}{2}$$



En régime sinusoïdal, puisque  $I_{EFF} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  et  $V_{EFF} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ , on a la relation entre  $P, V_{EFF}, I_{EFF}$

$$P = V_{EFF} I_{EFF}$$

### 3.2.2 Energie dans une bobine

Cas  $v$  et  $i$  sinusoïdaux :

$$i = I_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v = L \frac{di}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t) = L\omega I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_i = L\omega I_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$= \frac{L\omega I_0^2}{2} \sin(2\omega t) \quad \text{car} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p_i dt = \frac{L\omega I_0^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt$$

$$W = \frac{L\omega I_0^2}{2} \frac{1}{2\omega} \left[ -\cos(2\omega t) \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{LI_0^2}{4} (\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2))$$

Calculons l'énergie stockée puis restituée par la bobine pendant une période  $T$

Entre 0 et  $\frac{T}{4}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est positive ; la bobine stocke de l'énergie. Elle se comporte en récepteur.

Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{stockée} = \frac{LI_0^2}{4} \left[ \cos(0) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right] = \frac{LI_0^2}{2}$$

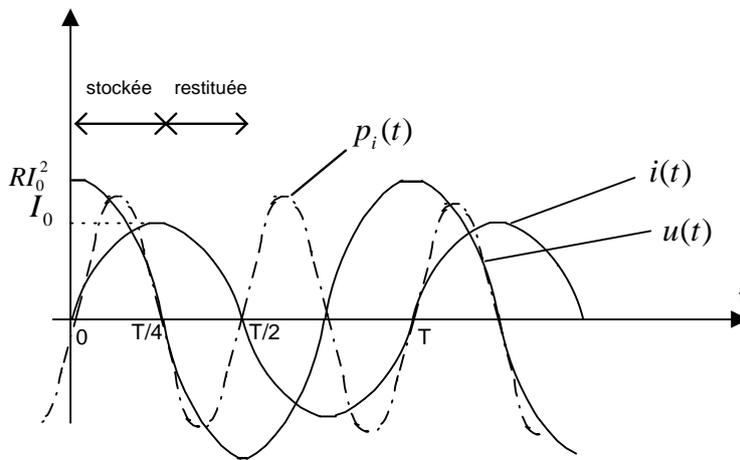
Entre  $\frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{2}$ , l'aire soustendue par  $p_i(t)$  est négative ; la bobine restitue de l'énergie. Elle se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

$$W_{\text{restituée}} = \frac{LI_0^2}{4} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) \right] = -\frac{LI_0^2}{2}$$

Pendant la durée  $\frac{T}{2}$ , l'énergie dépensée par la bobine est nulle. On dit que le dipôle est purement réactif.

L'énergie stockée (sous forme magnétique) pendant  $\frac{T}{4}$  est restituée intégralement pendant le quart de période suivant.



### 3.2.3 Energie dans un condensateur

Cas  $v$  et  $i$  sinusoïdaux :

$$i = I_0 \sin(\omega t) \text{ et } v = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t) = \frac{I_0}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_i = -\frac{I_0^2}{C\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$= -\frac{I_0^2}{2C\omega} \sin 2\omega t \quad \text{car} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p_i dt = -\frac{I_0^2}{2C\omega} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt$$

$$W = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} [-\cos(2\omega t)]_{t_1}^{t_2} = -\frac{I_0^2}{4C\omega^2} (\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2)) = \frac{I_0^2}{4C\omega^2} (\cos(2\omega t_2) - \cos(2\omega t_1))$$

Calculons l'énergie restituée puis stockée par le condensateur pendant une période  $T$

Entre 0 et  $\frac{T}{4}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est négative ; le condensateur restitue de l'énergie. Il se comporte en générateur.

Calculons l'énergie restituée pendant cette phase. On a :

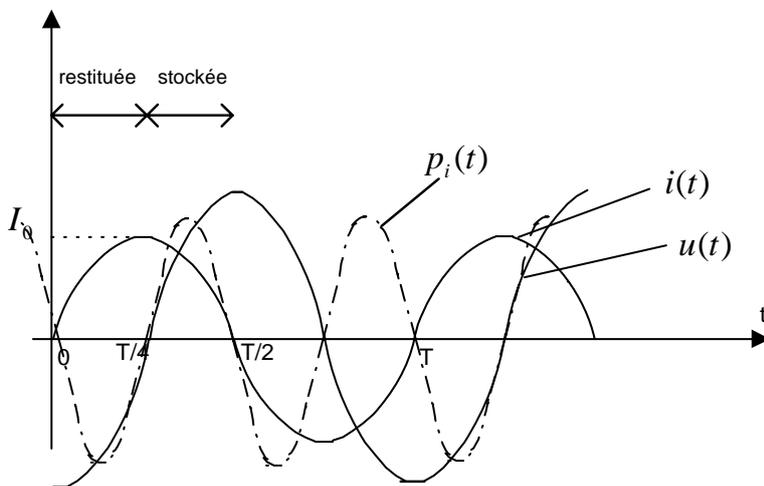
$$W_{\text{restituée}} = \frac{I_0^2}{4C\omega^2} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos(0) \right] = -\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Entre  $\frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{2}$ , l'aire soutendue par  $p_i(t)$  est positive ; le condensateur stocke de l'énergie. Il se comporte en récepteur.

Calculons l'énergie stockée pendant cette phase. On a :

$$W_{\text{stockée}} = \frac{I_0^2}{4C\omega^2} \left[ \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right] = \frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Pendant la durée  $\frac{T}{2}$ , l'énergie dépensée par le condensateur est nulle. Comme la bobine, le condensateur est un dipôle purement réactif. L'énergie restituée pendant  $\frac{T}{4}$  est stockée (sous forme électrique) intégralement pendant le quart de période suivant.



En résumé pour un signal  $i(t)$  sinusoïdal :

phase	Bobine L	condensateur
0 à $\frac{T}{4}$	La bobine stocke $\frac{LI_0^2}{2}$ (magnétique)	Le condensateur restitue $\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$
$\frac{T}{4}$ à $\frac{T}{2}$	La bobine restitue $\frac{LI_0^2}{2}$	Le condensateur stocke $\frac{I_0^2}{2C\omega^2}$ (électrique)

Puisque  $V_o = \frac{I_o}{C\omega}$  On a aussi l'énergie stockée par le condensateur est égale à  $\frac{CV_o^2}{2}$

### **Cas de l'association d'une bobine et d'un condensateur :**

L'association d'une bobine et d'un condensateur parfait est telle que pendant chaque phase, l'énergie stockée dans la bobine est égale à l'énergie restituée par le condensateur et vice versa.

Cet échange implique la relation :

$$\frac{LI_o^2}{2} = \frac{I_o^2}{2C\omega^2} \quad \text{soit } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation de résonance}$$

L'échange d'énergie se fait donc au rythme de la pulsation de résonance. Nous reviendrons sur les circuits résonnants dans un prochain chapitre .

### **3.3 Puissance active, réactive, apparente et complexe dans un dipole quelconque**

$$i = I_o \cos \omega t \quad \text{et} \quad v = V_o \cos(\omega t + \varphi)$$

**La puissance active** est la puissance moyenne. On a :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_o I_o \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{V_o I_o}{2T} \int_0^T (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(-\varphi)) dt \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^T \cos(-\varphi) dt = \int_0^T \cos \varphi dt = T \cos \varphi$$

On obtient :

$$P = \frac{V_o I_o}{2} \cos \varphi \quad \text{en Watt (W)}$$

$\cos \varphi$  est le facteur de puissance du dipole.

Remarque : on obtient les mêmes résultats en posant  $i = I_o \sin \omega t$

On définit également **la puissance réactive**  $Q$  :

$$Q = \frac{V_o I_o}{2} \sin \varphi \quad \text{en VoltAmpère réactif (VAR)}$$

Il est à noter que la puissance réactive  $Q$  est nulle pour une résistance car on a  $\varphi = 0$

Finalement, on définit également **la puissance apparente S**:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{|V_0 I_0|}{2} \\
 &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\
 &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad \text{en VoltAmpère(VA)}
 \end{aligned}$$

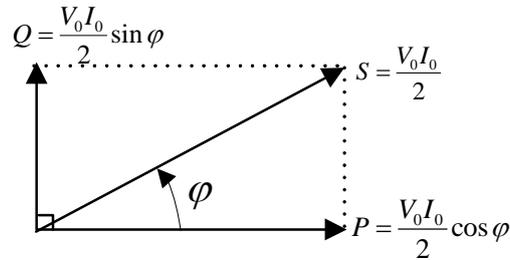


Tableau récapitulatif pour les dipôles élémentaires :

	Résistance R	Bobine L	Condensateur C
P	$R I_{\text{eff}}^2$	0	0
Q	0	$L \omega I_{\text{eff}}^2$	$-\frac{I_{\text{eff}}^2}{C \omega} = -C \omega V_{\text{eff}}^2$
S	$R I_{\text{eff}}^2$	$L \omega I_{\text{eff}}^2$	$\frac{I_{\text{eff}}^2}{C \omega} = C \omega V_{\text{eff}}^2$

Exprimons la puissance active  $P$  et la puissance réactive  $Q$  en fonction du courant  $\underline{i}$  et de la différence de potentiel  $\underline{u}$ .

Soit  $i = I_0 \cos \omega t$  et  $v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\underline{i} = I_0 \exp(j \omega t) \quad \underline{i}^* = I_0 \exp(-j \omega t)$$

$$\underline{v} = V_0 \exp(j \omega t) \exp(j \varphi) \quad \underline{v}^* = V_0 \exp(-j \omega t) \exp(-j \varphi)$$

$$\underline{v} \underline{i}^* = V_0 I_0 \exp(j \omega t) \exp(-j \omega t) \exp(j \varphi) = V_0 I_0 \exp(j \varphi)$$

$$\underline{v}^* \underline{i} = V_0 I_0 \exp(-j \omega t) \exp(j \omega t) \exp(-j \varphi) = V_0 I_0 \exp(-j \varphi)$$

$$\underline{v} \underline{i}^* + \underline{v}^* \underline{i} = V_0 I_0 (\exp(j \varphi) + \exp(-j \varphi)) = 2 V_0 I_0 \cos \varphi$$

Ainsi, on a donc les relations suivantes :

$$P = \frac{1}{4} (\underline{v} \underline{i}^* + \underline{v}^* \underline{i})$$

$$\underline{v} \underline{i}^* - \underline{v}^* \underline{i} = V_0 I_0 (\exp(j\varphi) - \exp(-j\varphi)) = 2V_0 I_0 j \sin \varphi$$

En utilisant le même raisonnement, on obtient

$$Q = \frac{1}{4j} (\underline{v} \underline{i}^* - \underline{v}^* \underline{i})$$

La puissance réactive provient des éléments réactifs du circuit.

Finalement nous pouvons définir la puissance complexe d'un circuit par :

$$\underline{P} = P + jQ = \frac{V_0 I_0}{2} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{V_0 I_0}{2} \exp(j\varphi) = \frac{1}{2} \underline{v} \underline{i}^*$$

On peut vérifier que le module de  $\underline{P}$  est égal à la puissance apparente S

### 3.4 Force électromotrice et force contre électromotrice

#### 3.4.1 Générateur et force électromotrice

Un générateur convertit une énergie (mécanique, chimique, lumineuse, ...) en une énergie électrique.

Soit  $dW = p_i dt = vidt$  l'énergie fournie par le générateur au circuit

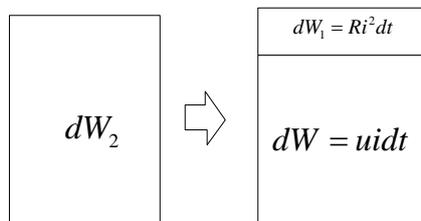
$dW_1$  l'énergie dissipée par effet Joule dans le générateur

$$dW_1 = Ri^2 dt$$

$dW_2$  l'énergie reçue de l'extérieur par le générateur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

$$dW_2 = dW + dW_1$$

$$dW = dW_2 - dW_1 \quad \Leftrightarrow \quad vidt = dW_2 - Ri^2 dt$$

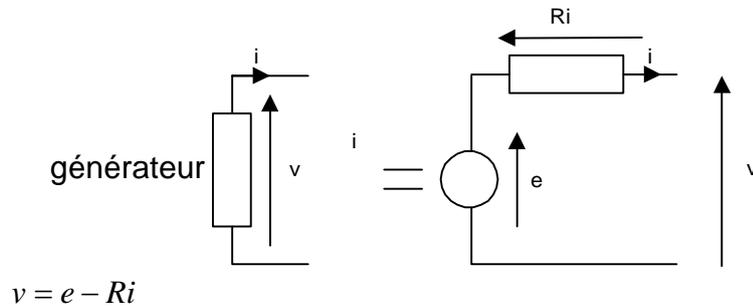


Divisons l'expression par  $idt$  :

$$v = \frac{dW_2}{idt} - Ri$$

Soit  $e = \frac{dW_2}{idt}$  la force électromotrice du générateur .

On a alors la relation :



On définit le rendement  $\eta$  du générateur comme le rapport de l'énergie fournie par le générateur sur l'énergie reçue :

$$\eta = \frac{\text{energie fournie}}{\text{energie reçue}} = \frac{dW}{dW_2} = \frac{dW_2 - dW_1}{dW_2} = 1 - \frac{Ri}{e} = \frac{u}{e}$$

Si les pertes sont faibles ( $Ri \ll e$ ), alors le rendement  $\eta$  est proche de 1.

### 3.4.2 Récepteur et force contre électromotrice

Un récepteur transforme une énergie électrique en une énergie (mécanique, chimique,...) et chaleur (énergie dissipée par effet Joule) .

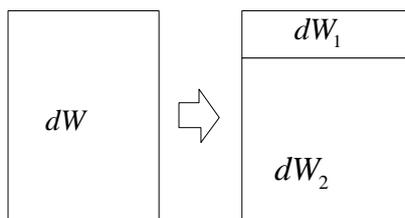
Soit  $dW = p_i dt = vidt$  l'énergie reçue par le récepteur

$dW_1$  l'énergie dissipée par effet Joule dans le récepteur (chaleur).

$$dW_1 = Ri^2 dt$$

$dW_2$  l'énergie transformée (mécanique, chimique, ...) par le récepteur. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on a la relation suivante :

$$dW = dW_1 + dW_2 \quad \Leftrightarrow \quad vidt = Ri^2 dt + dW_2$$



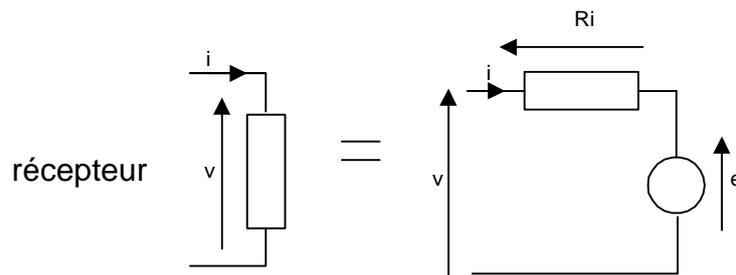
Divisons l'expression par  $idt$  :

$$v = Ri + \frac{dW_2}{idt}$$

Soit  $e = \frac{dW_2}{idt}$  la force contre électromotrice du générateur .

On a alors la relation :

$$v = Ri + e$$



On définit le rendement  $\eta$  du récepteur comme le rapport de l'énergie transformée (mécanique, chimique,...) sur l'énergie reçue par le récepteur :

$$\eta = \frac{\text{énergie transformée}}{\text{énergie reçue}} = \frac{dW_2}{dW} = \frac{dW_2}{dW_1 + dW_2} = \frac{e}{e + Ri} = \frac{e}{v}$$

Le rendement s'exprime également comme suit :

$$\eta = \frac{dW - dW_1}{dW} = \frac{u - Ri}{u} = 1 - \frac{Ri}{u}$$

Si les pertes sont faibles ( $Ri \ll u$ ) , alors le rendement  $\eta$  est proche de 1.

## 4 METHODES D'ANALYSE DES RESEAUX

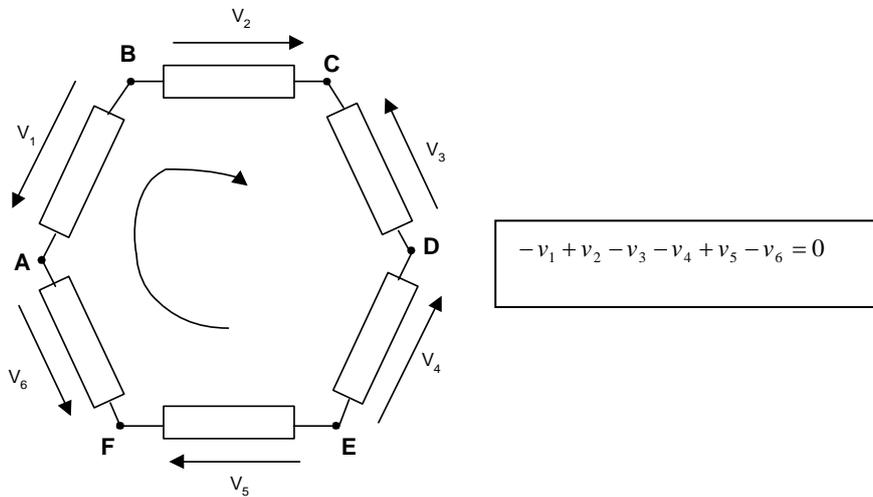
### 4.1 Introduction

L'analyse des réseaux en régime établi ou permanent repose sur les lois introduites dans les chapitres précédents :

- la loi des mailles : la somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle :

$$\sum_i v_i = 0$$

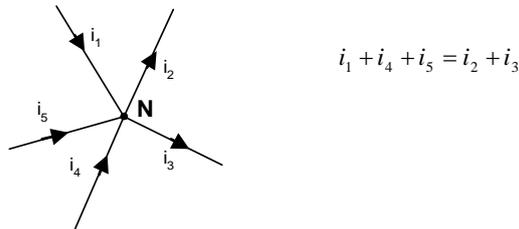
exemple :



- loi des nœuds : la somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant

$$\sum_i i_i = 0$$

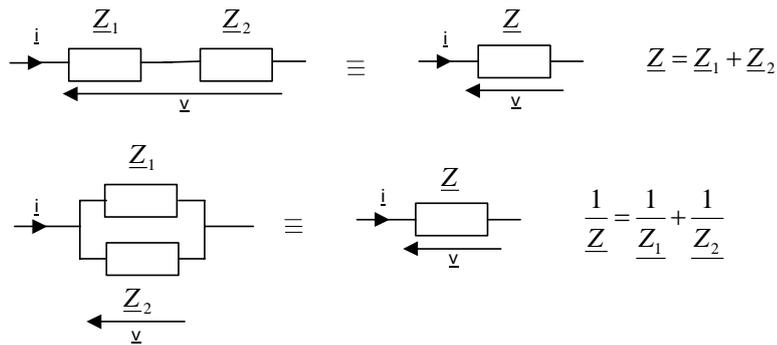
exemple :



- loi des dipôles passifs

$$\underline{v} = \underline{Z}i$$

- loi d'association de dipôle en parallèle et en série



## 4.2 Méthode des courants des mailles

Cette méthode est basée sur la loi des mailles.

1 – on recherche le nombre de mailles indépendantes. On a la relation suivante :

$$M = B - (N - 1)$$

avec M le nombre de mailles indépendantes, B le nombre de branches et N le nombre de nœuds du réseau.

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

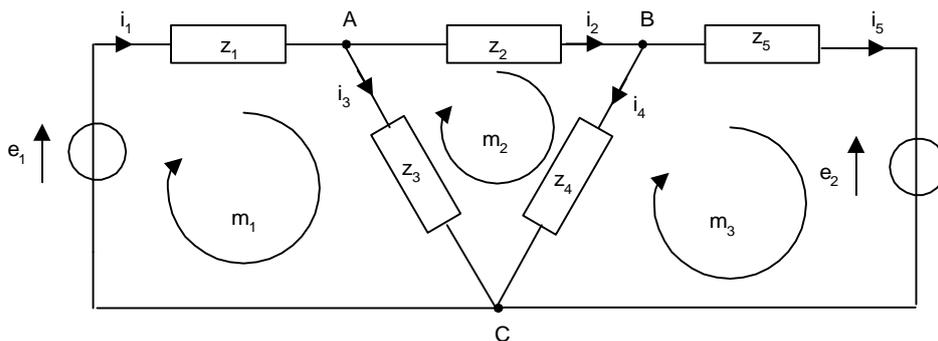
3 – on écrit pour chaque maille l'équation de maille dont les inconnus sont les courants en utilisant la loi des mailles

4 – on résout le système d'équations

5 – on calcule les courants circulant dans chaque branche à partir des courants de maille

6 – on en déduit la différence de potentiel entre deux nœuds en utilisant les lois des dipôles

exemple : soit le réseau suivant :



1 – nœuds A, B, C .  $N=3$

branches  $(e_1, z_1), (z_2), (z_3), (z_4), (e_2, z_5)$   $B=5$

d'où  $M=B-(N-1)=5-(3-1)=3$  mailles indépendantes :

maille  $m_1$  : composée de  $e_1, z_1$  et  $z_3$

maille  $m_2$  : composée de  $z_2, z_4$  et  $z_3$

maille  $m_3$  : composée de  $e_2, z_4$  et  $z_5$

2 – on attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours

$$\begin{aligned} i_{m1} &= i_1 \\ i_{m2} &= i_2 \\ i_{m3} &= i_5 \end{aligned}$$

Ainsi, chaque courant peut s'exprimer à partir des 3 courants de maille :

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{m1} \\ i_2 &= i_{m2} \\ i_3 &= i_1 - i_2 = i_{m1} - i_{m2} \\ i_4 &= i_2 - i_5 = i_{m2} - i_{m3} \\ i_5 &= i_{m3} \end{aligned}$$

3 –équations des mailles :

$$\begin{aligned} e_1 - z_1 i_1 - z_3 i_3 &= 0 \\ -z_2 i_2 - z_4 i_4 + z_3 i_3 &= 0 \\ -e_2 + z_4 i_4 - z_5 i_5 &= 0 \end{aligned}$$

On remplace les courants  $i$  par les courants de mailles  $i_m$ . On obtient finalement les équations suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 - (z_1 + z_3) i_{m1} + z_3 i_{m2} &= 0 \\ z_3 i_{m1} - (z_2 + z_3 + z_4) i_{m2} + z_4 i_{m3} &= 0 \\ -e_2 + z_4 i_{m2} - (z_4 + z_5) i_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Il faut noter qu'un signe moins signifie que le courant circule en sens inverse de celui de la figure. Comme nous avons un système à trois équations et trois inconnus, il est possible de le résoudre en utilisant la méthode de substitution ou la règle de Kramer (approche matricielle).

Cette technique présente l'avantage de déterminer tous les courants dans l'ensemble des branches. Les calculs pour un réseau compliqué sont cependant lourds.

### 4.3 Théorème de Millman

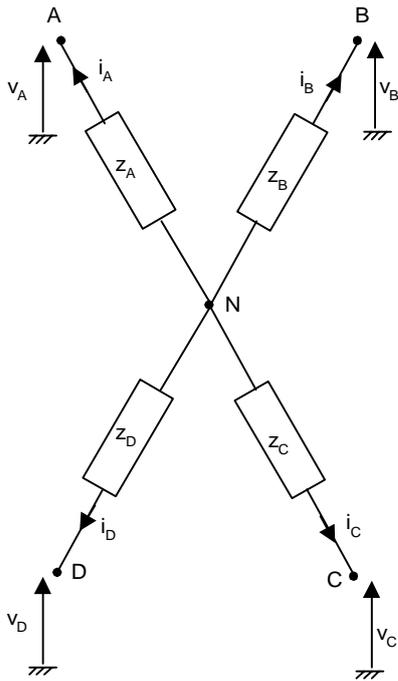
Le théorème s'énonce comme suit : le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau est égal au rapport des deux termes suivants :

- au numérateur, la somme des produits des potentiels des nœuds adjacents par les inductances reliant ces nœuds au nœud considéré
- au dénominateur, la somme de toutes les admittances connectées au nœud considéré.

$$v_N = \frac{\sum_i v_i Y_i}{\sum_i Y_i}$$

Si un générateur de courant est connecté sur le nœud, il doit bien entendu être pris en compte :

$$v_N = \frac{\sum_i v_i Y_i}{\sum_i Y_i} + \text{somme des courants entrants ou sortants}$$



Ce théorème est une conséquence directe de la loi des

nœuds de Kirchoff :  $\sum_i i_i = 0$

$$i_A = \frac{v_N - v_A}{Z_A} \quad i_B = \frac{v_N - v_B}{Z_B}$$

$$i_C = \frac{v_N - v_C}{Z_C} \quad i_D = \frac{v_N - v_D}{Z_D}$$

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

on a donc la relation suivante :

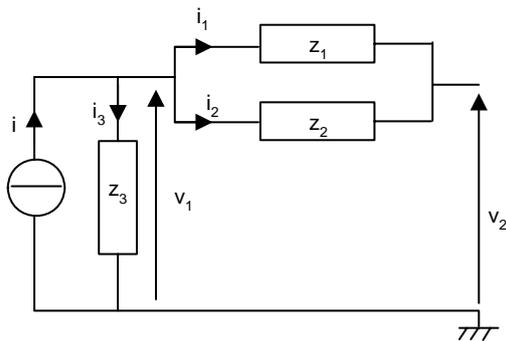
$$\frac{v_N - v_A}{Z_A} + \frac{v_N - v_B}{Z_B} + \frac{v_N - v_C}{Z_C} + \frac{v_N - v_D}{Z_D} = 0$$

en posant  $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ , on obtient :

$$v_N(Y_A + Y_B + Y_C + Y_D) = v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D$$

$$v_N = \frac{v_A Y_A + v_B Y_B + v_C Y_C + v_D Y_D}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_D}$$

Exemple :



$$i_1 + i_2 + i_3 - i = 0$$

on a la relation suivante :

$$(v_1 - v_2)Y_1 + (v_1 - v_2)Y_2 + v_1 Y_3 - i = 0$$

et donc

$$v_1 = \frac{v_2(Y_1 + Y_2) + i}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

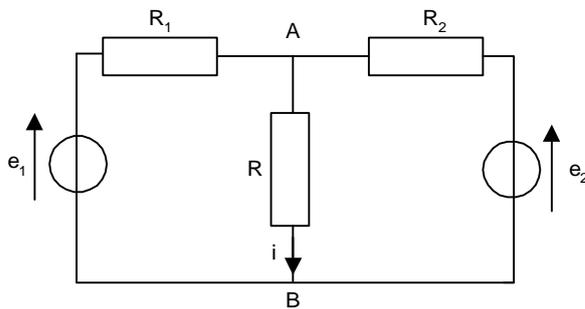
Le courant  $i$  du générateur de courant est compté positivement si il se dirige vers le noeud

#### 4.4 Théorème de superposition

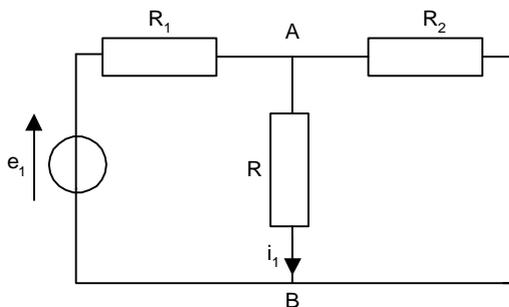
Ce théorème résulte des propriétés des circuits linéaires vus précédemment.

**Théorème :** si un circuit est soumis à plusieurs sources d'excitation, la réponse de ce circuit est égale à la somme algébrique des réponses à chacune des sources d'excitation prise séparément.

Exemple : soit le réseau suivant



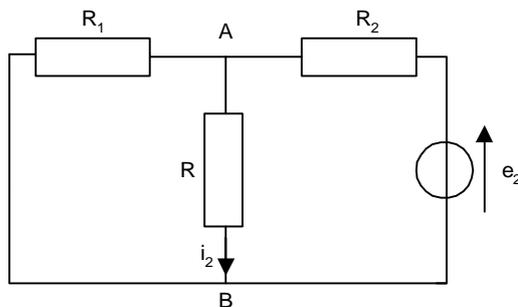
Nous allons décomposer ce réseau en autant de sous-réseau qu'il y a de générateurs. Dans cet exemple il y a deux générateurs. Pour chaque sous-réseau, on ne garde qu'un seul générateur ; les autres générateurs sont remplacés par des court-circuits si ce sont des générateurs de tension ou par des circuits ouverts si ce sont des générateurs de courant.



Dans ce premier sous-réseau nous avons remplacé  $e_2$  par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_1 \frac{\frac{RR_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}}$$

$$i_1 = \frac{v_{AB}}{R} = e_1 \frac{\frac{R_2}{R+R_2}}{R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}} = \frac{e_1 R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$



Dans le second sous-réseau nous avons remplacé  $e_1$  par un court-circuit.

$$v_{AB} = e_2 \frac{\frac{RR_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}}$$

$$i_2 = \frac{v_{AB}}{R} = e_2 \frac{\frac{R_1}{R+R_1}}{R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}} = \frac{e_2 R_1}{RR_2 + RR_1 + R_1 R_2}$$

En appliquant le théorème de superposition on obtient :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

Application numérique :  $e_1=10V$ ,  $e_2=-20V$ ,  $R=5\Omega$ ,  $R_1=4\Omega$ ,  $R_2=6\Omega$ .

$$i_1 = 0.81A, \quad i_2 = -1.08A$$

$$i = i_1 + i_2 = -0.27A$$

remarque : dans ce cas simple, l'utilisation du théorème de Millman aurait fourni directement ce résultat.

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont des conséquences directes du théorème de superposition

## 4.5 Théorème de Thévenin et de Norton

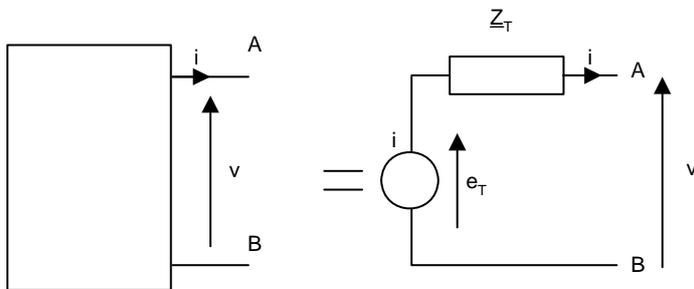
### 4.5.1 Grandeurs caractéristiques d'un dipôle

Un dipôle est caractérisé par trois grandeurs caractéristiques :

- différence de potentiel à vide :  $e_T$  lorsque  $i = 0$
- courant de court circuit :  $i_N$  lorsque  $v = 0$
- impédance de sortie  $\underline{Z}_T$  ou l'admittance de sortie  $\underline{Y}_T$

### 4.5.2 Théorème de Thévenin

L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de tension idéal de force électromotrice  $e_T$  en série avec une impédance interne  $\underline{Z}_T$ .



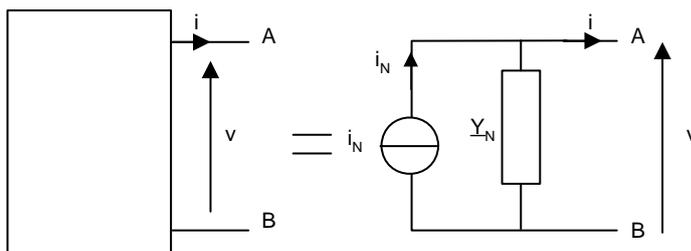
La force électromotrice  $e_T$  est égale à la différence de potentiel  $v_{AB}$  mesurée à vide et l'impédance interne  $\underline{Z}_T$  est l'impédance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit (tous les générateurs de tension idéaux sont remplacés par des courts-circuits et les générateurs de courant idéaux sont remplacés par des circuits ouverts).

Ainsi, nous avons la relation suivante :

$$v = e_T - \underline{Z}_T i$$

### 4.5.3 Théorème de Norton

L'ensemble du circuit se trouvant à gauche des deux nœuds A et B peut être remplacé par un générateur de courant  $i_N$  en parallèle avec une admittance  $\underline{Y}_N$ .



Le théorème de Norton est le théorème dual du théorème de Thévenin.

Le courant  $i_N$  est le courant de sortie lorsque l'on court circuité les bornes A et B.

L'admittance  $\underline{Y}_N$  est l'admittance vue des bornes A et B lorsque l'on annule toutes les sources d'excitation du circuit.

Nous avons la relation suivante :

$$\underline{i} = \underline{i}_N - \underline{Y}_N \underline{v}$$

#### 4.5.4 Relation entre les deux théorèmes

A partir du modèle de Norton, on a :

$$\underline{v} = \frac{(\underline{i}_N - \underline{i})}{\underline{Y}_N} = \frac{\underline{i}_N}{\underline{Y}_N} - \frac{\underline{i}}{\underline{Y}_N}$$

En identifiant avec le modèle de Thévenin, on obtient les relations suivantes :

$$\boxed{e_T = \frac{\underline{i}_N}{\underline{Y}_N}}$$

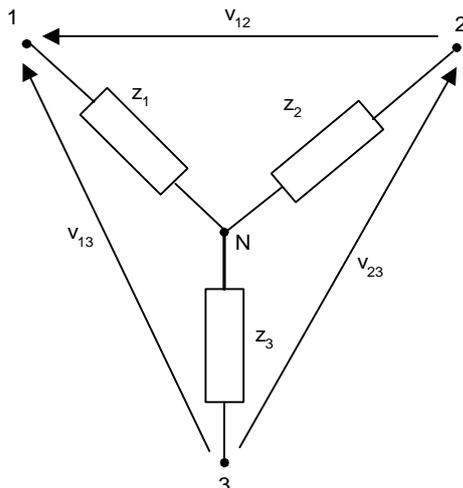
et

$$\boxed{\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_T}}$$

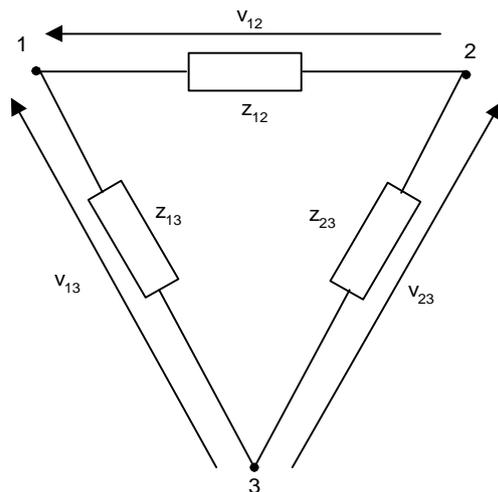
#### 4.6 Théorème de Kennely

Ce théorème permet de transformer pour un circuit tripôle un montage en étoile en un montage en triangle.

Montage étoile



Montage triangle



Cette transformation aussi utile dans l'étude des quadripôles comme les filtres en T et en Π

**Théorèmes :**

Transformation triangle  $\Rightarrow$  étoile

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

Transformation étoile  $\Rightarrow$  triangle

$$Y_{12} = \frac{1}{Z_{12}} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Cette relation s'écrit également :

$$Z_{12} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}{Z_3}$$

### **Démonstration du théorème de Kennely triangle vers étoile :**

Appliquons la règle d'association des dipôles en série et en parallèle après avoir débranché le pôle 2 du circuit extérieur. On obtient la relation :

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (1)$$

En débranchant le pôle 3 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_{12}(Z_{13} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (2)$$

En débranchant le pôle 1 du circuit extérieur, on obtient :

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{23}(Z_{13} + Z_{12})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (3)$$

En sommant les équations (1), (2) et (3), on obtient :

$$2(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \frac{2(Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{12}Z_{13} + Z_{12}Z_{23} + Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (4)$$

En calculant (4)-(3) on a :

$$Z_1 = \frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

En calculant (4)-(1) on a :

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

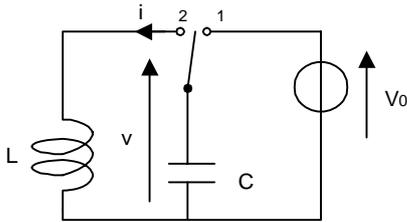
En calculant (4)-(2) on a :

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

## 5 FACTEUR DE QUALITE ET CIRCUIT RESONNANT

### 5.1 Oscillations libres dans un circuit LC

Soit le circuit composé d'une bobine et d'un condensateur parfait :



Considérons que l'interrupteur est dans la position 1 et que le condensateur est complètement chargé

$$W_{\text{emmagasinée}} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

A l'instant  $t=0$ , on commute l'interrupteur dans la position 2

On a la relation suivante :

$$i = \frac{1}{L} \int v dt = -C \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Une solution à cette équation est de la forme

$$v = V \cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  est la pulsation propre du circuit LC

A l'instant  $t=0$ , on a  $v(t=0) = V_0$  et  $i(t=0) = 0$

$$i = -C \frac{dv}{dt} = C \omega V \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} i(t=0) = 0 \\ v(t=0) = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ V = V_0 \end{cases}$$

Ainsi, on a donc les expressions suivantes :

$$v = V_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i = I_0 \sin(\omega t) = \frac{V_0}{L\omega} \sin(\omega t) = C\omega V_0 \sin(\omega t)$$

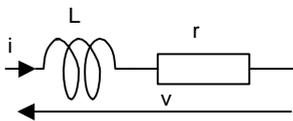
Comme dans le cas du circuit LC série, le circuit LC parallèle parfait entretient donc les oscillations sans amortissement.

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série et les oscillations sont amorties à cause des pertes par effet Joules.

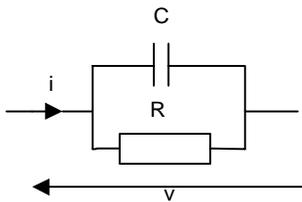
## 5.2 Facteur de qualité d'un circuit

### 5.2.1 Définition

En pratique, les bobines réels contiennent une faible résistance en série (résistance du fil bobiné)



Les condensateurs réels possèdent également une résistance parallèle de forte valeur qui caractérise les pertes diélectriques (courants de fuites)



Plus faibles seront les pertes meilleur sera l'élément.

On définit le facteur de qualité d'un élément Q comme suit :

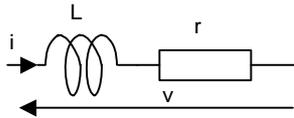
$$Q = 2\pi \frac{\text{energie maximale emmagasine}}{\text{energie dissipée par periode}}$$

Le facteur de qualité est sans unité. L'énergie est emmagasinée dans les éléments réactifs (bobine ou condensateur) et l'énergie est dissipée par effet Joule (résistance).

### 5.2.2 Facteur de qualité d'un élément réactif réel

Cas de la bobine réelle :

Une bobine réelle est composée d'une bobine pure en série avec une résistance de faible valeur.



soit le courant  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  circulant dans ce circuit.

Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner une bobine est :

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec  $\omega = 2\pi / T$  ) est égale à :

$$W_D = \frac{1}{2} r I_0^2 T$$

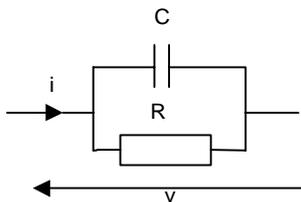
On a donc :

$$Q_L = 2\pi \frac{W_L}{W_D} = 2\pi \frac{LI_0^2}{2} \cdot \frac{2}{rI_0^2 T} = \frac{2\pi L}{rT} = \frac{L\omega}{r}$$

Plus la résistance  $r$  est petite, plus le facteur de qualité  $Q_L$  de la bobine réelle est grand.

Cas du condensateur réel :

Un condensateur réel est composée d'un condensateur parfait en parallèle avec une résistance de forte valeur.



soit la différence de potentiel  $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$  aux bornes de ce circuit.

Nous avons vu dans le chapitre « Puissance et Energie » que la quantité maximale d'énergie que peut emmagasiner un condensateur est :

$$W_C = \frac{I_0^2}{2C\omega^2}$$

Comme on a  $V_0 = \frac{I_0}{C\omega}$ , l'énergie  $W_C$  peut aussi s'écrire :

$$W_C = \frac{CV_0^2}{2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joules pendant une période T ( avec  $\omega = 2\pi / T$  ) est égale à :

$$W_D = \frac{1}{2} R I_0^2 T = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} T$$

On a donc :

$$Q_C = 2\pi \frac{W_C}{W_D} = 2\pi \frac{C V_0^2}{2} \cdot \frac{2R}{V_0^2 T} = \frac{2\pi C R}{T} = R C \omega$$

Plus la résistance  $R$  est grande, plus le facteur de qualité  $Q_C$  du condensateur réel est grand.

La notion de facteur de qualité peut être étendue à tout type de circuit associant une résistance et une bobine ou un condensateur

### 5.2.3 Généralisation du facteur de qualité

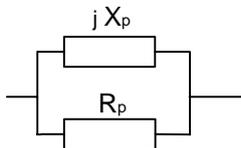
Soit un circuit série dont l'impédance est de la forme  $\underline{Z} = R_s + jX_s$



Le facteur de qualité de ce circuit est :

$$Q = \frac{|X_s|}{R_s}$$

Soit un circuit parallèle dont l'admittance est de la forme  $\underline{Y} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}$



le facteur de qualité de cette impédance est :

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|}$$

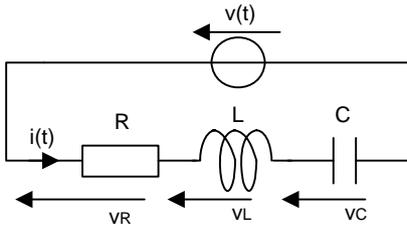
On peut vérifier que les expressions obtenues précédemment se déduisent directement de ces deux formules générales.

Exemple : association d'une bobine d'inductance  $L$  et d'une résistance  $R$  en série

On a :  $R_s = R$  et  $X_s = L\omega$ , le facteur de qualité est égal à  $Q = \frac{|X_s|}{R_s} = \frac{L\omega}{R}$

### 5.3 Le circuit résonnant série

Soit l'association en série d'une bobine d'un condensateur et d'une résistance :



Le générateur  $v(t)$  impose la pulsation  $\omega$  du circuit.  
L'impédance complexe est la suivante :

$$\underline{Z} = \frac{v}{i} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

A la pulsation de résonance  $\omega_0$ , le courant est maximum et donc le module de l'impédance complexe est le plus faible possible. Cette pulsation s'obtient pour

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad LC\omega_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On a alors,  $\underline{Z} = R$ .

$i$  et  $v$  sont donc en phase.

On pose :

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$Q_0$  peut être vu comme le facteur de qualité du circuit RL série ou RC série.

Cherchons à exprimer  $\underline{Z}$  en fonction de  $\omega, \omega_0, R$  et  $Q_0$  :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\left(1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = R\left(1 + j\frac{L\omega_0}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{LC\omega_0^2\omega}\right)\right)$$

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \quad \text{car} \quad \omega_0 = \frac{1}{LC\omega_0}$$

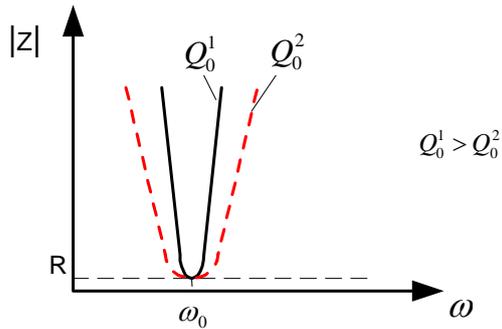
Son module est égal à :

$$|\underline{Z}| = R\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

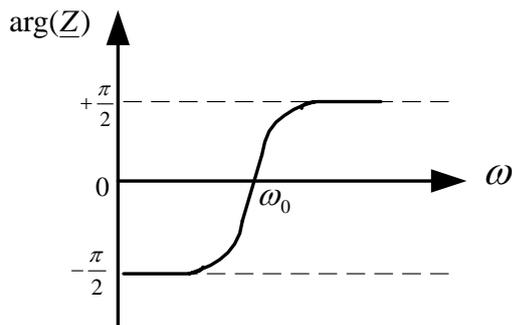
Sa phase est la suivante :

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0, & \quad |Z| \rightarrow +\infty & \arg(Z) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \omega = \omega_0, & \quad |Z| = R & \arg(Z) = 0 \\ \omega \rightarrow +\infty, & \quad |Z| \rightarrow +\infty & \arg(Z) \rightarrow +\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$|Z| = R \sqrt{1 + Q_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$



$$\arg(Z) = \arctan Q_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

L'étude d'un tel circuit est intéressante lorsque la pulsation  $\omega$  est proche de la pulsation de la résonance  $\omega_0$   
 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  (avec  $\delta\omega$  très petit devant  $\omega_0$ )

Calculons alors le terme  $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx \frac{2\omega \cdot \delta\omega}{\omega_0 \omega} = \frac{2\delta\omega}{\omega_0}$$

On a donc

$$\underline{Z} = R \left( 1 + jQ_0 \frac{2\delta\omega}{\omega_0} \right) \quad \text{lorsque } \omega \text{ proche de } \omega_0$$

$\frac{\delta\omega}{\omega_0}$  est le désaccord relatif (écart de pulsation par rapport à la pulsation  $\omega_0$ )

Si le facteur de qualité  $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$  est très élevé (c'est à dire  $R \ll L\omega_0$ ), le circuit est équivalent à un interrupteur ouvert (hors résonance) ou fermé (en résonance).

Calculons la puissance consommée dans le circuit au voisinage de la résonance lors d'une attaque en tension  $\underline{v}(t) = V_0 \exp(j\omega t)$

$$P = \frac{1}{4}(\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^*) \text{ et } \underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{\underline{Z}}$$

On a alors :

$$P = \frac{1}{4} \left( \underline{v}^* \cdot \frac{\underline{v}}{\underline{Z}} + \underline{v} \cdot \frac{\underline{v}^*}{\underline{Z}^*} \right) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}^*}{4} \left( \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}^*} \right) = \frac{V_0^2}{4} \left( \frac{\underline{Z}^* + \underline{Z}}{\underline{Z} \underline{Z}^*} \right) = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{|\underline{Z}|^2}$$

$$\text{avec } |\underline{Z}|^2 = R^2 \left( 1 + Q_0^2 \frac{4\delta\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

On obtient finalement :

$$P = \frac{V_0^2}{2R} \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Pour  $\omega = \omega_0$   $P = P_0 = \frac{V_0^2}{2R}$  : puissance consommée dans la résistance

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Déterminons les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles  $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2}$

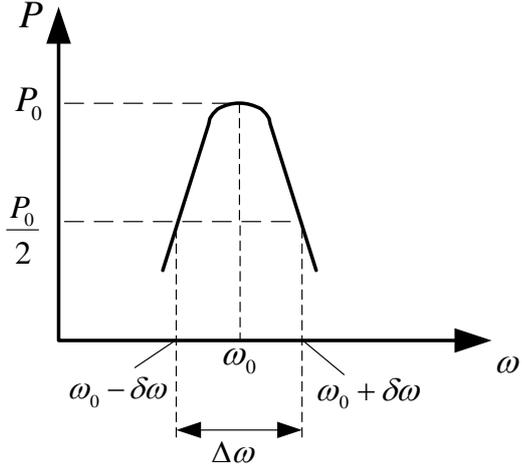
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}} \Leftrightarrow 4Q_0^2 \frac{\delta\omega^2}{\omega_0^2} = 1$$

$$\Rightarrow \delta\omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \delta\omega = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0 + \delta\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$$



$\Delta\omega$  est appelée bande passante ou largeur de bande à -3 dB. C'est l'intervalle de pulsation pour lequel la puissance est supérieure à  $P_0/2$ .

Phénomène de surtension :

Lorsque  $\omega = \omega_0$ , les différences de potentiel aux bornes de la bobine et du condensateur peuvent être très grandes :

$$\omega = \omega_0 \text{ on a } Z = R$$

$$\text{et donc } \underline{i}(t) = \frac{\underline{v}}{Z} = \frac{V_0}{R} \exp(j\omega_0 t)$$

$$\underline{v}_L = jL\omega_0 \underline{i} = jL\omega_0 \frac{V_0}{R} \exp(j\omega_0 t) = jQ_0 V_0 \exp(j\omega_0 t) = jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega_0} = \frac{V_0}{jRC\omega_0} \exp(j\omega_0 t) = -jV_0 Q_0 \exp(j\omega_0 t) = -jQ_0 \underline{v}$$

$$\underline{v}_R = R \underline{i} = \underline{v}$$

$$\text{On a bien : } \underline{v} = \underline{v}_R + \underline{v}_L + \underline{v}_C$$

$\underline{v}_L$  et  $\underline{v}_C$  sont de même amplitude  $V_0 Q_0$  et en opposition de phase à la pulsation de résonance. Si le facteur de qualité est grand, l'amplitude  $V_0 Q_0$  peut aussi être élevée d'où risque de claquage du condensateur !

Application numérique :

$$R = 5\Omega, L=1\text{mH et } C=1\text{nF. } V_0 = 10 \text{ V}$$

$$\text{On a } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rd / s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 159\text{kHz}$$

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 200$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = 5000 \text{rd} / \text{s}$$

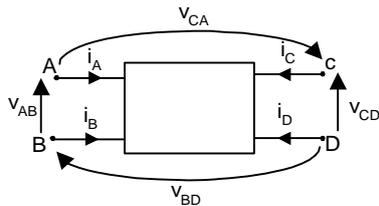
$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 795 \text{Hz}$$

$$|V_c| = |V_L| = Q_0 V_0 = 2000 \text{V} !!$$

## 6 LES QUADRIPOLES

### 6.1 Définitions

D'une manière générale, un quadripôle est décrit comme suit :

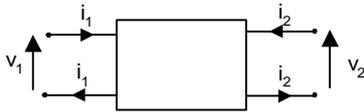


Pour un quadripôle passif, on a :

$$i_A + i_B + i_C + i_D = 0$$

$$v_{AB} + v_{CA} - v_{CD} + v_{BD} = 0$$

Cependant, le terme quadripôle est plutôt utilisé pour un circuit dont les bornes sont groupées par paire. Alors le courant entrant dans le pôle d'une paire ressort par l'autre pôle de la même paire. Nous avons le schéma équivalent suivant :



### 6.2 Description matricielle du quadripôle

Pour relier les 4 paramètres du quadripôle ( les deux courants et les deux différences de potentiel), il existent 4 représentations matricielles différentes:

- matrices impédances
- matrices admittances
- matrices hybrides
- matrices de transfert

#### 6.2.1 Matrices impédances

2 équations sont suffisantes pour décrire le quadripôle  
On a :

$$v_1 = f(i_1, i_2)$$

$$v_2 = g(i_1, i_2)$$

Les deux équations sont :

$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

L'unité des impédances  $Z_{ij}$  sont les ohms ( $\Omega$ ). L'indice i est relatif à la tension et indice j est relatif au courant.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{i}$$

$\mathbf{v}$  est le vecteur colonne des tensions et  $\mathbf{i}$  est le vecteur colonne des courants.

$\mathbf{Z}$  est la matrice impédance de dimension  $2 \times 2$

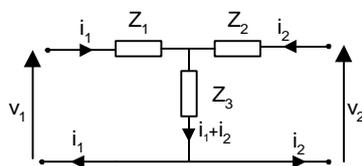
**Définition 1 :** un quadripôle est dit réciproque si les termes de la seconde diagonale sont égaux :  $Z_{12} = Z_{21}$ .

Cette propriété est caractéristique des quadripôles composés d'éléments passifs (sans générateur de courant et de tension).

**Définition 2 :**

Si les termes de la première diagonale sont égaux :  $Z_{11} = Z_{22}$ , (c'est-à-dire que  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T$  on dit que le quadripôle est symétrique.

**Exemple 1 :** quadripôle en T



Nous avons les deux relations suivantes en appliquant la loi des mailles :

$$v_1 = Z_1i_1 + Z_3(i_1 + i_2) = (Z_1 + Z_3)i_1 + Z_3i_2$$

$$v_2 = Z_2i_2 + Z_3(i_1 + i_2) = Z_3i_1 + (Z_2 + Z_3)i_2$$

Ainsi, on a :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Ce quadripôle est réciproque. Il est symétrique à la condition que  $Z_2 = Z_1$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice impédance.

$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

$Z_{11}$  est l'impédance vue de l'entrée en laissant la sortie du quadripôle en circuit ouvert ( $i_2 = 0$ )

$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$Z_{22}$  est l'impédance vue de la sortie en laissant l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ( $i_1 = 0$ )

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

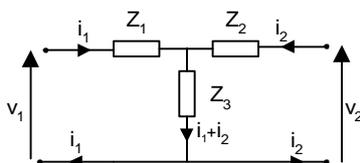
$Z_{12}$  est l'impédance de transfert inverse ou transimpédance inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert ( $i_1 = 0$ )

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

$Z_{21}$  est l'impédance de transfert directe ou transimpédance obtenue avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert ( $i_2 = 0$ )

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

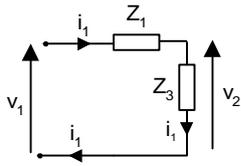
**Exemple 1** : (suite) quadripôle en T



cas  $i_2 = 0$

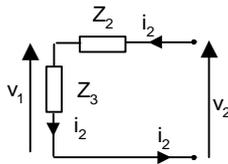
$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = Z_3$$



cas  $i_2 = 0$

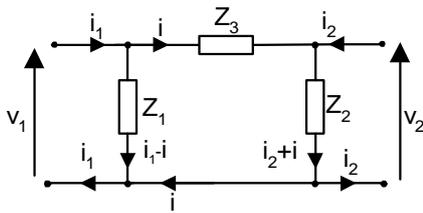
$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = Z_3$$



$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = Z_2 + Z_3$$

Nous retrouvons les résultats calculés précédemment.

**Exemple 2** : quadripôle en pi

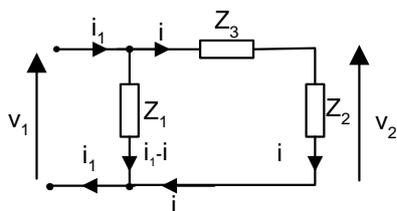


$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

Comme dans l'exemple précédent, nous allons considérer successivement les cas  $i_2 = 0$  et  $i_1 = 0$ .

cas  $i_2 = 0$



$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3) \\ &= \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{aligned}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre  $i$  et  $i_1$ .

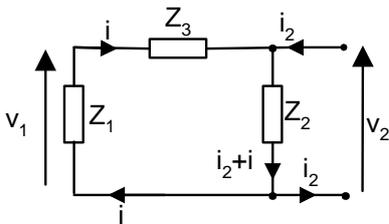
Pont diviseur de courant :

$$i = \frac{Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1} i_1$$

D'où

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = \left. \frac{v_2}{i} \frac{i}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

cas  $i_1 = 0$



$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = Z_2 \parallel (Z_1 + Z_3) = \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre  $i$  et  $i_2$ .

Pont diviseur de courant :

$$-i = \frac{Z_2}{Z_3 + Z_2 + Z_1} i_2$$

D'où

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = \left. \frac{v_1}{i} \frac{i}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = \frac{Z_2 Z_1}{Z_3 + Z_2 + Z_1}$$

En résumé, nous avons :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} & \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} \\ \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} & \frac{Z_2(Z_1+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} \end{bmatrix}$$

Le quadripôle est donc réciproque. Il est symétrique si

$$\begin{aligned} Z_1(Z_2 + Z_3) &= Z_2(Z_1 + Z_3) \\ \Leftrightarrow Z_1 &= Z_2 \end{aligned}$$

### 6.2.2 Matrices admittances

On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2$$

$$i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2$$

L'unité des admittances  $Y_{ij}$  sont les ohms<sup>-1</sup> ( $\Omega^{-1}$ ). L'indice i est relatif au courant et indice j est relatif à la tension.

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v}$$

$\mathbf{i}$  est le vecteur colonne des courants et  $\mathbf{v}$  est le vecteur colonne des tensions.

$\mathbf{Y}$  est la matrice admittance de dimension 2x2

On a la relation suivante entre  $\mathbf{Y}$ , la matrice admittance et  $\mathbf{Z}$ , la matrice impédance d'un quadripôle.

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

La matrice  $\mathbf{Y}$  est l'inverse de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Le passage de l'une à l'autre implique d'inverser la matrice  $\mathbf{Z}$ .

On a les relations entre les éléments de la matrice admittance  $\mathbf{Y}$  et la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  :

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} & \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interprétation physique de chacun des différents coefficients de la matrice admittance.

$$Y_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$Y_{11}$  est l'admittance vue de l'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1 = 0}$$

$Y_{22}$  est l'admittance vue de la sortie lorsque l'entrée du quadripôle est en court-circuit ( $v_1 = 0$ )

$$Y_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1 = 0}$$

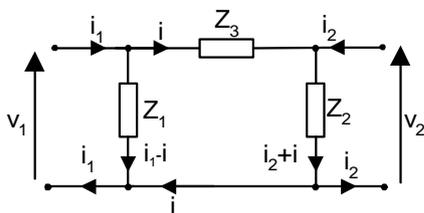
$Y_{12}$  est l'admittance de transfert inverse obtenue avec l'entrée du quadripôle en court-circuit ( $v_1 = 0$ )

$$Y_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$Y_{21}$  est l'admittance de transfert directe obtenue avec la sortie du quadripôle en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

Ces définitions des coefficients permettent de calculer et de mesurer simplement ceux-ci.

**Exemple 2 :** (suite) quadripôle en pi



$$\text{Soit } Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2} \text{ et } Y_3 = \frac{1}{Z_3},$$

Soit  $i$  le courant circulant dans l'admittance  $Y_3$ .

$$\text{On a } i = Y_3(v_1 - v_2)$$

Les équations associées à la matrice admittance sont les suivantes :

$$i_1 = Y_1 v_1 + i = (Y_1 + Y_3)v_1 - Y_3 v_2$$

$$i_2 = Y_2 v_2 - i = -Y_3 v_1 + (Y_2 + Y_3)v_2$$

D'où les éléments de la matrice admittance suivants :

$$Y_{11} = Y_1 + Y_3 \qquad Y_{12} = Y_{21} = -Y_3 \qquad \text{et} \qquad Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

Ces éléments de la matrice admittance peuvent être vérifiés en utilisant les relations entre les éléments de la matrice admittance  $\mathbf{Y}$  et ceux de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  calculés au paragraphe précédent.

### 6.2.3 Matrices hybrides

On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

Sous forme matricielle nous avons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}$  est la matrice hybride de dimension 2x2

Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors.

Nous avons :

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

$h_{11}$  est l'impédance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{12}$  est le gain en tension inverse lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2 = 0}$$

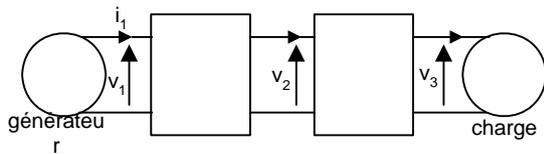
$h_{21}$  est le gain en courant obtenu avec la sortie du quadripôle en court-circuit ( $v_2 = 0$ )

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1 = 0}$$

$h_{22}$  est l'admittance de sortie lorsque l'entrée du quadripôle est ouverte ( $i_1 = 0$ )

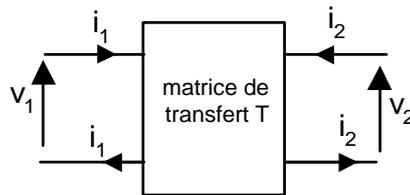
### 6.2.4 Matrice de transfert ou matrice chaîne

Cette matrice est très pratique pour la mise en cascade des quadripôles.



Les relations définissant la matrice de transfert **T** sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_2 - Bi_2 \\ i_1 &= Cv_2 - Di_2 \end{aligned}$$



Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Attention : contrairement aux autres représentations matricielles, pour la matrice de transfert **T** on utilise le courant  $-i_2$  (courant sortant du quadripole) à la place du courant  $i_2$  (courant entrant dans le quadripole). Ce formalisme permet de simplifier les calculs lorsque nous associerons plusieurs quadripôles en cascade.

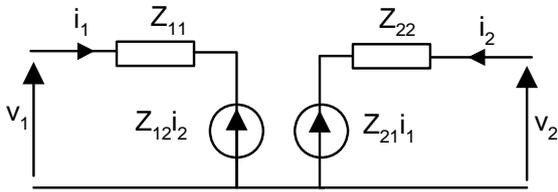
A et D sont sans dimension

B est une impédance en ohm et C une admittance en  $\text{ohm}^{-1}$

### 6.3 Schémas équivalents du quadripôle

Ces schémas se déduisent directement des relations matricielles impédance, admittance et hybride.

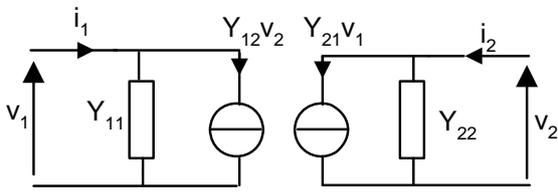
### 6.3.1 Représentation matricielle impédance



$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$$

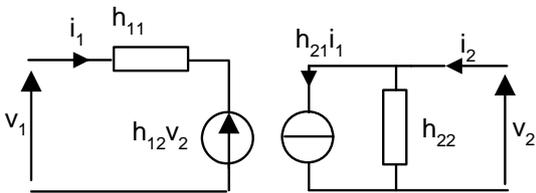
### 6.3.2 Représentation matricielle admittance



$$i_1 = Y_{11}v_1 + Y_{12}v_2$$

$$i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{22}v_2$$

### 6.3.3 Représentation matricielle hybride



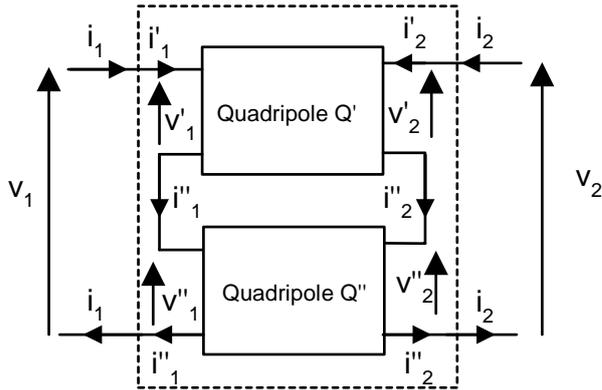
$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

## 6.4 Association de quadripôles

Suivant l'association de quadripôles, nous choisirons la matrice la plus appropriée.

### 6.4.1 Association série



On a les relations suivantes :

$$v_1 = v'_1 + v''_1 \quad \text{et} \quad v_2 = v'_2 + v''_2$$

$$\begin{cases} v'_1 = Z'_{11} i'_1 + Z'_{12} i'_2 \\ v'_2 = Z'_{21} i'_1 + Z'_{22} i'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v''_1 = Z''_{11} i''_1 + Z''_{12} i''_2 \\ v''_2 = Z''_{21} i''_1 + Z''_{22} i''_2 \end{cases}$$

Comme  $i_1 = i'_1 = i''_1$  et  $i_2 = i'_2 = i''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripole équivalent :

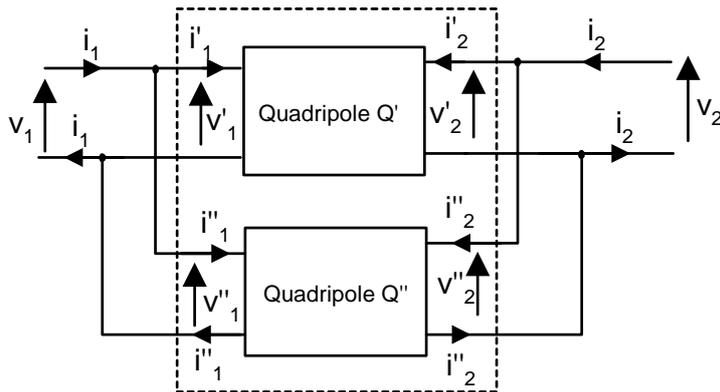
$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 = (Z'_{11} + Z''_{11}) i_1 + (Z'_{12} + Z''_{12}) i_2 \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = (Z'_{21} + Z''_{21}) i_1 + (Z'_{22} + Z''_{22}) i_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice impédance du quadripole équivalent est égal à la somme des matrices impédances :

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}'] + [\mathbf{Z}'' ]$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

### 6.4.2 Association parallèle



On a les relations suivantes :

$$i_1 = i'_1 + i''_1 \quad \text{et} \quad i_2 = i'_2 + i''_2$$

$$\begin{cases} i'_1 = Y'_{11} v'_1 + Y'_{12} v'_2 \\ i'_2 = Y'_{21} v'_1 + Y'_{22} v'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} i''_1 = Y''_{11} v''_1 + Y''_{12} v''_2 \\ i''_2 = Y''_{21} v''_1 + Y''_{22} v''_2 \end{cases}$$

Comme  $v_1 = v'_1 = v''_1$  et  $v_2 = v'_2 = v''_2$  nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

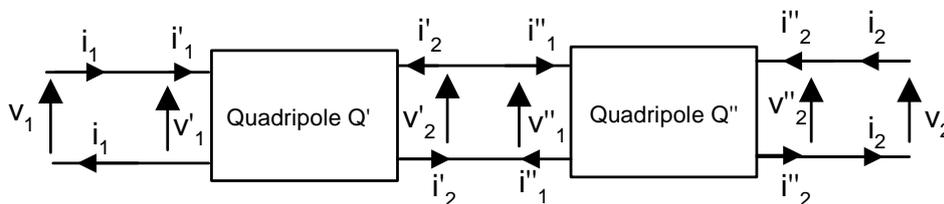
$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 = (Y'_{11} + Y''_{11}) v_1 + (Y'_{12} + Y''_{12}) v_2 \\ i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 = (Y'_{21} + Y''_{21}) v_1 + (Y'_{22} + Y''_{22}) v_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice admittance du quadripôle équivalent est égal à la somme des matrices admittances :

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}'] + [\mathbf{Y}'']$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

### 6.4.3 Association en cascade



Nous allons chercher à déterminer la matrice de transfert du quadripôle résultant de cette association.

Chaque quadripôle est défini par sa matrice de transfert :

$$\text{Quadripôle } Q' : \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad \text{Quadripôle } Q'' : \mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les différences de potentiel :

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 \\ i''_1 &= -i'_2 \\ i''_2 &= i_2 \\ v_1 &= v'_1 \\ v'_2 &= v''_1 \\ v''_2 &= v_2 \end{aligned}$$

On a donc les relations suivantes pour le premier quadripôle :

$$\begin{aligned} v_1 = v'_1 &= A'v'_2 - B'i'_2 = A'v''_1 + B'i''_1 \\ i_1 = i'_1 &= C'v'_2 - D'i'_2 = C'v''_1 + D'i''_1 \end{aligned}$$

Pour le second quadripôle, nous avons :

$$\begin{aligned} v'_2 = v''_1 &= A''v''_2 - B''i''_2 = A''v_2 - B''i_2 \\ -i'_2 = i''_1 &= C''v''_2 - D''i''_2 = C''v_2 - D''i_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} v_1 &= A'(A''v''_2 - B''i''_2) + B'(C''v''_2 - D''i''_2) \\ i_1 &= C'(A''v''_2 - B''i''_2) + D'(C''v''_2 - D''i''_2) \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit les relations entre  $v_1, i_1, v_2$  et  $i_2$  :

$$\begin{aligned} v_1 &= (A'A'' + B'C'')v_2 - (A'B'' + B'D'')i_2 \\ i_1 &= (C'A'' + D'C'')v_2 - (C'B'' + D'D'')i_2 \end{aligned}$$

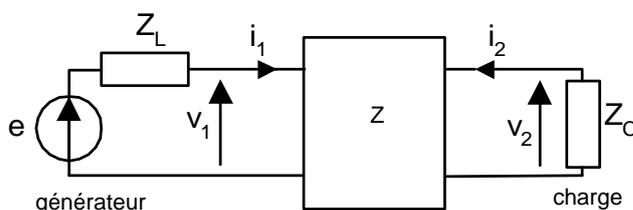
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{T}$  du quadripôle Q obtenu par la mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'' est égale au produit matriciel des matrices  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{T}''$  :

$$[T] = [T'] [T'']$$

Toutes ces associations de quadripôles se généralisent à un nombre  $n$  de quadripôles.

## 6.5 Grandeurs caractéristiques d'un quadripôle



En utilisant la matrice impédance, on a les relations suivantes :

$$v_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 \quad \text{equation (1)}$$

$$v_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 \quad \text{equation (2)}$$

$$e = Z_L i_1 + v_1 \quad \text{equation (3)}$$

$$v_2 = -Z_C i_2 \quad \text{equation (4)}$$

Les grandeurs intéressantes sont :

$$T_v = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{facteur d'amplification en tension du quadripole. Ce gain est sans dimension (réel ou complexe)}$$

$T_C$  est toujours inférieur à 1 pour un quadripole passif.

$$T_i = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{facteur d'amplification en courant}$$

$$Z_E = \frac{v_1}{i_1} \quad \text{impédance d'entrée}$$

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2} \quad \text{impédance de sortie}$$

- Gain en courant (exprimé en fonction de  $Z_C$ )

$$T_i = \frac{i_2}{i_1}$$

En combinant les équations (2) et (4), on obtient :  $-Z_C i_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$

D'où :

$$\boxed{T_i = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}}} \quad \text{equation (5)}$$

On peut observer que le gain en courant dépend de la charge  $Z_C$

- Gain en tension

$$T_v = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\begin{aligned} T_v &= \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_{22}i_2 + Z_{21}i_1}{Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2} \\ &= \frac{Z_{21}i_1 - Z_{22} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1}{Z_{11}i_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1} \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons en posant  $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  ( $\Delta Z$  est le déterminant de la matrice impédance  $Z$ ):

$$T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_C Z_{21}}{Z_{11} Z_C + \Delta Z}$$

- Impédance d'entrée

$Z_E = \frac{v_1}{i_1}$  c'est l'impédance vue de l'entrée du quadripole

$$(1) \Rightarrow v_1 = Z_{11}i_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1 = \frac{Z_{11}(Z_C + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_C + Z_{22}} i_1$$

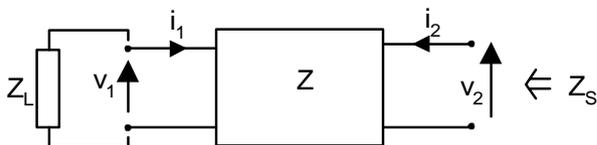
$$Z_E = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_C Z_{11} + \Delta Z}{Z_C + Z_{22}}$$

- Impédance de sortie

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2}$$

C'est l'impédance vue de la sortie du quadripole obtenue en annulant le générateur à l'entrée du quadripole.

Pour déterminer cette impédance, il convient d'annuler le générateur



$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow v_1 = -Z_L i_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$i_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_L} i_2$$

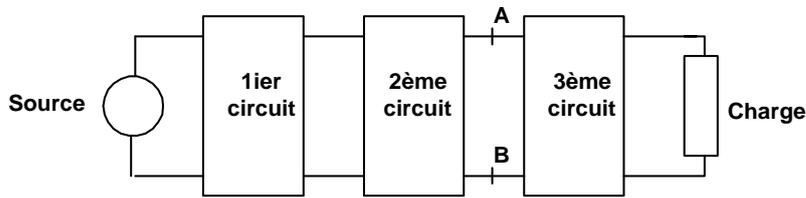
$$(2) \Rightarrow v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = -\frac{Z_{21} Z_{12} i_2}{Z_{11} + Z_L} + Z_{22} i_2 = \left( \frac{-Z_{21} Z_{12} + Z_{11} Z_{22} + Z_L Z_{22}}{Z_{11} + Z_L} \right) i_2$$

$$Z_S = \frac{v_2}{i_2} = \frac{Z_L Z_{22} + \Delta Z}{Z_{11} + Z_L}$$

## 6.6 Adaptation d'impédance

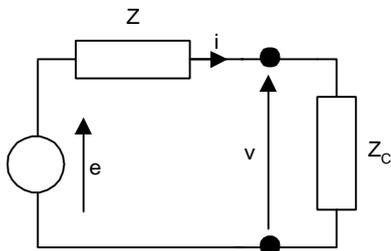
L'objectif de l'adaptation d'impédance est de permettre que le maximum de puissance disponible à la sortie d'un circuit soit transmis au circuit suivant.

La figure suivante montre un exemple d'une chaîne de quadripôles.



L'ensemble en amont de AB peut être remplacé par un générateur de force électromotrice  $e$  d'impédance complexe  $\underline{Z}$  et l'ensemble en aval de AB par une impédance complexe  $\underline{Z}_C$ .

On est donc ramené au problème suivant : soit le schéma suivant :



Avec  $\underline{Z} = R + jX$  et  $\underline{Z}_C = R_C + jX_C$

Déterminons la relation entre  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}_C$  pour avoir le maximum de puissance active transmise.

La puissance active transmise à  $\underline{Z}_C$  est égale à :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{4} (\underline{v}^* \underline{i} + \underline{v} \underline{i}^*) \\
 &= \frac{1}{4} (\underline{Z}_c^* \underline{i}^* \underline{i} + \underline{Z}_c \underline{i} \underline{i}^*) \quad \text{comme } \underline{v} = \underline{Z}_c \underline{i} \text{ et } \underline{v}^* = \underline{Z}_c^* \underline{i}^* \\
 &= \frac{1}{4} (\underline{Z}_c + \underline{Z}_c^*) \underline{i}^* \underline{i} \\
 &= \frac{R_c}{2} \underline{i}^* \underline{i} \quad \text{car } \underline{Z}_c + \underline{Z}_c^* = 2R_c
 \end{aligned}$$

Calculons le courant complexe  $\underline{i}$  et son conjugué  $\underline{i}^*$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{Z}_c} \quad \text{et} \quad \underline{i}^* = \frac{\underline{e}^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*}$$

$$\underline{i} \underline{i}^* = \frac{\underline{e} \underline{e}^*}{(\underline{Z} + \underline{Z}_c)(\underline{Z}^* + \underline{Z}_c^*)}$$

$$\underline{i} \underline{i}^* = \frac{\|\underline{e}\|^2}{(R + R_c)^2 + (X + X_c)^2}$$

d'où

$$P = \frac{R_c}{2} \frac{\|e\|^2}{(R + R_c)^2 + (X + X_c)^2}$$

la puissance  $P$  est fonction de  $R$ ,  $R_c$ ,  $X$  et  $X_c$

$P$  passe par un maximum pour  $\frac{dP}{dX_c} = 0$ . Calculons cette valeur

$$\frac{dP}{dX} = \frac{R_c |e|^2}{2} \frac{(-2(X + X_c))}{((R + R_c)^2 + (X + X_c)^2)^2}$$

$$\frac{dP}{dX_c} = 0 \text{ lorsque } X = -X_c$$

$P$  est alors égale à :

$$P = \frac{R_c}{2} \frac{|e|^2}{(R + R_c)^2}$$

Déterminons maintenant  $R_c$  pour avoir la puissance maximale transmise

Cette valeur s'obtient<sup>4</sup> lorsque  $\frac{dP}{dR_c} = 0$

$$\frac{dP}{dR_c} = \frac{|e|^2}{2} \frac{(R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c)}{(R + R_c)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_c} = 0 \Leftrightarrow (R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 - R_c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = R_c$$

Ainsi, pour avoir un transfert maximal de puissance, il faut  $\underline{Z}_c = \underline{Z}^*$

Conclusion : une charge est adaptée à un générateur d'impédance interne complexe  $\underline{Z}$  lorsque son impédance complexe  $\underline{Z}_c$  est égale à l'impédance interne conjuguée du générateur.

Pour cette égalité, on a  $P = \frac{|e|^2}{8R_c}$

---

<sup>4</sup> En utilisant la relation  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## 7 FILTRAGE, DIAGRAMMES DE BODE

### 7.1 Introduction au filtrage

En régime sinusoïdal permanent nous avons vu que les impédances des bobines et des condensateurs dépendent de la fréquence. Par conséquent, les coefficients des différentes matrices de définition des quadripôles (matrice impédance  $\mathbf{Z}$ , admittance  $\mathbf{Y}$ , hybride  $\mathbf{H}$  ou de transfert  $\mathbf{T}$ ), les fonctions de transfert ( $\mathbf{T}_V$  et  $\mathbf{T}_I$ ) et les impédances d'entrée  $\mathbf{Z}_E$  et de sortie  $\mathbf{Z}_S$  sont aussi dépendantes de la fréquence. Nous allons utiliser cette dépendance pour construire des filtres.

#### 7.1.1 Définitions

Un filtre est un quadripôle transmettant un signal sans atténuation ou avec une atténuation de valeur donnée dans une bande de fréquence déterminée.

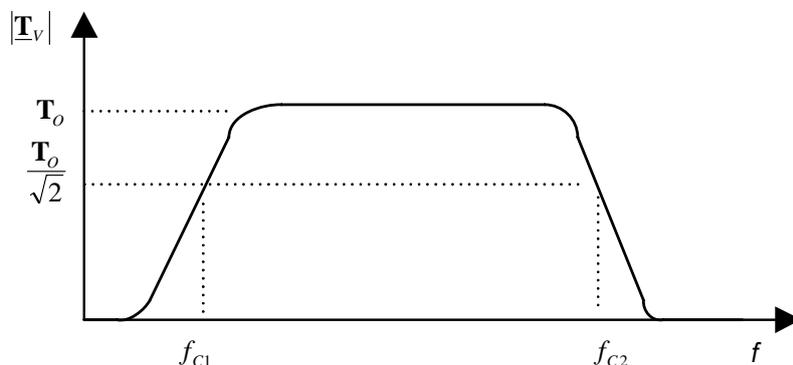
Les filtres sont utilisés dans de nombreuses circonstances. Lorsqu'il s'agit, par exemple, de limiter la bande passante en entrée ou en sortie d'un montage, d'annuler certaines fréquences perturbatrices indésirables (50Hz par exemple ou ses harmoniques qui polluent le réseau de distribution électrique) ou au contraire de ne retenir qu'une bande de fréquences particulière, etc.

Selon la fréquence de travail et le choix d'une amplification active ou non, les technologies employées pour réaliser les filtres analogiques sont différentes : filtres RLC passifs, filtres RC ou LC actifs, filtres à quartz, filtres à constantes réparties (guides d'ondes, etc.). On distingue deux familles de filtres :

Les filtres passifs : réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance et capacité). Ils ne permettent pas d'amplifier ( la puissance de sortie est nécessairement inférieure à la puissance d'entrée)

Les filtres actifs : réalisés à partir d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels, transistors et composants passifs. Ils nécessitent une alimentation spécifique. En contrepartie, ils permettent d'amplifier le signal.

Courbe de réponse en fréquence du module de la fonction de transfert  $\mathbf{T}_V = \frac{V_2}{V_1}$  d'un quadripôle :

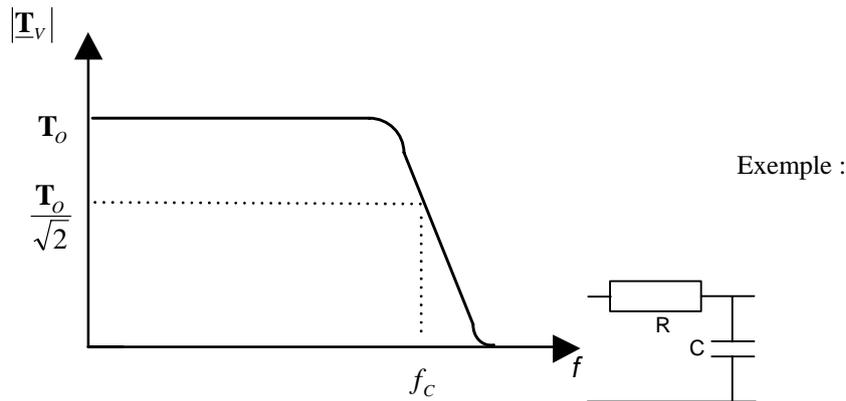


Les fréquences de coupure  $f_{C1}$  et  $f_{C2}$  correspondent aux fréquences pour lesquelles le module de la fonction

de transfert  $|\mathbf{T}_V| = \frac{\mathbf{T}_0}{\sqrt{2}}$

Il existe différentes catégories de filtres selon l'allure de leur courbe de réponse en fréquence :

- le filtre passe bas

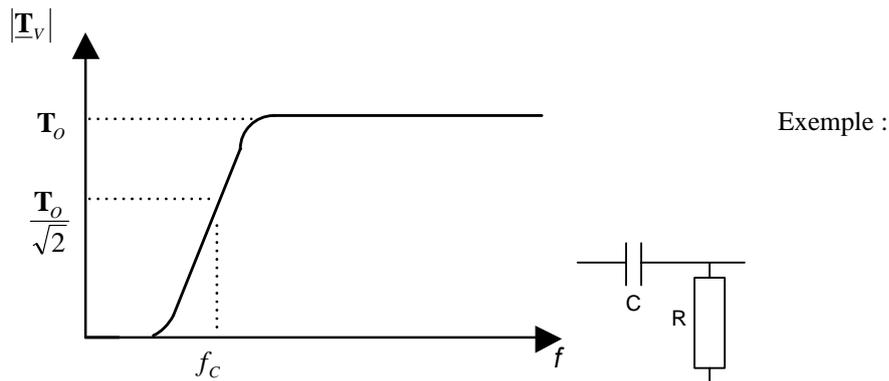


La pente de la courbe de réponse dépend de l'ordre du filtre.

La bande passante est égale à  $f_c$

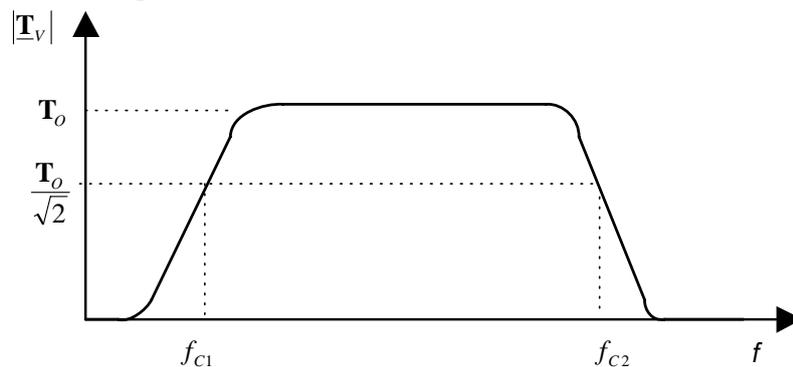
Idéalement, le gain est constant dans la bande passante et nul dans la bande atténuée

- le filtre passe haut



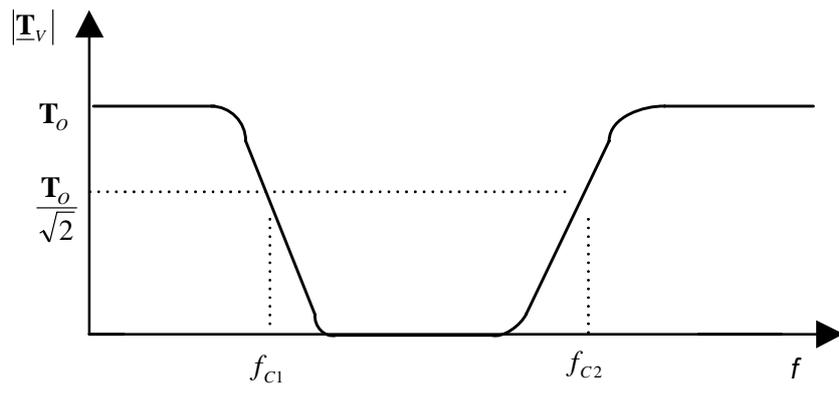
Idéalement, le gain est constant en hautes fréquences (fréquences supérieures à  $f_c$ ) et nul dans la bande atténuée

- le filtre passe-bande



La bande passante est égale à  $f_{c2} - f_{c1}$

- le filtre coupe-bande



## 7.2 Echelle logarithmique et diagramme de Bode

L'étude des filtres portent sur la fonction de transfert complexe  $\underline{\mathbf{T}}_V$  qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{T}}_V = |\underline{\mathbf{T}}_V| \exp(j\varphi)$$

Le module  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  et la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $\underline{\mathbf{T}}_V$  sont dépendants de la pulsation  $\omega = 2\pi f$ . On a :

$$|\underline{\mathbf{T}}_V|(\omega) = \frac{|v_2|}{|v_1|}$$

et

$$\varphi(\omega) = \arg(v_2) - \arg(v_1)$$

Au lieu d'étudier les courbes de réponse en fréquence du module de la fonction de transfert  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$ , on préfère étudier le gain  $G_V$  obtenu à partir de  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  par changement d'échelle :

$$G_V = 20 \log_{10} |\underline{\mathbf{T}}_V|$$

Ce changement d'échelle est résumé sur ce tableau :

$A$	0	$10^{-n}$	...	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0,1	$1/\sqrt{2}$	1	10	$10^2$	$10^3$	...	$10^n$	$+\infty$
$\log_{10} A$	$-\infty$	-n	...	-3	-2	-1	-0,15	0	+1	+2	+3	...	+n	$+\infty$
$20 \log_{10} A$	$-\infty$	-20n	...	-60	-40	-20	-3	0	+20	+40	+60	...	+20n	$+\infty$

Ce changement d'échelle permet d'étaler les amplitudes de faibles valeurs.

Bien que comme  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  le gain  $G_V$  soit sans dimension, on utilise le mot « décibel » pour signifier que l'on a réalisé le changement d'échelle  $20 \log_{10} ( )$

Note : on utilise aussi le décibel pour exprimer les puissances : la puissance en Décibel Watt (dBW) s'exprime comme suit en fonction de la puissance en Watt  $P$  :

$$P_{dB} = 10 \log_{10} P$$

Nous avons vu précédemment que la fréquence de coupure correspond à la fréquence pour laquelle le module

de la fonction de transfert  $|\underline{\mathbf{T}}_V| = \frac{\mathbf{T}_0}{\sqrt{2}}$ . En utilisant la relation entre  $|\underline{\mathbf{T}}_V|$  et  $G_V$  on a :

$$G_V = 20\log_{10} \mathbf{T}_0 - 20\log_{10} \sqrt{2} = G_0 - 3dB$$

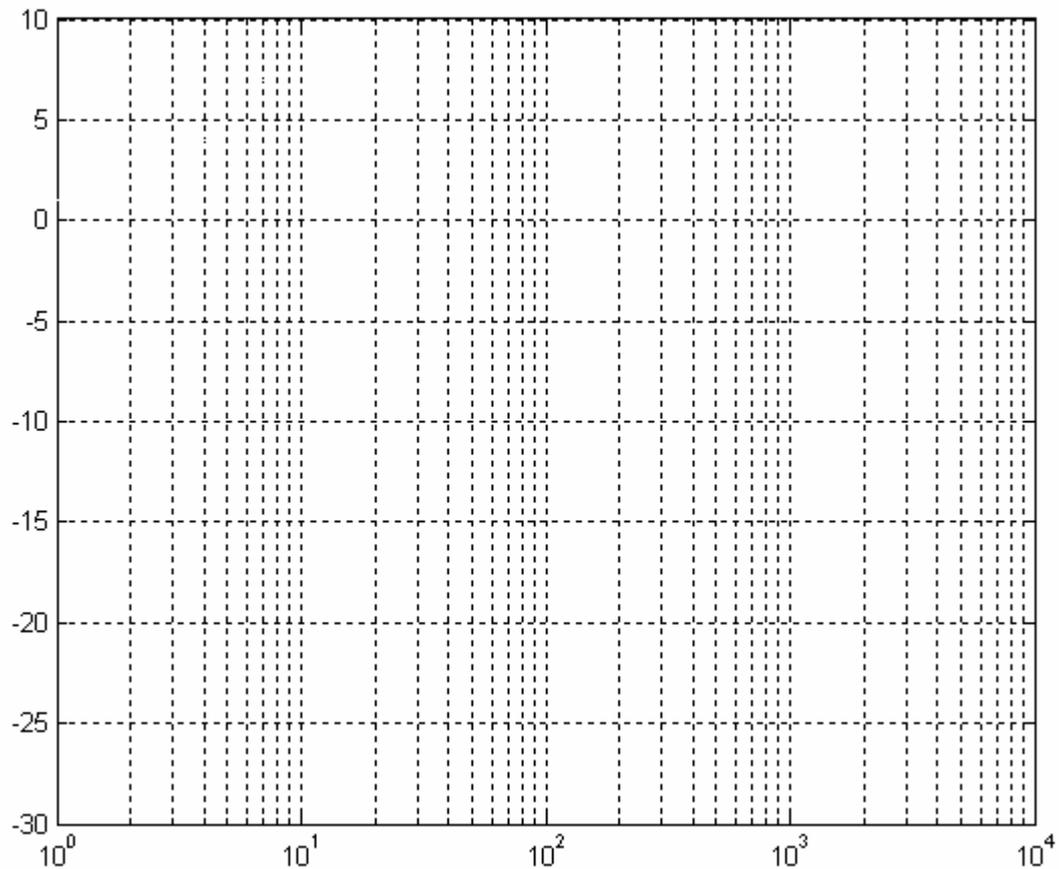
Ainsi la fréquence de coupure correspond à la fréquence pour laquelle le gain de la fonction de transfert

$$G_V = G_0 - 3dB$$

Définition :

Les deux courbes  $G_V(\omega) = f_1(\omega)$  et  $\varphi(\omega) = f_2(\omega)$  constituent le diagramme de Bode du filtre.

En abscisse, les fréquences ou pulsations  $\omega$  sont représentées sur une échelle logarithmique.



Nous allons voir dans le prochain paragraphe qu'il est possible de tracer très rapidement les courbes de réponse du module et la phase des fonctions de transfert sous forme de diagrammes asymptotiques.

Ces diagrammes s'appliquent très rapidement sur des fonctions simples (intégrateur pur, circuit du premier et du second ordre ...) mais aussi sur des fonctions quelconques à condition de les décomposer en fonctions simples.

Les droites asymptotiques s'obtiennent facilement en faisant tendre  $\omega$  vers 0 et vers l'infini.

### 7.3 Fonctions de transfert de base

#### 7.3.1 Intégrateur

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

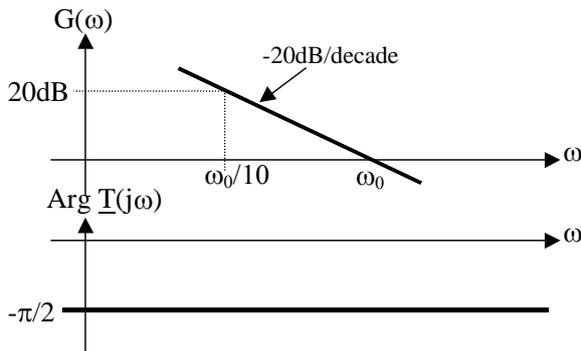
$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad G(\omega) = 20 \log_{10} \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , nous avons le gain  $G(\omega_0) = 0$

Lorsque  $\omega = \omega_0/10$ , nous avons  $G\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = 20 \log_{10} 10 = +20 \text{ dB}$ .

Lorsque  $\omega = 10\omega_0$ , nous avons  $G(10\omega_0) = 20 \log_{10} (-10) = -20 \text{ dB}$ .

Ainsi, le gain  $G(\omega)$  décroît en fonction de la pulsation avec une pente -20dB/décade



#### 7.3.2 Dérivateur

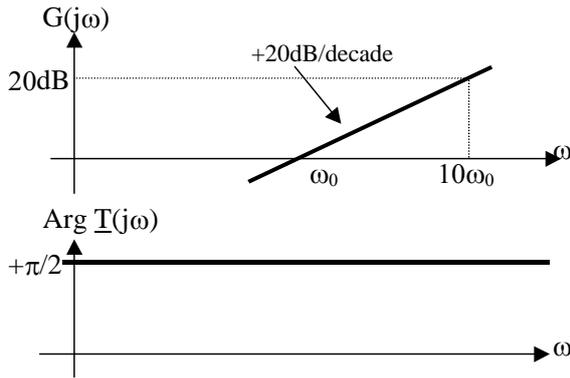
$$\underline{T}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad G(\omega) = 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = +\frac{\pi}{2}$$

Le gain  $G(\omega)$  est égal à 0 lorsque  $\omega = \omega_0$

Le gain  $G(\omega)$  est égal à +20dB lorsque  $\omega = 10\omega_0$

Le gain  $G(\omega)$  croît en fonction de la pulsation avec une pente +20dB/décade



### 7.3.3 Intégrateur réel ou filtre passe bas du premier ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad G(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = -\text{Arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation de coupure à } -3\text{dB}, G(\omega_0) = -3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \quad \varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$$

Cherchons à déterminer les deux asymptotes aux courbes  $G(\omega) = f_1(\omega)$  et  $\varphi(\omega) = f_2(\omega)$  :

Pour  $\omega \gg \omega_0$  ( $\omega$  très supérieure à  $\omega_0$ )

$$\underline{T}(j\omega) \approx -j \frac{\omega_0}{\omega}$$

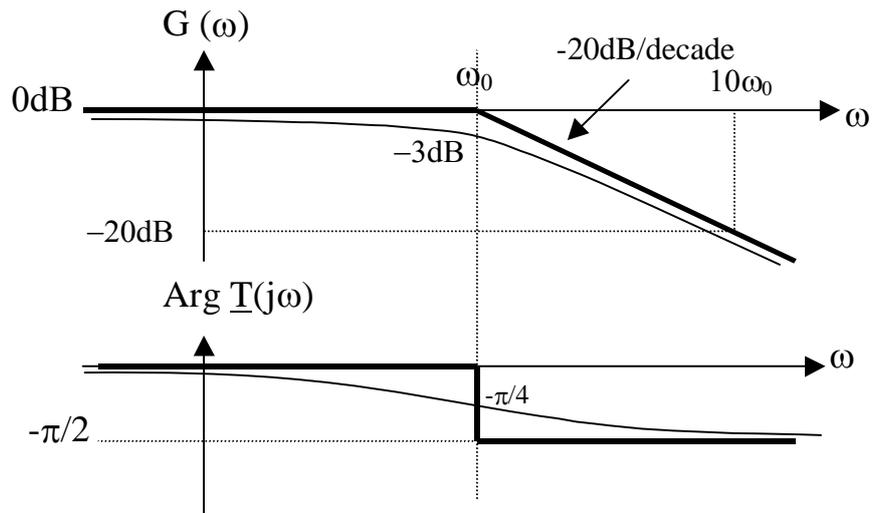
$G(\omega) \approx +20 \log_{10} \frac{\omega_0}{\omega}$  Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de

-20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

Pour  $\omega \ll \omega_0$  ( $\omega$  très inférieure à  $\omega_0$ )

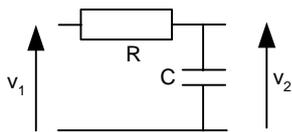
$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



Donnons deux exemples de filtres passe-bas du premier ordre.

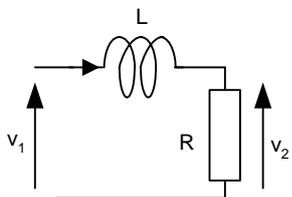
Exemple 1 :circuit RC



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

Exemple 2 :circuit LR



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  on obtient un filtre passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

### 7.3.4 Dérivateur réel

$$\underline{T}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad G(\omega) = +20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = + \text{Arc tan} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation lorsque } G(\omega_0) = +3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \sqrt{2} \quad \varphi(\omega_0) = +\frac{\pi}{4}$$

Déterminons les droites asymptotiques :

Pour  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx +j \frac{\omega}{\omega_0}$$

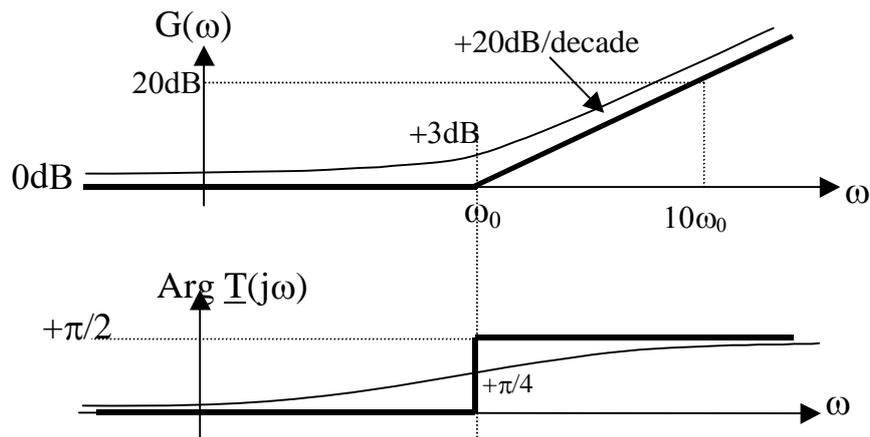
$G(\omega) \approx +20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$ . Cette droite asymptotique croît en fonction de la pulsation avec une pente de +20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

$$\varphi(\omega) \approx +\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



Remarque : comme la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$  est l'inverse de la fonction de transfert du filtre passe bas du premier ordre, on a  $G(\omega) = -G_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$ ,  $\varphi(\omega) = -\varphi_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$

### 7.3.5 Filtre passe-haut du premier ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad G(\omega) = +20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{T}(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 \text{ est la pulsation de coupure lorsque } G(\omega_0) = -3\text{dB} \Leftrightarrow |\underline{T}(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi(\omega_0) = +\frac{\pi}{4}$$

Pour tracer les asymptotes :

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx +j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$G(\omega) \approx +20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$  . La droite asymptotique croît en fonction de la pulsation avec une pente de

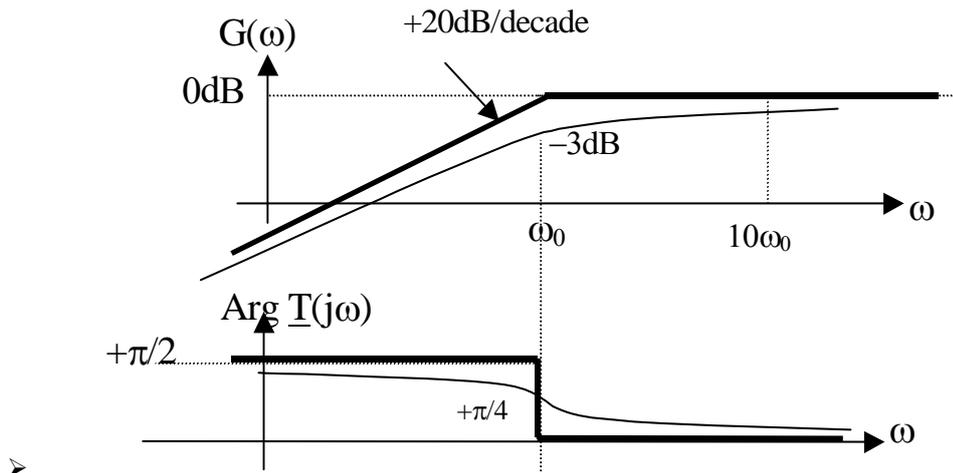
+20dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$  .

$$\varphi(\omega) \approx +\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$



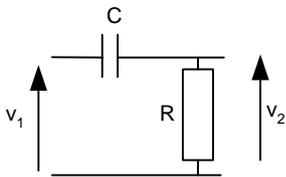
Remarque : comme la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$  est le produit des fonctions de transfert d'un

dérivateur parfait et d'un filtre passe bas, on a :

$$G(\omega) = G_{\text{DERIVATEUR}}(\omega) + G_{\text{PASSE-BAS}}(\omega), \varphi(\omega) = \varphi_{\text{DERIVATEUR}}(\omega) + \varphi_{\text{PASSE-BAS}}(\omega)$$

Donnons deux exemples de filtres passe-haut du premier ordre.

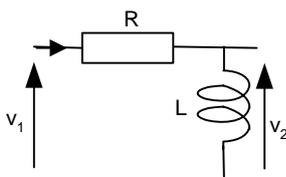
Exemple 1 :circuit CR



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

Exemple 2 :circuit RL



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

Ainsi en posant  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  on retrouve bien la forme d'un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_0$ .

### 7.3.6 filtre passe bas du second ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe bas du second d'ordre s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où  $\xi$  est appelé le facteur d'amortissement du filtre. Le module et la phase de  $\underline{T}(j\omega)$  s'écrivent :

$$|\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = -\text{Arc tan} \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{Donc le gain } G(\omega) = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Lorsque  $\omega = \omega_0$ , on a :

$$G(\omega_0) = -20\log 2\xi$$

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

Nous allons maintenant étudier le gain et la phase de cette fonction de transfert en fonction de  $\xi$ .

Premier cas :  $\xi > 1$

La fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} = \underline{T}_1(j\omega)\underline{T}_2(j\omega)$$

En développement le dénominateur, on obtient les égalités suivantes :

$$1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + j \left( \frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2} \right) - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \\ 2\xi \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \end{cases}$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les solutions de l'équation du second ordre  $\omega^2 - S\omega + P = 0$  avec  $S = \omega_1 + \omega_2$  et  $P = \omega_1 \omega_2$

Soit  $\omega^2 - 2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2 = 0$

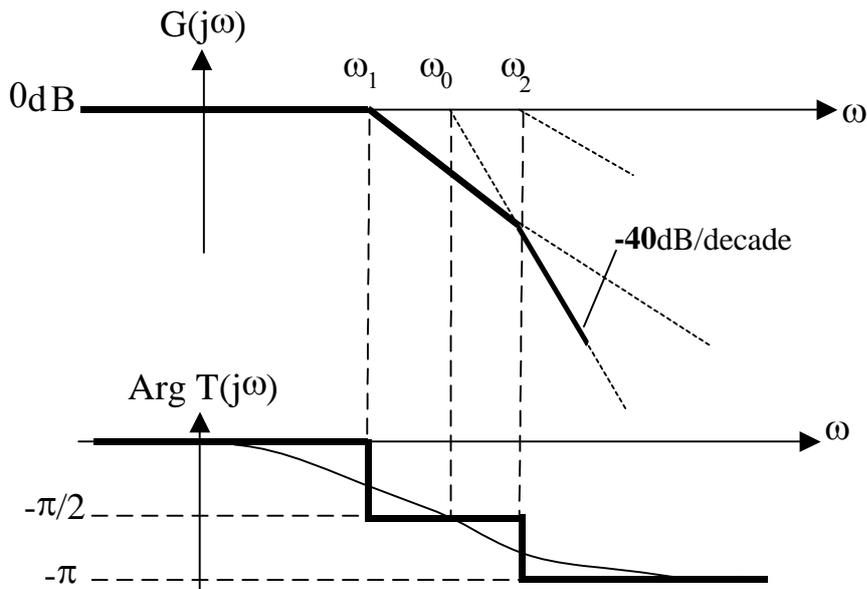
On obtient :

$$\omega_1 = \omega_0 \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

Nous pouvons tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert à partir des diagrammes de Bode des deux fonctions élémentaires. On a :

$$G(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$



Second cas :  $\xi = 1$

Ici, nous avons  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

La fonction de transfert devient :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

$$G(\omega_0) = -20 \log_{10} 2 = -6 \text{ dB}$$

Etudions les droites asymptotiques du gain  $G(\omega)$  et de la phase  $\varphi(\omega)$

Lorsque  $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx \frac{1}{\omega^2} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$G(\omega) \approx 40 \log \frac{\omega_0}{\omega}$$

La droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -40dB/décade. Elle passe par le point  $(\omega_0, 0)$ .

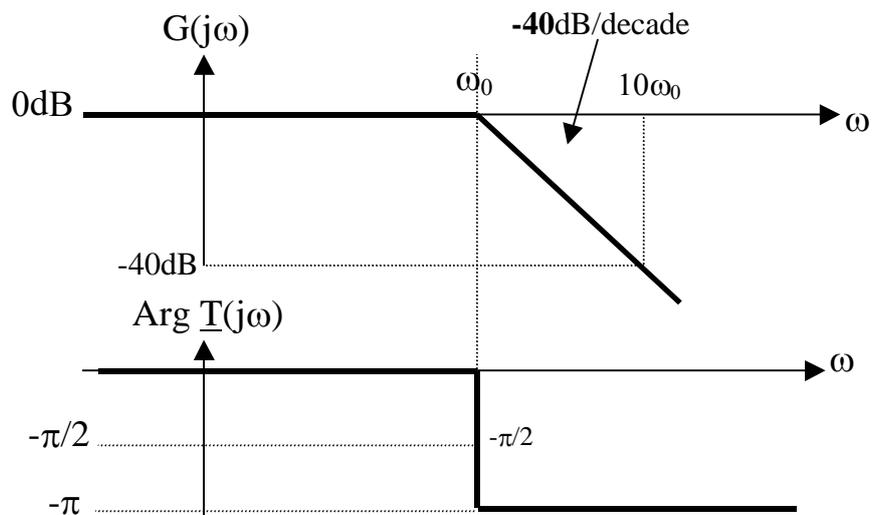
$$\varphi(\omega) \approx -\pi$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{T}(j\omega) \approx 1$$

$$G(\omega) \approx 0dB \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \approx 0$$

Ainsi nous pouvons tracer les droites asymptotiques du filtre passe-bas du second ordre pour  $\xi = 1$  ( ces droites sont aussi valables pour  $\xi < 1$  ):



Troisième cas :  $\xi < 1$

Dans ce cas, les droites asymptotiques sont les mêmes que celles tracées ci-dessus.

Cependant, la décomposition en produit de fonctions élémentaires du premier ordre n'est plus possible car elle impliquerait des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  complexes.

Etudions le module de la fonction de transfert :

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

en posant  $D = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

$|T(j\omega)|$  passe par un maximum lorsque  $\frac{dD}{d\omega} = 0$

$$\frac{dD}{d\omega} = 2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) + 8\xi^2 \frac{\omega}{\omega_0^2} = 0$$

$$\frac{dD}{d\omega} = \left(\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{2\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + 4\xi^2\right) = 0$$

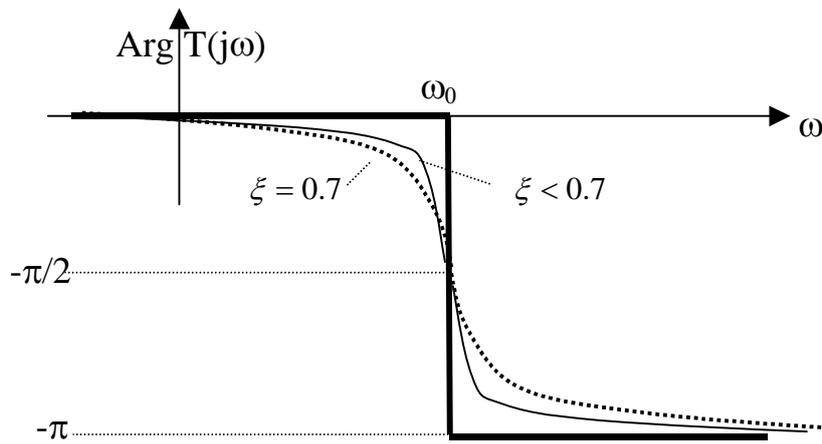
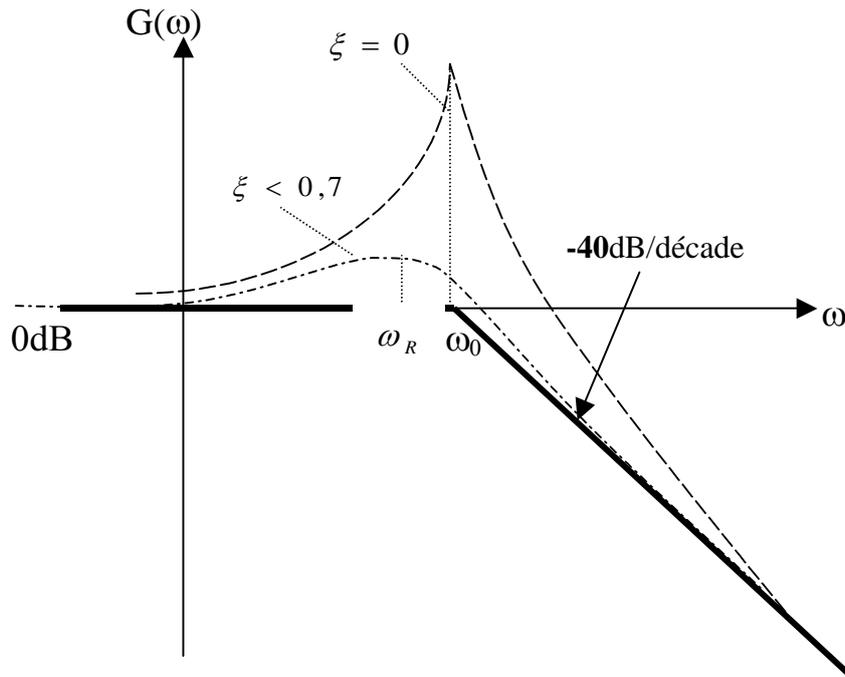
$$\omega_R^2 = (1 - 2\xi^2)\omega_0^2$$

La pulsation de résonance  $\omega_R$  à laquelle le module de la fonction de transfert passe par un maximum existe si et seulement si  $1 - 2\xi^2 > 0$  c'est à dire si  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Déterminons la valeur du module de la fonction de transfert à la pulsation de résonance  $\omega_R$  :

$$|T(j\omega_R)| = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

L'allure des courbes  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\omega$  est la suivante :



### 7.3.7 filtre passe haut du second ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe haut du second d'ordre s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\frac{j^2 \omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{j^2 \omega^2}{\omega_0^2}}$$

### 7.3.8 Fonctions de transfert quelconques

D'une manière générale, la fonction de transfert peut s'écrire comme suit en posant  $p = j\omega$  :

$$T(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_0 p^0}{b_l p^l + b_{l-1} p^{l-1} + \dots + b_0 p^0} \quad k \leq l$$

Cette fraction rationnelle comprend un polynôme en p au numérateur et au dénominateur. Sauf exception, le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur.

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert (numérateur et dénominateur) sous la forme d'un produit de termes en p de degré 2 au maximum si le filtre est d'ordre pair et sous la forme d'un produit de termes de degré 2 et d'un terme de degré 1 si le filtre est d'ordre impair.

Soit par exemple pour le dénominateur :

$$D(p) = (\alpha_i p^2 + \beta_i p + \gamma_i) \dots (\alpha_0 p^2 + \beta_0 p + \gamma_0) \text{ pour un ordre pair}$$

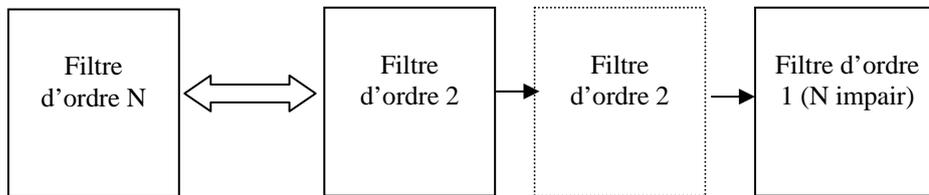
ou

$$D(p) = (\alpha_i p^2 + \beta_i p + \gamma_i) \dots (\beta_0 p + \gamma_0) \text{ pour un ordre impair}$$

On appelle **pôles** les racines du polynôme dénominateur  $D(p)$  et **zéros** les racines du polynôme numérateur  $N(p)$ .

La fonction de transfert à étudier peut donc se mettre sous la forme suivante:

$$T(p) = \frac{\text{Produit de fonctions de base du premier et du second ordre}}{\text{Produit de fonctions de base du premier et second ordre}}$$



Réalisation d'un filtre d'ordre N par mise en cascade de filtre d'ordre 2 au maximum

Ainsi, il sera toujours possible de réaliser les filtres analogiques en cascader des filtres du deuxième ordre et un filtre du premier ordre si le filtre est d'ordre impair.

**Attention :** l'impédance de sortie de chaque filtre doit être très faible devant l'impédance d'entrée du montage qui lui succède.

Exemple :

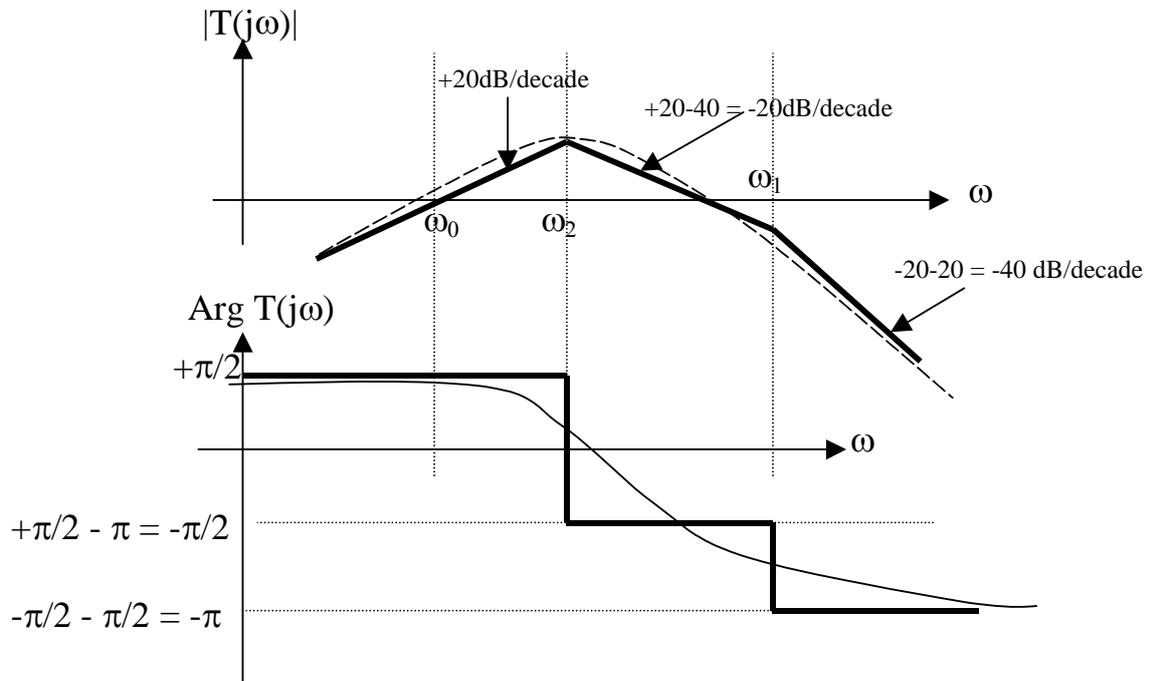
$$T(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)} = \frac{T_1(j\omega)}{T_2(j\omega).T_3(j\omega)}$$

Les diagrammes de Bode sont :

$$G(\omega) = G_1(\omega) - G_2(\omega) - G_3(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) - \varphi_3(\omega)$$

Si on a dans l'ordre  $\omega_0 < \omega_2 < \omega_1$  on peut tracer les diagrammes asymptotiques du gain et de la phase :



## 8 L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL IDEAL

### 8.1 Généralités

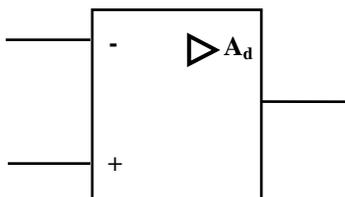
#### 8.1.1 Introduction

L'amplificateur opérationnel (AOP) est un composant intégré essentiel en électronique. Son rôle principal est d'assurer la fonction d'amplification. C'est un composant actif qui nécessite donc une alimentation en tension.

Amplificateur opérationnel signifie :

- amplificateur : c'est la fonction de base de ce composant
- opérationnel : les caractéristiques de cet amplificateur nous donnent la possibilité de créer des fonctions mathématiques telles que dérivée, intégrale, Log... Ces fonctions furent utilisées dans des calculateurs analogiques, et permettaient notamment de résoudre des équations différentielles, et ainsi de simuler des réponses de systèmes physiques divers (mécaniques, acoustiques...).

Le symbole AFNOR et IEEE à employer pour l'amplificateur opérationnel est le suivant:



Notations :

- Entrée dite « non inverseuse » notée +, entrée « inverseuse » notée -.
- Symbole de l'amplification :  $\triangleright$ .
- Amplification différentielle de l'AOP :  $A_d$ .
- Une sortie.

Remarque : On ne fait généralement pas figurer les tensions d'alimentation de l'AOP (surcharge inutile des schémas de montage). Il ne faut pas cependant oublier de cabler les broches d'alimentation de l'AOP pour faire fonctionner correctement le montage !

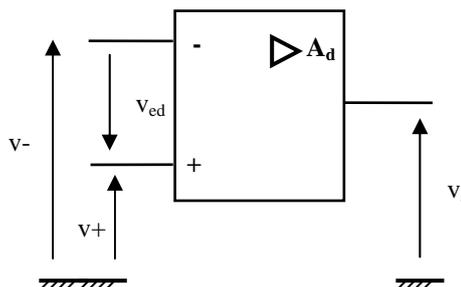
Un amplificateur opérationnel utilise souvent une alimentation symétrique ( $\pm V_{cc}$ ) car généralement il sert pour l'amplification de signaux bipolaires.

#### 8.1.2 Caractéristiques de l'amplificateur opérationnel idéal

La caractéristique principale de l'AOP est sa fonction d'amplification. Elle est donnée par la relation :

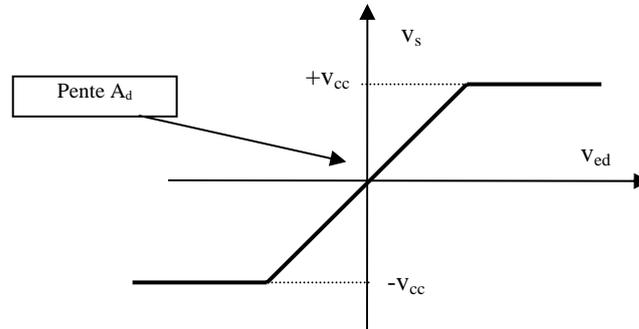
$$v_s = A_d v_{ed}$$

Avec  $v_{ed} = v_+ - v_-$ , tension différentielle d'entrée et  $A_d$  amplification différentielle.



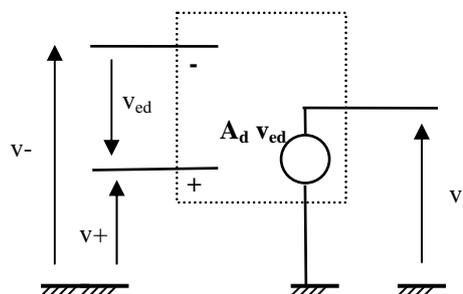
La caractéristique  $v_s = A_d v_{ed}$  est limitée par les tensions d'alimentation de l'AOP. La tension de sortie  $v_s$  ne pas excéder ces tensions d'alimentation.

On distingue donc deux zones : zone linéaire où  $v_s = A_d v_{ed}$ , zone de saturation  $v_s \approx +V_{cc}$  ou  $-V_{cc}$  proche des tensions d'alimentation (saturation de l'amplificateur en sortie).



Par définition un AOP parfait ou idéal possède les caractéristiques suivantes :

- **Les impédances des entrées « + » et « - » sont infinies**, ce qui signifie que les courants entrants dans ces bornes sont nuls :  $i_+ = i_- = 0$ ,
- **L'impédance de sortie est nulle**, ce qui signifie que la tension de sortie  $v_s$  est indépendante du courant délivré par l'AOP,
- **L'amplification différentielle est infinie** :  $A_d = \infty$ .
- **L'amplification différentielle est indépendante de la fréquence des signaux d'entrée**

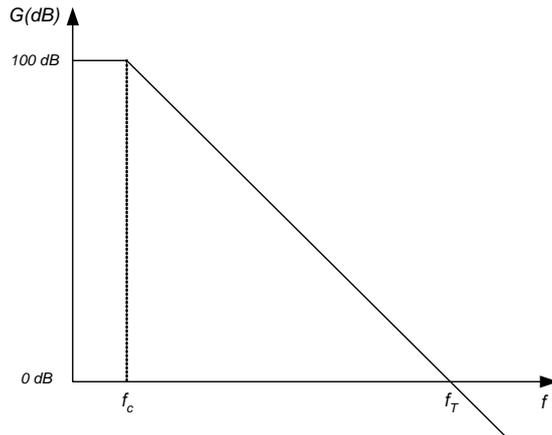


### 8.1.3 Caractéristiques de l'amplificateur opérationnel réel 741

L'amplificateur réel 741 possède les caractéristiques techniques suivantes :

- **Les impédances des entrées « + » et « - » sont égales à 2Mohms.**
- **L'impédance de sortie est égale à 75 ohms**
- **L'amplification différentielle n'est pas infini** :  $A_d = 100000$ .
- **De plus, l'amplification différentielle dépend de la fréquence des signaux d'entrée :**

$$A_d(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \text{ où } \omega_c \text{ est la pulsation de coupure du gain à } -3\text{dB avec } A_0 = 100000$$



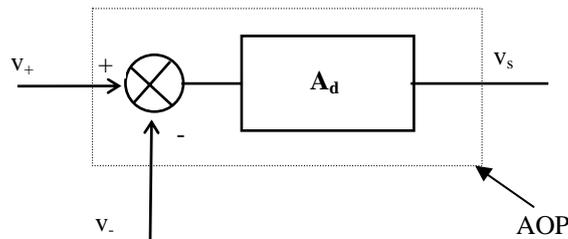
gain d'amplification de l'AOP 741 en fonction de la fréquence.

Le gain est constant de 0 à  $f_c=5,4\text{Hz}$ . Ensuite il décroît de  $-20\text{dB}$  par décade.

## 8.2 AOP utilisé avec contre-réaction ou en boucle fermée

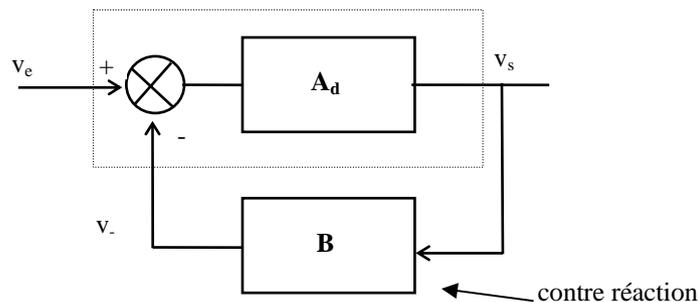
A cause de l'amplification infinie (cas parfait) ou très grande (cas réel), il est impossible d'utiliser un AOP parfait en boucle ouverte : en effet, avec une amplification différentielle infinie la moindre différence de tension entre les entrées « + » et « - » provoque la saturation de la sortie. Par exemple, avec  $A_d = 10^6$  et une tension d'alimentation de 10 V, seulement 10  $\mu\text{V}$  sont nécessaires pour amener l'AOP à saturation. D'autre part, le facteur d'amplification différentielle varie d'un composant à l'autre .

Comme généralement on souhaite imposer un facteur d'amplification constant dans un montage amplificateur, on procédera à une contre-réaction de la sortie sur une des entrées (l'entrée « - »). On peut schématiquement représenter un AOP comme suit. C'est à dire avec un premier étage qui symbolise la différence entre les entrées « + » et « - » suivit d'un étage d'amplification  $A_d$  .



Or, comme  $A_d$  est très grand, l'AOP ne peut pas fonctionner tel quel (c'est à dire en boucle ouverte) en régime linéaire (la tension de sortie atteint la saturation).

Réalisons donc le montage suivant où l'on prélève une fraction de la tension de sortie en la réinjectant dans l'entrée inverseuse et appelons  $v_e$  le signal entrant sur la borne « + ».



L'idée mise en pratique ici consiste à n'amplifier que la différence entre le signal d'entrée et une fraction du signal de sortie. Ce qui convient bien avec un AOP qui, par construction, est un amplificateur différentiel à grand facteur d'amplification.

Ainsi, on comprend aisément que si la tension d'entrée ne varie pas, la tension différentielle  $v_{ed} = v_+ - v_-$  nommée aussi tension d'erreur, se stabilise à tension proche de zéro, nulle pour un AOP parfait : on atteint l'équilibre.

Si la tension d'entrée varie, la tension de sortie suit automatiquement. Un tel système est appelé asservissement en automatisme.

Le facteur d'amplification du système bouclé est facile à calculer à partir des deux équations suivantes :

$$v_s = A_d v_{ed} \text{ et } v_{ed} = v_e - B v_s$$

d'où 
$$A_{BF} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{A_d}{1 + A_d B}$$

Or, si  $A_d B \gg 1$ , c'est à dire que le facteur d'amplification de boucle est grand, alors le facteur d'amplification vaut :

$$A_{BF} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{B}$$

Le facteur d'amplification de boucle est indépendant de la valeur du facteur d'amplification différentiel de l'AOP. Ce qui confère à ce type de montage une très faible dépendance aux variations des caractéristiques intrinsèques des AOP

### 8.3 Montages amplificateurs

Dans tous les montages amplificateurs, la sortie de l'AOP est rebouclée sur l'entrée inverseuse (entrée « - ») de l'AOP.

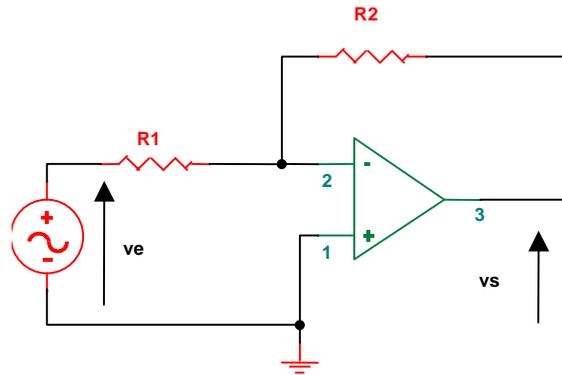
Dans ce paragraphe, nous considérerons que les AOP sont idéaux ( impédance infinie des entrées, gain différentiel infini et impédance de sortie nulle).

Puisque le facteur d'amplification différentiel est infini, la tension différentielle est nulle :

$$v_{ed} = v_+ - v_- = 0 \Leftrightarrow v_+ = v_-$$

#### 8.3.1 Amplificateur inverseur

Le montage est le suivant :



### Amplificateur inverseur

La mise en équation de ce montage est simple et s'appuie sur les hypothèses présentées précédemment.

Puisque l'impédance d'entrée de l'AOP est infinie, aucun courant n'entre dans l'AOP  $\Rightarrow$  les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont parcourues par le même courant.

Donc  $v_e = R_1 i$  et  $v_s = -R_2 i$ .

On dit que la borne « - » est une masse virtuelle car même si elle n'est pas physiquement reliée à la masse, tout se passe comme si elle y était.

On en déduit tout naturellement le facteur d'amplification du montage :

$$A = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Pour réaliser un amplificateur dont le facteur d'amplification est égal à 100, on pourra par exemple utiliser  $R_1 = 1k\Omega$  et  $R_2 = 100k\Omega$ .

### **8.3.2 Amplificateur non inverseur**

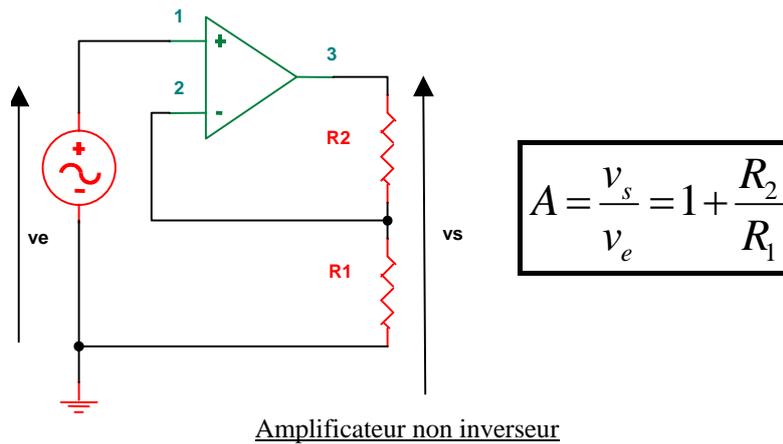
$$v_s = A v_e$$

Dans ce cas le signal d'entrée est appliqué sur la borne « + ».

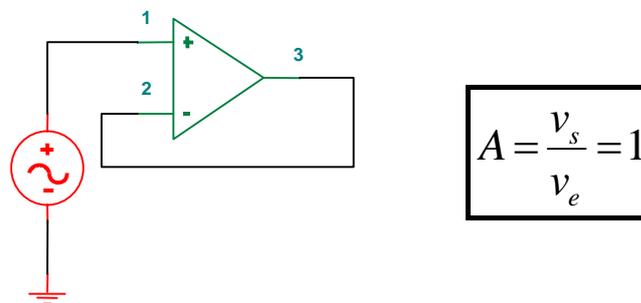
Le calcul du facteur d'amplification de ce montage est très simple en utilisant l'expression du facteur

d'amplification d'un système bouclé. On a ici  $A = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{B}$  avec dans ce cas un diviseur de tension à résistance.

$$B = \frac{R_1}{R_2 + R_1}$$



### 8.3.3 Suiveur de tension ou adaptateur d'impédance



Ce montage possède des propriétés intéressantes : Facteur d'amplification unitaire  $v_e = v_+ = v_- = v_s$ , impédance d'entrée infinie, impédance de sortie nulle.

**Utilisation** : chaque fois que l'on a besoin d'isoler deux portions de circuit pour éviter toute interaction parasite.

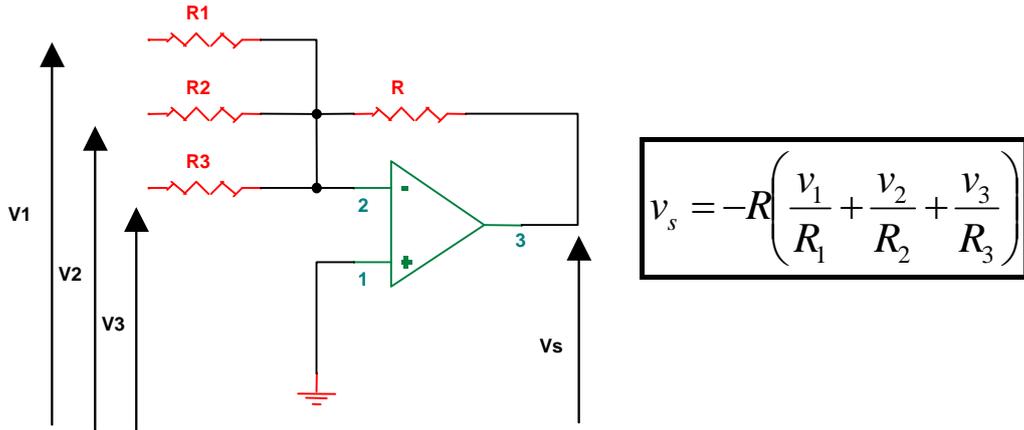
## 8.4 Montages opérationnels

Comme pour les montages amplificateurs, la sortie de l'AOP est rebouclée sur l'entrée inverseuse (entrée « - ») de l'AOP.

On parle ici de montages opérationnels car l'AOP réalise une opération arithmétique sur un ou plusieurs signaux.

### 8.4.1 Additionneur inverseur

$$v_s = -(Av_1 + Bv_2 + \dots + Cv_n)$$



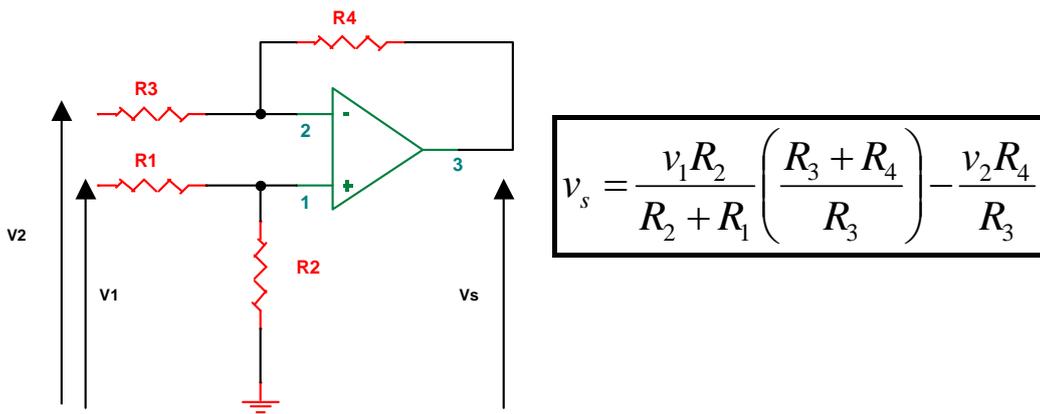
$$v_s = -R \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$

Amplificateur additionneur inverseur

La relation entre  $v_s, v_1, v_2$  et  $v_3$  s'obtient facilement en utilisant le théorème de superposition ou de Millman. Dans le cas de résistances toutes identiques, on obtient la somme pure des signaux d'entrée.

#### 8.4.2 Soustracteur (ou différentiateur)

$$v_s = Av_1 - Bv_2$$



$$v_s = \frac{v_1 R_2}{R_2 + R_1} \left( \frac{R_3 + R_4}{R_3} \right) - \frac{v_2 R_4}{R_3}$$

Amplificateur soustracteur

Détermination de la relation entre  $v_s, v_1$  et  $v_2$  :

On applique le théorème de Millman sur l'entrée « - » de l'AOP et le diviseur de tension l'entrée « + » de l'AOP :

$$v_- = \frac{\frac{v_2}{R_3} + \frac{v_s}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad \text{et} \quad v_+ = \frac{R_2 v_1}{R_1 + R_2}$$

Comme  $v_- = v_+$ , on a : 
$$\frac{v_2}{R_3} + \frac{v_s}{R_4} = \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} \times \frac{R_2 v_1}{R_1 + R_2}$$

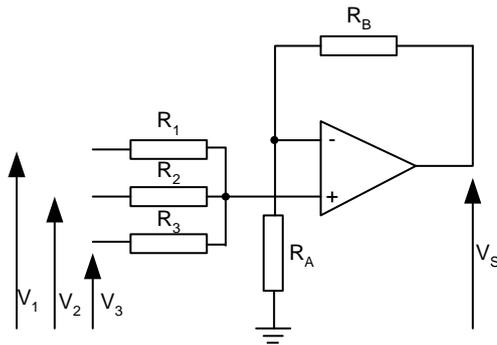
Finalement on obtient : 
$$v_s = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \times \frac{R_2 v_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4 v_2}{R_3}$$

On peut également utiliser le théorème de superposition pour obtenir cette relation.

Si les quatre résistances sont identiques on a alors le résultat escompté :  $v_s = v_1 - v_2$

### 8.4.3 Additionneur non inverseur

$$v_s = (Av_1 + Bv_2 + \dots + Cv_n)$$



$$v_s = K \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$

Amplificateur additionneur

Détermination de la relation entre  $v_s, v_1, v_2$  et  $v_3$  :

On applique le théorème de Millman sur l'entrée « + » de l'AOP et le diviseur de tension l'entrée « - » de l'AOP :

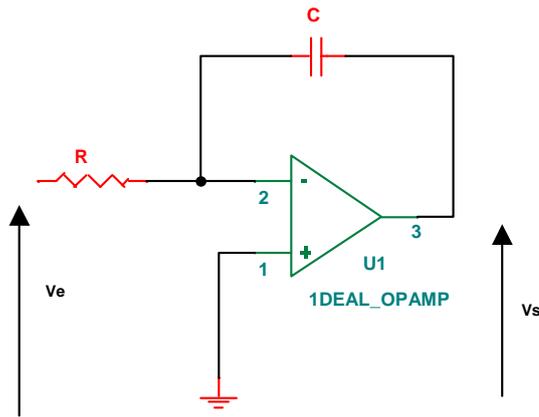
$$v_+ = \frac{\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad \text{et} \quad v_- = \frac{R_A v_s}{R_A + R_B}$$

$$\text{Comme } v_- = v_+, \text{ on a : } v_s = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \frac{R_A + R_B}{R_A} \times \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right) = K \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$

$$\text{Avec } K = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \frac{R_A + R_B}{R_A}$$

### 8.4.4 Intégrateur

Le schéma de montage suivant permet de réaliser l'intégrale d'un signal.



$$v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_e(t) dt$$

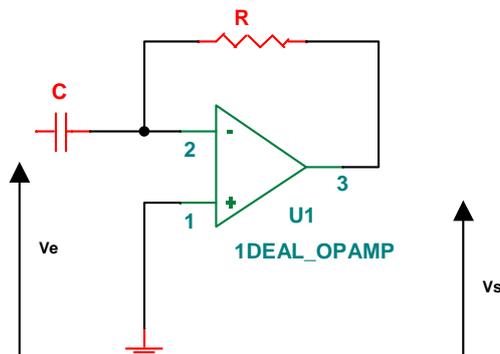
Amplificateur intégrateur

Si le signal est sinusoïdal on peut exprimer le gain complexe de cet intégrateur par :

$$A(j\omega) = -\frac{1}{RCj\omega} = -\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

#### 8.4.5 Dérivateur

Le schéma de montage suivant permet de réaliser la dérivée d'un signal.



$$v_s(t) = -RC \left( \frac{dv_e(t)}{dt} \right)$$

Amplificateur dérivateur

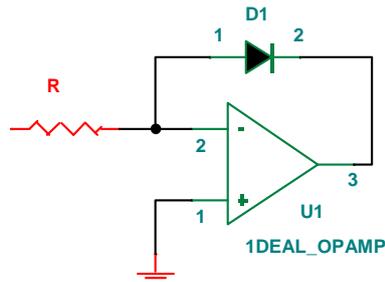
Si le signal est sinusoïdal on peut exprimer le gain complexe de cet intégrateur par :

$$A(j\omega) = -RCj\omega = -j \frac{\omega}{\omega_0}$$

#### 8.4.6 Amplificateur logarithmique

$$v_s = -A \cdot \text{Log}(v_e)$$

Le schéma de montage suivant permet de réaliser le logarithme d'un signal.



La tension directe aux bornes de la diode s'exprimait par :

$$I_D = I_S (e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1)$$

avec  $V_T = kT/e = T/11600$  où  $V_T$  est appelée « tension thermodynamique ».

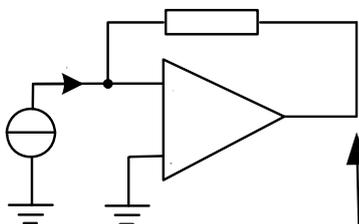
A la température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$  ou  $293^\circ\text{K}$ )  $V_T = 25\text{mV}$ .

Si la tension directe est supérieure à 50 mV, alors  $I_D = I_S e^{\frac{V_D}{\eta V_T}}$ . On a alors la relation suivante entre  $v_s$  et  $v_e$  :

$$v_s = -\eta V_T \ln\left(\frac{v_e}{R I_S}\right)$$

## 8.5 Montages convertisseurs

### 8.5.1 Convertisseur Courant-Tension



$$v_s = -Ri$$

Convertisseur courant-tension

## 8.6 Impact de la bande passante de l'AOP

Nous avons vu que le facteur d'amplification de l'AOP réel dépend de la fréquence.

- $A_d(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$  où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure du gain à -3dB

Lorsque l'amplificateur est réel, on définit le produit gain bande comme suit (facteur d'amplification en basse fréquence multiplié par la pulsation de coupure):

$$GB = A_0\omega_c$$

Reprenons le montage amplificateur inverseur mais en considérant maintenant que le facteur d'amplification est égal à  $A_d(j\omega)$

Déterminons la relation entre  $v_s$  et  $v_e$  :

On applique le théorème de Millman sur l'entrée « - » de l'AOP :

$$v_- = \frac{\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Comme on a  $v_s = A_d(v_+ - v_-) = -A_d v_-$  car  $v_+ = 0$

$$\Rightarrow -\frac{v_s}{A_d} = \frac{v_e R_2}{R_1 + R_2} + \frac{v_s R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow v_s \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}{A_0} \right) = -\frac{v_e R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_s}{v_e} = -\frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}{A_0}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 A_0} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

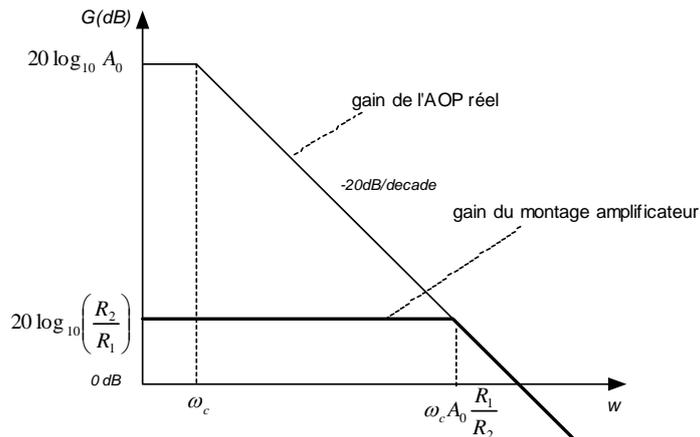
$$\Rightarrow \frac{v_s}{v_e} \approx -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 A_0} j\frac{\omega}{\omega_c}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}} \text{ en négligeant } \frac{R_1 + R_2}{R_1 A_0} \text{ devant } 1$$

$$\text{avec } \Rightarrow \omega'_c = \omega_c \frac{R_1 A_0}{R_1 + R_2}$$

De plus, si le facteur d'amplification est grand  $\frac{R_2}{R_1} \gg 0$ , alors  $\omega'_c \approx \omega_c \frac{R_1 A_0}{R_2}$

Traçons la fonction de transfert ainsi obtenue :

$$G(\omega) = 20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c'^2}}$$



La conséquence pour le montage réalisé est que le gain désiré ne peut être maintenu au delà d'une certaine pulsation.

Calculons le produit gain bande du montage obtenu :

$$GB_{\text{montage}} = \frac{R_2}{R_1} \omega_c A_0 \frac{R_1}{R_2} = A_0 \omega_c = GB$$

On retrouve le même produit gain bande que celui de l'amplificateur opérationnel réel.

**Quelque soit le montage amplificateur utilisant un AOP, on ne peut pas dépasser le produit gain bande imposé par l'amplificateur opérationnel réel.**

## 9 STRUCTURES CLASSIQUES POUR REALISER DES FILTRES ACTIFS

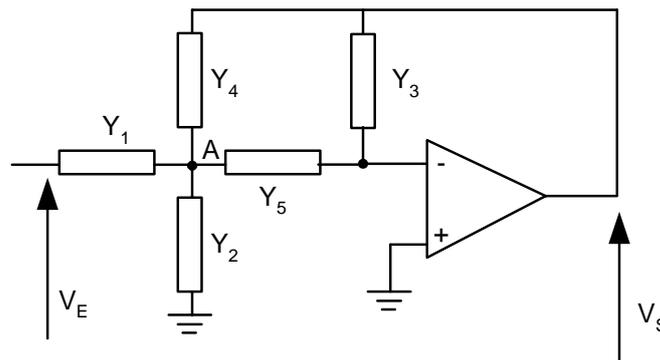
### 9.1 Introduction

Dans ce chapitre, les filtres actifs seront réalisés à l'aide de résistances, de capacités et d'amplificateurs opérationnels (pas de selfs). On évite ainsi les inconvénients des selfs (encombrement, résistance parasite, imprécision,...).

Nous présenterons deux structures fondamentales qui permettent de réaliser des filtres de type passe-bas ou passe-haut du second ordre.

### 9.2 Cellule de Rauch

Cette structure très classique utilise un AOP monté amplificateur (contre réaction négative) et cinq admittances.



Cellule de RAUCH

Déterminons la relation entre  $v_s$  et  $v_E$  :

On applique le théorème de Millman sur le point A :

$$v_A = \frac{v_E Y_1 + v_S Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5}$$

Par ailleurs, on a  $v_A = -\frac{v_S Y_3}{Y_5}$

Finalement, on obtient la relation suivante :

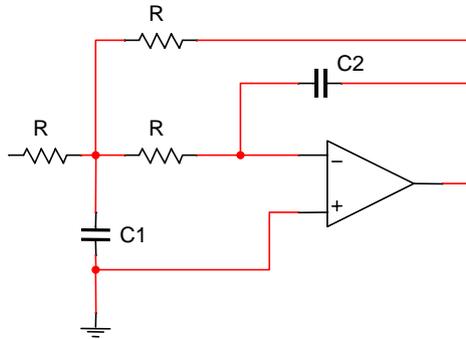
$$\frac{v_S}{v_E} = \frac{-Y_1 Y_5}{Y_4 Y_5 + Y_3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)}$$

### 9.3 Cellule de Rauch pour filtre passe-bas du second ordre

Pour réaliser un filtre passe-bas du second ordre on utilise trois résistances R identiques et deux condensateurs :

Soit  $Y_1 = Y_4 = Y_5 = \frac{1}{R}$ ,  $Y_2 = jC_1\omega$  et  $Y_3 = jC_2\omega$

On a alors le montage suivant :



Structure de Rauch pour les filtres passe-bas du second ordre

A partir de la fonction de transfert général en  $p = j\omega$ , on a :

$$T(p) = \frac{-1}{R^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R^2} + pC_2 \left( \frac{3}{R} + pC_1 \right)}$$

Finalement on obtient :

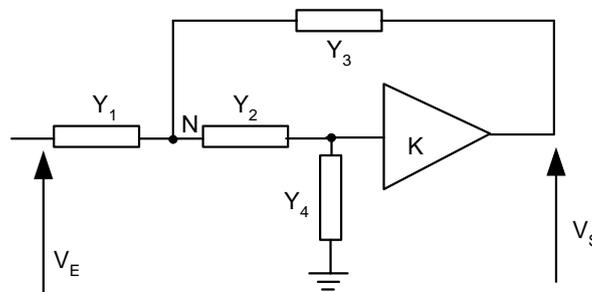
$$T(p) = \frac{-1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$$

En identifiant avec la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre on a :

$$\xi = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}, \quad T_0 = -1$$

#### 9.4 Structure de Sallen et Key ou structure à source de tension commandée

Cette structure utilise un AOP en amplificateur non-inverseur ou inverseur et quatre admittances.



Cellule de Sallen et Key

Déterminons la relation entre  $v_s$  et  $v_E$  :

On applique le théorème de Millman sur le point N :

$$v_N = \frac{v_E Y_1 + \frac{v_s}{K} Y_2 + v_s Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Par ailleurs, on a  $\frac{v_s}{K} = \frac{\frac{1}{Y_4}}{\frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_4}} v_N = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_4} v_N$

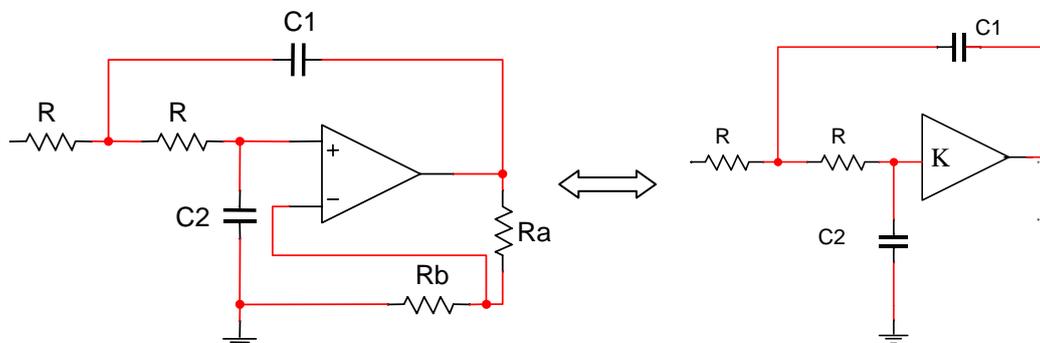
Finalement, on obtient la relation suivante :

$$\frac{v_s}{v_E} = \frac{KY_1 Y_2}{Y_2(Y_1 + Y_3(1-K)) + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}$$

### 9.5 Structure de Sallen et Key pour filtre passe-bas du second ordre

Pour réaliser un filtre passe-bas du second ordre on utilise deux résistances R identiques et deux condensateurs :

Soit  $Y_1 = Y_2 = \frac{1}{R}$ ,  $Y_3 = jC_1\omega$  et  $Y_4 = jC_2\omega$



Structure non-inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-bas du second ordre

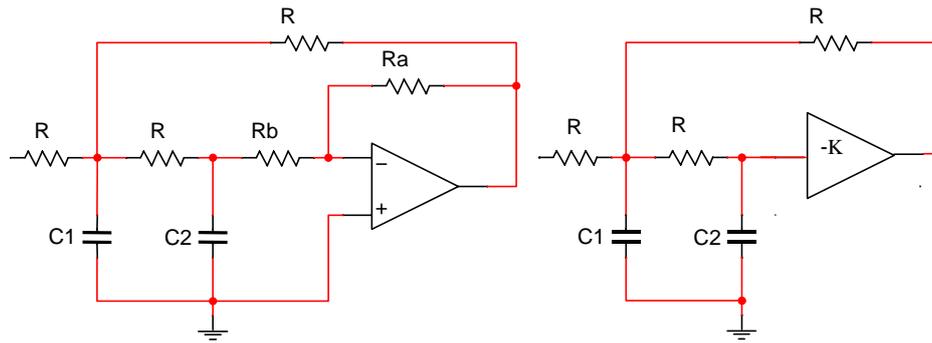
La fonction de transfert en  $p = j\omega$  de ce filtre est la suivante :

$$T(p) = \frac{K}{R^2 C_1 C_2 p^2 + R(2C_2 + C_1(1-K))p + 1}$$

Avec,

$$2\zeta = \frac{2C_2 + C_1(1-K)}{\sqrt{C_1 C_2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}, \quad T_0 = K = 1 + \frac{Ra}{Rb}$$

La structure inverseuse de Sallen et Key est la suivante :



Structure inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-bas du second ordre

La fonction de transfert en  $p = j\omega$  de ce filtre est la suivante :

$$T(p) = \frac{-K}{K+2} * \frac{1}{\frac{R^2 C_1 C_2}{K+2} p^2 + \frac{R(3C_2 + C_1)}{K+2} p + 1}$$

Avec,

$$2\xi = \frac{3C_2 + C_1}{\sqrt{(K+2)C_2 C_1}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K+2}{C_1 C_2}}, \quad T_0 = \frac{-K}{K+2}, \quad K = \frac{Ra}{Rb}$$

## 9.6 Transformation passe-bas -> passe-haut

La transformation de gabarit permet de réaliser un filtre passe-haut à partir de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas.

théorème de MITRA pour la transformation passe-bas -> passe-haut:

Etant donné un réseau composé de résistances et de condensateurs, transformons-le en remplaçant chaque résistance  $R_i$  par une capacité  $C'_i = 1/R_i$  et chaque capacité  $C_i$  par une résistance  $R'_i = 1/C_i$ .  
On remplace aussi  $p$  par  $1/P$  dans l'expression de la fonction de transfert du filtre

Exemple : le filtre passe-bas du premier ordre :

$$T(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

devient,

$$T(P) = \frac{1}{\frac{1}{R'C'P} + 1} = \frac{R'C'P}{R'C'P + 1}$$

On retrouve la forme classique d'un filtre passe-haut du premier ordre réalisé avec une résistance et un condensateur.

## 9.7 Structure de Rauch pour filtre passe-haut du second ordre

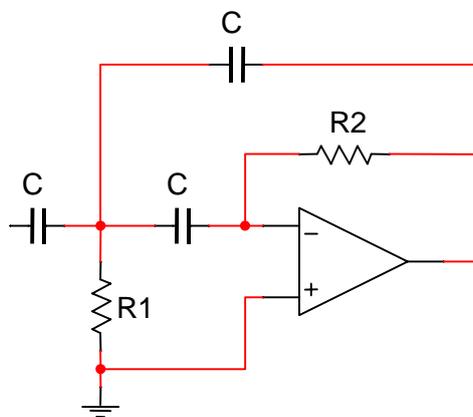
Appliquons-le à la fonction de transfert du filtre passe-bas du second ordre du filtre à structure de Rauch la transformation passe-bas  $\rightarrow$  passe-haut :

$$T(p) = \frac{-1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$$

devient, en prenant,  $R'_1 = 1/C_1$  et  $R'_2 = 1/C_2$  et bien sûr  $p = 1/P$

$$T'(P) = \frac{-1}{\frac{1}{C_1^2 R'_1 R'_2 P^2} + \frac{3}{C_1 R'_2 P} + 1} = \frac{-R'_1 R'_2 C_1^2 P^2}{1 + 3R'_1 C_1 P + R'_1 R'_2 C_1^2 P^2}$$

Ainsi, pour réaliser un filtre passe-haut du second ordre on utilise trois condensateurs identiques et deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  :

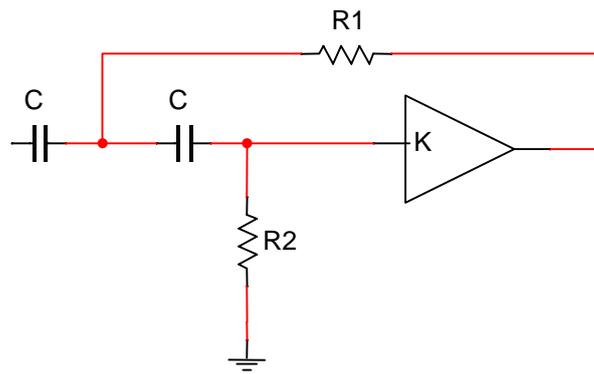


Structure de RAUCH pour les filtres passe-haut du second ordre

$$T(P) = \frac{-R_1 R_2 C^2 P^2}{1 + 3R_1 C P + R_1 R_2 C^2 P^2} \text{ et } \xi = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}, \Omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}, T_\infty = -1$$

## 9.8 Structure de Sallen et Key pour filtre passe-haut du second ordre

Soit  $Y_1 = Y_2 = jC\omega$ ,  $Y_3 = \frac{1}{R_1}$  et  $Y_4 = \frac{1}{R_2}$



Structure non-inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-haut du second ordre

$$T(P) = \frac{KR_1R_2C^2P^2}{R_1R_2C^2P^2 + (2R_1 + R_2(1-K))CP + 1}$$

Avec,

$$2\xi = \frac{2R_1 + R_2(1-K)}{\sqrt{R_1R_2}}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}, \quad T_\infty = K$$

## 10 REALISATION DE FILTRES

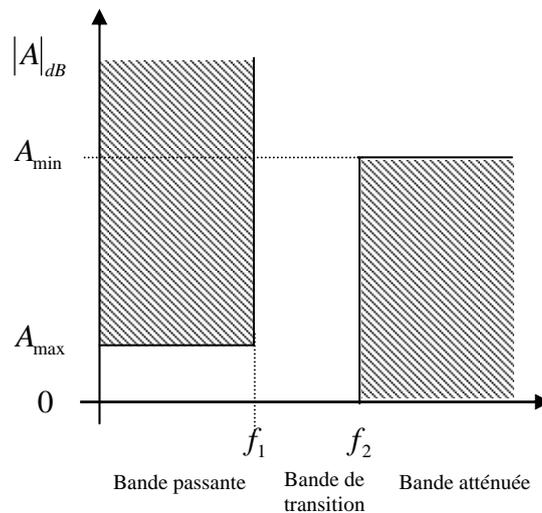
### 10.1 Le gabarit

Les contraintes sur le filtre à réaliser sont généralement reportées dans un gabarit. Ce gabarit représente la courbe désirée d'atténuation (en décibel) en fonction de la fréquence du filtre. Un filtre est construit pour respecter au mieux ce gabarit. On rappelle que l'atténuation est l'inverse du module de la fonction de transfert.

On définit pour un filtre passe-bas quatre paramètres :

- L'atténuation maximale dans la bande passante  $A_{\max}$ ,
- L'atténuation minimale dans la bande atténuée  $A_{\min}$ ,
- La largeur de la bande de transition définie par : la première fréquence atténuée  $f_2$  et la dernière fréquence passante  $f_1$ .

Le schéma suivant présente le gabarit souhaité d'un filtre passe-bas avec les quatre paramètres précédents.



Gabarit d'atténuation d'un filtre passe-bas

### 10.2 Différents types de filtres

Il existe différents types de filtres selon l'application souhaitée. Les principaux types de filtres et leurs caractéristiques sont résumés dans le tableau suivant :

Type	Bande passante	Bande atténuée	Chute ou raideur	Réponse temporelle
Butterworth	Plate	Monotone	Bonne	Bonne
Chebyshev	Ondulée	Monotone	Très bonne	Faible
Elliptique	Ondulée	Ondulée	La meilleure	Faible
Bessel	Plate	Monotone	Faible	La meilleure

Pour illustrer la chute ou raideur des différents filtres nous indiquons dans le tableau suivant les atténuations à la fréquence double de la fréquence de coupure pour des filtres d'ordre 6 :

Type	Atténuation à $f_c$	Atténuation à $2f_c$
Butterworth	3 dB	36 dB
Chebyshev	3 dB	63 dB
Elliptique	3 dB	93 dB
Bessel	3 dB	14 dB

### 10.3 Etude du filtre passe-bas de Butterworth

#### 10.3.1 Introduction

Le filtre passe-bas de Butterworth d'ordre  $N$  est défini par le module carré de sa fonction de transfert de la manière suivante :

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{T_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

#### Remarques préalables :

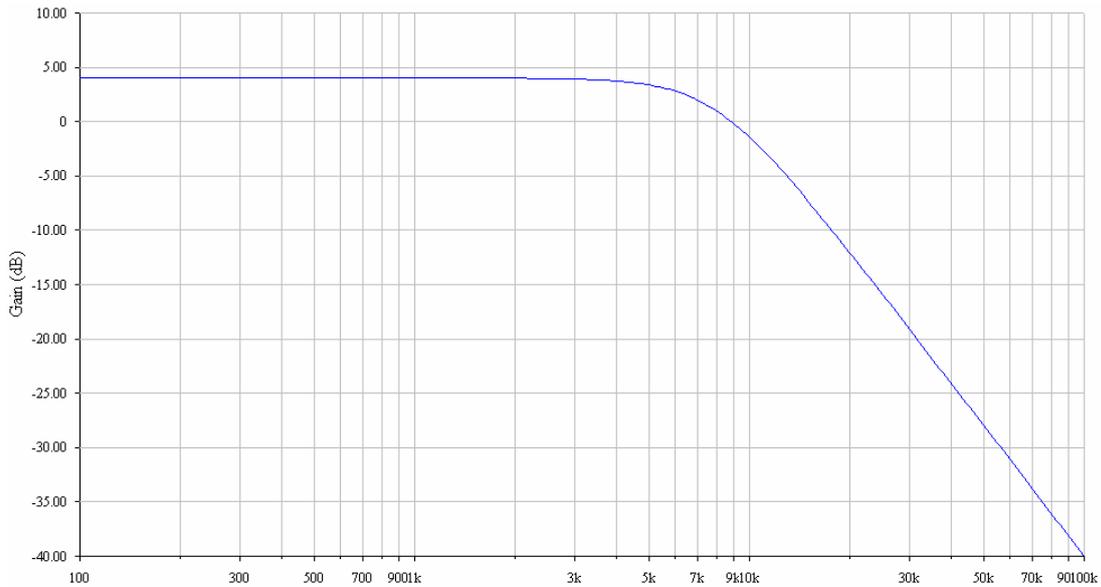
- *Quel que soit l'ordre  $N$  de ce filtre, l'atténuation à la pulsation fréquence  $\omega = \omega_0$  est toujours de 3 dB. Les réponses en fréquence des filtres de Butterworth d'ordre  $N$  quelconque passent donc toutes par ce point caractéristique. En effet, à  $\omega = \omega_0$ , on a :*

$$|T(j\omega_0)|/T_0 = \frac{1}{\sqrt{1+(1)^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

soit

$$20\log(|T(j\omega_0)|/T_0) = 3 \text{ dB}.$$

- *Sa courbe de réponse en fréquence est la plus plate possible dans la bande passante*



Réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth d'ordre  $N = 2$

Nous allons maintenant étudier comment ce filtre peut satisfaire à un gabarit passe-bas imposé. Sa courbe de réponse en fréquence doit s'inscrire à l'intérieur de ce gabarit (en dehors de la zone grisée).

**10.3.2 Détermination de l'ordre  $N$  du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit**

On remarque que, d'après l'expression précédente, deux paramètres seulement permettent de caractériser entièrement ce filtre :  $N$  et  $\omega_0$  (si on exclut le gain statique  $T_0$  qui peut facilement être réalisé grâce un simple montage à amplificateur opérationnel). On pourra donc dans un premier temps considérer que l'amplification en basse fréquence vaut  $T_0 = 1$ .

Le gabarit impose qu'on satisfasse aux deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 20 \log_{10} |T(j\omega_1)| \geq -A_{\max} \\ 20 \log_{10} |T(j\omega_2)| \leq -A_{\min} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} 10 \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{2N} \right) \leq A_{\max} \\ 10 \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{2N} \right) \geq A_{\min} \end{cases}$$

Soit finalement dans le cas limite ,

$$\begin{cases} 2N(\ln \omega_1 - \ln \omega_0) = \ln(10^{0.1A_{\max}} - 1) \\ 2N(\ln \omega_2 - \ln \omega_0) = \ln(10^{0.1A_{\min}} - 1) \end{cases}$$

En retranchant membre à membre, on obtient alors l'expression donnant l'ordre  $N$  du filtre de Butterworth qui satisfait au gabarit souhaité.

$$N = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{\ln(10^{0.1A_{\min}} - 1) - \ln(10^{0.1A_{\max}} - 1)}{(\ln \omega_2 - \ln \omega_1)} \right\rceil$$

Où  $\lceil a \rceil$  signifie  $a$  arrondi à la valeur entière supérieure.

On se sert souvent de cette expression, mais il est aussi très courant d'utiliser des abaques pour lesquels on travaille en fréquences normalisées.

Exemple :  $A_{\max} = 1dB$ ,  $A_{\min} = 40dB$ ,  $f_1 = 10kHz$ ,  $f_2 = 20kHz$

L'ordre du filtre de Butterworth satisfaisant au gabarit est la valeur de  $N$  immédiatement supérieure à celle calculée avec la formule précédente. Soit,  $N = 8$  ( $N = 7.618$ , valeur calculée)

### 10.3.3 Détermination de la fonction de transfert du filtre

Comme nous l'avons vu, le filtre de Butterworth n'est défini que par  $|T(j2\pi f)|^2$ , module carré de sa fonction de transfert. Il nous faut donc déterminer la fonction de transfert  $T(j2\pi f)$ . Or, on sait que,

$$|T(j2\pi f)|^2 = T(j2\pi f) * T^*(j2\pi f) = T(j2\pi f) * T(-j2\pi f)$$

On a bien,

$$T^*(j2\pi f) = T(-j2\pi f)$$

Car tous les coefficients de la fonction de transfert sont réels. En effet, elle est réalisée à partir de composants passifs de type (L, C et R) associés avec des amplificateurs opérationnels (filtre actif) ou non (filtre passif).

Par commodité et pour faciliter la lisibilité, on posera par la suite  $p = j\omega$ . On aura alors :

$$T(p) * T(-p) = \frac{T_0^2}{1 + \left(\frac{p}{j\omega_0}\right)^{2N}} = \frac{T_0^2}{1 + (-1)^N \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N}} \quad \text{car } j^{2N} = (-1)^N$$

### 10.3.4 Détermination des pôles du filtre de Butterworth

Pour factoriser  $|T(p)|^2$  sous la forme  $T(p) * T(-p)$ , on va calculer les racines ou pôles  $p_i$ . On rappelle que les pôles sont les valeurs qui annulent le dénominateur d'une fonction de transfert.

On pourra ainsi l'écrire :

$$|T(p)|^2 = \frac{T_0^2}{\left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_1}{\omega_0}\right) \left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_2}{\omega_0}\right) \dots \left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_{2N}}{\omega_0}\right)}$$

On considérera deux cas selon que  $N$  est impair ou  $N$  est pair.

- Cas  $N$  impair : filtre d'ordre impair.

$$1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = 0, \text{ soit } \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = 1$$

Les racines du dénominateur sont les  $2N$  racines de l'unité. On les trouve facilement en exprimant l'égalité précédente sous la forme suivante (remarquer que  $1 = e^{jk2\pi} = \cos(k2\pi)$ ) :

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = e^{jk2\pi}, k \text{ entier}$$

D'où, on tire alors immédiatement la valeur de tous les pôles :

$$\boxed{p_i / \omega_0 = e^{jk\pi/N}} \text{ avec } i = k + 1 \text{ et } k \in [0, 2N - 1]$$

On remarque que :

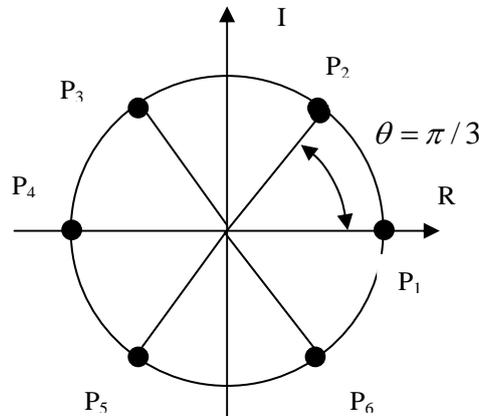
- les pôles sont tous disposés sur un cercle de rayon unité dans le plan complexe et espacés d'un angle  $\theta = k\pi / N$ ,
- ils sont deux à deux complexes conjugués.

Exemple :  $N = 3$ , filtre du troisième ordre.

On a donc,  $p_i / \omega_0 = e^{jk\pi/3}$ ,

D'où les pôles suivants :

$$p_1 / \omega_0 = 1, p_2 / \omega_0 = e^{j\pi/3}, p_3 / \omega_0 = e^{j2\pi/3}, p_4 = -p_1, p_5 = p_3^*, p_6 = p_2^*$$



Disposition des pôles pour un filtre d'ordre  $N = 3$

Les trois pôles à gauche de l'axe imaginaire sont  $p_3, p_4$  et  $p_5$ . Ils correspondent à  $T(p)$

Les trois pôles à droite de l'axe imaginaire sont  $p_1, p_2$  et  $p_6$ . Ils correspondent à  $T(-p)$

Ainsi, la fonction de transfert suivante est la suivante :

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_3}{\omega_0}\right) \left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_4}{\omega_0}\right) \left(\frac{p}{\omega_0} - \frac{p_5}{\omega_0}\right)}$$

$$= \frac{T_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{p}{\omega_0} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)}$$

Finalement, on obtient :

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(p/\omega_0 - \frac{1}{2}(-1 + j\sqrt{3})\right)\left(p/\omega_0 - \frac{1}{2}(-1 - j\sqrt{3})\right)(p/\omega_0 + 1)}$$

Le lecteur pourra vérifier que ces valeurs correspondent à celles reportées dans le tableau donnant les polynômes normalisés ( $\omega_0 = 1$ ) du dénominateur des filtres de Butterworth :

- Cas N pair : filtre d'ordre pair.

On a alors,

$$1 + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = 0, \text{ soit } \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = -1$$

Les racines du dénominateur sont les  $2N$  racines de  $-1$  que l'on peut facilement trouver si l'on exprime l'équation précédente sous la forme :

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2N} = e^{j(\pi+k2\pi)}, k \in [0, 2N-1]$$

D'où, on tire alors immédiatement la valeur de tous les pôles :

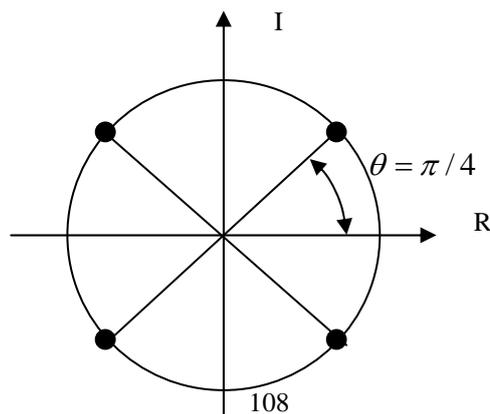
$$\boxed{p_i / \omega_0 = e^{j\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N}\right)}} \text{ avec } i = k + 1$$

Exemple :  $N = 2$ , filtre du deuxième ordre.

On a donc,  $p_i / \omega_0 = e^{j\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$ ,

D'où les pôles suivants :

$$p_1 / \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j), p_2 / \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j), p_3 = p_2^*, p_4 = p_1^*$$



### Disposition des pôles pour un filtre d'ordre N = 2

Finalement, on obtient la fonction de transfert suivante:

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(p/\omega_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j)\right)\left(p/\omega_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j)\right)}$$

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(p^2/\omega_0^2 + \sqrt{2}p/\omega_0 + 1\right)}$$

Ordre du filtre

2	$(p^2 + \sqrt{2}p + 1)$
3	$(p+1)(p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p+1)(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$
7	$(p+1)(p^2 + 1.0819p + 1)(p^2 + 1.2469p + 1)(p^2 + 0.4450p + 1)$

Tableau des polynômes normalisés ( $\omega_0 = 1$ ) des filtres passe-bas de Butterworth

Pour le cas N=4, on pourra comparer le filtre ainsi obtenu par rapport à un filtre composé de deux filtres du second ordre avec  $\xi = 0,707$  (figure TBD)

## **10.4 Etude du filtre passe-bas de Tchebychev**

### **10.4.1 Introduction**

Les filtres passe-bas de Tchebychev, comme ceux de Butterworth, sont classés parmi les filtres dits « polynomiaux » car leur fonction de transfert présente un dénominateur sous la forme d'un polynôme et un numérateur avec une constante. En vérité, ce sont des filtres qui possèdent des pôles, mais pas de zéro de transmission (pas de polynômes au numérateur).

Les filtres de Tchebychev ont été conçus pour tolérer une plus ou moins légère ondulation du module de leur fonction de transfert dans la bande passante et une atténuation croissant de manière continue dans la bande atténuée. Ceci leur permet, en principe d'avoir une pente plus raide à la fréquence de coupure qu'un filtre de Butterworth du même ordre.

### **10.4.2 Présentation du filtre de Tchebychev**

Le filtre passe-bas de Tchebychev d'ordre N est défini par le module carré de sa fonction de transfert de la manière suivante :

$$\boxed{|T(j2\pi f)|^2 = \frac{T_0^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{f}{f_0}\right)}}$$

avec la relation de récurrence suivante,

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 2\frac{\omega}{\omega_0}C_{n-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + C_{n-2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cos\left(n \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) \quad \text{pour } \omega \leq \omega_0 \text{ dans la bande passante}$$

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cosh\left(n \operatorname{arg} \cosh\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) \quad \text{pour } \omega > \omega_0 \text{ dans la bande atténuée}$$

On trouve les premières valeurs des polynômes de Tchebychev en appliquant la relation de récurrence précédente, soit :

$$C_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1, \quad C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad C_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1,$$

$$C_3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - 3\frac{\omega}{\omega_0}, \quad C_4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 8\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 8\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1, \quad \text{etc.}$$

On remarque, comme il a été dit dans l'introduction, que cette fonction de transfert ondule sous la forme d'un  $\cos(nx)$  dans la bande passante, ce qui permet de répartir uniformément l'imperfection d'atténuation dans toute la bande passante.

### 10.4.3 Calcul du taux d'ondulation dans la bande passante

Les filtres de Tchebychev présentent une ondulation dans la bande passante qui dépend de la valeur du paramètre  $\varepsilon$  (réel). En effet, comme vous l'avez sûrement remarqué, le dénominateur du module carré de la fonction de transfert est une fonction oscillante, car formée avec des fonctions en cosinus.

$$|T(j2\pi f)|^2 = \frac{T_0^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{f}{f_0}\right)}$$

Dans la pratique, seulement trois valeurs d'ondulation dans la bande passante sont couramment utilisées : 0.1 dB, 0.5 dB, 1 dB. Ce qui suffit généralement.

Calculons donc les maxima et minima de la fonction de transfert et remarquons que dans la bande passante on a :

$$0 \leq C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \leq 1, \quad \text{pour } f \leq f_0$$

Elle vaut au maximum :

$$|T(j2\pi f)|^2 / T_0^2 = 1, \text{ pour } C_n^2\left(\frac{f}{f_0}\right) = 0$$

et au minimum :

$$|T(j2\pi f)|^2 / T_0^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \text{ pour } C_n^2\left(\frac{f}{f_0}\right) = 1$$

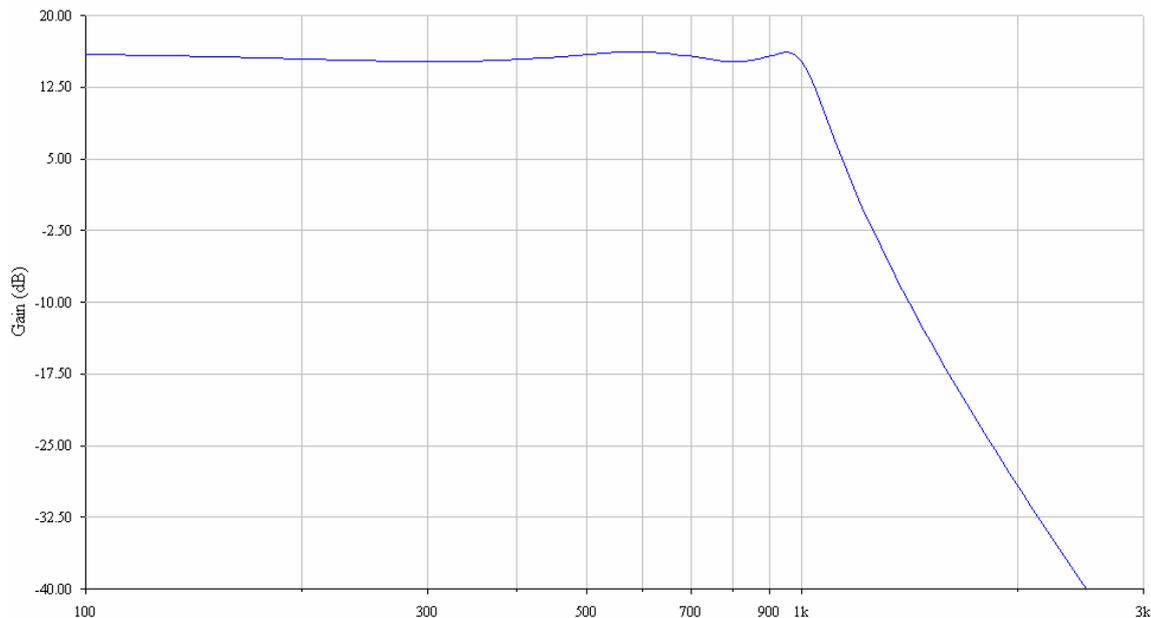
**L'ondulation dans la bande passante** vaut en décibel :  $\gamma_{dB} = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$   
d'où :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\gamma_{dB}}{10}} - 1}.$$

On trouve donc les valeurs du paramètre  $\varepsilon$  qui définissent une ondulation donnée.

Ondulation $\gamma_{dB}$	Paramètre $\varepsilon$
0.1	0.1526204
0.5	0.3493113
1	0.5088471

Tableau des valeur du paramètre  $\varepsilon$  des filtre de Tchebyscheff



Réponse en fréquence d'un filtre de Tchebychev d'ordre N = 5, pour une ondulation d'1 dB dans la bande passante

**Remarques:** Les filtres de Tchebychev présentent  $N$  extremum dans la bande passante. La figure précédente montre la réponse en fréquence d'un filtre d'ordre 5, présentant 5 extremum dans la bande passante et une ondulation d'1 dB.

Les filtres de Tchebychev d'ordre  $N$  impair présentent un maximum à 0 dB à  $f \rightarrow 0$ , puis une alternance de minima à  $X$  dB ( $X =$  valeur de l'ondulation dans la bande : 0.1, 0.5 ou 1 dB) et de maxima à 0 dB.  
Alors que les filtres de Tchebychev d'ordre  $N$  pair présentent un minimum à  $X$  dB à  $f \rightarrow 0$  ( $X =$  valeur de l'ondulation dans la bande : 0.1, 0.5 ou 1 dB), puis une alternance de maxima à 0 dB et de minima à  $X$  dB.

### 10.4.4 Détermination de l'ordre N du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit

Pour déterminer l'ordre du filtre, il faut examiner comment il peut satisfaire au gabarit. Dans le cas de ce filtre, il faudra à l'évidence assimiler la dernière fréquence passante  $f_1$  du gabarit à la fréquence de coupure  $f_0$  de ce filtre.

En effet, toutes les réponses en fréquence des filtres de Tchebychev passent par le point caractéristique d'abscisse  $f_0$ , d'ordonnée  $\gamma_{dB}$  (valeur de l'ondulation dans la bande passante), car on a :

$$C_n(f_0/f_0) = C_n(1) = 1 \quad \forall n \quad \omega = \omega_0$$

$$\Rightarrow 10 \log \left( \frac{|T(j2\pi f_0)|^2}{T_0^2} \right) = 10 \log \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = \gamma_{dB}$$

Le gabarit impose les deux conditions suivantes :

- $10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2) = A_{\max}$  ,  $f = f_1 = f_0$  car  $C_n^2\left(\frac{f_0}{f_0}\right) = C_n^2(1) = 1$
- $10 \log_{10}\left(1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{f_2}{f_0}\right)\right) = A_{\min}$  ,  $f = f_2$

On tire :

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1$$

de la première expression et :

$$10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1 = \varepsilon^2 \left( \cosh \left( n \arg \cosh \left( \frac{f_2}{f_0} \right) \right) \right)^2$$

de la deuxième expression.

En remplaçant  $\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1$  par sa valeur, on trouve alors l'ordre N du filtre par :

$$N = \frac{\arg \cosh \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}} \right)}{\arg \cosh \left( \frac{f_2}{f_1} \right)}$$

$$\cosh = \text{cosinus hyperbolique} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Exemple :  $A_{\max} = 1dB$  ,  $A_{\min} = 40dB$  ,  $f_1 = 10kHz$  ,  $f_2 = 20kHz$

L'ordre du filtre de Tchebychev qui satisfait au gabarit voulu est la valeur de N immédiatement supérieure à celle calculée avec la formule précédente. Soit, N = 5 (N = 4,536 valeur calculée).

**Remarque:** L'ordre du filtre de Tchebychev qui satisfait à ce gabarit est inférieur à celui de Butterworth qui satisferait au même gabarit (ordre N = 7). Il nécessite donc moins de composants pour le réaliser, mais il présente une ondulation d'1 dB dans la bande passante, alors que le filtre de Butterworth serait plat dans la même bande.

### 10.4.5 Détermination de la fonction de transfert du filtre

Le même type de calcul que pour le filtre de Butterworth peut être mené pour le filtre de Tchebychev pour trouver les pôles de  $|T(p)|^2$  et conduire à la détermination de la fonction de transfert du filtre. En pratique on utilise des tables :

Ordre du filtre	
2	$(0.3017p^2 + 0.7158p + 1)$
3	$(1.031p + 1)(0.5918p^2 + 0.5736p + 1)$
4	$(0.7518p^2 + 0.3972p + 1)(1.6053p^2 + 2.0475p + 1)$
5	$(1.855p + 1)(0.8368p^2 + 0.2787p + 1)(1.5725p^2 + 1.3712p + 1)$

Table des polynômes normalisés ( $\omega_0 = 1$ ) des filtres passe-bas de Tchebychev de 0,1 dB d'ondulation

Ordre du filtre	
2	$(0.6595p^2 + 0.9402p + 1)$
3	$(1.596p + 1)(0.8753p^2 + 0.5483p + 1)$
4	$(0.9402p^2 + 0.3297p + 1)(2.8057p^2 + 2.3755p + 1)$
5	$(2.759p + 1)(2.0974p^2 + 1.2296p + 1)(0.9654p^2 + 0.2161p + 1)$

Table des polynômes normalisés ( $\omega_0 = 1$ ) des filtres passe-bas de Tchebychev de 0,5 dB d'ondulation

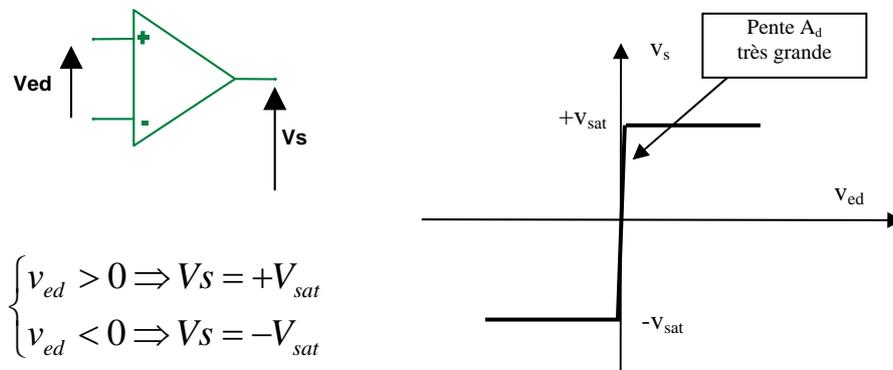
Ordre du filtre	
2	$(0.9070p^2 + 0.9956p + 1)$
3	$(2.023p + 1)(1.0058p^2 + 0.497p + 1)$
4	$(1.0136p^2 + 0.2828p + 1)(3.5791p^2 + 2.4113p + 1)$
5	$(3.454p + 1)(2.3293p^2 + 1.0911p + 1)(1.0118p^2 + 0.1610p + 1)$

Table des polynômes normalisés ( $\omega_0 = 1$ ) des filtres passe-bas de Tchebychev de 1 dB d'ondulation

# 11 MONTAGES AOP EN REGIME NON LINEAIRE

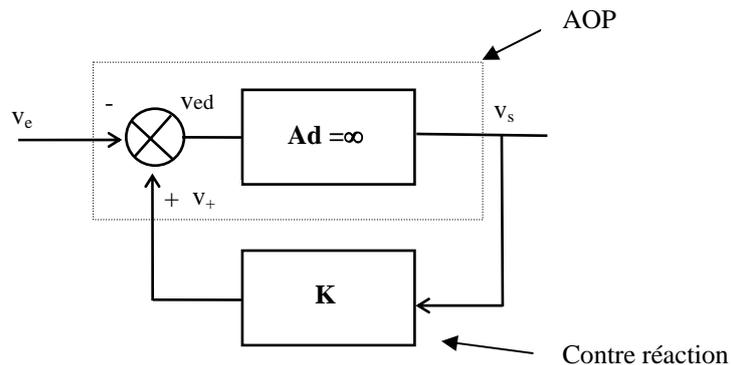
## 11.1 Contre-réaction positive sur un AOP : fonctionnement en boucle fermée

Nous avons vu qu'un AOP idéal présente un gain différentiel infini ( $A_d = \infty$ ). C'est à dire que la moindre différence entre les tensions appliquées sur les entrées « + » et « - »,  $V_{ed} = V_+ - V_-$ , produit une tension infinie en sortie. Cependant, dans le cas d'un AOP réel, cette tension  $V_{sat}$  ou tension de saturation, est limitée à une valeur proche de la tension d'alimentation de l'AOP.



Ces deux expressions résument le fonctionnement non-linéaire de l'AOP. La tension sortie ne peut prendre que les valeurs  $+V_{sat}$  ou  $-V_{sat}$ .

Supposons maintenant qu'on réalise une contre-réaction sur l'entrée non-inverseuse et qu'on représente schématiquement ce montage par la figure suivante.



Dans ce cas, il est évident que les évolutions possibles de la tension de sortie  $V_s$  concourent à amener l'AOP en saturation quelque soit le gain  $K$  de la contre réaction, soit en résumé (en supposant que la tension  $V_e$  n'a pas le temps d'évoluer) :

- $V_s$  croît  $\Rightarrow V_+$  croît  $\Rightarrow V_{ed}$  croît  $\Rightarrow V_s$  croît ... finalement  $V_s = +V_{sat}$
- $V_s$  décroît  $\Rightarrow V_+$  décroît  $\Rightarrow V_{ed}$  décroît  $\Rightarrow V_s$  décroît ... finalement  $V_s = -V_{sat}$

**Remarque importante** : Pour un AOP fonctionnant en régime non-linéaire, on pourra considérer que l'on peut avoir une tension différentielle importante contrairement au fonctionnement en régime linéaire. Ce qui veut dire que l'on peut avoir :

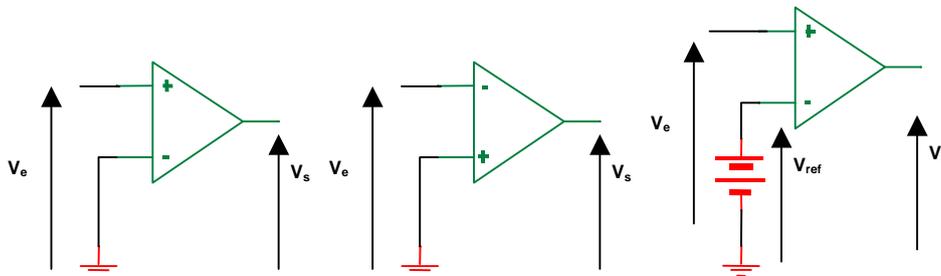
$$v_{ed} = v_+ - v_- \neq 0$$

## 11.2 Comparateur de tension simple

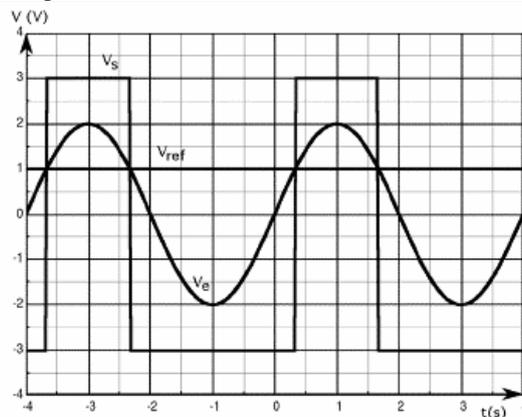
### 11.2.1 Montages de base

Le principe est simple. On compare le niveau du signal d'entrée à une tension de référence, et selon que celui-ci est supérieur ou inférieur à la référence (zéro volt ou toute autre tension continue ou non), la tension de sortie de l'AOP vaudra soit  $+V_{sat}$ , soit  $-V_{sat}$ .

Il existe deux configurations : le comparateur non-inverseur (signal sur l'entrée +) et le comparateur inverseur (signal sur l'entrée -).



Comparateurs : non-inverseur, inverseur, avec seuil

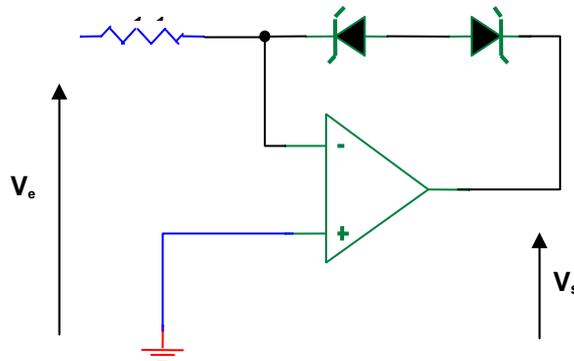


Exemple de signaux obtenus (comparateur non-inverseur) :  $V_{ref} = 1V$ ,  $V_{sat} = 3V$

**Remarque importante** : Ces montages sont réalisables avec des AOP. Mais ce choix est contestable car les AOP sont destinés à fonctionner préférentiellement en régime linéaire (en amplification). Lorsqu'on fonctionne uniquement en régime non linéaire, mieux vaut choisir un vrai comparateur différentiel ayant un très fort gain différentiel et temps de montée très court.

## 11.2.2 Limitation de la tension de sortie de l'AOP

Il arrive souvent qu'on cherche à limiter volontairement la tension de sortie d'un comparateur à une valeur inférieure (en valeur absolue) aux tensions de saturation de l'AOP. Pour cela, il suffit d'ajouter deux diodes zener montées « tête-bêche » en contre réaction sur l'entrée inverseuse de l'AOP. Dans ce cas la tension de sortie vaut :  $V_s = \pm(V_z + V_0)$ .



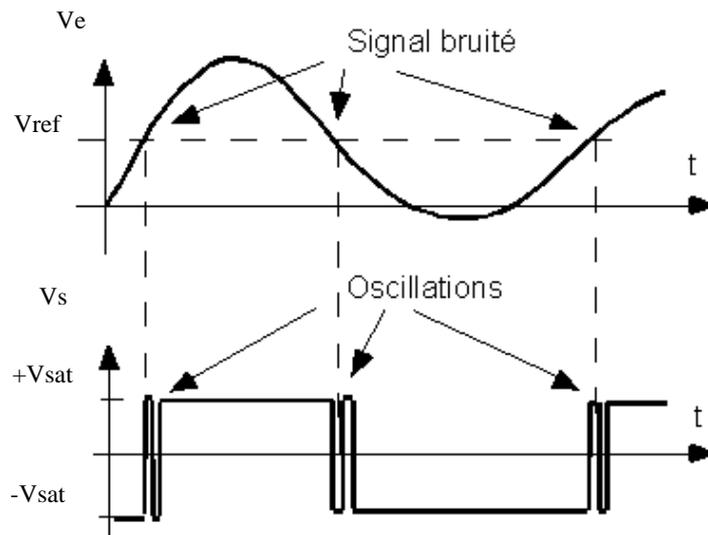
Comparateur avec limitation de la tension de sortie par diodes zener (Output Bounding)

## 11.3 Comparateur à hystérésis ou Trigger de Schmitt

### 11.3.1 Justification d'un tel comparateur

Ce type de comparateur est très utilisé dans tout système de mesure où l'on doit détecter un seuil : **il est donc fondamental**.

C'est une évolution du comparateur simple, destinée à améliorer ses performances en présence de signaux entachés de bruit. En effet, lorsque le signal est entaché d'un bruit, des oscillations peuvent se produire sur le signal de sortie lorsque le signal d'entrée varie - même faiblement - autour de la tension de référence (figure suivante).

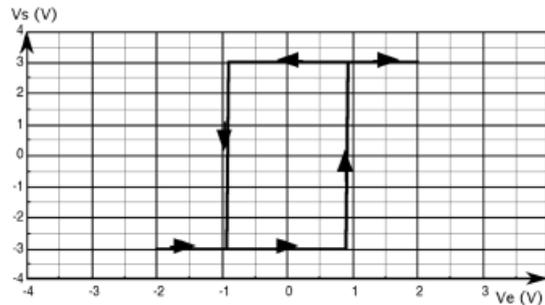


Oscillations du signal de sortie d'un comparateur simple en présence d'un signal bruité

### 11.3.2 Comparateur à hystérésis ou trigger de Schmitt

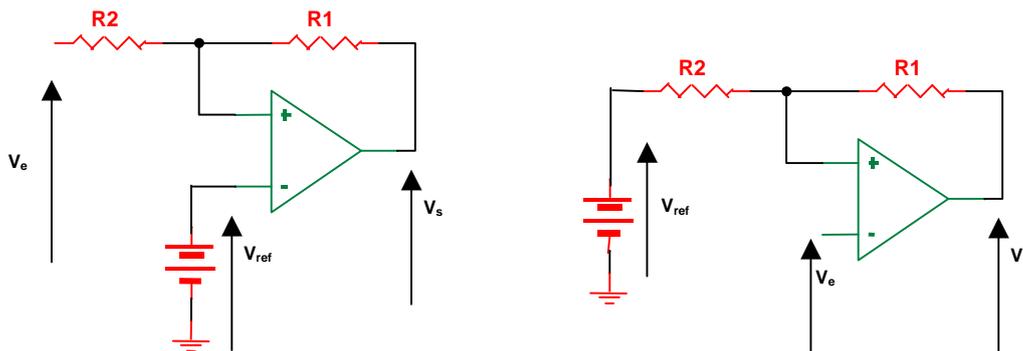
La solution au problème posé précédemment consiste à créer un comparateur à deux seuils : un seuil supérieur et un seuil inférieur. Lorsque le seuil supérieur a été franchi, la sortie ne peut à nouveau commuter (changer d'état) que lorsque le signal d'entrée est passé en dessous du seuil inférieur et réciproquement (figure suivante).

La fonction de transfert  $v_s = f(v_e)$  est appelée « cycle d'hystérésis ». Les flèches représentent le sens de parcours de ce cycle (ici, un comparateur non-inverseur).



Comparateurs à hystérésis : fonction de transfert du trigger non inverseur ( $V_{ref} = 0$ )

Ce type de comparateur ou « **trigger de Schmitt** » est réalisable selon deux configurations : montage inverseur ou non inverseur.



Comparateurs à hystérésis : non-inverseur, inverseur

Puisque l'on fonctionne en régime non-linéaire, la tension de sortie ne peut prendre que les valeurs  $+V_{sat}$  ou  $-V_{sat}$ .

On démontre que le basculement de la sortie se produit pour les valeurs de la tension d'entrée  $v_e$  reportées dans le tableau suivant.

Non-inverseur	Inverseur
$V_e = V_{ref} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \pm V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$	$V_e = \pm V_{sat} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) + V_{ref} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$
Si $V_{ref} = 0$ , alors on a seulement :	Si $V_{ref} = 0$ , alors on a seulement :
$V_e = \pm V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$	$V_e = \pm V_{sat} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

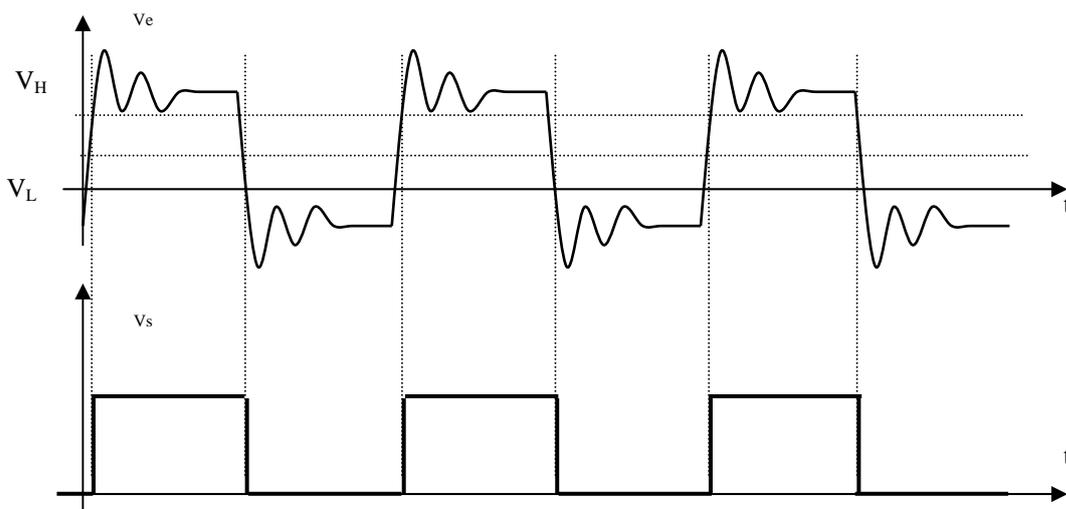
La tension de référence permet un décalage horizontal du cycle d'hystérésis ( $v_s = f(v_e)$ ).

On appelle « hystérésis », la différence en valeur absolue entre les deux seuils (supérieur et inférieur). Les formules suivantes montrent qu'il suffit d'agir sur le rapport de deux résistances pour augmenter ou diminuer sa valeur.

- Hystérésis pour le montage non-inverseur :  $2V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$ ,
- Hystérésis pour le montage inverseur :  $2V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ .

**Exemple d'utilisation de trigger de Schmitt** : mise en forme d'un signal numérique avant d'attaquer un circuit logique.

Lorsqu'un signal numérique est transmis (signal binaire) celui-ci peut-être déformé comme le montre la figure suivante. On peut le remettre en forme (allure plus carrée) en le faisant passer au travers d'un trigger de Schmitt dont les seuils haut et bas sont  $V_H$  et  $V_L$ .



Mise en forme d'un signal numérique à l'aide d'un trigger de Schmitt

### 11.3.3 Variante de trigger

Dans le même esprit que pour le comparateur simple, on peut monter deux diodes zener tête-bêche pour limiter la tension de sortie de l'AOP (certains AOP, d'ailleurs, ne fonctionnent correctement en comparateur qu'avec ce montage).

On montre que, si  $V_Z$  est la tension de seuil inverse de la diode zener et  $V_0$  sa tension directe, alors la tension de

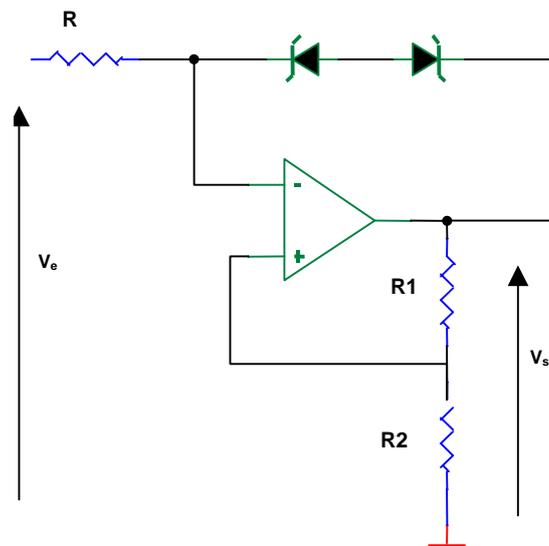
sortie vaut :

$$V_s = \pm(V_Z + V_0) \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Ainsi, la tension d'entrée pour laquelle on aura le basculement de la sortie vaut :

$$V_e = \pm(V_z + V_0) \frac{R_2}{R_1}$$

Le montage est le suivant :



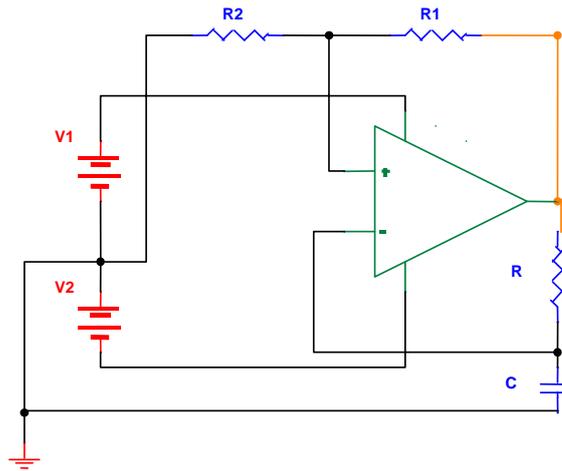
Comparateurs à hystérésis avec limitation de la tension de sortie

## 11.4 Oscillateur à relaxation ou multivibrateur astable

### 11.4.1 Introduction

Le but de ce montage est de délivrer un signal carré en sortie : c'est un générateur de signal oscillant librement.

L'AOP est monté en contre-réaction sur ses deux entrées. D'une part, on a un effet de trigger par la contre-réaction sur l'entrée non-inverseuse et d'autre part un réseau RC alimenté par la sortie de l'AOP. Chaque fois que la tension sur l'entrée inverseuse atteindra un des seuils de l'hystérésis de l'AOP, sa sortie commutera.



Oscillateur à relaxation : schéma de montage

Oscillateur à relaxation : oscillogramme des signaux (sortie et entrée inverseuse)

### 11.4.2 Analyse théorique

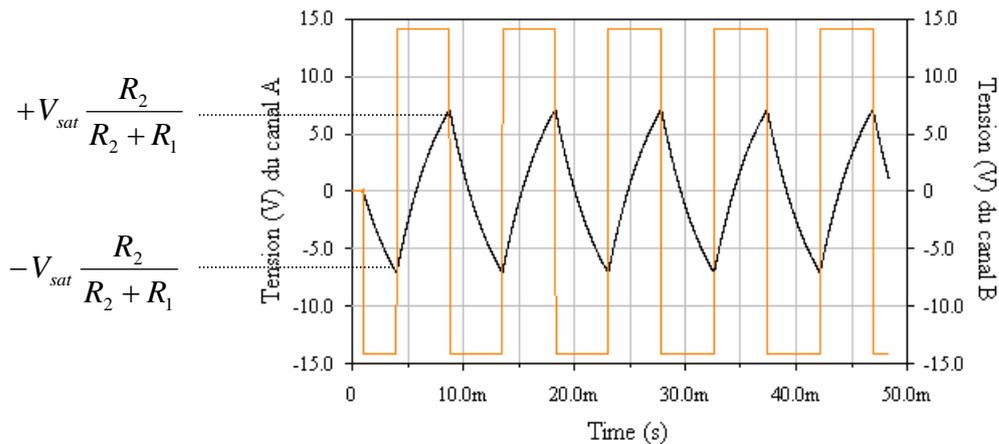
Supposons qu'à l'état initial  $V_s = +V_{sat}$  et que la capacité C n'est pas chargée. Alors, C se charge par la sortie au travers de la résistance R (aucun courant n'entre par l'entrée "-" de l'AOP).

On a bien  $v_{ed} > 0$  et une allure exponentielle de la tension  $v_-$  :  $v_- = V_{sat} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$ .

La sortie basculera lorsque  $v_- > V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ .

La capacité C se chargera ensuite par  $V_s = -V_{sat}$ . Le prochain basculement se produira lorsque

$v_- < -V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$  et ainsi de suite (figure suivante).



Oscillateur à relaxation : définition de la période de relaxation

Le temps mis par la tension  $v_-$  aux bornes de C pour passer de  $+V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$  à  $-V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$  définit la demi-période  $T/2$  de  $v_s$ .

En prenant maintenant une origine des temps telle que  $v_- = +V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ , l'expression de  $v_-$  est alors :

$$v_- = -V_{sat} + V_{sat} \left( 1 + \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Au basculement, soit pour  $t = T/2$ , on a  $v_- = -V_{sat} \frac{R_2}{R_2 + R_1}$  donc on peut facilement en déduire la période  $T$  de  $v_s$ .

$$T = 2RC \ln \left( 1 + \frac{2R_2}{R_1} \right)$$

Dans le cas particulier où  $R_2 = R_1$ , la tension  $v_-$  varie entre  $+V_{sat}/2$  et  $-V_{sat}/2$ . La période du signal en dent de scie est alors de :

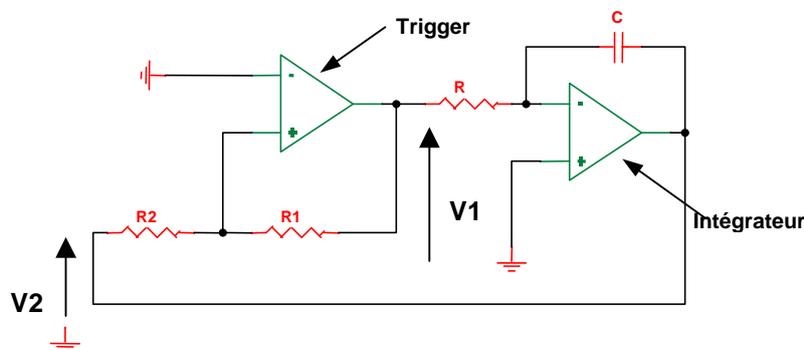
$$T = 2RC \ln(3) \approx 2.2RC$$

**Remarque :** Bien qu'il soit très simple de monter un tel type d'oscillateur et d'en faire varier la fréquence, ce montage sera néanmoins très peu utilisé car il en existe d'autres oscillateurs plus performants et stables.

### 11.4.3 Variante d'oscillateur à relaxation: générateur de signaux triangulaires

Nous avons vu précédemment que la capacité se chargeait à travers la résistance R par  $V_s = +V_{sat}$ , une tension constante. La tension aux bornes de C a une allure exponentielle.

Il serait facile d'obtenir une tension variant linéairement à condition que la capacité soit chargée par un courant constant. Ceci est très facile à faire en utilisant un intégrateur dont l'entrée est reliée directement à la sortie du trigger et dont la sortie est reliée à l'entrée du trigger (schéma suivant).

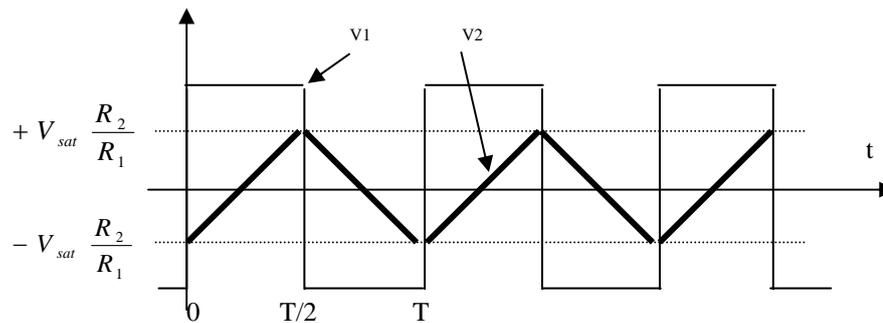


Oscillateur à relaxation avec génération de signal triangulaire

Le trigger bascule pour  $v_2 = \pm V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$  et l'intégrateur fournit  $v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int v_1(t) dt$ .

Or,  $v_1(t) = \pm V_{sat}$ , d'où  $v_2(t) = \mp \frac{V_{sat}}{RC} t$ . Et  $v_2(t)$  est aussi la tension aux bornes de la capacité.

Entre deux basculement, cette tension  $v_2(t)$  est donc un segment de droite de pente  $\mp \frac{V_{sat}}{RC}$  reliant les point d'ordonnées  $+V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$ ,  $-V_{sat} \frac{R_2}{R_1}$ .



On a donc bien une charge linéaire en fonction du temps de la capacité  $C$ , donc un courant constant la parcourant tel que  $i_C(t) = \mp \frac{V_{sat}}{R_1}$ .

La période  $T$  des signaux est alors donnée par :

$$T = 4RC \frac{R_2}{R_1}$$