Chapitre 4 L'évolution des systèmes électriques

<u>Pré-requis</u> : notations de première, lois des mailles, lois des nœuds, loi d'additivité des tensions.

Dans le cours de physique de la classe de première quelques propriétés de circuits électriques en courant continu ont été abordées. Dans ce chapitre, on s'intéresse maintenant à des phénomènes associés à des courants *variables*, et plus spécifiquement aux éléments qui permettent de contrôler l'évolution temporelle d'un courant électrique : condensateurs et bobines.
Les lois fondamentales utilisées en courant continu (loi des tensions, loi des intensités) seront dans les applications toujours valables pour les valeurs instantanées des tensions u(t) et des intensités i(t) variables.

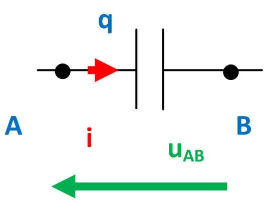
I. Le dipôle RC

I.1. Le condensateur

a. <u>qu'est-ce qu'un condensateur ?</u>

Un condensateur est un composant électrique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées "électrodes") séparées par un isolant. Sa propriété principale est de pouvoir stocker (condenser!) des charges électriques opposées sur ses armatures.

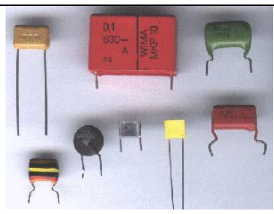
On symbolise le condensateur par ses deux plaques (en noir) : on accompagne cette notation par les marquages habituels du courant électrique **i(t)** et de la tension **u_{AB}(t)** en convention récepteur toujours utilisée. Sur la plaque A, une charge +q se condense et en vis-à-vis, une charge –q se place sur l'armature B.



Le courant i vient alimenter la plaque A en charge q : le courant i est par définition la variation de la charge q par rapport au temps :

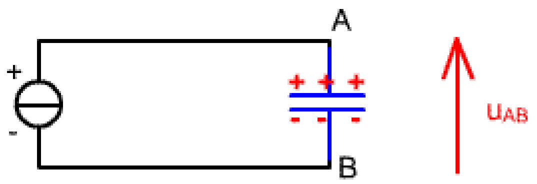
$i=dq/dt$

L'ampère n'est que du coulomb par seconde mais on ne va changer d'unité pour cela ;) L'intensité peut être vue comme un débit de charges.

Deux formes classiques : verre et bouteille de Leyde (Lycée Zola, Rennes) "Une expérience nouvelle, mais terrible, que je vous conseille de ne point tenter vous-même" (Lettre de Musschenbroek à Réaumur, 20 janvier 1746)	Condensateur d'Aepinus avec armatures métalliques mobiles et plaque de verre amovible (Musée des Arts et Métiers)	Les condensateurs actuels : Ce sont des condensateurs constitués de deux conducteurs enroulés autour d'une feuille isolante. Il existe aussi des condensateurs électrochimiques.
		

b. relation charge-tension

La charge n'est pas aisée à mesurer : souvenez-vous du TP de première avec le coulomb-mètre qui s'agitait à cause de l'orage d'été du soir ! Heureusement, il existe une relation de proportionnalité entre la tension u_{AB} et les charges accumulées q sur les armatures.



On place en expérience de cours un générateur de courant de 60 mA qui va alimenter un condensateur AB. On observe une hausse progressive de la tension u_{AB} proportionnelle au temps.

On déduit la charge q en intégrant i constant : I=constante=dq/dt implique q=I.t (liberté fraternité).

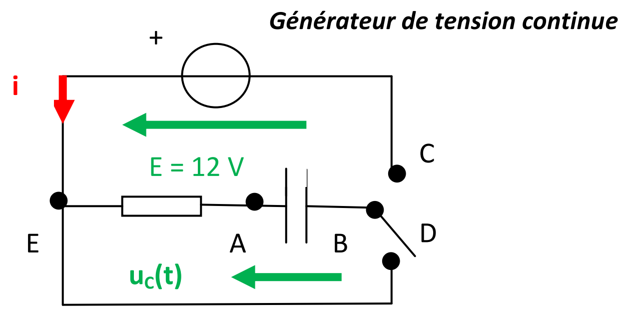
Au chronomètre :

Temps t(s)	0	10	20	30
Intensité calculée I(t) Q(t)=I×t en mC	0	0,6	1,2	1,8
Tension u(t) en V	0	0,27	0,55	0,82

On remarque que Q est proportionnel à u : la constante de proportionnalité est appelée capacité du condensateur et elle est notée C en Farad (symbole F). Ses sous-unités (plus utilisées) sont le µF ou le nF. Ici q = C . u avec C environ égal à $1{,}8.10^{-3}/0{,}82$ =2,19 mF.

I.2. Le dipôle RC

a. circuit électrique



Nous allons réaliser le circuit électrique suivant : on branche dans une maille un condensateur en série avec une résistance. Cette maille peut être en contact avec un générateur de tension continue de 12 V (voir schéma ci-dessous).

Ecrivons la loi des mailles lorsque l'interrupteur est sur C: $-E+Ri+u_C=0$.

Il va falloir résoudre cette équation pour obtenir $u_C(t)$…

b. résolution mathématique de la charge

$$
\begin{aligned}
& R \times i + u_C = E \\
& \Leftrightarrow R \times \frac{dq}{dt} + u_C = E \\
& \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E
\end{aligned}
$$

On obtient donc une équation différentielle liant la dérivée de u_C par rapport au temps avec u_C. C'est chose courante en physique et c'est pour cela que le calcul différentiel a été inventé par Leibniz et Newton.

La solution générale de cette équation est de la forme : $u_c(t)= A \exp(-t/\tau)+B$. Il s'agit de trouver A, B et τ à partir des conditions initiales ($u_c(t=0)=0$) et des paramètres du circuit (R, C et E).

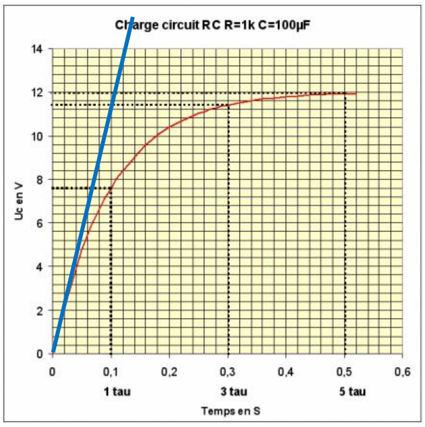
$$
\begin{aligned}
& RC\frac{d(Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B)}{dt} + (Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B) = E \\
& RC \times \frac{-1}{\tau} \times Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = E \\
& A \times \left[\frac{-RC}{\tau} + 1\right] \times e^{-\frac{t}{\tau}} + B = E \quad (relation \quad *)
\end{aligned}
$$

On voit dans la démonstration que nous n'avons pas d'autre choix que de poser B=E. Par contre, nous avons un problème pour A car il y a un facteur multiplicatif bizarre… Si B=E alors il n'y a pas d'autre choix que de fixer τ=RC.

Pour trouver A, nous allons prendre la valeur de u à t=0 soit zéro volt car la tension aux bornes du condensateur est continue:

$$
\begin{aligned}
& u_C(0) = 0 \\
& \Rightarrow Ae^0 + E = 0 \Rightarrow A + E = 0 \\
& et \quad A = -E \\
& la \quad solution \quad est \quad donc \\
& u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E \times (1 - e^{-\frac{t}{RC}})
\end{aligned}
$$

c. <u>vérification expérimentale de la charge</u>



- Vérifions expérimentalement ce que nous avons trouvé : on observe bien une sorte d'exponentielle de constante de temps t autour de 0,1 s. C'est la valeur que prend la courbe lorsque le condensateur est chargé à 63%. On peut le déterminer en tracer la tangente bleue en zéro qui intercepte $u_c(t)$=E en tau.

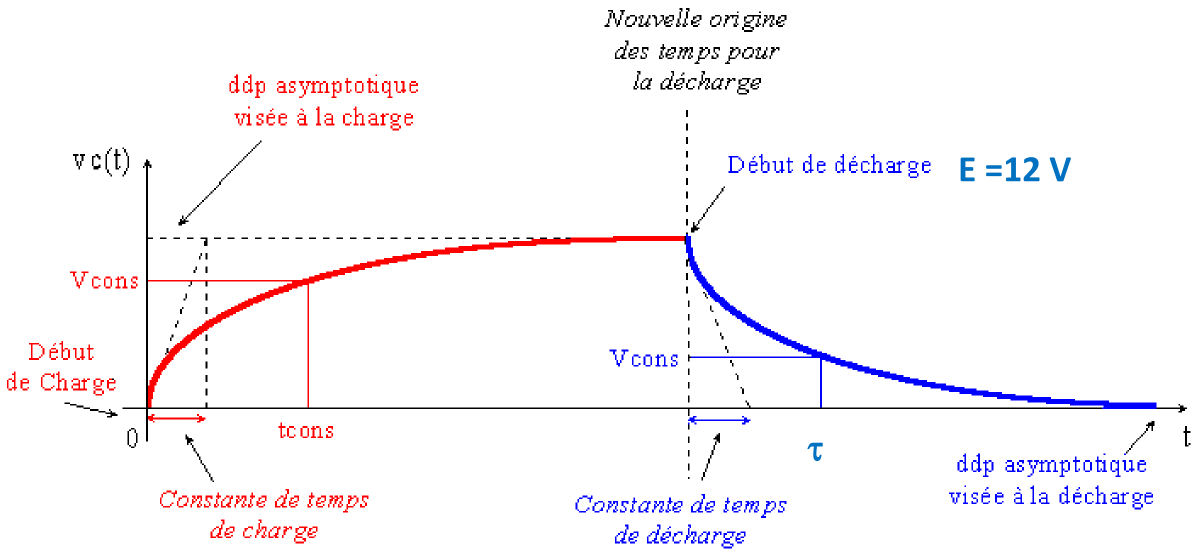
  - Quelle est la valeur de l'intensité dans le circuit ? On rappelle que i est la dérivée de q donc la dérivée de C×u_C(t). C'est donc à une constante C près la dérivée par rapport au temps de la courbe de charge ci-dessus !

$$i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du}{dt}.$$

Ainsi, au début de la courbe de u, la dérivée est conséquente alors qu'au bout de plusieurs τ, elle tend progressivement vers 0.

- Pour une durée de 5τ, on atteint déjà 99% de la charge !

d . la décharge



- La décharge en bleue est une exponentielle décroissante qui provient du fait que la constante B de la résolution mathématique (relation * au paragraphe I.2.b) est maintenant nulle. Au bout d'une durée égale à la constante de temps τ, on n'est plus qu'à 37% de la valeur initiale.

$$\begin{aligned}
&u_C(0) = E \\
&\Rightarrow Ae^0 + 0 = E \Rightarrow A + 0 = E \\
&et \quad A = E \\
&la \quad solution \quad est \quad donc \\
&u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} = E \times e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}$$

I.3. Aspect énergétique

Comme des charges électriques sont « condensées » dans les armatures et qu'elles peuvent se décharger transformant ainsi le condensateur en générateur électrique, le condensateur emmagasine une énergie E telle que :

$$E = \tfrac{1}{2}Cu^2 = \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

On pourra faire le calcul pour un condensateur de 2,2 mF et une tension de 12 V : on trouve que l'énergie électrique stockée est de 0,16 J.

I.4. Dimensions

Pour terminer ce chapitre I, nous allons examiner les dimensions de la constante de τ = RC.

On note T=[t] la dimension du temps, L la distance et A la dimension de l'intensité par exemple.

$$\tau = R \times C$$

$$[\tau] = [R] \times [C]$$

$$[\tau] = [U / I] \times [q / U] = [U / I \times q / U] = \left[\frac{1}{I} \times q\right]$$

$$= \left[\frac{dt}{dq} \times q\right] = [dt]\left[\frac{q}{dq}\right] = [dt] = T$$

La constant de temps τ est bien homogène à un temps ce qui est plutôt rassurant…

II. Le dipôle RL.

II.1. Qu'est-ce qu'une bobine ?

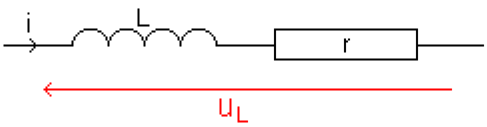
Une bobine (ou solénoïde) est constitué d'un enroulement de fil conducteur recouvert d'un vernis isolant ou, dans le jargon des physiciens, de spires jointives conductrices.

En expérience de cours, on remarque que lorsqu'on essaie d'établir un courant électrique dans un circuit constitué de deux branches (la première ayant une résistance et la deuxième constituée d'une bobine de résistance interne équivalente). La bobine semble s'opposer au passage du courant car la lampe n°2 s'allume lentement.

Une bobine est définie par une valeur physique, l'inductance L telle que :

u_L=L×di/dt : le symbole L, l'inductance, est exprimée en **Henry** (H ou sous-unité mH).

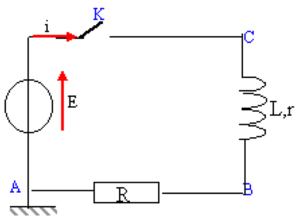
On y ajoute souvent une petite résistance interne r exprimant la résistance du fil enroulé. On résume donc physiquement (dans la convention récepteur) une bobine (L,r) par :



u_L=L×di/dt +r×i

II.2. Le dipôle RL

Un dipôle RL est constitué d'une résistance R et d'une bobine (L,r) en série. Regardons à l'oscilloscope ce qui se passe lorsque nous imposons au circuit ci-contre une tension positive E.



a Réponse d'un dipôle RL à l'établissement d'un courant : A la fermeture de l'interrupteur K, le courant électrique i(t) peine à s'installer et atteint enfin un régime permanent.

Retrouvons mathématiquement ces résultats expérimentaux :

$$R\times i + u_L = E \Leftrightarrow R\times i + L\frac{di}{dt} + ri = E \Leftrightarrow (R+r)\times i + L\frac{di}{dt} = E \Leftrightarrow \frac{L}{R+r}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R+r}$$

On voit qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale $i(t)=Ae^{-t/\tau}+B$.

$$\frac{L}{R+r}\frac{d(Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B)}{dt} + (Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B) = \frac{E}{R+r} \Leftrightarrow \frac{L}{R+r}\times\frac{-1}{\tau}\times Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = \frac{E}{R+r}$$

$$\Leftrightarrow A\times\left[\frac{-\frac{L}{R+r}}{\tau}+1\right]\times e^{-\frac{t}{\tau}} + B = \frac{E}{R+r} \Rightarrow B = \frac{E}{R+r} (solution \quad particulière)$$

$$si \quad A\times\left[\frac{-\frac{L}{R+r}}{\tau}+1\right]\times e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad alors \ \frac{-\frac{L}{R+r}}{\tau}+1 = 0 \ et\ \tau = \frac{L}{R+r}$$

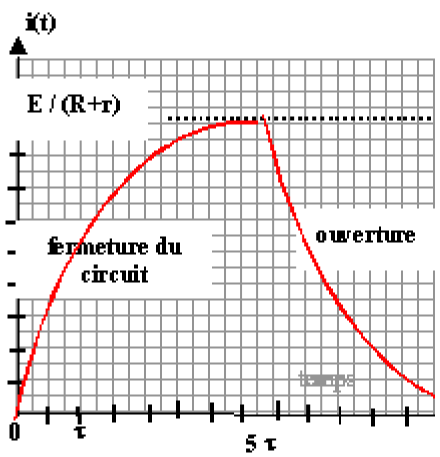
$$Comme\ il\ \ y\ a\ continuité\ de\ l'intensité : i(0) = 0 = A + B \Rightarrow A = -\frac{E}{R+r}$$

La solution est donc :

$$i(t) = \frac{E}{R+r}\times(1-e^{\frac{-t}{\tau}}) \quad avec \quad \tau = \frac{L}{R+r}$$

Comme dans le cas de la charge du condensateur, nous obtenons une courbe qui tend asymptotiquement vers une valeur fixe avec une constante de temps τ=L/(R+r).

b Réponse d'un dipôle RL à l'annulation d'un courant :



De la même façon, on a la même équation différentielle mais sans second membre ce qui facilite la résolution et l'on trouve : $i(t) = \frac{E}{R+r}\times e^{\frac{-t}{\tau}} \quad avec \quad \tau = \frac{L}{R+r}$.

La détermination de la constante de temps t se fait de la même façon que pour le dipôle RC soit avec les valeurs $0{,}63I_0$ ou $0{,}37I_0$ ou la méthode de la tangente en t=0.

III. Oscillations dans un circuit RLC en série.

III.1. Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine.

A partir du montage électrique ci-dessous, on va étudier la décharge du condensateur dans une bobine et observer la variation de la tension u_C(t)aux bornes du condensateur.

Comment expliquer une telle courbe sinusoïdale ? Utilisons les relations électriques trouvées précédemment (les résistances sont supposées négligeables)…

$$u_C = \frac{q}{C} \quad et \quad u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$or\ nous\ savons\ que\ i = \frac{dq}{dt}\ donc\ u_L = L\frac{d\frac{dq}{dt}}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$les\ deux\ composants\ sont\ dans\ une\ branche\ donc\ u_L + u_C = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad soit \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad ou \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre dont la solution générale est donnée :

$q(t)=Q_m\times\cos(\omega_0 t+\phi_0)$ où $T_0=2\pi/\omega_0$ est la période propre. Q_m est la charge maximale

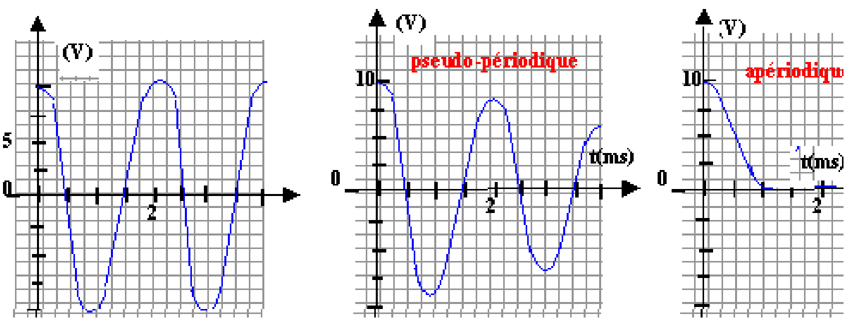
$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Exercice 1 : Prouver que $Q_m\times\cos(\omega_0 t+\phi_0)$ est bien solution de l'équation différentielle avec $\omega_0^2=1/LC$.

Exercice 2 : trouver avec les dimensions de L et C la dimension et donc l'unité de T.

III.2. Influence de l'amortissement.

Le régime périodique est idéal car il existe une résistance interne qui va provoquer un amortissement de la courbe oscillante. Plus la résistance est importante, plus le régime est amorti. Du régime périodique idéal sans amortissement, on passe à un régime pseudopériodique (cela oscille encore !) puis la tension aux bornes de C s'écrase directement vers 0. La pseudo-période T est toujours plus longue que la période propre T_0 : plus la résistance augmente, plus on quitte la valeur de T_0.

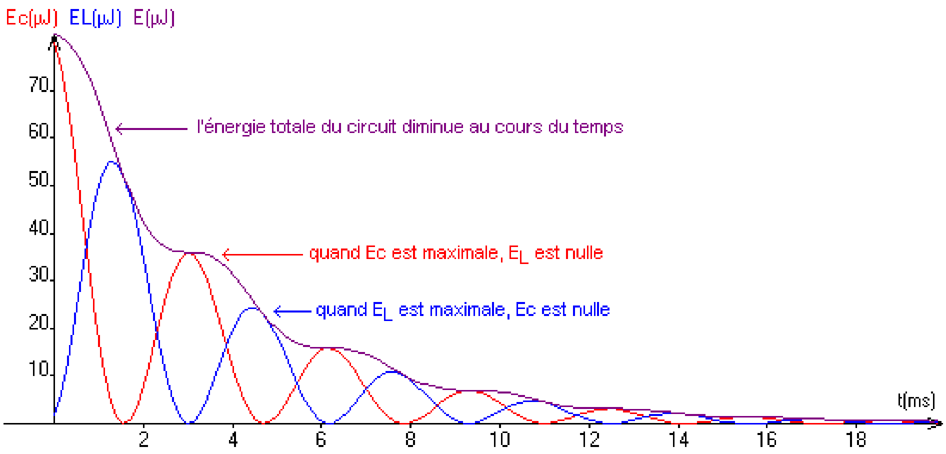


Remarque : le régime apériodique est appelé critique lorsque la courbe passe brusquement d'une sinusoïde à l'enveloppe exponentielle vers une courbe fortement décroissante. La valeur critique de R est $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (hors programme).

III.3. Interprétation énergétique et entretien des oscillations.

On sait depuis la classe de première S qu'une résistance est le siège d'une perte d'énergie (effet Joule). A chaque fois que le courant i(t) n'est pas nul, le système perd une puissance Ri^2 : peu à peu, le système se vide en énergie et la tension aux bornes du condensateur converge vers zéro volt.

Il existe donc un jeu de ping-pong entre l'énergie électrostatique du condensateur $\frac{1}{2}Cu^2$ et l'énergie magnétique de la bobine $\frac{1}{2}Li^2$ (E_{Cond} diminue quand E_{Bob} augmente et vice versa). Quelques balles se perdent donc à chaque passage dans la résistance dans ce transfert d'énergie…



Il existe un montage (connaissance hors programme) qui permet de compenser cette perte d'énergie par l'intermédiaire d'un amplificateur opérationnel. On établit à nouveau un régime périodique avec des oscillations dites libres en changeant une résistance annexe (dite résistance négative !) qui va permettre d'obtenir une sinusoïde fixe.