

UNIVERSITE DE CAEN / BASSE-NORMANDIE

U.F.R de Sciences

LICENCE SMG & PMM 2

Notes de Cours sur Vibrations I

par Emmanuel Vient

Année 2010-2011

Chapitre 1

L'oscillateur harmonique libre à un degré de liberté

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Introduction

Depuis très longtemps, l'homme s'est rendu compte qu'il existait des phénomènes physiques qui se répètent régulièrement au cours du temps. Le mouvement des planètes dans le ciel, la rotation de la terre sur elle-même, la vibration d'une corde de guitare ou d'un diapason, sont de cette nature. Pour qualifier ce type de phénomène, nous employons le terme de mouvement ou de phénomène *périodique*. Un tel mouvement est aussi appelé *oscillation*. Il correspond à une fluctuation périodique de la valeur d'une grandeur physique au-dessus et au-dessous d'une certaine valeur d'équilibre ou valeur centrale.

Galilée a sûrement été un des premiers hommes à essayer de caractériser quantitativement des oscillations mécaniques. Pour allumer les chandeliers de la cathédrale de Pise, on devait tirer ceux-ci vers une galerie. Lorsqu'on les lâchait, ils oscillaient pendant un certain temps. Galilée mesura la durée des oscillations en utilisant les battements de son pouls et constata avec surprise que la durée des oscillations ne variait pas, même si leur amplitude diminuait. Cette propriété d'*isochronisme* (*iso=identique, chronos=temps*) fut à la base des premières horloges à pendule. Elle permet donc de comprendre un des grands intérêts de ce type de phénomène, c'est à dire d'offrir la possibilité de mesurer le temps qui passe et de construire des instruments de mesure du temps.

Lorsque ces oscillations sont mécaniques, comme celles que nous venons de citer, le corps subit un déplacement soit linéaire soit angulaire. Mais il existe aussi des oscillations non mécaniques, comme nous l'étudierons par la suite, qui font intervenir des grandeurs physiques telles qu'une différence de potentiel électrique ou une charge électrique dans des circuits électroniques, un champ électrique ou un champ magnétique.

La durée d'une répétition est appelée *période*. Elle est notée T et exprimée dans le système d'unités international en seconde (s). Pour un mouvement de rotation, un tour constitue une répétition. Pour un mouvement oscillatoire, la durée d'une oscillation (aller

et retour) constitue une période. Comme par exemple, la période de rotation de la Terre autour du soleil est de 365,25 jours.

Le nombre de répétitions du phénomène par seconde est la **fréquence** du phénomène périodique. On la note N , f ou ν et son unité est le hertz (Hz).

Il existe une relation simple entre ces deux grandeurs :

$$\boxed{N = \frac{1}{T}} \quad (1.1)$$

Pour un mouvement de rotation, la fréquence est tout simplement le nombre de tours par seconde.

L'amplitude de l'oscillation est la valeur maximale de la grandeur oscillante caractérisant le phénomène vibratoire.

1.1.2 Phénomènes sinusoïdaux

Lorsque la grandeur oscillante d'un phénomène périodique varie sinusoïdalement avec le temps, le phénomène est dit **sinusoïdal**.

Pour définir l'ensemble des grandeurs intervenant lors d'un tel phénomène, nous allons étudier un mouvement spécifique : **le mouvement rectiligne sinusoïdal**.

Il s'agit d'un mouvement rectiligne dans une direction unique de l'espace. La connaissance d'une seule variable de position suffit pour connaître sa position. Nous disons dans ce cas que nous avons affaire à un système mécanique à **un seul degré de liberté**. S'il pouvait se mouvoir librement dans toutes les directions de l'espace réel à 3 dimensions. Nous parlerions d'un système mécanique à 3 degrés de liberté.

Un mouvement rectiligne est dit sinusoïdal lorsque l'abscisse ou l'élongation du mobile est une fonction sinusoïdale du temps.

A un instant donné t : l'abscisse du mobile (l'élongation du mobile) relativement à un repère galiléen supposé fixe s'écrit en fonction de t :

$$\boxed{x(t) = X_M \times \sin(\omega t + \varphi_x)} \quad (1.2)$$

Avec

- X_M : **amplitude de mouvement** car elle représente la valeur maximale de l'élongation (grandeur oscillante). Unité : m . (Toutes les unités sont dans le S.I).
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$: **pulsation du mouvement** ou **fréquence angulaire**. Unité : $rad.s^{-1}$.
- $\omega t + \varphi_x$: **phase du mouvement à l'instant t** . Unité : rad .
- φ_x : **constante de phase** ou **déphasage**, c'est à dire la **phase initiale** du mouvement (phase du mouvement à l'instant $t = 0$ s). Unité : rad . On emploie aussi le terme de **phase à l'origine** pour cette grandeur.

Nous parlons aussi pour cette expression (l'équation 1.2) de **l'équation horaire du mouvement**.

Nous pouvons remarquer que nous aurions pu écrire l'équation avec un cosinus plutôt qu'avec un sinus, en effet avec un déphasage adéquate, les deux écritures sont totalement équivalentes :

$$x(t) = X_M \times \sin(\omega t + \varphi_x) = X_M \times \cos(\omega t + \varphi'_x) \text{ si } \varphi'_x = \varphi_x - \pi/2$$

Nous pouvons aussi calculer l'expression de la vitesse instantanée du mobile. Pour un mouvement rectiligne, nous savons que $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$ donc ici

$$v_x(t) = \frac{d(X_M \times \sin(\omega t + \varphi_x))}{dt} = \omega \times X_M \times \cos(\omega t + \varphi_x)$$

Nous pouvons aussi écrire que

$$v_x(t) = V_M \times \cos(\omega t + \varphi_x) = V_M \times \sin(\omega t + \varphi_x + \pi/2) = V_M \times \sin(\omega t + \varphi_v)$$

avec $V_M = \omega \times X_M$, vitesse maximale en $m.s^{-1}$, et $\varphi_v = \varphi_x + \pi/2$.

Il y a un déphasage constant de $\pi/2$ entre l'élongation et la vitesse pour un tel mouvement.

Nous pouvons ensuite déterminer l'accélération instantanée du mobile

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d(\omega \times X_M \times \cos(\omega t + \varphi_x))}{dt} = -\omega^2 \times X_M \times \sin(\omega t + \varphi_x)$$

donc

$$a_x(t) = \omega^2 \times X_M \times \sin(\omega t + \varphi_x + \pi) = a_M \sin(\omega t + \varphi_a)$$

avec $a_M = \omega^2 \times X_M$, accélération maximale en $m.s^{-2}$, et $\varphi_a = \varphi_x + \pi$.

Il y a un déphasage constant de π entre l'élongation et l'accélération pour un tel mouvement.

Nous remarquons donc que $a_x(t) = -\omega^2 \times x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$. Nous pouvons réécrire cette expression de la manière suivante en passant le premier membre dans le second :

$$\boxed{0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \times x(t)} \quad (1.3)$$

Nous obtenons donc une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre, caractéristique de ce type de mouvement.

Nous montrons donc que tout mouvement rectiligne vérifiant l'équation différentielle

$$\boxed{0 = \frac{d^2x}{dt^2} + C \times x(t)}$$

(avec C : constante positive) est sinusoïdal et \sqrt{C} représente la **pulsation propre du mouvement**.

L'équation horaire d'un tel mouvement apparaît donc comme la solution d'une équation différentielle du type de l'équation 1.3.

1.1.3 Notion de déphasage

Nous avons vu dans ce qui précède l'importance du terme de déphasage dans l'argument du sinus ou du cosinus lorsque nous avons comparé l'évolution temporelle de l'élongation et de la vitesse par exemple. Nous allons maintenant essayer d'affiner cette notion. Lorsque nous comparons deux mouvements périodiques, il est important de savoir s'ils sont indépendants ou non en temps l'un de l'autre.

Pour cela, nous allons dans un premier temps introduire la notion de *synchronisme*. Deux mouvements périodiques ayant la même période sont dits *isochrones*. S'ils se produisent en même temps, ils sont alors dits *synchrones* sinon ils sont *asynchrones*.

Il peut exister un déphasage entre deux mouvements sinusoïdaux synchrones. Par exemple, considérons deux mouvements sinusoïdaux synchrones définis par les équations horaires suivantes :

$$x_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Nous définissons alors la *différence de phase (ou déphasage)* entre les deux mouvements par l'expression :

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{déphasage angulaire} \quad (1.4)$$

Si $\Delta\varphi > 0$ nous disons que $x_2(t)$ est en avance de phase sur $x_1(t)$.

Si $\Delta\varphi < 0$ nous disons que $x_2(t)$ est en retard de phase sur $x_1(t)$.

Pour des **mouvements synchrones** entre eux, **leur déphasage est constant** au cours du temps.

Au déphasage angulaire entre les deux mouvements correspond un décalage horaire τ (*déphasage temporel*) entre les deux courbes représentatives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

$$\Delta\varphi = \omega \times \tau \quad (1.5)$$

Il est à remarquer que la comparaison de phase se fait toujours modulo 2π .

Nous présentons un exemple de comparaison de deux mouvements synchrones sur la figure 1.1.

Ils existent des valeurs particulières du déphasage, qui ont droit à des dénominations spécifiques.

Deux mouvements synchrones sont dits en *concordance de phase*, si leurs élongations atteignent simultanément leurs valeurs maximales, minimales et nulles. Nous avons dans ce cas $\Delta\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous présentons un exemple de ce type sur la figure 1.2 .

Deux mouvements synchrones sont dits en *opposition de phase* si les élongations s'annulent en même temps et que, lorsque l'une est maximale, l'autre est minimale et vice-versa. Nous avons dans ce cas $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous présentons un exemple de ce type sur la figure 1.3.

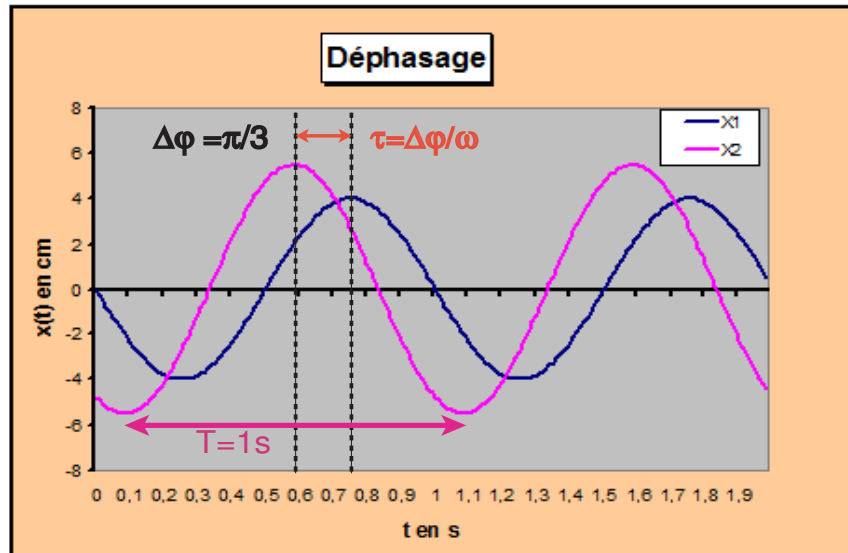


FIGURE 1.1 – Déphasage entre deux mouvements synchrones. Le mouvement décrit par $x_2(t)$ est en avance de phase de $\pi/3$ par rapport au mouvement décrit par $x_1(t)$.

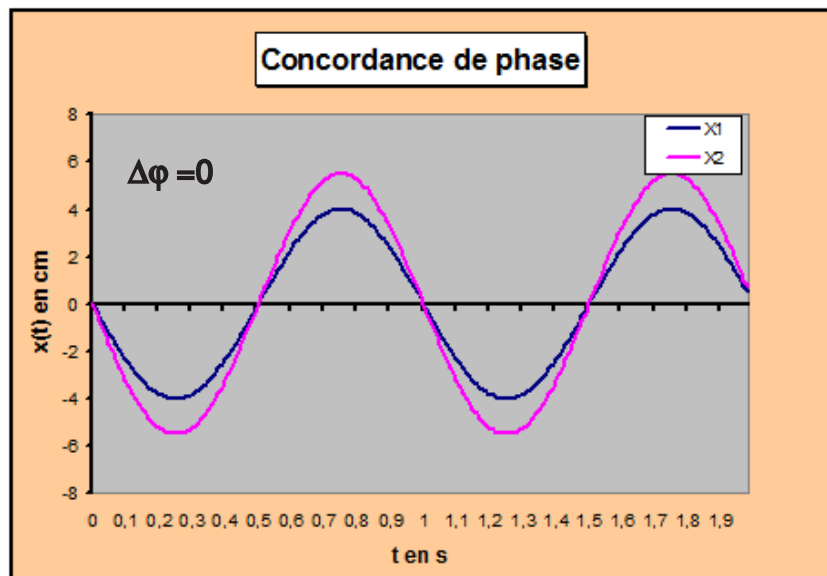


FIGURE 1.2 – Exemple de deux mouvements synchrones en concordance de phase.

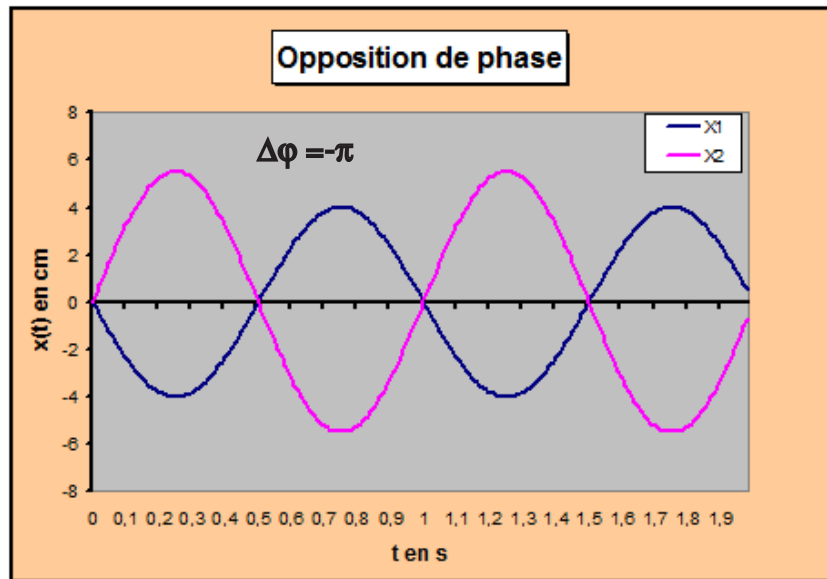


FIGURE 1.3 – Exemple de deux mouvements synchrones en opposition de phase.

Deux mouvements synchrones sont dits en *quadrature de phase*, si l'une des élongations est nulle quand l'autre est maximale ou minimale.

Dans un 1^{er} cas : $x_1(t)$ est en avance de phase par rapport à $x_2(t)$ alors $\Delta\varphi = -\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans un 2^{ème} cas : $x_1(t)$ est en retard de phase par rapport à $x_2(t)$ alors $\Delta\varphi = +\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous présentons un exemple de ce type sur la figure 1.4.

1.1.4 Définition d'un oscillateur harmonique libre

Un système physique quelconque dans lequel la variation d'une grandeur physique $q(t)$ au cours du temps est donnée par une équation horaire sinusoïdale, telle que $q(t) = A \times \sin(\omega t + \varphi)$, est appelé *oscillateur harmonique simple*.

Un oscillateur harmonique simple a les caractéristiques suivantes.

1. Son amplitude est constante.
2. Sa fréquence et sa période sont indépendantes de l'amplitude : les grandes oscillations ont la même période que les oscillations les plus petites (*isochronisme*).
3. La dépendance en fonction du temps de la grandeur, qui fluctue, peut s'exprimer par une fonction sinusoïdale de fréquence unique (c'est cela qui fait que l'oscillation est dite *harmonique*).

Un oscillateur est *libre* s'il oscille sans interventions extérieures pendant son retour à l'équilibre.

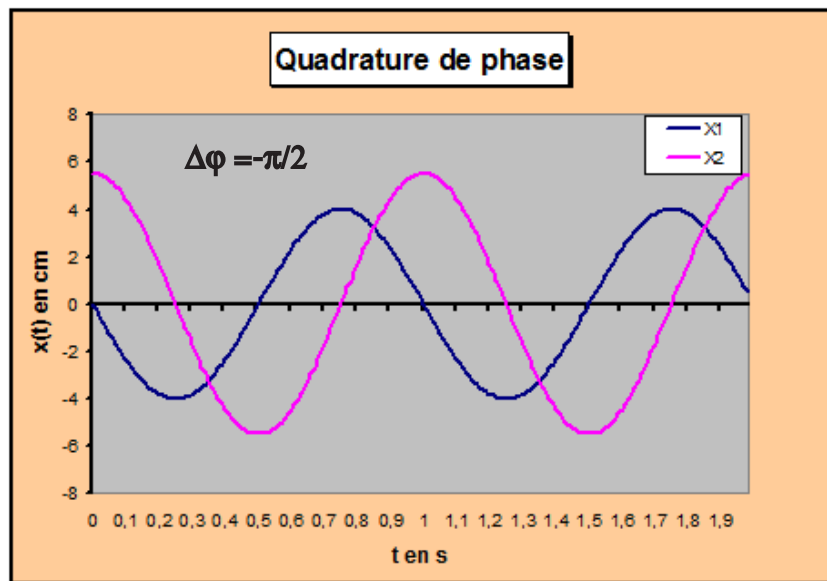


FIGURE 1.4 – Exemple de deux mouvements synchrones en quadrature de phase.

L'évolution temporelle de la grandeur physique caractérisant l'oscillateur est régie par une équation différentielle se présentant de la manière suivante :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2q = 0$$

1.2 L'oscillateur harmonique le plus simple : un ressort et une masse liés ensemble

Nous allons donc étudier un système mécanique constitué d'un ressort à spirales dont l'une des extrémités est fixée à un mur et l'autre est attachée à un objet de masse m . Celui-ci sera assimilée par la suite à un point matériel. Le ressort est supposé de masse négligeable et possède des spires non jointives. Nous appellerons cette ensemble **pendule élastique**.

Nous supposons pour cette étude que cet ensemble est horizontal comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.5 ci-dessous. La masse peut se déplacer horizontalement sans frottement.

Le physicien anglais Hooke a montré au 17^{ème} siècle qu'un tel ressort métallique élastique lorsqu'il est soumis à une variation de longueur $\vec{\Delta\ell}$ exerce une force de réaction \vec{F}_{Rappel} appelée, **force de rappel élastique du ressort**, telle que :

$$\vec{F}_{Rappel} = -k \times \vec{\Delta\ell} \tag{1.6}$$

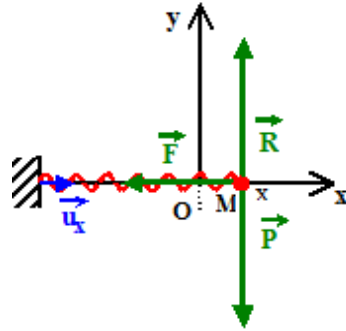


FIGURE 1.5 – Le pendule élastique horizontal.

Il y a donc tout simplement proportionnalité entre la force et la déformation. Le signe moins indique bien qu'il y a une opposition du ressort à la déformation que nous lui faisons subir.

Le coefficient de proportionnalité k est appelé **constante de raideur du ressort** et caractérise son élasticité lors d'une déformation suivant la direction de son axe de symétrie cylindrique.

$$\vec{F}_{Rappel} = -k\overline{\Delta\ell} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0) = -k(x - x_0)\vec{u}_x \quad (1.7)$$

Un ressort élastique a tout naturellement tendance à essayer de retrouver sa forme initiale dès qu'il est soumis à une déformation, que celle-ci soit une compression ou une dilatation, d'où l'existence de cette force de "rappel" de sa forme originelle.

Lorsqu'il y a compression, la longueur du ressort se réduit comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.6, nous avons alors $\Delta\ell = x - x_0 < 0$ d'où $F_{Rappel\ x} > 0$.

Lorsqu'il y étirement du ressort, la longueur du ressort s'accroît. Nous avons donc dans ce cas $\Delta\ell = x - x_0 > 0$ d'où $F_{Rappel\ x} < 0$.

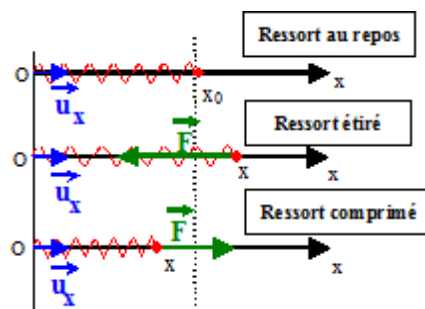


FIGURE 1.6 – Définition de la force élastique de rappel d'un ressort à spirales.

1.2.1 Etude du mouvement d'un tel oscillateur harmonique

Nous allons maintenant étudier le mouvement de cet oscillateur en appliquant les lois fondamentales de la mécanique. Nous supposons que le mobile va se déplacer horizontalement le long d'un axe Ox . Le point origine O de l'axe est placé à l'endroit, où le ressort est au repos lorsque le mobile M y est. Pour cela, nous appliquons la méthode habituelle de résolution d'un problème de mécanique :

1. Le système que nous étudions est donc la masse m assimilée à un point M .
2. Nous avons choisi de prendre comme référentiel du mouvement, le laboratoire terrestre supposé galiléen durant l'expérience.
3. Bilan des forces appliquées au système étudié (voir sur la figure 1.5) :
 - Le poids $\vec{P} = -m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
 - La réaction du sol $\vec{R} = R\vec{u}_y$ au point M où se trouve la masse m . Celle-ci est perpendiculaire à Ox parce qu'il n'y a pas de frottement.
 - La force de rappel du ressort $\vec{F}_{rappel} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0) = -k(x - x_0)\vec{u}_x$

Nous appliquons alors le principe fondamental de la dynamique.

Nous obtenons donc

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{rappel}} \quad (1.8)$$

Equation du mouvement

Nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe Ox . Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Cette relation peut être réécrite si nous passons le deuxième terme dans le premier terme.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Après division par m de l'ensemble de l'équation, nous obtenons l'équation différentielle suivante qui régit l'évolution temporelle d'un tel système :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \quad (1.9)$$

Résolution de l'équation différentielle qui régit le mouvement

Nous obtenons donc l'équation différentielle typique d'un oscillateur harmonique libre.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0} \quad (1.10)$$

Nous aurons donc un mouvement rectiligne sinusoïdal de *pulsation propre* caractéristique de ce pendule élastique telle que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi N_0$$

Sa *fréquence propre* est :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donc sa *période propre* caractéristique d'oscillations sera :

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Cela paraît intuitivement tout à fait normal que plus la masse est grande plus le ressort aura du mal à bouger cette masse, donc la période deviendra plus grande. De même, plus le ressort sera rigide donc sa constante de raideur grande, plus l'action de celui-ci sera forte sur la masse donc la période d'oscillations courte.

L'équation horaire va donc prendre la forme suivante :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.11)$$

Nous aurons donc pour la composante de la vitesse, l'expression en fonction du temps suivante :

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.12)$$

Elle peut aussi être écrite de la manière équivalente suivante :

$$x(t) = C \times \cos(\omega_0 t) + D \times \sin(\omega_0 t) \quad (1.13)$$

La vitesse s'écrira alors :

$$\dot{x}(t) = -C\omega_0 \times \sin(\omega_0 t) + D\omega_0 \times \cos(\omega_0 t) \quad (1.14)$$

Cela implique pour que ces deux solutions soient équivalentes, que $C = A \sin \varphi$ et $D = A \cos \varphi$.

Il y a donc deux inconnues à déterminer selon la manière d'écrire l'équation horaire A et φ ou C et D .

C'est **à partir des conditions initiales sur la position et la vitesse** que nous pouvons les déterminer.

Supposons qu'à l'instant t initial, nous ayons eu $x(0) = x_M$ et $\dot{x}(0) = V_0$, c'est à dire un cas où les conditions initiales sont quelconques.

Nous devons donc avoir :

$$x(t = 0) = A \sin(\omega_0 \times 0 + \varphi) = A \sin \varphi = x_M$$

$$\dot{x}(t = 0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 \times 0 + \varphi) = A\omega_0 \cos \varphi = V_0$$

Nous pouvons donc en déduire que

$$\frac{x_M}{A} = \sin \varphi \text{ et } \frac{V_0}{A\omega_0} = \cos \varphi \tag{1.15}$$

Compte tenu du fait que $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, nous pouvons alors écrire que :

$$\frac{x_M^2}{A^2} + \frac{V_0^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \tag{1.16}$$

On peut alors écrire que

$$x_M^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2} = A^2 \tag{1.17}$$

Nous en déduisons l'expression de A suivante :

$$A = \sqrt{x_M^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}} \tag{1.18}$$

Pour obtenir l'expression de $\tan \varphi$, il suffit de diviser $\sin \varphi$ par $\cos \varphi$ en prenant leurs expressions respectives dans l'équation 1.15. Nous obtenons alors :

$$\tan \varphi = \frac{x_M\omega_0}{V_0} \tag{1.19}$$

Nous aurions pu aussi utiliser l'autre forme de solution présentée au travers de l'équation 1.13 pour appliquer les conditions initiales.

Dans ce cas nous aurions donc eu :

$$x(t = 0) = C \cos(\omega_0 \times 0) + D \sin(\omega_0 \times 0) = C = x_M$$

$$\dot{x}(t = 0) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 \times 0) + D\omega_0 \cos(\omega_0 \times 0) = D\omega_0 = V_0$$

donc

$$x(t) = x_M \cos(\omega_0 \times t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \times t) \tag{1.20}$$

Ceci est en fait exactement le même résultat mais écrit différemment compte tenu des relations existant entre les deux formes de la solution de l'équation différentielle. Nous

utiliserons donc l'une ou l'autre des deux formes selon les simplifications de calcul que celles-ci pourraient permettre.

Le cas particulier le plus souvent rencontré est celui qui correspond à un étirement du ressort puis un lâcher sans vitesse initiale. Nous avons alors $V_0 = 0$ et $x(0) = x_M$. Nous en déduisons alors à partir des équations 1.18 et 1.19 que $A = x_M$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Cela nous donne une évolution sinusoïdale de l'élongation en fonction du temps comme celle que nous pouvons observer sur la figure 1.7. Son équation horaire s'écrit alors tout simplement :

$$x(t) = x_M \cos(\omega_0 \times t) \quad (1.21)$$

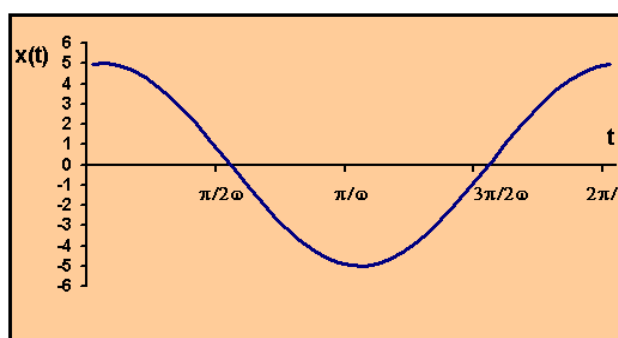


FIGURE 1.7 – Evolution temporelle d'un oscillateur harmonique libre étiré et lâché sans vitesse.

1.2.2 Etude rapide du pendule élastique vertical

Nous allons étudier maintenant le pendule dans une position verticale comme indiquée sur la figure 1.8.

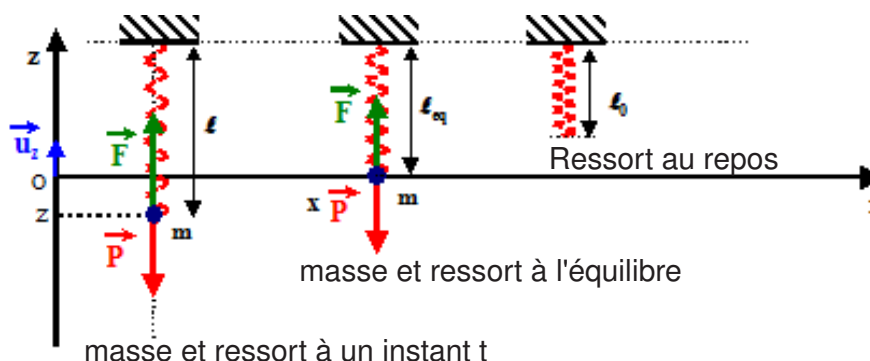


FIGURE 1.8 – Le pendule élastique vertical.

Au repos, sans masse attachée à son extrémité, le ressort a une longueur ℓ_0 .

A l'équilibre, une fois la masse accrochée, le ressort s'étire jusqu'à une longueur ℓ_{eq} .

Nous savons qu'à l'équilibre, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au système étudié, c'est à dire la masse ponctuelle m , est égale au vecteur nul $\vec{0}$.

Ici, les deux forces extérieures appliquées au système sont, d'une part, son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et d'autre part la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_{rappel} = -k(\vec{\ell}_{eq} - \vec{\ell}_0) = -k((- \ell_{eq}\vec{u}_z) - (-\ell_0\vec{u}_z)) = +k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$$

Nous avons donc l'expression vectorielle :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{rappel} = -mg\vec{u}_z + k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$$

Si nous projetons cette équation vectorielle sur Oz défini comme indiqué sur la figure 1.8, celle-ci devient donc :

$$0 = -mg + k(\ell_{eq} - \ell_0)$$

Nous en déduisons que

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \tag{1.22}$$

Si maintenant, nous voulons étudier l'évolution temporelle de ce système après que quelqu'un l'ai mis en mouvement vertical par un moyen quelconque. Nous choisissons pour simplifier les calculs de prendre comme origine de l'axe Oz , la position d'équilibre telle qu'elle a été définie précédemment.

Le système n'ai toujours soumis qu'à deux forces extérieures :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \text{ et } \vec{F}_{rappel} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0)$$

avec ici, $\vec{\ell} = -\ell\vec{u}_z = -(\ell_{eq} - z)\vec{u}_z$ et $\vec{\ell}_0 = -\ell_0\vec{u}_z$.

Nous appliquons donc la relation fondamentale de la dynamique pour obtenir l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de ce système.

Celle-ci nous donne donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{rappel} \tag{1.23}$$

Nous projetons ensuite cette relation vectorielle sur l'axe Oz , ce qui nous donne :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + k(\ell - \ell_0) = -mg + k(\ell_{eq} - z - \ell_0) \tag{1.24}$$

Nous pouvons remplacer dans cette dernière équation ℓ_{eq} par ce que cela vaut (voir l'équation 1.22). L'équation ci-dessus devient alors :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + k(\ell_0 + \frac{mg}{k} - z - \ell_0) = -mg + mg - kz = -kz \tag{1.25}$$

Nous pouvons alors réécrire cette équation sous la forme standard :

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z = 0} \quad (1.26)$$

Nous retrouvons donc l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Le pendule élastique vertical va donc évoluer au cours temps d'une manière totalement similaire à celle du pendule élastique horizontal.

1.2.3 Aspects énergétiques

Si nous nous plaçons maintenant d'un point de vue énergétique, nous pouvons nous rendre compte que lors des oscillations d'un oscillateur harmonique, il y a un processus d'échange périodique d'énergie entre deux formes de stockage d'énergie : les énergies potentielle et cinétique (voir la figure 1.9).

Cela correspond dans le cas du système oscillant masse-ressort horizontal à un échange entre une forme inertielle et élastique de l'énergie.

Si nous prenons la solution de l'équation trouvée ayant la forme générale suivante

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On a alors $\dot{x}(t) = A\omega_0 \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Nous pouvons en déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_P(t)$:

$$E_P(t) = \frac{1}{2} \times k \times x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Compte tenu du fait que $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

Nous pouvons réécrire cette expression de la manière suivante :

$$E_P(t) = \frac{1}{2} k A^2 \frac{(1 - \cos(2 \times (\omega_0 t + \varphi)))}{2} = \frac{1}{4} k A^2 (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi))$$

Nous pouvons faire un travail équivalent pour l'énergie cinétique du mobile E_C , nous obtenons pour cette grandeur en suivant un protocole équivalent et en prenant l'expression de la vitesse instantanée écrite ci-dessus :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} \times m \times \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Sachant que $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, nous pouvons écrire :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} \times m \times \dot{x}^2 = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi))$$

Nous remarquons donc que ces deux grandeurs énergétiques ont une évolution sinusoïdale au cours du temps avec une **pulsation** $\omega = 2\omega_0$ qui est **deux fois plus grande** que pour l'élongation. Elles sont synchrones mais elles sont en opposition de phase, l'énergie potentielle étant en avance de phase par rapport à l'énergie cinétique (pour les conditions initiales habituelles). Lorsque l'une est maximum, l'autre est minimum.

Nous pouvons aussi montrer que pour un tel système mécanique, l'énergie mécanique $E_M(t)$ est conservée au cours du temps car il n'y a pas de perte d'énergie de l'oscillateur harmonique libre au cours de son mouvement.

En effet :

$$E_M(t) = E_C(t) + E_P(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Si nous nous rappelons que $\frac{k}{\omega_0^2} = m$ et $m\omega_0^2 = k$, l'expression précédente se simplifie :

$$E_M(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.27)$$

Nous remplaçons A par l'expression de l'équation 1.18 alors

$$E_M(t) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_M^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}) \quad (1.28)$$

donc

$$E_M(t) = \frac{1}{2}kx_M^2 + \frac{1}{2}k(\frac{V_0^2}{\omega_0^2}) = \frac{1}{2}kx_M^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = E_P(t=0) + E_C(t=0) = E_M(t=0) \quad (1.29)$$

Ce résultat est tout à fait normal sachant que les seules forces qui travaillent ici, sont des forces à travail conservatif, donc, par essence, celles-ci ne sont pas des forces qui dissipent l'énergie mécanique.

Pour quantifier plus précisément comment se passe ce phénomène de transformation périodique d'énergie potentielle en énergie cinétique et vis versa, nous allons essayer d'étudier l'évolution énergétique de l'oscillateur harmonique lorsque les conditions initiales sont les plus simples possibles, c'est à dire un opérateur a tout simplement tiré sur la masse donc étiré le ressort puis l'a lâché sans vitesse. Dans ce cas, comme nous avons pu le montrer précédemment, nous avons donc :

$$x(t) = x_M \cos \omega_0 t \text{ et } \dot{x}(t) = -x_M \omega_0 \sin \omega_0 t$$

Ceci implique donc que

$$E_P(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_M^2 \cos^2 \omega_0 t \text{ et } E_C(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_M^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kx_M^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Nous retrouvons bien sûr que l'énergie mécanique est conservée, en effet

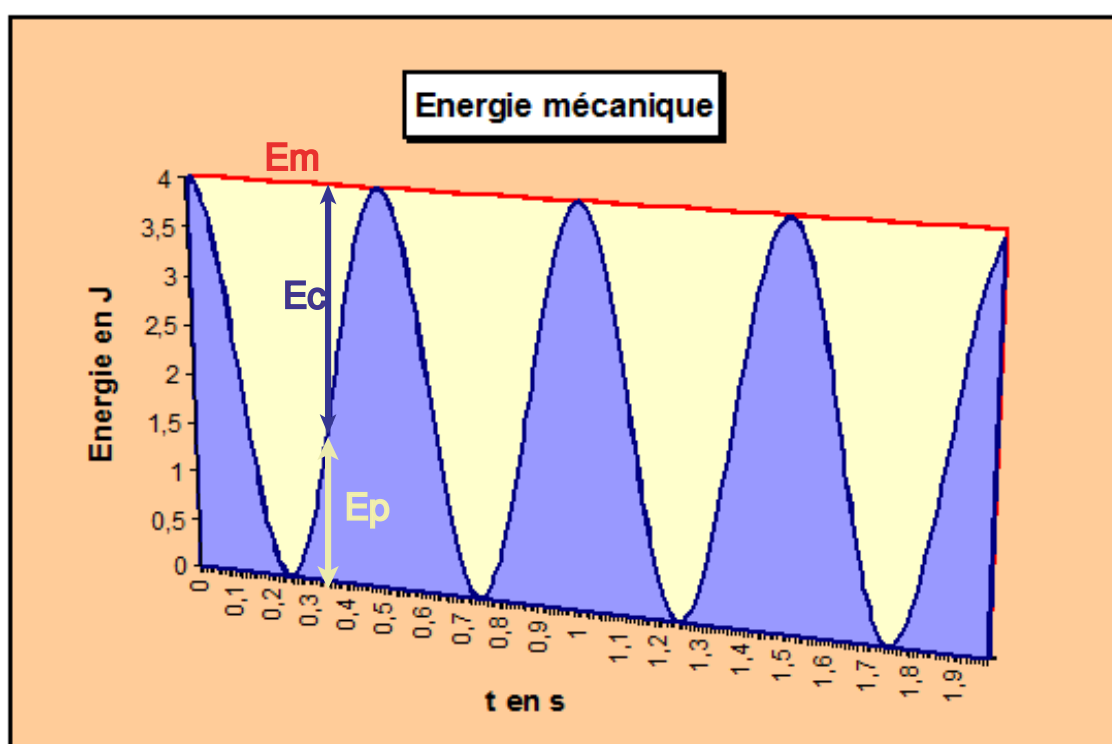


FIGURE 1.9 – Evolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique d'un oscillateur harmonique pendant deux périodes, celui-ci ayant été étiré et lâché sans vitesse

$$E_M(t) = E_P(t) + E_c(t) = \frac{1}{2}kx_M^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}kx_M^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kx_M^2 = E_M(0)$$

Nous présentons sur le graphe de la figure 1.9 l'évolution temporelle de ces deux grandeurs complémentaires ainsi que l'énergie mécanique dans le cas présenté ci-dessus.

Nous pouvons aussi déterminer l'évolution moyenne au cours du temps de ces grandeurs. Pour cela, il suffit de calculer la moyenne de ces deux grandeurs sur une période, celle-ci se répétant ensuite indéfiniment tant que le mouvement perdure. Pour calculer l'énergie potentielle moyenne de l'oscillateur harmonique libre sur une période, il suffit donc de sommer la valeur de l'énergie potentielle à chaque instant t fois l'intervalle dt de temps pendant laquelle elle est restée constante, et de diviser par T_0 .

C'est ce que permet de faire l'expression mathématique écrite ci-après :

$$\langle E_P \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_P(t) \times dt$$

Donc dans le cas qui nous intéresse ici :

$$\begin{aligned} \langle E_P \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{2}kx_M^2 \cos^2 \omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{1}{2}kx_M^2 \int_0^{T_0} \cos^2 \omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{2}k \frac{x_M^2}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}kx_M^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{T_0} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} dt \\ &= \frac{kx_M^2}{4\pi} \int_0^{T_0} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} d(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Nous faisons un changement de variable dans l'intégrale en posant $u = \omega_0 t$, bien évidemment les bornes d'intégration changent aussi. Nous obtenons alors :

$$\langle E_P \rangle = \frac{kx_M^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} d(u) = \frac{kx_M^2}{4\pi} \times \pi = \frac{kx_M^2}{4} = \frac{E_M(0)}{2} \quad (1.30)$$

Un calcul similaire sur l'énergie cinétique donnerait exactement le même résultat. Il est très facile de le comprendre si l'on se souvient que l'intégrale calculée précédemment, en fait, représente tout simplement la surface comprise entre la courbe décrivant l'énergie potentielle et l'axe des abscisses.

Nous voyons sur la figure 1.9 que cette surface représente bien la moitié de la surface comprise entre la ligne correspondant à l'énergie mécanique et l'axe des abscisses. Cette dernière surface rectangulaire vaut tout simplement $E_M(0) \times T_0$ donc la moitié divisé par T_0 vaut bien $\frac{E_M(0)}{2}$.

1.3 Exemples d'autres oscillateurs harmoniques libres à un degré de liberté

Nous allons maintenant voir qu'il existe bien d'autres oscillateurs harmoniques que le système mécanique ressort et masse.

1.3.1 Les pendules

Parmi les plus importants historiquement, il y a les pendules, qui ont donné leur nom à des instruments de mesure de temps. Pour ce type d'oscillateurs harmoniques, la force de rappel vers la position d'équilibre est la force de pesanteur.

Le pendule simple

Le pendule le plus simple qui puisse être construit, est le pendule qui est effectivement appelé *pendule simple*. C'est un pendule comme celui qu'utilise le professeur Tournesol dans les albums de Tintin. Il est donc constitué d'une masse sphérique attachée à un fil sans masse. L'autre extrémité du fil est attaché à un point fixe par rapport au référentiel d'intérêt. Si le rayon de la sphère est petit par rapport à la longueur du fil, celle-ci est assimilée à une particule matérielle. Il va osciller dans un plan. Nous supposons que les frottements dans l'air sont négligeables. Nous présentons un exemple de pendule simple sur la figure 1.10.

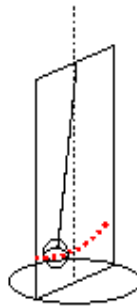


FIGURE 1.10 – Pendule simple oscillant dans un plan.

Pour étudier son mouvement, nous allons l'étudier d'un point de vue énergétique. La sphère du pendule n'est soumise qu'à deux forces : son propre poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} (le fil est supposé tendu). A un instant t quelconque, nous aurons une situation correspondant à la figure 1.11. Si, à cet instant précis, le pendule est en train de redescendre, le vecteur déplacement élémentaire est exactement comme indiqué sur figure 1.11. Sa direction est perpendiculaire à la direction de la tension. Ceci entraîne que la seule force qui va travailler au cours du mouvement est la poids \vec{P} , qui est une force qui dérive d'une énergie potentielle.

En effet, nous avons obligatoirement $\delta W_{\vec{T}} = \vec{T} \bullet d\vec{OM} = 0$.

1.3 Exemples d'autres oscillateurs harmoniques libres à un degré de liberté 19

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit en fonction de l'altitude donc ici la variable z de la manière suivante :

$$E_P(z) = mgz + K$$

Avec K constante d'intégration.

Nous devons fixer arbitrairement l'altitude à laquelle l'énergie potentielle est nulle pour déterminer K . Nous choisissons que l'énergie de potentielle soit nulle au point O (origine de l'axe Oz), c'est à dire quand le pendule est au plus bas. Ceci implique que K soit nul. Nous calculons d'abord z . Nous voyons sur le schéma de la figure 1.11 que $z = \ell - \ell \cos \theta$.

Nous en déduisons l'expression en fonction de θ de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_P(M) = mg\ell(1 - \cos \theta)$$

L'énergie cinétique se calcule en tenant compte de la trajectoire circulaire du pendule, nous avons dans ce cas $\|\vec{v}\| = \ell|\dot{\theta}|$ donc l'énergie cinétique s'écrit tout simplement :

$$E_C(M) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Nous pouvons en déduire l'expression de l'énergie mécanique du pendule qui est une grandeur qui se conserve au cours du temps puisque la seule force qui travaille, n'est pas dissipatrice d'énergie :

$$E_M(M) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta)$$

Si nous dérivons donc cette expression par rapport au temps, cette dérivée doit être nulle à tout instant. Nous obtenons donc dans ce cas :

$$\frac{dE_M(M)}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m\ell^2 \times 2\dot{\theta} \times \ddot{\theta} + mg\ell \times \sin \theta \times \dot{\theta}$$

donc nous en déduisons que

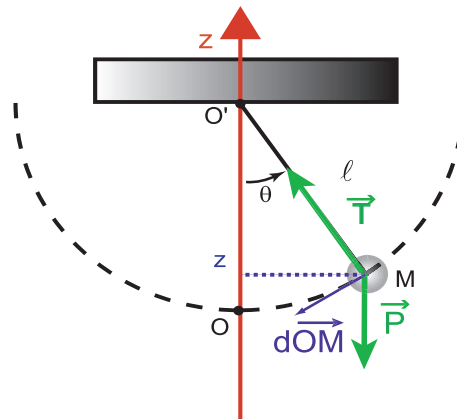
$$0 = m\ell^2\dot{\theta} \times \ddot{\theta} + mg\ell \times \sin \theta \times \dot{\theta}$$

Nous divisons ensuite cette expression par $m\ell^2\dot{\theta}$ d'où

$$\boxed{0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta} \tag{1.31}$$

Cette équation différentielle n'a pas de solution analytique simple.

Mais si nous supposons que l'angle d'oscillations θ demeure petit au cours du mouvement. Nous allons pouvoir faire ce que l'on appelle *l'approximation des petites angles*

FIGURE 1.11 – Pendule simple en oscillation à un instant t .

(les angles étant bien sûr définis en radians comme cela doit toujours être fait en physique). Dans ce cadre, nous savons que nous pouvons considérer que $\sin \theta \approx \theta$.

L'équation 1.31 se simplifie donc

$$\boxed{0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta} \quad (1.32)$$

Nous retrouvons alors l'équation typique d'un oscillateur harmonique libre, ayant une pulsation d'oscillations :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

Nous avons dans ce cas des oscillations de rotation.

Nous pouvons remarquer qu'avec un tel système mécanique, nous disposons en fait d'un **gravimètre**, c'est à dire un instrument qui permet de mesurer l'accélération de pesanteur n'importe où sur terre en mesurant une période, donc un temps.

La période d'oscillations de ce pendule est indépendante de l'amplitude initiale du mouvement : il y a **isochronisme**. Ceci demeure vrai tant que l'approximation des petits angles reste correcte. Si l'angle devient trop grand pour la respecter, alors il va apparaître une dépendance de la période en fonction de l'amplitude, l'oscillateur devient **anharmonique**.

Le pendule pesant

Dans la vie courante, il existe des oscillateurs pendulaires beaucoup plus complexes que celui que nous venons d'étudier. Nous pouvons penser par exemple à un enfant sur une balançoire, aux horloges à balancier, à un gymnaste tenant une barre fixe, à nos bras, à nos jambes ou à des ponts suspendus. Nous allons appeler ce type de pendules soit **pendule pesant** soit **pendule composé**.

1.3 Exemples d'autres oscillateurs harmoniques libres à un degré de liberté 21

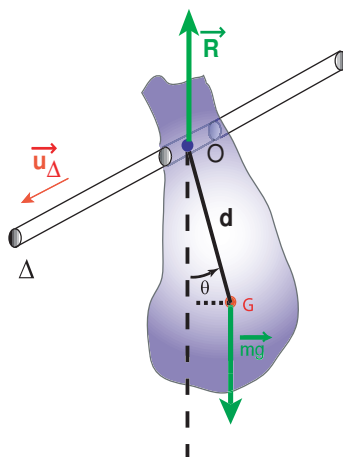


FIGURE 1.12 – Pendule pesant oscillant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation Δ .

La figure 1.12 représente ce type de pendule sous la forme d'un corps rigide pivotant librement autour d'une axe Δ qui ne passe pas par son centre de masse. Il s'agit donc d'un solide en mouvement autour d'un axe horizontal fixe sous l'action de son propre poids. Pour pouvoir étudier un tel mouvement, il faut faire non pas de la mécanique du point mais de la mécanique du solide. Comme le mouvement du pendule est un mouvement d'oscillations en rotation, cela nous amène à utiliser le théorème du moment cinétique (celui-ci est vu en cours de Mécanique du Solide).

Le théorème du moment cinétique nous dit que dans un mouvement de rotation par rapport à un axe fixe Δ vis à vis d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système matériel par rapport à cet axe est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe, celles-ci étant appliquées au système étudié. Nous écrivons mathématiquement ceci de la manière suivante :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \sum_i \Gamma_{\Delta}(\vec{F}_{i_{ext}})$$

avec σ_{Δ} moment cinétique du système par rapport à l'axe Δ défini de la manière suivante :

$$\sigma_{\Delta} = I_{\Delta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

Où I_{Δ} est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire de rotation du pendule composé.

Pour trouver le deuxième terme de l'équation, il faut faire le bilan des forces extérieures appliquées au système étudié.

Il y a deux forces extérieures : son propre poids \vec{P} , appliquée au point G et la réaction de la barre \vec{R} , qui est toujours perpendiculaire à l'axe de rotation et est appliquée au point O .

Si nous voulons calculer les deux moments de ces forces par rapport à l'axe Δ , il faut d'abord calculer le moment de ces forces par rapport au point O appartenant à l'axe Δ (voir sur la figure 1.12). Par définition nous avons donc :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P}$$

et

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Donc seul le poids va faire tourner le système par rapport à l'axe.

Ensuite pour calculer le moment de la force par rapport à l'axe, il suffit de projeter sur l'axe Δ le vecteur que nous venons de calculer, en faisant un produit scalaire entre ce vecteur et le vecteur unitaire \vec{u}_Δ , associé à la direction de l'axe de rotation (voir sur la figure 1.12).

$$\Gamma_\Delta(\vec{P}) = \vec{u}_\Delta \bullet (\vec{OG} \wedge \vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

Le vecteur unitaire associé \vec{u}_Δ à l'axe de rotation est défini de manière à ce que la situation expérimentale décrite sur la figure 1.12 corresponde à une rotation dans le sens trigonométrique.

Ayant fait tout cela, nous pouvons appliquer le théorème du moment cinétique tel que nous l'avons défini précédemment, nous obtenons alors

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \Gamma_\Delta(\vec{P})$$

donc

$$I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta$$

Si nous faisons l'approximation des petits angles comme nous l'avons fait pour le pendule simple, nous obtenons donc l'équation différentielle suivante après passage du second membre dans le premier :

$$I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd \theta = 0$$

Celle-ci devient après division par I_Δ

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_\Delta} \theta = 0} \quad (1.33)$$

Nous avons donc à nouveau une équation différentielle typique d'un oscillateur harmonique avec une pulsation propre telle que :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}}$$

et par conséquent une période T_0 telle que :

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$$

Le pendule de torsion

Nous allons maintenant voir une autre sorte d'oscillateur harmonique en rotation. Il est constitué le plus souvent d'un fil métallique élastique. Ce fil est par exemple fixé au plafond ou à une potence. A l'autre bout est fixé un objet massique ayant un moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe Δ passant par le fil tendu. Lorsque l'on tourne l'objet massique (sur

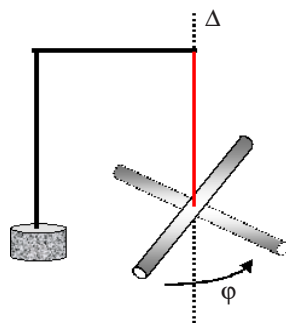


FIGURE 1.13 – Pendule de torsion oscillant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation Δ .

la figure une barre métallique) d'un angle donné φ , on tord le fil métallique. Celui n'est plus dans son état normal. Etant élastique, il va essayer de revenir à son état normal en exerçant ce que nous appelons un couple de rappel (moment de force par rapport à l'axe) sur l'objet massique, d'une manière analogue à ce qu'il se passe pour un ressort métallique.

Ce couple de rappel a la forme suivante :

$$\Gamma_\Delta = -C\varphi$$

Avec la grandeur C , qui est appelée *constante de torsion du fil*.

Pour un tel système le moment cinétique de l'objet massique par rapport à l'axe Δ est le suivant :

$$\sigma_\Delta = I_\Delta \times \frac{d\varphi}{dt} = I_\Delta \times \dot{\varphi}$$

Si nous appliquons le théorème du moment cinétique à ce système sachant que seul le couple de rappel intervient dans la rotation, nous avons donc :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = I_\Delta \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = I_\Delta \ddot{\varphi} = -C\varphi$$

Nous pouvons réécrire cette équation d'une autre façon

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{C}{I_\Delta}\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I_\Delta}\varphi = 0} \quad (1.34)$$

Nous retrouvons alors l'équation typique d'un oscillateur harmonique avec une pulsation propre ω_0 telle que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_\Delta}}$$

1.3.2 Tout système physique en mouvement autour d'une position d'équilibre stable

Tout système mécanique se trouvant en position d'équilibre stable présente un minimum local d'énergie potentielle totale comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.14.

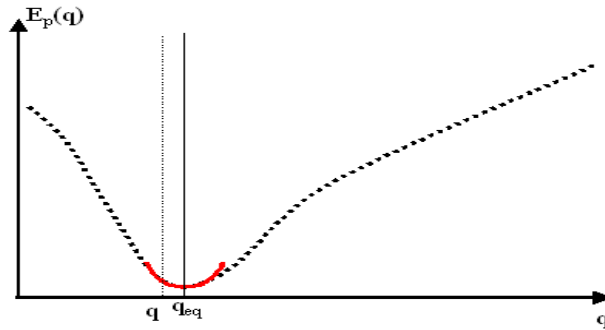


FIGURE 1.14 – Evolution de l'énergie potentielle en fonction de q au voisinage d'un point d'équilibre stable.

Cela veut donc dire, si nous supposons que l'on est dans le cas le plus simple (à une seule dimension avec une seule variable de position q pour caractériser l'état du système), que nous pouvons écrire le développement limité de cette énergie potentielle pour une position q voisine de celle d'équilibre q_{eq} de la manière suivante :

$$E_p(q) = E_p(q_{eq}) + \left(\frac{dE_p}{dq} \right)_{q=q_{eq}} \times (q - q_{eq}) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{d^2 E_p}{dq^2} \right)_{q=q_{eq}} \times (q - q_{eq})^2 + \dots$$

Si nous nous plaçons dans une position q telle que les termes d'ordre supérieur à 2 du développement limité puissent être supposés négligeables, alors, compte tenu du fait que le mouvement se produit autour d'une position d'équilibre stable, nous savons que

$$\left(\frac{dE_p}{dq} \right)_{q=q_{eq}} = 0$$

et

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dq^2} \right)_{q=q_{eq}} = \alpha \text{ et est positif.}$$

1.3 Exemples d'autres oscillateurs harmoniques libres à un degré de liberté 25

$$\text{D'où } E_p(q) = E_p(q_{eq}) + 0 \times (q - q_{eq}) + \frac{1}{2} \times \alpha \times (q - q_{eq})^2$$

$$\text{Si } E_p(q_{eq}) = 0, \text{ nous avons donc } E_p(q) = \frac{1}{2} \times \alpha \times (q - q_{eq})^2$$

Nous retrouvons alors une expression mathématique équivalente à celle de l'énergie potentielle d'un classique oscillateur harmonique comme le système mécanique ressort plus masse. Nous pouvons résumer tout ceci, en disant que le potentiel énergétique présente en fonction de la variable q une forme parabolique au voisinage de la position d'équilibre comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.14.

Nous savons que l'équation différentielle qui gère le mouvement d'un tel système au cours du temps s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}q = 0}$$

La solution d'une telle d'équation s'écrit : $q(t) = A \times \sin(\omega_0 \times t + \varphi)$ avec $\omega_0^2 = \frac{\alpha}{m}$.

Les valeurs de A et φ dépendent des conditions initiales.

Le mouvement du système mécanique va donc être un mouvement d'oscillations périodiques autour de la position d'équilibre avec une période propre T_0 , une fréquence propre N_0 et une pulsation propre ω_0 telles que

$$\boxed{T_0 = 1/N_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}}$$

Le comportement de tout système en équilibre stable analogue à celui d'un oscillateur harmonique pour des mouvements autour de la position d'équilibre permet de comprendre l'importance de ce dernier pour comprendre tous les phénomènes vibratoires. En effet, tout objet ou système mécanique, qui peut exister un temps long, peut le faire parce que l'ensemble de ces constituants sont dans des positions d'équilibre stables. Donc, toute perturbation légère de ce système va entraîner des oscillations. Cela arrive pour des cordes de guitare, pour des tuyaux d'orgues, des poutres en bois ou en acier, pour un verre en cristal, pour des calculs rénaux..etc. C'est aussi vrai à l'échelle microscopique, cela permet de comprendre pourquoi les molécules peuvent vibrer à des pulsations propres qui dépendent des masses de leurs constituants et de la dérivée seconde du potentiel d'interaction entre ses constituants à l'équilibre.

Chapitre 2

L'oscillateur harmonique libre amorti à un degré de liberté

2.1 L'oscillateur harmonique libre amorti par frottement fluide

Nous avons vu que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique libre est conservée au cours du temps. Ceci implique qu'un oscillateur harmonique une fois mis en mouvement ne devrait jamais arrêter d'osciller. Mais l'expérience de la vie courante montre que ceci n'est sûrement pas vrai. Il suffit de penser tout simplement à un enfant sur une balançoire, qui, après avoir été poussé, ne fait aucun mouvement sur sa balançoire. Au bout d'un certain temps, la balançoire et l'enfant vont s'arrêter de bouger et retourner à la position initiale d'équilibre. Il y a eu ralentissement du mouvement jusqu'à sa disparition. Nous parlons dans ce cas d'*amortissement* du mouvement d'oscillations. L'énergie mécanique initiale du système mécanique n'a donc pas été conservée au cours du mouvement. Nous disons dans ce cas qu'il y a eu *dissipation de l'énergie mécanique*. Nous savons que des forces à travail non conservatif ont donc agi sur le mouvement du système étudié.

Quelles sont ces forces ? L'énergie mécanique ayant diminué, elles sont obligatoirement à travail résistant. Elles s'opposent au mouvement. Si nous reprenons l'exemple de la balançoire, nous savons que l'air ambiant gêne le mouvement parce qu'il y a une force de frottement fluide dans l'air lors du mouvement. Il peut exister aussi à un degré moindre une force de frottement solide au niveau de l'axe de rotation.

L'expression de la force de frottement fluide est la suivante :

$$\vec{F}_f = -f\vec{v}$$

Avec f *coefficient de frottement fluide*. Ce coefficient dépend de la nature de l'objet (forme et matériau) et de la nature du fluide.

Cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire au vecteur vitesse.

2.1.1 Etude du mouvement d'un tel oscillateur

Nous allons reprendre l'étude du pendule élastique horizontal (voir sur la figure 1.5) en tenant compte maintenant de l'action de cette force supplémentaire. Le bilan des forces appliquées devient donc :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- La réaction du sol $\vec{R} = R\vec{u}_y$ où se trouve la masse M. Celle-ci est perpendiculaire à Ox parce qu'il n'y a pas de frottement solide avec le sol.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}_{rappel} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0) = -k(x - x_0)\vec{u}_x$.
Nous prenons comme origine de l'axe Ox la position au repos du système, ce qui implique que $x_0 = 0$.
- La force de frottement $\vec{F}_f = -f\vec{v} = -f\dot{x}\vec{u}_x = -f\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$

Le système étudié est toujours la masse m assimilée au point M et le référentiel d'étude est toujours le laboratoire terrestre supposé galiléen le temps de l'expérience. Nous appliquons alors le principe fondamental de la dynamique.

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{rappel} + \vec{F}_f} \quad (2.1)$$

Equation du mouvement

Nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe Ox. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt}$$

Cette relation peut être réécrite si nous passons le deuxième terme dans le premier terme.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Après division par m de l'ensemble de l'équation, nous obtenons l'équation différentielle suivante qui régit l'évolution temporelle d'un tel système :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0} \quad (2.2)$$

Souvent l'équation est écrite sous une forme dite *réduite* :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0} \quad (2.3)$$

Pour cela, nous posons que

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (2.4)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{f}{2m}} \quad (2.5)$$

Nous remarquerons que ω_0 *caractérise l'oscillation et λ le freinage*.

Ceux sont des grandeurs physiques de même dimension (l'inverse d'un temps).

L'équation 2.3 est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. La résolution de ce type d'équation est décrite dans un cas général dans la section B.1 de l'annexe B.

Résolution de l'équation différentielle qui régit le mouvement

La solution générale de l'équation 2.3 va donc prendre la forme suivante :

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}} \quad (2.6)$$

Avec $A_1 e^{r_1 t}$ et $A_2 e^{r_2 t}$ solutions particulières de l'équation 2.3.

Les variables r_1 et r_2 sont les racines distinctes d'une équation du second degré, appelée *équation caractéristique ou résolvante* pour que les deux solutions particulières obéissent effectivement à l'équation différentielle étudiée.

L'équation caractéristique prend donc la forme suivante dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.7)$$

En effet si $x(t) = Ae^{rt}$ alors $\dot{x} = re^{rt}$ et $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$.

L'équation différentielle implique donc que

$$Ar^2 e^{rt} + 2\lambda A r e^{rt} + \omega_0^2 A e^{rt} = (r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) A e^{rt} = 0$$

Ceci doit être vrai à tout instant, donc le terme entre parenthèse doit toujours être nul. Ceci nous permet de comprendre l'origine de l'équation caractéristique.

Résoudre cette équation différentielle revient donc à résoudre une équation du second degré. Pour accomplir cette tâche, nous allons nous rappeler la manière de résoudre une équation du second degré. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, pour résoudre cette équation, nous allons calculer le discriminant de cette équation par la relation suivante :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Les solutions de l'équation s'écrivent alors

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les solutions sont réelles lorsque le discriminant est positif ou nul, sinon elles sont complexes. Pour des raisons pratiques, dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, nous préférons introduire la notion de *discriminant réduit*.

Posons $b = 2b'$, nous avons alors $\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$, nous pouvons alors écrire que

$$x_1 = \frac{-2b' - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' - 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

Nous en déduisons alors que si nous posons $\Delta' = b'^2 - ac = \frac{\Delta}{4}$ nous aurons tout simplement

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

et

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Si nous appliquons maintenant cette manière de résoudre une équation du second degré à l'équation caractéristique obtenue pour l'oscillateur harmonique amorti, nous obtenons une expression très simple pour le discriminant réduit, en effet nous avons $a = 1$, $b' = \lambda$ et $c = \omega_0^2$, cela donne donc :

$$\boxed{\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2} \quad (2.8)$$

2.1.2 Trois types de régimes

Il va donc falloir envisager **3 cas différents** selon que Δ' soit **positif, nul ou négatif**. C'est la comparaison directe de λ et ω_0 , qui va définir, quel cas s'applique.

Régime apériodique : frottement fort

Nous allons étudier d'abord le cas où les frottements sont suffisamment forts pour que $\lambda > \omega_0$ et par conséquent $\Delta' > 0$.

Les deux solutions de l'équation caractéristique sont réelles. Nous avons donc :

$$\boxed{r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}$$

Nous pouvons remarquer que ces deux grandeurs sont négatives. Cela donne une solution générale qui prend la forme suivante :

$$x(t) = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

Nous pouvons un peu simplifier cette expression et la réécrire de la manière suivante :

$$\boxed{x(t) = e^{-\lambda t} \times (A_1 e^{-(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t})}$$

Au travers de cette expression, il y a clairement une atténuation de l'amplitude de l'oscillation qui apparaît au travers du terme en $e^{-\lambda t}$.

Nous parlons souvent dans ce cas d'*amortissement*.

Nous pouvons aussi calculer l'expression de la vitesse de l'oscillateur. Il suffit de dériver l'expression obtenue ci-dessus. Nous obtenons alors :

$$\dot{x}(t) = A_1 r_1 e^{r_1 t} + A_2 r_2 e^{r_2 t} = (-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

Il reste à déterminer A_1 et A_2 à l'aide des conditions initiales de position et de vitesse.

Les calculs étant souvent compliqués, nous allons le faire pour les conditions initiales standards $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

A l'instant $t = 0$, nous avons donc

$$x(0) = x_0 = e^{\lambda 0} (A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} 0} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} 0}) = A_1 + A_2$$

et

$$\dot{x}(0) = r_1 A_1 e^{r_1 0} + r_2 A_2 e^{r_2 0} = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$$

Nous ne déduisons que

$$A_1 = -\frac{r_2}{r_1} A_2$$

$$\text{d'où } x_0 = \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \right) A_2 \text{ donc } A_2 = \frac{r_1 x_0}{r_1 - r_2} \text{ et } A_1 = \frac{r_2 x_0}{r_2 - r_1}$$

Cela nous donne donc l'équation horaire suivante pour $x(t)$:

$$x(t) = \frac{x_0}{r_1 - r_2} (r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t})$$

donc

$$x(t) = -\frac{x_0}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \left((-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} - (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \right)$$

Cette dernière expression peut se simplifier un peu

$$x(t) = \frac{x_0}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} e^{-\lambda t} \left((\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) e^{(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}) e^{-(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \right)$$

Après mise en facteur, nous obtenons

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} e^{-\lambda t} \left(\lambda \times \frac{(e^{(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t})}{2} + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times \frac{(e^{(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + e^{-(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t})}{2} \right)$$

d'où

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} e^{-\lambda t} \left(\lambda \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times t) + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times \cosh(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times t) \right)$$

Le tracé de cette fonction $x(t)$ est présenté sur la figure 2.1.

Il y a un retour lent sans oscillation apparente vers la position d'équilibre, d'où le terme de *régime aperiodique*. On utilise aussi le terme de *régime surcritique*.

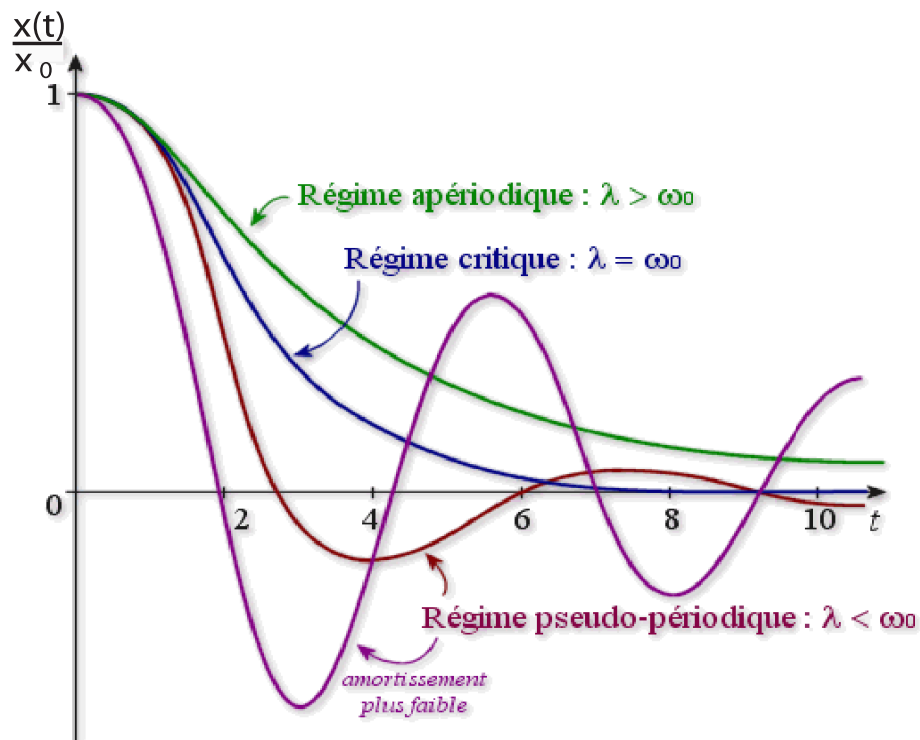


FIGURE 2.1 – Présentation de l'évolution temporelle des trois régimes possibles pour un oscillateur harmonique libre amorti (les conditions initiales correspondant au cas classique : $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$).

Régime aperiodique critique

Il existe un régime particulier correspondant au cas où $\underline{\Delta}' = 0$. Nous avons dans ce cas $\lambda = \omega_0$.

Nous savons que l'équation caractéristique a alors une seule solution :

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0.$$

Il n'y a donc plus qu'une solution indépendante du type $x_1(t) = A_1 e^{-\lambda t}$.

Il est possible de montrer qu'une solution du type $x_2(t) = A_2 t e^{-\lambda t}$ est aussi solution de l'équation différentielle et est indépendante de l'autre.

La solution générale prend alors la forme suivante :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 e^{-\lambda t} + A_2 t e^{-\lambda t} = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t} \quad (2.9)$$

La vitesse correspondante évolue en fonction du temps de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = A_2 e^{-\lambda t} - \lambda(A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t} = (A_2(1 - \lambda t) - A_1 \lambda) e^{-\lambda t}$$

Si nous essayons de retrouver les valeurs de A_1 et A_2 dans les conditions initiales les plus couramment étudiées, nous avons donc :

$$x(0) = (A_1 + A_2 \cdot 0) e^{-\lambda \cdot 0} = A_1 = x_0$$

et

$$\dot{x}(0) = (A_2(1 - \lambda \cdot 0) - A_1 \lambda) e^{-\lambda \cdot 0} = A_2 - A_1 \lambda = 0$$

Nous déduisons de ces deux équations que $A_1 = x_0$ et $A_2 = x_0 \lambda$.

Nous pouvons alors écrire que l'équation horaire du mouvement pour ce régime **apériodique critique** est :

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) = x_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t) \quad (2.10)$$

Celle-ci est représentée sur la figure 2.1 en comparaison avec les autres régimes. Nous pouvons voir là encore qu'il y a un amortissement du mouvement sans oscillation d'où le terme apériodique, mais en plus ce retour à l'équilibre correspond toujours **au retour plus rapide possible** (utile pour les instruments de mesure utilisant des oscillateurs harmoniques, comme les balances).

Régime pseudo-périodique : frottement faible

Nous allons maintenant étudier le troisième régime possible de l'oscillateur harmonique amorti. C'est celui qui correspond au cas où les forces de frottement ont une action faible ou même vraiment très faible. Dans ce dernier cas d'ailleurs, la situation physique se rapproche beaucoup de celle de l'oscillateur harmonique "parfait" sans frottement.

La faiblesse du frottement va donc être caractérisée par la valeur très faible de λ , qui va se retrouver plus petite que la valeur de la pulsation propre ω_0 .

Ceci entraîne donc si $\omega_0 > \lambda$, que le discriminant réduit Δ' est tel que $\underline{\Delta'} < 0$.

La conséquence immédiate de ce fait est que les racines de l'équation caractéristique ne sont plus des nombres réelles mais des nombres complexes, qui sont complexes conjuguées l'un de l'autre :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

et

$$r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Ceci nous amène à définir *une pseudo-pulsation* ω' par la relation suivante :

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.11)$$

Compte tenu de ces racines complexes, la solution de l'équation différentielle va donc prendre la forme suivante :

$$\boxed{x(t) = e^{-\lambda t} \times (A_1 e^{-j\omega' t} + A_2 e^{+j\omega' t})} \quad (2.12)$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration complexes, mais elles ne peuvent pas être quelconques l'une vis à vis de l'autre car le mouvement étant bien évidemment réel, la fonction $x(t)$ doit être réelle obligatoirement.

Ceci implique que A_1 et A_2 soient complexes conjugués l'un de l'autre. Ceci entraîne donc que $x(t)$ peut se réécrire :

$$\boxed{x(t) = A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t + \phi)} \quad (2.13)$$

avec $A_1 = \frac{A}{2} e^{+j\phi}$ et $A_2 = \frac{A}{2} e^{-j\phi}$.

Dans ce cas les deux constantes d'intégration à déterminer sont A et ϕ .

La solution $x(t)$ peut aussi s'écrire différemment :

$$\boxed{x(t) = e^{-\lambda t} \times (C \cos(\omega' t) + D \sin(\omega' t))} \quad (2.14)$$

Si $C = A \cos \phi$ et $D = -A \sin \phi$.

Nous pouvons aussi déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps pour le mouvement pseudo-périodique à partir de la première expression de $x(t)$ présentée ci-dessus.

Nous obtenons alors :

$$\dot{x}(t) = -\lambda \times A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t + \phi) - A \times e^{-\lambda t} \times \omega' \sin(\omega' t + \phi)$$

Que nous pouvons réécrire :

$$\dot{x}(t) = A \times e^{-\lambda t} \times (-\lambda \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi))$$

Nous allons maintenant essayer de retrouver les valeurs de A et ϕ dans les conditions initiales les plus couramment étudiées, c'est à dire lorsque nous avons $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Nous avons donc

$$x(0) = A \times e^{-\lambda \cdot 0} \times \cos(\omega' \cdot 0 + \phi) = A \times 1 \times \cos \phi = x_0$$

et

$$\dot{x}(t) = A \times e^{-\lambda \cdot 0} \times (-\lambda \cos(\omega' \cdot 0 + \phi) - \omega' \sin(\omega' \cdot 0 + \phi)) = A \times 1 \times (-\lambda \cos \phi - \omega' \sin \phi) = 0$$

Nous en déduisons que $A \cos \phi = x_0$ et $\lambda \cos \phi = -\omega' \sin \phi$.

Cela permet de déterminer dans un premier temps que

$$\tan \phi = -\frac{\lambda}{\omega'}$$

Sachant que $\frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \tan^2 \phi$ nous pouvons calculer que

$$A^2 = \frac{x_0^2}{\cos^2 \phi} = x_0^2 \times (1 + \tan^2 \phi) = x_0^2 \times \left(1 + \frac{\lambda^2}{\omega'^2}\right)$$

d'où l'expression de A suivante :

$$A = x_0 \times \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\omega'}\right)^2}$$

Si maintenant, nous traçons sur une figure, la fonction du temps obtenue avec de telles conditions initiales, nous obtenons les deux courbes oscillantes présentées sur la figure 2.1. L'une correspond à un amortissement faible (c'est souvent des frottements dans un gaz), nous avons le temps d'observer un nombre important d'oscillations tandis que pour l'autre, il y a un amortissement suffisamment fort pour n'observer que quelques oscillations (c'est souvent des frottements dans un liquide, qui sera plus visqueux).

Dans tous les cas, il y a des oscillations apparentes autour de la position d'équilibre, mais il y a aussi une atténuation progressive de l'amplitude en suivant une loi exponentielle en fonction du temps jusqu'à un retour à l'équilibre d'où le terme de *régime pseudo-périodique*.

2.1.3 Caractérisation de l'amortissement

Nous allons au travers de l'étude du régime pseudo-période définir un certain nombre de grandeurs qui vont caractériser le comportement de l'oscillateur harmonique amorti. Nous présentons sur la figure 2.2 un cas typique correspondant à ce régime.

La constante de temps et le temps de relaxation

Quelque soit le type de régime, l'amortissement des oscillations dépend du terme exponentiel $e^{-\lambda t}$, λ est appelée *constante d'amortissement*.

Nous appelons *constante de temps* τ , l'intervalle de temps telle que

$$\tau = 1/\lambda$$

C'est donc le temps au bout duquel l'amplitude de l'oscillation a été divisée par le nombre exponentielle e , qui vaut 2,718..etc.

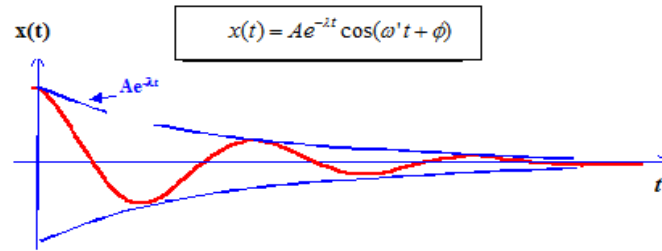


FIGURE 2.2 – Evolution typique d'un oscillateur harmonique libre amorti en régime pseudo-périodique (les conditions initiales correspondant au cas classique : $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$).

Nous définissons aussi une grandeur de même nature pour caractériser la diminution au cours du temps de l'énergie mécanique. Elle est appelée **temps de relaxation** τ_r et est définie de la manière suivante :

$$\tau_r = \tau/2$$

La pseudo-période

Sur la figure 2.3, nous définissons et montrons comment déterminer expérimentalement la **pseudo-période** T' d'un mouvement pseudo-périodique. A partir de la définition mathématique de la pseudo-pulsation ω' donnée dans l'équation 2.11, nous pouvons en déduire l'expression mathématique de la pseudo-période T' :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Nous rappelons que la période propre de l'oscillateur harmonique est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Nous pouvons aussi écrire une expression de la pseudo-période en fonction de cette période propre T_0 de l'oscillateur harmonique :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Nous savons que pour observer le mouvement pseudo-périodique plutôt que les autres régimes, il faut que la pulsation propre ω_0 soit plus grande que la constante d'amortissement λ .

Ceci implique, compte tenu de l'équation qui précède, que, pour une valeur donnée de ω_0 , T' soit toujours plus grand que T_0 . Si nous réfléchissons un peu, ce résultat paraît tout à fait normal. En effet, la différence entre l'oscillateur harmonique "parfait" sans frottement et celui amorti, c'est justement les frottements. Nous savons que la force de frottement

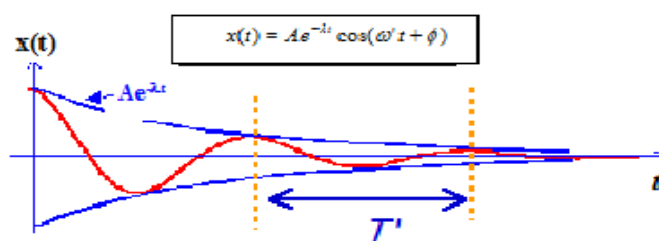


FIGURE 2.3 – Détermination expérimentale de la pseudo-période d'un mouvement d'oscillations amorti.

s'oppose au mouvement, donc naturellement ralentit le mouvement par conséquent ne peut aller que dans le sens d'augmenter le temps pour faire l'aller et le retour de l'oscillation.

Nous pouvons rencontrer des cas où l'amortissement s'avère très faible. Dans ce cas, la constante d'amortissement λ apparaît beaucoup plus petite que la pulsation propre ω_0 . Ceci peut s'écrire $\frac{\lambda}{\omega_0} \ll 1$. La pseudo-période peut alors s'écrire :

$$T' = T_0 \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\omega_0} \right)^2 + \dots \right)$$

A la limite, nous pouvons même considérer que la période et pseudo-période sont égales : $T' = T_0$

Le décrétement logarithmique

Nous allons maintenant définir une grandeur δ qui va caractériser la manière dont l'amplitude de l'oscillation s'atténue et qui permet de remonter à la valeur de la constante d'amortissement λ lorsque nous le déterminons expérimentalement.

Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes.

Nous l'appelons **décrétement logarithmique** et il est défini par la relation suivante :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t_n)}{x(t_n + T')} \right)$$

Où $x(t_n)$ et $x(t_n + T')$ représentent les amplitudes des oscillations aux instants t_n et $(t_n + T')$: généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. La manière de déterminer ces amplitudes est décrite sur la figure 2.4.

Pour améliorer encore la mesure, il peut être intéressant de regarder la variation d'amplitude non pas sur une seule pseudo-période mais sur plusieurs pseudo-périodes.

Dans ce cas, nous avons :

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{x(t_n)}{x(t_n + N \times T')} \right)$$

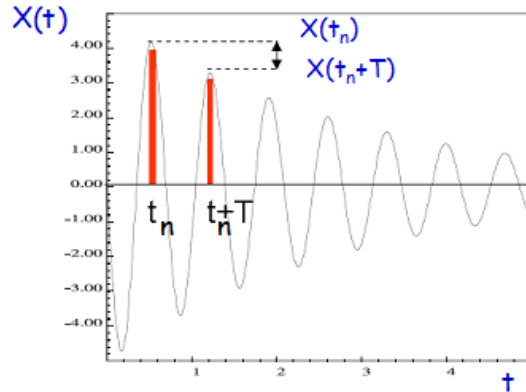


FIGURE 2.4 – Détermination expérimentale du décrément logarithmique d'un mouvement d'oscillations amorties.

Compte tenu de la première définition donnée ci-dessus pour le décrément, nous pouvons montrer que :

$$\boxed{\delta = \lambda \times T'}$$

En effet nous avons

$$\delta = \ln \left(\frac{A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t_n + \phi)}{A \times e^{-\lambda(t+T')} \times \cos(\omega'(t_n + T') + \phi)} \right)$$

donc

$$\delta = \ln \left(\frac{A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t_n + \phi)}{A \times e^{-\lambda(t+T')} \times \cos(\omega' t_n + \phi + \omega' T')} \right) = \ln \left(\frac{A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t_n + \phi)}{A \times e^{-\lambda(t+T')} \times \cos(\omega' t_n + \phi + 2\pi)} \right)$$

L'expression se simplifie de la manière suivante

$$\delta = \ln \left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T')}} \right) = \ln \left(\frac{1}{e^{-\lambda T'}} \right) = \ln \left(e^{\lambda T'} \right)$$

Ceci permet donc de trouver la relation donnée ci-dessus.

Nous pouvons aussi déterminer δ en fonction de ω_0 :

$$\delta = \lambda \times T' = \lambda \frac{2\pi}{\omega'} = \lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Il faut avoir en tête que la pseudo-période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudo-périodique.

Le facteur de Qualité

Pour finir, nous définissons aussi ce qu'on appelle le *facteur de qualité* Q de l'oscillateur par les expressions suivantes :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

ou encore

$$Q = \omega_0 \times \tau_r$$

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système oscillant est grande. Or Q est d'autant plus grand pour un ω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité. Cela quantifie sa capacité à osciller.

Nous pouvons résumer tout cela de la manière suivante : un oscillateur harmonique amorti peut être complètement caractérisé, soit par la connaissance de la pulsation ω_0 et du coefficient d'amortissement λ , soit par celle de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .

2.1.4 Aspects énergétiques

Il va y avoir obligatoirement par la présence de la force de frottement qui est une force à travail non conservatif et résistant, une **diminution de l'énergie mécanique** de l'oscillateur harmonique amorti. Pour étudier cela, nous allons nous limiter à l'étude du cas où nous avons des oscillations donc au régime pseudo-périodique. Dans ce cas nous avons vu que l'élongation et la vitesse ont les expressions suivantes en fonction du temps :

$$x(t) = A \times e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t + \phi)$$

et

$$\dot{x}(t) = A \times e^{-\lambda t} \times (-\lambda \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi))$$

Nous allons en déduire les expressions respectives en fonction du temps de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique.

Energie cinétique

Nous savons que $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$ donc ici nous avons :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m A^2 \times e^{-2\lambda t} \times (-\lambda \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi))^2$$

Energie potentielle

Nous savons que $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$ donc :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2 \times e^{-2\lambda t} \times \cos^2(\omega't + \phi)$$

Sachant que $k = m\omega_0^2$ nous pouvons réécrire l'énergie potentielle de la manière suivante :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times \omega_0^2 \cos^2(\omega't + \phi)$$

Energie mécanique

Pour calculer l'évolution de l'énergie mécanique en fonction du temps, il suffit donc de sommer les deux expressions trouvées précédemment :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times \omega_0^2 \cos^2(\omega't + \phi) + \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times (-\lambda \cos(\omega't + \phi) - \omega' \sin(\omega't + \phi))^2$$

Nous pouvons simplifier cette expression en la factorisant :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times (\omega_0^2 \cos^2(\omega't + \phi) + (\lambda \cos(\omega't + \phi) + \omega' \sin(\omega't + \phi))^2)$$

L'énergie mécanique n'est donc pas constante au cours du temps comme nous pouvons l'observer sur la figure 2.5.

Elle diminue en moyenne selon une loi en $e^{-2\lambda t} = e^{-t/\tau_r}$: il y donc bien dissipation de l'énergie mécanique initiale de l'oscillateur.

Le **temps de relaxation** τ_r caractérise bien l'évolution temporelle de l'amortissement en énergie de l'oscillateur harmonique amorti.

Cas d'un amortissement très faible

Lorsque l'action de la force de frottement est très faible, nous savons que $\lambda \ll \omega_0$ donc que $\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \ll 1$.

Il s'en suit que $T' \simeq T_0$ et $\omega' \simeq \omega_0$.

Nous pouvons donc recalculer l'énergie mécanique de l'oscillateur dans cette situation en simplifiant son expression en tenant compte de l'amortissement très faible.

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times (\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + (\lambda \cos(\omega_0 t + \phi) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi))^2)$$

Le terme avec la constante d'amortissement comme facteur est négligeable par rapport au terme avec comme facteur ω_0 , donc nous simplifions l'expression de l'énergie mécanique compte tenu de cela :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times (\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi))$$

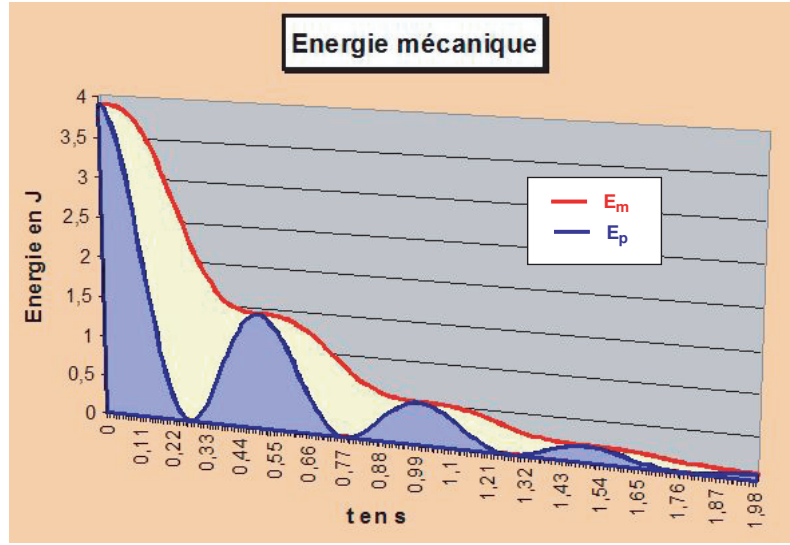


FIGURE 2.5 – Evolution temporelle typique des énergies mécanique et potentielle pour un mouvement d'oscillations pseudo-périodique. Le complément en clair entre les deux correspond à l'énergie cinétique.

D'où

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times \omega_0^2 (\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)) = \frac{1}{2}mA^2 \times e^{-2\lambda t} \times \omega_0^2$$

Pour étudier plus précisément la perte d'énergie de l'oscillateur harmonique amorti faiblement, nous pouvons essayer de déterminer la quantité d'énergie mécanique dissipée $\Delta E_m(t)$ entre l'instant t et $t + T'$, donc pendant la pseudo-période suivant t .

Nous avons :

$$\Delta E_m(t) = E_m(t + T') - E_m(t) = E_m(t + T_0) - E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\lambda(t+T_0)} - \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\lambda t}$$

Nous factorisons alors cette expression

$$\Delta E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\lambda t} (e^{-2\lambda T_0} - 1) = E_m(t)(e^{-2\lambda T_0} - 1)$$

$$\text{Nous savons que } 2\lambda T_0 = \frac{2\lambda 2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Le frottement étant très faible, Q est grand, donc la puissance de l'exponentielle dans l'expression de $\Delta E_m(t)$ est très voisine de zéro.

Le développement limité de la fonction exponentielle autour de 0 est telle que $e^x \approx 1 + x + \dots$ au premier ordre. Nous pouvons donc réécrire la perte d'énergie $\Delta E_m(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta E_m(t) = E_m(t) \left(1 - \frac{2\pi}{Q} - 1\right) = -E_m(t) \times \frac{2\pi}{Q}$$

Nous pouvons alors déterminer la perte relative d'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique amorti entre t et $t + T'$ de la manière suivante

$$\boxed{\frac{\Delta E_m(t)}{E_m(t)} = -\frac{2\pi}{Q}} \quad (2.15)$$

Cette expression permet de définir un lien clair entre la facteur de qualité Q et la perte effective d'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique amorti étudié.

Celle-ci est donc tout simplement inversement proportionnelle à Q . De manière cohérente, cela indique que plus l'oscillateur se rapproche de l'oscillateur idéal ($Q \rightarrow \infty$) moins il perd d'énergie à chaque période, moins il faudra lui apporter d'énergie pour compenser ces pertes et entretenir le mouvement d'oscillations.

Cette expression n'est valable que pour un très faible amortissement (Q très grand).

Chapitre 3

L'oscillateur harmonique en régime forcé

3.1 Présentation du problème et mise en équation

3.1.1 Entretien des oscillations par une excitation périodique sinusoïdale

Nous avons vu au chapitre précédent pourquoi un oscillateur harmonique amorti par une force de frottement fluide ne pouvait pas osciller éternellement. L'existence de la force de frottement, force à travail non conservatif, entraîne une diminution progressive de l'énergie mécanique initiale de l'oscillateur. Celle-ci est dissipée sous forme de chaleur au cours du mouvement lors du contact du mobile avec le fluide ambiant.

Pour compenser cette perte et ainsi conserver les oscillations, il est nécessaire de fournir de l'énergie au système mécanique étudié par l'intermédiaire d'une force extérieure, qui sera dite *force excitatrice*. C'est ce que vous faites lorsque vous poussez une personne sur une balançoire pour que son balancement puisse continuer au cours du temps.

A priori cette force supplémentaire d'entretien du mouvement peut être quelconque, mais il est évident que par souci d'efficacité, il vaut mieux qu'elle soit colinéaire au mouvement et qu'elle soit le plus possible dans le sens du mouvement. Pour cette raison, nous savons qu'elle va donc prendre la forme suivante pour un mouvement à un degré de liberté suivant Ox : $\vec{F}_{exc} = F_{exc}(t)\vec{u}_x$.

Il s'avère inutile d'étudier toutes les fonctions $F_{exc}(t)$ possibles. Nous allons nous contenter d'étudier uniquement des fonctions d'excitation sinusoïdales de fréquence donnée. En effet, il a été montré en mathématiques que toute fonction $F_{exc}(t)$, quelles que soient sa forme, sa durée, peut s'écrire sous la forme d'une superposition de fonctions sinusoïdales (celle-ci peut être discrète ou continue selon que $F_{exc}(t)$ soit périodique ou non).

Le fait que l'équation différentielle du mouvement soit linéaire, comme nous allons le voir par la suite, implique que le principe de superposition puisse s'appliquer. La connaissance de la réaction du système mécanique étudié à chacune des fonctions sinusoïdales constitutives

de la fonction $F_{exc}(t)$ permet de connaître par sommation la manière de réagir du système à la fonction $F_{exc}(t)$ elle-même. Ceci rend très important l'étude de l'excitation sinusoïdale, la force dans ce cas, prend la forme suivante :

$$\vec{F}_{exc} = F \cos \Omega t \times \vec{u}_x$$

3.1.2 Equation du mouvement

Nous pouvons reprendre pour étudier ce mouvement entretenu par une excitation sinusoïdale l'étude du pendule horizontal amorti tel qu'il est décrit sur la figure 1.5 et dans la sous-section 2.1.1. Par rapport à cette dernière situation, il y a une force supplémentaire qui est la force excitatrice.

Le bilan des forces appliquées est donc :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- La réaction du sol $\vec{R} = R\vec{u}_y$ où se trouve la masse M. Celle-ci est perpendiculaire à Ox parce qu'il n'y a pas de frottement solide avec le sol.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}_{rappel} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0) = -k(x - x_0)\vec{u}_x$.
On choisit l'origine du repère de manière à avoir $x_0 = 0$.
- La force de frottement $\vec{F}_f = -f\vec{v} = -f\dot{x}\vec{u}_x = -f\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$
- La force excitatrice $\vec{F}_{exc} = F \cos \Omega t \times \vec{u}_x$

Le système étudié est toujours la masse m assimilée au point M et le référentiel d'étude est toujours le laboratoire terrestre supposé galiléen le temps de l'expérience.

Nous appliquons alors le principe fondamental de la dynamique.

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{rappel} + \vec{F}_f + \vec{F}_{exc} \quad (3.1)$$

Nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe Ox. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt} + F \cos \Omega t$$

Cette relation peut être réécrite si nous passons une partie du deuxième terme dans le premier terme.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = F \cos \Omega t$$

Après division par m de l'ensemble de l'équation, nous obtenons l'équation différentielle suivante qui régit l'évolution temporelle d'un tel système :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}\cos \Omega t \quad (3.2)$$

Nous pouvons aussi l'écrire sous sa forme dite *réduite* :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F}{m} \cos \Omega t} \quad (3.3)$$

Nous obtenons alors une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

3.2 Résolution de l'équation différentielle

3.2.1 Régimes transitoire et permanent

La solution générale d'une équation différentielle de ce type va s'écrire sous la forme de la somme de deux fonction du temps, une première $x_{GH}(t)$, qui correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (appelée aussi *équation homogène*), et une deuxième $x_P(t)$, qui est une solution particulière de l'équation complète.

Nous aurons donc :

$$x(t) = x_{GH}(t) + x_P(t)$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution $x_{GH}(t)$, trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le chapitre 2 précédent. Nous avons vu que quel que soit le régime considéré, la solution tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini à cause du terme en $e^{-\lambda t}$. Au bout d'un temps relativement court, ce terme devient négligeable. Cette partie de la solution a une durée d'existence courte d'où le terme de *régime transitoire* pour la période où cette solution n'est pas négligeable devant la solution particulière.

Lorsque que la composante $x_{GH}(t)$ devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est, comme nous allons le voir par la suite, la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en *régime forcé* ou *régime permanent*. La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne.

Donc si $F_{exc}(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω , alors la solution particulière $x_P(t)$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation s'écrivant de la manière suivante :

$$x_P(t) = A \times \cos(\Omega t + \phi)$$

La solution $x(t)$ aura donc souvent une allure caractéristique comme celle présentée sur la figure 3.1

3.2.2 Détermination de la solution forcée en utilisant les nombres complexes

Nous pouvons montrer en mathématiques que si une solution $x_P(t)$ en cosinus, comme celle qui est écrite précédemment, est une solution particulière de l'équation différentielle

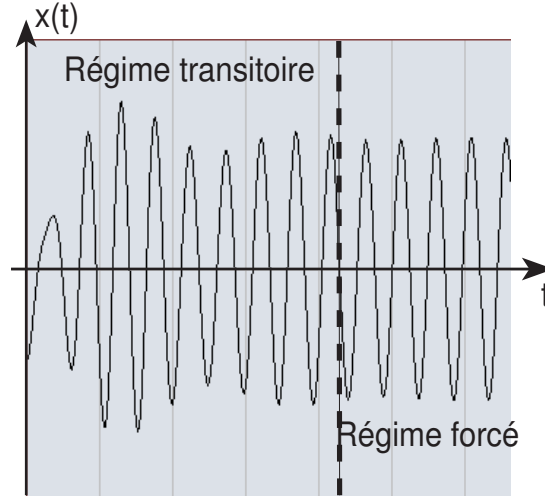


FIGURE 3.1 – Présentation de l'évolution temporelle typique d'un oscillateur harmonique amorti en régime forcé. En régime libre, son mouvement serait ici pseudo-périodique.

d'intérêt alors une solution en $A \sin(\Omega t + \phi)$ est aussi une solution particulière possible de l'équation différentielle avec un second membre changé en $F/m \sin(\Omega t)$. Donc un nombre complexe, de la forme suivante $A \times (\cos(\Omega t + \phi) + \imath \sin(\Omega t + \phi))$, sera lui solution de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\underline{x}}_P + 2\lambda\dot{\underline{x}}_P + \omega_0^2\underline{x}_P = -\Omega^2\underline{x}_P + 2\lambda\imath\Omega\underline{x}_P + \omega_0^2\underline{x}_P = \frac{F}{m}e^{i\Omega t}$$

Il suffit de prendre ensuite sa partie réelle pour retrouver la solution réelle en cosinus. Mais nous allons voir qu'en passant par les complexes, il s'avère plus aisé de trouver la solution particulière de l'équation différentielle. Le calcul des dérivées temporelles est plus simple. Nous définissons donc une solution particulière complexe ainsi :

$$\underline{x}_P(t) = A \times (\cos(\Omega t + \phi) + \imath \sin(\Omega t + \phi)) = Ae^{i(\Omega t + \phi)}$$

Nous avons donc

$$\frac{d\underline{x}_P(t)}{dt} = \imath\Omega Ae^{i(\Omega t + \phi)} = \imath\Omega\underline{x}_P(t)$$

et

$$\frac{d^2\underline{x}_P(t)}{dt^2} = -\Omega^2 Ae^{i(\Omega t + \phi)} = -\Omega^2\underline{x}_P(t)$$

Nous écrirons de plus la force excitatrice sous forme complexe : $\underline{F}_{exc} = F \times e^{i\Omega t}$.

Compte-tenu de cela, nous pouvons donc réécrire l'équation différentielle 3.3 de la manière suivante en remplaçant les dérivées par les expressions déterminées ci-dessus :

$$\ddot{\underline{x}}_P + 2\lambda\dot{\underline{x}}_P + \omega_0^2\underline{x}_P = -\Omega^2\underline{x}_P + 2\lambda\imath\Omega\underline{x}_P + \omega_0^2\underline{x}_P = \frac{F}{m}e^{i\Omega t}$$

Nous pouvons alors réécrire cette équation de la manière suivante en mettant \underline{x}_P en facteur :

$$(-\Omega^2 + 2\lambda\Omega i + \omega_0^2)\underline{x}_P = \frac{F}{m}e^{i\Omega t}$$

Nous remplaçons alors \underline{x}_P par son expression en fonction de t .

$$((\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda\Omega i)Ae^{i(\Omega t + \phi)} = \frac{F}{m}e^{i\Omega t}$$

Nous pouvons simplifier cette expression par $e^{i\Omega t}$

$$((\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda\Omega i)Ae^{i\phi} = \frac{F}{m}$$

Nous en déduisons pour finir que

$$Ae^{i\phi} = \frac{F}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda\Omega i}$$

Ceci nous permet de calculer les expressions de l'amplitude et la tangente de la phase en fonction de Ω puisque il suffit de prendre le module et l'argument du nombre complexe situé dans le membre de droite de l'équation :

$$A = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \quad (3.4)$$

et

$$\tan \phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (3.5)$$

Ces deux expressions peuvent être réécrites en remplaçant λ par $\frac{\omega_0}{2Q}$.

Nous trouvons alors que

$$A = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2\omega_0^2}{Q^2}}} = \frac{\frac{F}{k}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \quad (3.6)$$

et

$$\tan \phi = -\frac{1}{Q(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0})} \quad (3.7)$$

Nous notons la dépendance de l'amplitude A en fonction de Ω , la pulsation d'excitation. Nous étudierons celle-ci dans la section suivante.

Nous remarquons que le $\sin \phi$ est négatif ou nulle. Cela paraît normal qu'il y ait un retard de l'oscillateur par rapport à la force qui entretient le mouvement. L'oscillateur harmonique essaie de suivre le mouvement en étant ralenti par les frottements, donc il doit obligatoirement prendre du retard par rapport à l'oscillation excitatrice donc avoir un déphasage négatif. Ce déphasage est lui aussi dépendant de la fréquence Ω .

3.3 Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude

3.3.1 Notion de résonance en amplitude du mouvement

Si nous regardons l'expression de A en fonction de Ω , nous notons que si Ω tend vers 0 alors A tend vers F/k . Par contre, si Ω tend vers l'infini, alors A tend vers 0. Donc soit A diminue continument de F/k à 0 en fonction de la pulsation d'excitation soit l'amplitude croît et passe par un maximum puis redescend jusqu'à 0.

Pour vérifier cela il suffit de dériver l'expression de A par rapport à Ω . Nous avons donc :

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{F}{m} \times \frac{1}{2}((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{-3/2} \times (2(\omega_0^2 - \Omega^2) \times (-2\Omega) + 8\lambda^2\Omega)$$

Nous pouvons simplifier un peu cette expression :

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{F}{m} \times \frac{1}{2}((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{-3/2} \times 4\Omega \times (\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)$$

Pour que cette dérivée soit nulle, il suffit donc que Ω soit nulle ou que le terme $\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2$ soit lui-même nul.

Ce dernier terme est donc nul si $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \Omega_r$

Nous appelons cette pulsation spécifique Ω_r , **pulsation de résonance** (sous-entendu en amplitude). Elle ne peut exister que si le terme sous la racine est non nul et positive, donc si $\omega_0^2 > 2\lambda^2$. Nous pouvons réécrire cette condition de la manière suivante :

$$\omega_0 > \sqrt{2}\lambda$$

Nous l'appellerons la **condition de résonance** en amplitude.

Si nous définissons cette grandeur en fonction de Q et ω_0 , nous obtenons

$$\boxed{\Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (3.8)$$

La condition de résonance devient

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (3.9)$$

Il y a donc dans ces conditions deux extremums possibles pour la courbe décrivant l'évolution de l'amplitude de l'oscillateur en régime forcé en fonction de la pulsation Ω excitatrice si la condition de résonance est remplie, sinon il n'y a qu'un extremum pour la pulsation nulle, donc il n'y a pas de maximum d'amplitude autre celui de cette pulsation nulle.

Nous pouvons remarquer compte tenu de la condition de résonance que cette dernière ne peut exister que si les frottements ne sont pas trop forts.

3.3.2 Caractérisation physique de la résonance en amplitude

Nous pouvons maintenant calculer la valeur de l'amplitude lorsque la pulsation de l'excitateur est effectivement égale à la pulsation de résonance. Nous remplaçons dans l'équation 3.4, Ω , par ce qu'elle vaut à la résonance. Nous avons donc :

$$A(\Omega_r) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2})^2)^2 + 4\lambda^2(\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2})^2}}$$

Nous en déduisons que

$$A(\Omega_r) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(\omega_0^2 - 2\lambda^2)}}$$

Nous pouvons alors simplifier cette expression pour obtenir

$$A(\Omega_r) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2(\omega_0^2 - 2\lambda^2)}}$$

Ensuite, en sortant de la racine 2λ , nous obtenons

$$A(\Omega_r) = \frac{\frac{F}{m}}{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$

Ceci se simplifie encore pour donner l'expression finale suivante :

$$A(\Omega_r) = \frac{\frac{F}{m}}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{3.10}$$

Si nous remplaçons λ par $\omega_0/2Q$, nous obtenons après simplification

$$A(\Omega_r) = \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Nous pouvons réécrire cette dernière expression car $m\omega_0^2 = k$:

$$\boxed{A(\Omega_r) = \frac{F}{k} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} \tag{3.11}$$

Nous pouvons tracer l'évolution de l'amplitude des oscillations en régime forcé en fonction de la pulsation de la force excitatrice. Nous présentons ce résultat en définissant deux nouvelles grandeurs : l'amplitude réduite et la pulsation réduite.

La première correspond tout simplement au rapport entre l'amplitude $A(\Omega)$ à une pulsation donnée Ω et l'amplitude $A(0)$ pour la pulsation nulle. Celle-ci est égale à $\frac{F}{k}$ comme indiqué tout simplement par l'équation 3.6.

La deuxième correspond au rapport entre la pulsation de l'excitateur Ω et la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 .

L'utilisation de ces deux grandeurs permet d'obtenir des graphes d'évolution de l'amplitude réduite en fonction de la pulsation réduite qui sont valables quels que soient l'oscillateur et l'intensité de la force.

Sur la figure 3.2, nous présentons ces graphes pour plusieurs valeurs de Q différentes. La courbe obtenue pour le facteur de qualité $Q = 0,2$, qui est inférieur à $1/\sqrt{2} \approx 0,707$,

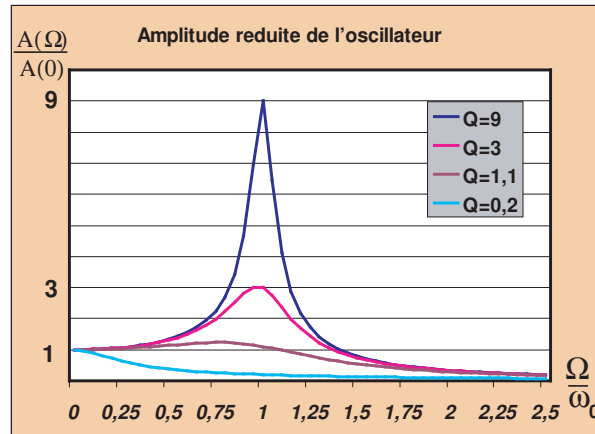


FIGURE 3.2 – Evolution des amplitudes réduites en fonction de la pulsation réduite d'oscillateur harmonique amorti en régime forcé pour différentes valeurs du facteur de qualité Q .

montre bien que dans ce cas il n'y a pas de résonance en amplitude. Cela correspond à un cas où l'amortissement est fort. Nous observons un début de résonance pour $Q = 1,1$, mais celle-ci reste très étalée. Nous parlons dans ce cas de *résonance floue*. La résonance ne commence à être prononcée que pour $Q = 3$ et significative pour $Q = 9$. Dans ce cas, nous disons que la résonance est *aigüe*.

Nous pouvons remarquer que la pulsation de résonance Ω_r correspondant au maximum de la fonction, varie en fonction de Q et ne devient très proche de la pulsation propre que pour des valeurs de Q suffisamment grandes par rapport à 1 donc pour des amortissements faibles ou très faibles. C'est cohérent vis à vis de l'équation 3.8.

Il apparait aussi que l'amplitude maximale réduite observée tend vers Q lorsque Q augmente. Elle vaut par exemple quasiment 9 pour $Q = 9$. C'est normal si nous regardons l'expression de l'amplitude $A(\Omega_r)$ obtenue dans l'équation 3.11, en effet le terme sous la

3.3 Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude 51

racine tend vers 1 quand Q tend vers l'infini. Nous pouvons donc remarquer pour des frottements faibles que

$$Q \approx \frac{A(\Omega_r)}{A(0)} \quad (3.12)$$

Il y a donc d'une certaine façon une amplification par Q du signal initial à la résonance.

Pour caractériser plus complètement ce phénomène physique qu'est la résonance, nous allons définir la **finesse ou l'acuité de la résonance** par ce que nous appelons la **bande passante** de l'oscillateur harmonique amorti. Il s'agit du domaine de pulsations pour lesquelles l'amplitude est au moins égale à l'amplitude maximale (amplitude à la résonance) divisée par $\sqrt{2}$. La bande passante est définie sur la figure 3.3.

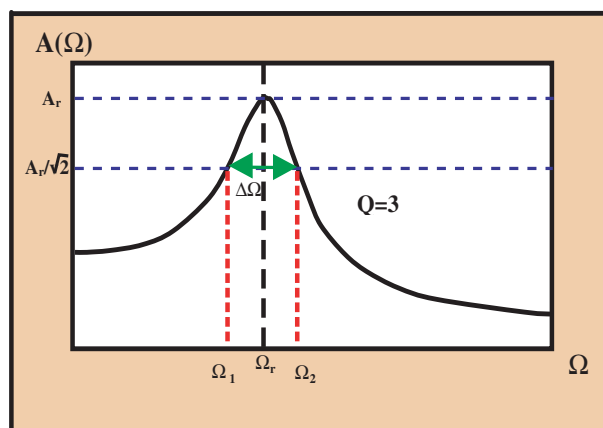


FIGURE 3.3 – Présentation sur un graphe de la notion de bande passante $\Delta\Omega$ d'un oscillateur harmonique de facteur de qualité $Q = 3$.

Pour la déterminer analytiquement, il faut donc chercher Ω tel que $A(\Omega) \geq A(\Omega_r)/\sqrt{2}$. Nous n'allons pas détailler le calcul mais la résolution de cette inéquation donne deux valeurs limites Ω_1 et Ω_2 en fonction de ω_0 et Q :

$$\Omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

et

$$\Omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

La bande passante est donc $\Delta\Omega$ telle que $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$.

Dans le cas d'un amortissement très faible donc $Q \gg 1$, nous pouvons simplifier les expressions de Ω_1 et Ω_2 :

$$\Omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right)$$

et

$$\Omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)$$

Nous pouvons en déduire une expression de la bande passante simplifiée et approchée :

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.13)$$

Nous pouvons en déduire une autre définition du facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} \quad (3.14)$$

Compte tenu de ce que nous avons présenté ci-dessus, nous voyons qu'un oscillateur amorti sera d'autant plus sensible à des petites oscillations que son facteur de qualité sera grand, mais dans ce cas, sa sensibilité ne sera effective que sur une bande de pulsations ou de fréquences qui sera d'autant plus étroite qu'il sera sensible.

3.3.3 Déphasage en amplitude

Nous pouvons montrer que le déphasage entre l'élongation de l'oscillateur et l'excitation varie entre 0 et $-\pi$ en fonction de la pulsation Ω . Son évolution entre ces deux valeurs dépend du facteur de qualité Q comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.4, où nous présentons l'évolution de la valeur absolue du déphasage en fonction de la pulsation réduite pour différentes valeurs de Q .

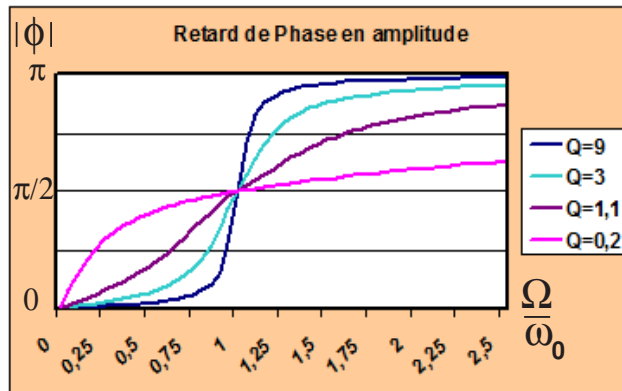


FIGURE 3.4 – Evolution de la valeur absolue du déphasage entre l'oscillateur et l'excitateur en fonction de la pulsation réduite, en régime forcé pour différentes valeurs du facteur de qualité Q .

Le déphasage a toujours la même valeur pour une pulsation Ω égale à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur quel que soit Q , il vaut $-\pi/2$ (cela correspondra aussi à la résonance

très souvent car la pulsation propre et la pulsation de résonance sont très voisines si Q est suffisamment grand).

Lorsque que Q est grand vis à vis de 1, c'est une manière de déterminer la résonance, en cherchant la pulsation pour laquelle l'oscillateur est en quadrature de phase vis à vis de l'excitateur.

3.4 Résonance en vitesse

3.4.1 Détermination de la vitesse

Nous allons aussi calculer la vitesse de l'oscillateur en régime forcé. A partir de l'expression complexe de l'amplitude $\underline{x}_P(t)$, il est très simple de calculer une expression complexe de la vitesse, en effet nous avons obtenu :

$$\underline{x}_P(t) = Ae^{i(\Omega t + \phi)}$$

donc

$$\underline{V}_P(t) = \frac{d\underline{x}_P(t)}{dt} = i\Omega \underline{x}_P(t) = \frac{i\Omega \frac{F}{m} e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}$$

d'où

$$\underline{V}_P(t) = \frac{\frac{FQe^{i\Omega t}}{m\omega_0}}{1 + iQ \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega} \right)}$$

en notation réelle , on a $\dot{x}(t) = V \cos(\Omega t + \psi)$ avec

$$V = \Omega A(\Omega) = \frac{\frac{FQ}{m\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2}} \quad (3.15)$$

et

$$\psi = \phi + \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

3.4.2 Phénomène de résonance en vitesse

Il s'avère que la vitesse présente aussi une résonance, qui, elle, est toujours présente quelle que soit la valeur du facteur de qualité. La pulsation de résonance en vitesse est toujours

la même quelle que soit la valeur du facteur de qualité et est égale tout simplement à la pulsation propre de l'oscillateur harmonique ω_0 .

L'amplitude maximale de la vitesse obtenue à la résonance est :

$$V_{max} = \frac{FQ}{m\omega_0}$$

Nous présentons sur la figure 3.5, l'évolution de la vitesse réduite de l'oscillateur en fonction de la pulsation réduite. La vitesse réduite correspond au rapport entre l'amplitude de la vitesse $V(\Omega)$ à la pulsation Ω et une vitesse de référence égale à $F/m\omega_0$.

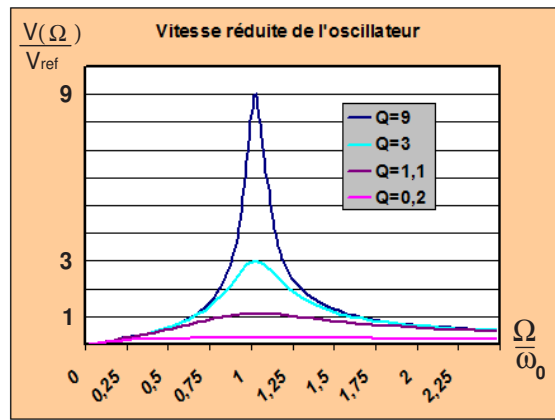


FIGURE 3.5 – Evolution de la vitesse réduite de l'oscillateur en fonction de la pulsation réduite, en régime forcé pour différentes valeurs du facteur de qualité Q .

Il est possible de montrer que la bande passante, pour la résonance en vitesse, correspondant à la gamme de pulsations $\Delta\Omega$ pour laquelle $V(\Omega) \geq \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ est tout simplement telle que :

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.17)$$

Cette relation est de plus valide sans aucune condition sur la valeur de Q et sans approximation.

Il est aussi intéressant de noter qu'à la résonance, la vitesse est en phase avec l'excitateur.

3.5 Impédance mécanique

Sous l'effet d'une cause excitatrice, la force excitatrice, l'effet produit est le mouvement de l'oscillateur à la vitesse $\underline{V}_P(t)$, nous appelons *impédance mécanique* d'un oscillateur, le rapport cause sur effet, donc le rapport de l'amplitude complexe de la force excitatrice

par la vitesse complexe, soit :

$$\underline{Z}_{mécanique} = \frac{\underline{F}_{exc}}{\underline{V}_P(t)} = \frac{F e^{i\Omega t}}{i\Omega \underline{x}_P(t)} = \frac{F}{i\Omega \frac{F/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}}$$

Nous obtenons l'expression simplifiée suivante :

$$\underline{Z}_{mécanique} = m\omega_0 \left(\frac{1}{Q} - i \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right)$$

Cette définition d'impédance (cause/effet) se retrouve dans d'autres domaines comme nous le verrons plus tard en électricité.

3.6 Conséquences pour l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique

3.6.1 Expression de la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur

La puissance instantanée absorbée par l'oscillateur et fournie par l'excitateur est donc :

$$P(t) = \frac{\delta W_{F_{exc}}}{dt} = \frac{\vec{F}_{exc}(t) \bullet d\vec{OM}}{dt} = \vec{F}_{exc}(t) \bullet \vec{V}_P(t) = F_{exc}(t) \times \dot{x}(t)$$

Nous pouvons obtenir l'expression de cette puissance instantanée en remplaçant $F_{exc}(t)$ par $m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx$ obtenu à partir de l'équation 3.3.

Cela nous donne donc :

$$P(t) = m\ddot{x}\dot{x} + f\dot{x}^2 + kx\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + f\dot{x}^2$$

Nous calculons alors la moyenne de $P(t)$ sur une période T de l'excitateur :

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f\dot{x}^2 dt$$

d'où

$$P = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_{t_0}^{t_0+T} + f \langle \dot{x}^2 \rangle$$

Comme x et ses dérivées sont de période T , $\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_{t_0}^{t_0+T} = 0$, nous obtenons alors

$$P = \langle P(t) \rangle = f \langle \dot{x}^2 \rangle$$

La puissance apportée par l'excitateur est là pour compenser la puissance dissipée par frottement.

3.6.2 Bilan énergétique

Nous pouvons étudier différemment cet aspect en passant par le théorème de l'énergie cinétique :

$$d(E_c + E_p) = \delta W' = -f\dot{x}^2 dt + F_{exc}(t)\dot{x}dt$$

En moyenne, en régime permanent, la variation d'énergie mécanique est nulle, donc

$$-f\langle\dot{x}^2\rangle + \langle F_{exc}(t)\dot{x}\rangle = 0$$

Nous retrouvons donc le fait que l'énergie apportée par l'excitateur compense exactement la dissipation d'énergie par frottement.

3.6.3 Résonance en puissance

Nous avons vu qu'il y avait des résonances possibles en amplitude et en vitesse de l'oscillateur harmonique en régime forcé. Même si les deux pulsations ne sont pas tout à fait les mêmes lorsque Q est petit. Elles vont tendre à se rapprocher quand ce facteur croît.

Compte tenu des expressions respectives de l'énergie potentielle en fonction de l'élongation et de l'énergie cinétique en fonction de la vitesse, nous devons nous attendre à observer aussi une résonance en puissance moyenne absorbée (voir sur la figure 3.6).

Sachant que $\dot{x}(t) = V_P(t) = V \cos(\Omega t + \psi)$, nous pouvons écrire que

$$\langle\dot{x}^2(t)\rangle = \langle V^2 \cos^2(\Omega t + \psi)\rangle = V^2 \langle\cos^2(\Omega t + \psi)\rangle = \frac{V^2}{2}$$

donc

$$\langle P(t)\rangle = f \frac{V^2}{2}$$

Nous remplaçons V par ce que cela vaut, alors :

$$P = \langle P(t)\rangle = f \frac{\frac{F^2 Q^2}{m^2 \omega_0^2}}{2 \left(1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2\right)} = \frac{F^2 Q}{2m\omega_0 \left(1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2\right)}$$

Nous pouvons montrer à partir de cette expression qu'il y a résonance pour $\Omega = \omega_0$ et que la puissance moyenne absorbée vaut pour cette pulsation :

$$P_{max} = QF^2/2m\omega_0$$

La bande passante $\Delta\Omega$ de la résonance en puissance pour laquelle $P(\Omega) \geq P_{max}/2$ est telle que

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

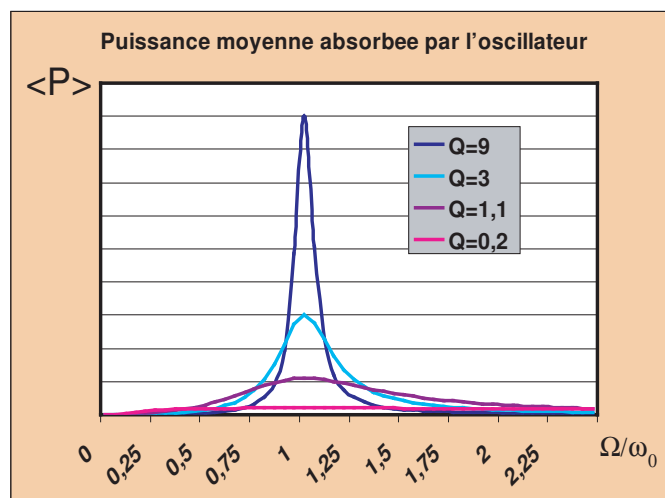


FIGURE 3.6 – Evolution de la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur en fonction de la pulsation réduite, en régime forcé pour différentes valeurs du facteur de qualité Q .

Nous avons donc ainsi une bande en fréquences ou pulsations pour laquelle la puissance absorbée par l'oscillateur est au moins la moitié de la puissance maximale absorbable.

Nous comprenons donc bien maintenant au travers de ces notions pourquoi un système en équilibre stable va plus ou moins osciller selon le rythme de la perturbation auquel il est soumis. Selon la pulsation au quelle l'énergie lui est apportée, il va plus ou moins bien l'absorber pour osciller.

Chapitre 4

L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité. En effet un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base différents suivants mis en série : un *résistor de résistance R* , un *condensateur de capacité C* et une *bobine d'inductance L* , présente une évolution temporelle de certaines grandeurs physiques caractéristiques qui est analogue à celle observées pour des grandeurs caractéristiques de l'oscillateur mécanique amorti constitué par une masse, un ressort et un système mécanique d'amortissement fluide. Ces grandeurs vont donc évoluer en présentant une variation périodique (ou pseudo-périodique) au cours du temps si l'amortissement n'est pas trop fort. C'est pour cette raison que nous allons employer le terme d'*oscillateur électrique* pour décrire le *circuit série RLC* . Le terme de *circuit oscillant* est aussi utilisé pour définir ce type de circuit.

4.1 Rappels rapides d'électrocinétique de base

4.1.1 Conventions

En électricité, nous cherchons en général dans un circuit à déterminer deux grands types de grandeurs physiques : les *intensités des courants électriques* qui traversent les composants et les différentes *tensions électriques* (différences de potentiel électrique entre les deux bornes d'entrée et de sortie) qui s'appliquent aux bornes des composants du circuit.

Ces deux grandeurs sont des grandeurs algébriques.

Donc, si nous considérons un *dipôle électrique AB* (élément à deux bornes), placé dans un circuit, il est traversé par le courant I (ce qui implique de choisir un sens pour l'intensité) et dans ces conditions, nous pouvons définir la tension $U_{AB} = V(A) - V(B)$ à ses bornes ($V(A)$ et $V(B)$ désignant respectivement les potentiels électriques des points A et B).

Cette tension sera modélisée par une flèche dirigée de B vers A ; on constate alors que deux choix sont possibles pour le sens de I :

- soit la flèche modélisant le sens de I est de même sens que la flèche modélisant le sens de U_{AB} on dira alors que le dipôle "travaille" en *convention générateur* (voir sur la figure 4.1 à gauche)
- soit la flèche modélisant le sens de I est de sens opposé à celui de la flèche modélisant le sens de U_{AB} : on dira alors que le dipôle "travaille" en *convention récepteur* (voir sur la figure 4.1 à droite)

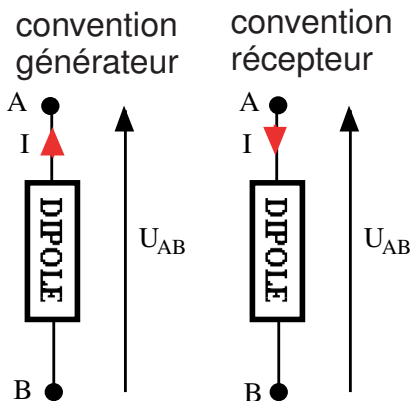


FIGURE 4.1 – Présentation des conventions récepteur et générateur pour un dipôle électrique.

Au niveau des résultats numériques, si le signe de I (ou de U_{AB}) est positif, cela signifie que le sens effectif du courant (ou de la tension) est celui indiqué par la flèche, si le signe est négatif, cela signifie que le sens effectif du courant (ou de la tension) est opposé au sens de la flèche ; nous nous rendons bien compte dans ces conditions que les sens choisis, à priori pour les flèches sont purement arbitraires.

Nous rappelons que le sens du courant "réel" a été défini de manière conventionnelle comme le sens dans lequel se déplaceraient les charges positives soumises au champ électrique extérieur.

4.1.2 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont des lois indépendantes de la nature des composants du réseau électrique et qui traduisent uniquement la conservation de la charge électrique et l'existence d'un potentiel électrique à chaque noeud. Nous devons commencer par orienter les différentes branches du réseau afin de définir pour chaque branche un sens positif du courant. Dans certains cas, ce sens apparaît naturellement compte tenu de la topologie du réseau et de l'emplacement des générateurs, dans d'autres cas ce choix est arbitraire.

Lois des noeuds

En régime permanent et dans l'approximation des états quasi-stationnaires, la charge électrique contenue dans une portion de circuit est constante. Nous en déduisons que si

nous considérons un noeud (point où convergent plusieurs branches du circuit (voir sur la figure 4.2), la somme des intensités convergeant vers le noeud est égale à la somme des intensités qui en repartent. En comptant positivement ($\varepsilon = +1$) le courant d'une branche

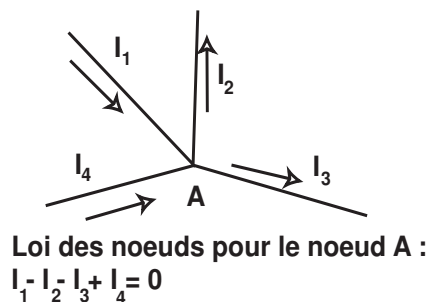


FIGURE 4.2 – Présentation d'un exemple d'application de la loi des noeuds.

orientée vers le noeud et négativement ($\varepsilon = -1$) celui d'une branche qui en repart, il vient :

$$\boxed{\sum_i \varepsilon_i I_i = 0} \quad (4.1)$$

Une telle équation peut être écrite pour chaque noeud.

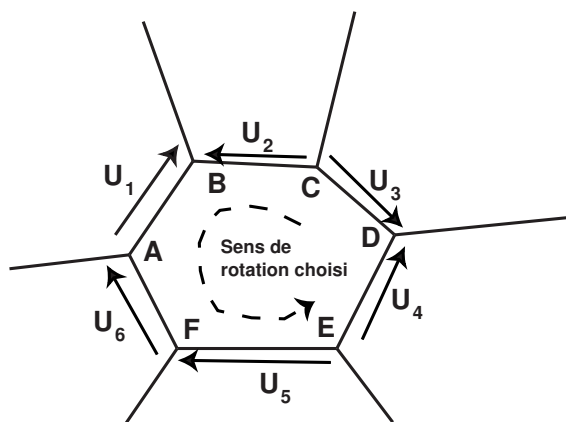


FIGURE 4.3 – Présentation d'un exemple d'application de la loi des mailles.

Lois des mailles

Nous allons expliciter la loi des mailles par l'exemple présenté sur la figure 4.3. Nous avons dans ce cas un exemple de maille à 6 branches. Nous choisissons un sens de rotation pour la maille, que nous allons considérer positif. Nous partons par exemple du noeud A pour y retourner en tournant dans le sens positif. Nous avons donc au bout d'un tour une différence de potentiel nulle puisque nous avons $V_A - V_A = 0$. Nous pouvons réécrire cette

égalité en tenant compte des potentiels des autres points de la maille rencontrés au cours de la rotation, nous avons alors :

$$V_A - V_F + V_F - V_E + V_E - V_D + V_D - V_C + V_C - V_B + V_B - V_A = 0$$

Si nous remplaçons les différences de potentiel par les tensions, avec : $U_1 = V_B - V_A$, $U_2 = V_B - V_C$, $U_3 = V_D - V_C$, $U_4 = V_D - V_E$, $U_5 = V_F - V_E$ et $U_6 = V_A - V_F$ Nous obtenons alors la loi suivante :

$$U_6 + U_5 - U_4 + U_3 - U_2 + U_1 = 0$$

Cette loi s'appelle donc **loi des mailles**. Elle se généralise à une maille à n branches (donc n tensions) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j = 0} \quad (4.2)$$

avec $\varepsilon_j = -1$ si la tension U_j est dans le sens positif choisi et $\varepsilon_j = +1$ si la tension U_j est dans le sens opposé au sens positif choisi.

Il y a toujours $n - 1$ mailles indépendantes si le circuit électrique est constitué de n branches électriques.

4.2 Rappels sur les dipôles linéaires qui le constituent

Nous allons rappeler rapidement avant de considérer les différents constituants de l'oscillateur les caractéristiques d'un générateur de tension idéal. Il peut être symbolisé comme indiqué sur la figure 4.4. En convention générateur, pour un générateur de tension idéal,

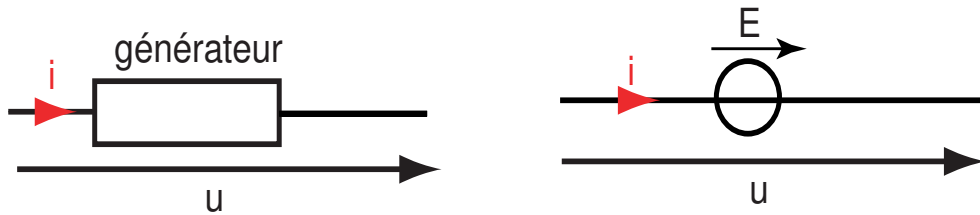


FIGURE 4.4 – Symboles possibles pour un générateur idéal de tension.

nous allons avoir aux bornes de ce générateur :

$$u = E$$

Nous rappelons que E est appelée **f.e.m** pour **force électromotrice**. Nous verrons plus tard qu'un générateur de tension "réelle" peut être modélisé par un dipôle formé par un générateur idéal et une résistance en série.

4.2.1 Le résistor de résistance R

Représentation et caractéristique

Ce dipôle est symbolisé comme indiqué sur la figure 4.5. Il est caractérisé par sa *résistance* R , positive, exprimée en ohms, de symbole Ω .

Sur la figure, $i(t)$ et $u(t)$ représentent respectivement l'intensité instantanée (à l'instant t) du courant traversant le dipôle et la tension instantanée aux bornes de ce même dipôle.

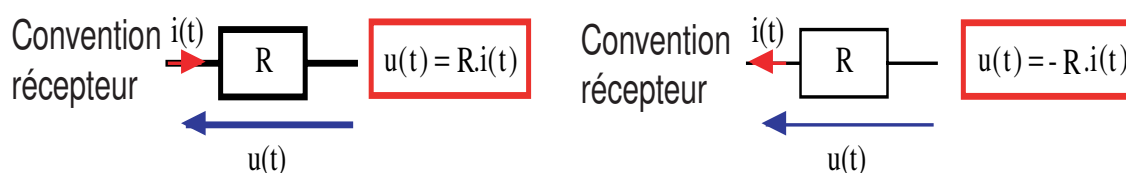


FIGURE 4.5 – Symbole pour un résistor.

Il s'agit du dipôle qui vérifie la *loi d'Ohm* en convention récepteur :

$$\boxed{u = Ri} \quad (4.3)$$

Nous pouvons aussi définir sa *conductance* G comme l'inverse de la résistance : $G = \frac{1}{R}$.

G s'exprime en Ω^{-1} ou en *siemens*, de symbole S .

En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit aussi

$$\boxed{i = Gu} \quad (4.4)$$

Association en série et parallèle

Lorsque nous avons deux résistors de résistance R_1 et R_2 mis en série, ils sont équivalents à un résistor de résistance équivalente R_{eq} telle que

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Lorsque nous avons deux résistors de résistance R_1 et R_2 mis en parallèle, ils sont équivalents à un résistor de résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Donc, dans ce cas en fait, ceux sont les conductances qui se somment pour donner une conductance équivalente.

Puissance dissipée dans un résistor

En convention récepteur, la loi d'Ohm implique que la puissance reçue puisse s'écrire de la manière suivante :

$$P = u(t) \times i(t) = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \quad (4.5)$$

La puissance reçue est donc toujours positive : un résistor se comporte toujours en récepteur.

En pratique, cette énergie va être en fait dissipée sous forme de transfert thermique : il s'agit de l'*effet Joule*.

4.2.2 Le condensateur de capacité C

Représentation et caractéristique

Les condensateurs sont des composants constitués de deux conducteurs qui se font face à face et sont appelés *armatures*. Du point de vue électrique, elles sont dites en *influence totale*. Elles sont séparées par un matériau isolant, le diélectrique, situé entre-deux. Ils peuvent avoir plusieurs formes : plan, cylindrique, ..etc. L'une des armatures porte une charge $q(t)$ tandis que l'autre porte une charge $-q(t)$.

La *capacité C* du condensateur est caractérisée à tout instant par la relation entre la charge $q(t)$ et la tension $u(t)$ appliquée aux bornes :

$$q(t) = Cu(t) \quad (4.6)$$

Nous symbolisons la capacité de la manière indiquée sur la figure 4.6.

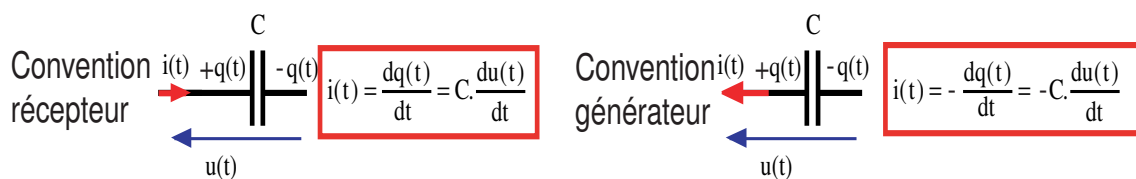


FIGURE 4.6 – Symboles d'une capacité suivant la convention prise.

En convention récepteur, il est possible de montrer qu'il existe, à tout instant t , les relations suivantes entre le courant $i(t)$ et la charge $q(t)$, ainsi qu'entre la tension $u(t)$ à ses bornes et le courant $i(t)$ le parcourant :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

et

$$i = C \frac{du}{dt}$$

La première relation implique la seconde compte tenu de la relation entre q et u

Il est important de retenir, qu'en régime continu, la tension au bornes du condensateur est constante et par conséquent l'intensité i est donc nulle : $i = 0$. Le condensateur se comporte donc en régime continu comme un *interrupteur ouvert* (un coupe-circuit).

Association en série et parallèle

Lorsque nous avons deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 mis en série, ils sont équivalents à un condensateur de capacité équivalente C_{eq} telle que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Lorsque nous avons deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 mis en parallèle, ils sont équivalents à un condensateur de capacité équivalente C_{eq} telle que

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Energie emmagasinée dans un condensateur de capacité C

En convention récepteur, nous avons vu que la relation entre tension et courant s'écrit pour un condensateur : $i = C \frac{du}{dt}$, nous pouvons donc en déduire que la puissance reçue par un condensateur prend donc la forme suivante :

$$P = u(t) \times i(t) = uC \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) = \frac{dE}{dt}$$

La puissance étant la dérivée par rapport au temps de l'énergie E reçue, nous pouvons donc en déduire l'expression de l'énergie instantanée emmagasinée dans un condensateur de capacité C :

$$\boxed{E = \frac{1}{2} C u^2} \quad (4.7)$$

L'énergie est une grandeur continue dans le temps. De l'expression de l'énergie instantanée, nous pouvons en déduire que la tension u et la charge q du condensateur sont des grandeurs continues dans le temps.

4.2.3 La bobine d'inductance L

Représentation et caractéristique

Une bobine est constituée d'un enroulement hélicoïdal de fils conducteurs équivalent à un enroulement de spires conductrices. Nous verrons plus tard dans l'enseignement de

la physique qu'un tel circuit présente un phénomène dit d'*autoinduction* qui crée à ses bornes une tension $u(t)$ lorsque le courant $i(t)$, qui le parcourt, varie au cours de temps. On dit aussi dans ce cas qu'il y a apparition d'une *force électromotrice, une fem*.

La relation mathématique correspondant à ce phénomène est la suivante en convention récepteur :

$$\boxed{u(t) = L \frac{di(t)}{dt}} \quad (4.8)$$

L est appelée *inductance* de la bobine et s'exprime en henry, de symbole H . Sur la figure 4.7, nous indiquons comment la symboliser selon la convention prise.

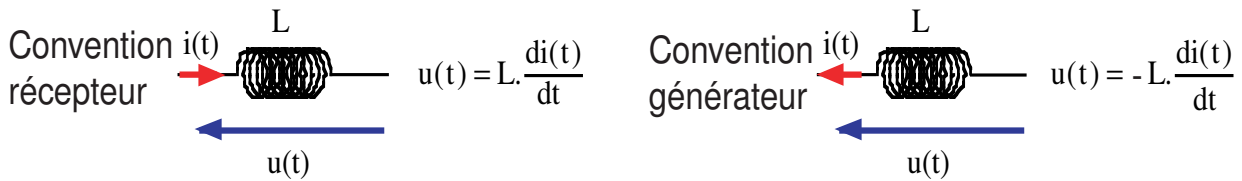


FIGURE 4.7 – Symboles d'une inductance suivant la convention prise.

Nous pouvons remarquer qu'en régime continu, pour une inductance, $i(t)$ est constant, donc compte tenu de la relation mathématique ci-dessus, nous avons $u = 0$: la bobine apparaît alors comme un court-circuit.

Nous verrons par la suite qu'une bobine "réelle", en plus de l'autoinduction, présente aussi une certaine résistance électrique intrinsèque (liée au conducteur qui la constitue).

Association en série et parallèle

Lorsque nous avons deux bobines d'inductance L_1 et L_2 mises en série, elles sont équivalentes à une bobine d'inductance équivalente L_{eq} telle que

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

Lorsque nous avons deux bobines d'inductance L_1 et L_2 mises en parallèle, elles sont équivalentes à une bobine d'inductance équivalente L_{eq} telle que

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Energie emmagasinée dans une bobine d'inductance L

Nous avons vu qu'en convention récepteur, la relation tension courant s'écrit pour une bobine d'inductance L : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$.

Nous en déduisons que la puissance instantanée reçue par la bobine :

$$P = u(t) \times i(t) = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) = \frac{dE}{dt}$$

La puissance étant la dérivée par rapport au temps de l'énergie, nous pouvons donc en déduire l'expression de l'énergie instantanée emmagasinée dans une bobine d'inductance L :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}Li^2} \quad (4.9)$$

Nous en déduisons que le courant $i(t)$ est une grandeur continue en fonction du temps.

4.3 Circuit linéaire RLC soumis à un échelon de tension

4.3.1 Définition d'un échelon de tension (ou tension échelon)

Nous disons qu'un générateur de tension parfaite délivre une *tension échelon* lorsque sa fem $e(t)$ est définie par :

$$e(t) = 0 \text{ pour } t < t_0$$

$$e(t) = E \text{ pour } t \geq t_0$$

Le graphe de cette fem est représenté sur la figure 4.8. Avec un tel générateur dans un

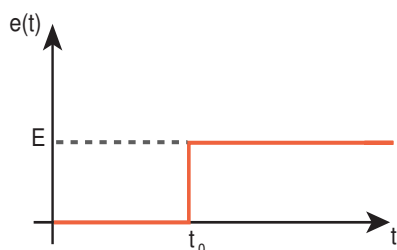


FIGURE 4.8 – Exemple d'échelon de tension.

circuit, cette source va créer un régime de courants transitoires dans les composants, qui va disparaître au fur et à mesure du temps pour ne laisser qu'un régime continu. Chaque courant ou tension d'un composant possède une dépendance propre en temps durant la phase transitoire que nous appelons *réponse à une tension échelon*.

4.3.2 Equation différentielle du circuit RLC série

Pour étudier la manière de réagir d'un circuit RLC série à une tension échelon, nous allons construire le circuit électrique présenté sur la figure 4.9.

Le circuit est construit donc en considérant le générateur en convention générateur et les autres composants en convention récepteur, ce qui impose le sens du courant.

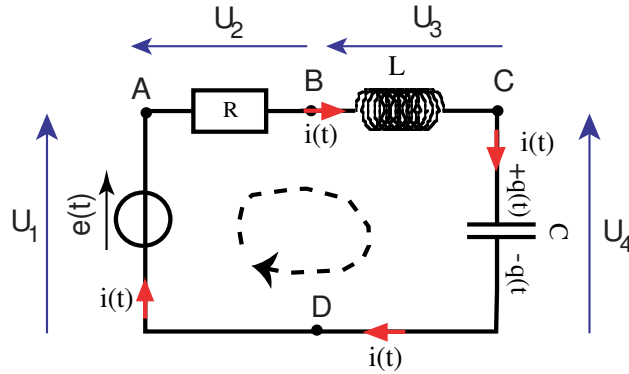


FIGURE 4.9 – Schéma d'un circuit RLC série alimenté par une tension échelon.

Nous avons une seule maille, donc un seul courant $i(t)$ à déterminer. Cette maille est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous avons a priori besoin de connaître l'évolution temporelle d'une seule variable électrique $i(t)$, $u(t) = U_4(t)$ ou $q(t)$ compte tenu des relations existant entre ces grandeurs pour les composants du circuit.

Nous allons essayer de déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur à partir de la loi des mailles. Nous avons donc, si nous partons du noeud A pour retourner au noeud A en tournant dans le sens indiqué précédemment :

$$V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D + V_D - V_A = 0$$

Si nous l'écrivons en fonction des tensions définies sur le schéma compte tenu des conventions choisies, nous obtenons :

$$U_2 + U_3 + U_4 - U_1 = 0$$

Ceci peut être réécrit :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u - e = 0$$

Nous savons que pour le condensateur de capacité C , nous avons : $i = C \frac{du}{dt}$.

Nous pouvons alors réécrire l'équation différentielle de la manière suivante en remplaçant i par la dérivée temporelle de u fois C :

$$RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = e(t)$$

Nous allons présenter cette équation différentielle différemment en divisant par LC :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{e(t)}{LC}} \quad (4.10)$$

Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et second membre non nul dépendant du temps.

Nous obtenons une équation différentielle analogue à celle obtenue pour un oscillateur mécanique amorti en régime forcé. Nous pouvons la réécrire sous la forme dite *réduite* en posant

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad (4.11)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{R}{2L}} \quad (4.12)$$

ω_0 a la dimension d'une pulsation et est tout simplement la pulsation propre de l'oscillateur électrique tandis que λ a la dimension de l'inverse d'un temps et est la constante d'amortissement du circuit. Cela donne :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = \omega_0^2e(t)} \quad (4.13)$$

La solution de cette équation différentielle $u(t)$ est la somme d'une solution générale $u_{GH}(t)$ de l'équation différentielle sans second membre plus une solution particulière $u_P(t)$ de l'équation avec second membre :

$$u(t) = u_{GH}(t) + u_P(t)$$

4.3.3 Résolution de l'équation différentielle et réponse à un échelon de tension

L'équation sans second membre s'écrit donc

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0 \quad (4.14)$$

Si nous remplaçons dans cette dernière équation u par x , nous retrouvons l'équation différentielle obtenue pour un oscillateur mécanique harmonique amorti libre. Donc la résolution de l'équation différentielle est totalement analogue.

Nous devons donc observer pour les régimes libres propres du circuit RLC les mêmes régimes que pour l'oscillateur harmonique amorti : *régime apériodique*, *régime apériodique critique* et *régime pseudo-périodique*.

La solution générale de l'équation homogène va donc prendre la forme :

$$u_{GH}(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$$

$$\text{avec } r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \text{ et avec } r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Selon que le discriminant $\Delta' = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ soit positif, nulle ou négatif, nous avons comme régime propre libre, les différents régimes présentés sur la figure 4.10.

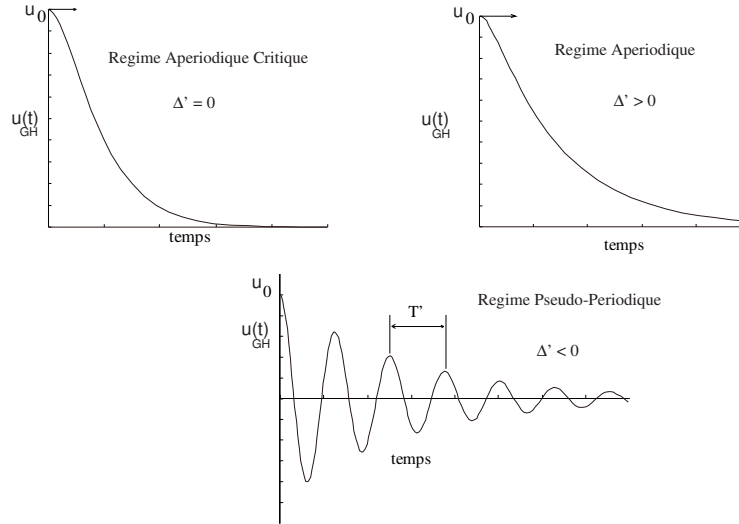


FIGURE 4.10 – Régimes libres propres d'un circuit RLC série dans le cas d'une décharge du condensateur.

La solution particulière $u_P(t)$ de l'équation différentielle avec second membre est simple à obtenir dans le cas de la tension échelon telle que nous l'avons définie.

Pour $t < t_0$, nous avons $e(t) = 0$ donc nous prenons la solution particulière la plus simple, donc ici, $u_P(t) = 0$

Cela veut donc dire que $u(t) = u_{GH}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$.

Mais à $t = 0$, nous avons $u(t = 0) = 0$ et $i(t = 0) = 0$ sachant que

$i(t) = C \frac{du}{dt} = C \times (A_1 r_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t})$; les conditions initiales entraînent que $A_1 = 0$ et $A_2 = 0$.

Nous avons donc $u(t) = 0$ pour $t < t_0$.

Pour $t \geq t_0$, nous avons $e(t) = E$ donc nous prenons la solution particulière la plus simple.

Donc ici, $u_P(t)$ est constant et vaut $u_P(t) = E$.

Cela entraîne que :

$$u(t) = u_P(t) + u_{GH}(t) = E + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Nous savons qu'à $t = t_0$, nous avons toujours $u(t_0) = 0$ et $i(t_0) = 0$.

Pour simplifier les calculs et montrer le principe de détermination de la solution $u(t)$, nous allons supposer que nous travaillons avec un circuit RLC série, qui fonctionne en régime libre pseudo-périodique ($\omega_0 > \lambda$), dans ce cas $u(t)$ peut s'écrire :

$$u(t) = E + e^{-\lambda t} (\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t))$$

Nous pouvons en déduire que

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -C\lambda e^{-\lambda t} (\alpha \cos(\omega' t) + \beta \sin(\omega' t)) + C e^{-\lambda t} (-\alpha \omega' \sin(\omega' t) + \beta \omega' \cos(\omega' t))$$

donc

$$i(t) = C e^{-\lambda t} ((\beta \omega' - \lambda \alpha) \cos(\omega' t) - (\alpha \omega' + \lambda \beta) \sin(\omega' t))$$

Pour trouver les valeurs de α et β , nous nous servons des valeurs du courant et de la tension à $t = t_0$.

Pour simplifier encore plus ce calcul, nous allons supposer que $t_0 = 0$ ce qui est équivalent à faire une translation dans le temps $-t_0$ par rapport à la situation initiale.

Ceci nous donne donc deux équations :

$$u(0) = E + e^{-\lambda 0} (\alpha \cos(\omega' 0) + \beta \sin(\omega' 0)) = 0$$

et

$$i(0) = C e^{-\lambda 0} ((\beta \omega' - \lambda \alpha) \cos(\omega' 0) - (\alpha \omega' + \lambda \beta) \sin(\omega' 0)) = 0$$

Nous en déduisons que $E + \alpha = 0$ donc que $\alpha = -E$ ainsi que $\beta \omega' - \lambda \alpha = 0$ donc que $\beta = -E \times \frac{\lambda}{\omega'}$.

Nous pouvons alors écrire si $t_0 = 0$ que

$$u(t) = E \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega' t) + \frac{\lambda}{\omega'} \sin(\omega' t) \right) \right]$$

Si $t_0 \neq 0$, il est facile de trouver l'expression dans ce cas à partir de la précédente :

$$u(t) = E \left[1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \left(\cos(\omega'(t-t_0)) + \frac{\lambda}{\omega'} \sin(\omega'(t-t_0)) \right) \right]$$

Elle n'est valable que pour $t \geq t_0$. Le graphe correspondant est présenté sur la figure 4.11. Pour obtenir, le courant $i(t)$ dans le circuit, il suffit de dériver l'expression obtenue pour $u(t)$ par rapport au temps et de multiplier par la capacité C .

Nous obtenons alors l'expression suivante :

pour $t < t_0$

$$i(t) = 0$$

pour $t \geq t_0$

$$i(t) = C E e^{-\lambda(t-t_0)} \left(\omega' + \frac{\lambda^2}{\omega'} \right) \sin(\omega'(t-t_0))$$

Son graphe est présenté sur la figure 4.12.

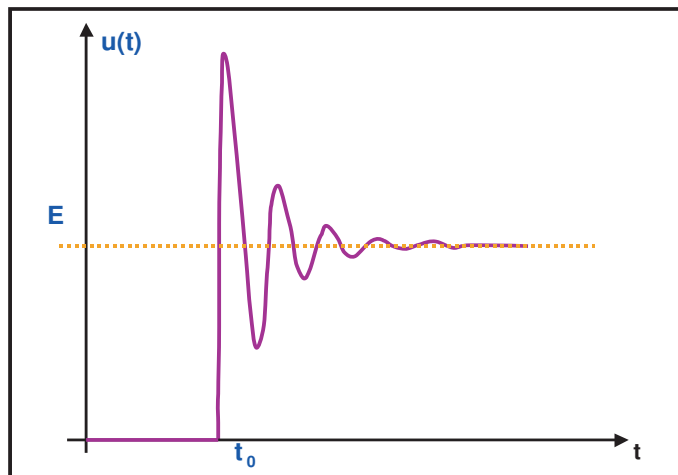


FIGURE 4.11 – Evolution temporelle typique de la tension aux bornes du condensateur circuit RLC série dans le cas d'un régime propre pseudo-périodique soumis à une tension échelon.

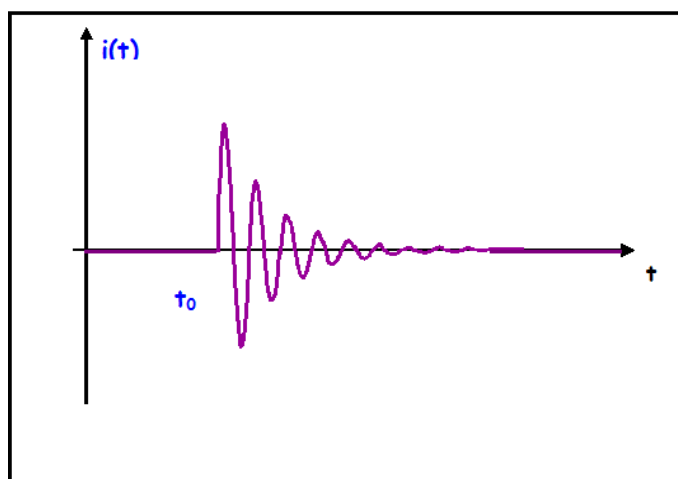


FIGURE 4.12 – Evolution temporelle typique du courant dans un circuit RLC série dans le cas d'un régime propre pseudo-périodique soumis à une tension échelon.

4.4 Analogie entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique

Nous avons vu précédemment que l'équation qui régit l'évolution temporelle de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur s'écrivait :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{e(t)}{LC} \quad (4.15)$$

Si nous tenons compte du fait que $q(t) = C \times u(t)$ et nous multiplions par C l'équation précédente, nous pouvons en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la charge :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{e(t)}{L} \quad (4.16)$$

Nous pouvons comparer cette dernière à l'équation obtenue pour un oscillateur mécanique amorti en régime forcé dans le chapitre 3 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \cos \Omega t = \frac{F(t)}{m} \quad (4.17)$$

En comparant ces deux équations différentielles, nous en déduisons l'analogie entre les deux types d'oscillateurs, c'est-à-dire les correspondances entre leurs différentes grandeurs caractéristiques :

Il apparaît que $q \Leftrightarrow x$ correspondent, mais aussi $L \Leftrightarrow m$, $\frac{1}{C} \Leftrightarrow k$ et $f \Leftrightarrow R$ ainsi que les causes $e(t) \Leftrightarrow F(t)$. Cette analogie est très importante car elle va nous permettre de nous servir de l'ensemble des connaissances acquises en ce qui concerne l'oscillateur harmonique mécanique pour comprendre la version électrique.

Par exemple, les phénomènes de résonance observés dans le cas d'une excitation du système vibrant par une force sinusoïdale vont bien évidemment se retrouver lorsqu'une tension alternative sinusoïdale est appliquée au circuit RLC série.

Nous pouvons résumer cette analogie dans un tableau récapitulatif qui suit :

Oscillateur	Electrique	Mécanique
<i>Variable caractéristique</i>	La charge $q(t)$	La position $x(t)$
<i>Dérivée de la variable</i>	Le courant électrique $i(t) = \frac{dq}{dt}$	La vitesse $v(t) = \frac{dx}{dt}$
<i>Dérivée seconde</i>	$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$	L'accélération $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
<i>La cause de la variation</i>	La tension $e(t)$	La force $F(t)$
<i>Elément de base de l'oscillateur</i>	L'inductance L	La masse m
<i>Elément de base de l'oscillateur</i>	L'inverse de la capacité $\frac{1}{C}$	La constante de raideur k
<i>La cause de la dissipation</i>	La résistance R	La force de frottement f
<i>La pulsation propre ω_0</i>	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$
<i>La période T_0</i>	$2\pi \times \sqrt{LC}$	$2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}}$
<i>La constante d'amortissement λ</i>	$\frac{R}{2L}$	$\frac{f}{2m}$
<i>Le facteur de Qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$</i>	$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\frac{\sqrt{km}}{f}$
<i>L'énergie potentielle</i>	$E_{elec} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{C} \times q^2$	$E_{elas} = \frac{1}{2} \times k \times x^2$
<i>L'énergie dynamique</i>	$E_{mag} = \frac{1}{2} \times L \times i^2$	$E_{cin} = \frac{1}{2} \times m \times v^2$

Chapitre 5

Electrocinétique des courants alternatifs

5.1 Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

5.1.1 Circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale

Nous allons maintenant étudier le comportement du circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale, c'est à dire à une tension alternative sinusoïdale telle que $e(t) = E \times \cos(\omega t)$.

L'étude faite dans le chapitre précédent, nous a permis de déterminer l'équation différentielle à laquelle doit obéir la tension $u(t)$ appliquée aux bornes du condensateur.

Ce calcul est valide quelle que soit l'expression de la tension $e(t)$ fournie par le générateur.

Nous avons donc dans le cas présent :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{e(t)}{LC} = \frac{E}{LC} \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

L'analogie entre l'oscillateur mécanique et électrique présentée aussi dans le chapitre précédent, nous permet d'anticiper les résultats.

Nous avons vu avec l'oscillateur mécanique soumis à une excitation sinusoïdale, que nous avons selon la valeur du facteur de qualité Q ($Q > 1/\sqrt{2}$) une résonance en amplitude, une résonance en vitesse quelle que soit la valeur de Q ainsi qu'une résonance en puissance, elle aussi, indépendante de Q .

Nous allons avoir la même chose pour l'oscillateur électrique, une résonance pour $u(t)$ et $q(t) = \frac{u(t)}{C}$, qui dépend de Q , une résonance en courant et en puissance reçue indépendante de Q . Nous allons aussi caractériser l'acuité de ces résonances par la notion de bande passante avec les mêmes définitions que pour l'oscillateur mécanique.

5.1.2 Résonance aux bornes du condensateur

Recherche de la solution particulière

Nous avons vu dans le cas de l'échelon de tension que la solution générale de l'équation différentielle était la somme d'une solution transitoire (régime libre) plus la solution particulière correspondant à la solution en régime forcé.

Nous retrouvons donc la même situation que pour l'oscillateur mécanique en régime forcé sinusoïdal.

Pour trouver la solution particulière en régime forcé sinusoïdal, il est plus simple de passer par la notation complexe.

Comme nous sommes dans le domaine de l'électricité, une des grandeurs mesurées est le courant électrique. Elle est le plus souvent désignée par la lettre i .

Ceci nous amène à désigner le nombre imaginaire ι différemment, en utilisant le symbole j pour éviter la confusion avec le courant.

Dans ce cas, nous avons $\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi)}$, $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$.

Nous réécrivons de plus l'équation différentielle sous sa forme réduite, nous obtenons alors l'expression suivante :

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} + 2\lambda\dot{\underline{u}} + \omega_0^2\underline{u} = \omega_0^2\underline{e}} \quad (5.2)$$

Nous savons que $\ddot{\underline{u}}(t) = -\omega^2\underline{u}(t)$ et $\dot{\underline{u}} = \omega j\underline{u}(t)$.

Cela donne donc si nous remplaçons les dérivées par ces expressions dans l'équation :

$$(-\omega^2 + 2\lambda\omega j + \omega_0^2)\underline{u} = \omega_0^2\underline{e}$$

Nous remplaçons ensuite $\underline{u}(t)$ et $\underline{e}(t)$ par leurs expressions complètes :

$$((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega j)Ue^{j(\omega t + \varphi)} = \omega_0^2 Ee^{j\omega t}$$

Nous pouvons simplifier cette expression :

$$((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega j)Ue^{j\varphi} = \omega_0^2 E$$

Nous en déduisons pour finir que

$$Ue^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 E}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega j)}$$

Nous retrouvons un résultat analogue à celui de l'oscillateur mécanique, qui était le suivant :

$$Ae^{j\varphi} = \frac{\frac{F}{m}}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega j)}$$

Nous pouvons en déduire $U(\omega)$ et $\tan \varphi(\omega)$ en fonction de ω , Q et enfin ω_0

$$U(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \quad (5.3)$$

et

$$\tan \varphi(\omega) = -\frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \quad (5.4)$$

$$\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Nous en déduisons que toutes les résultats présentés sur la résonance en amplitude pour l'oscillateur harmonique mécanique vont être aussi valides pour la résonance en tension aux bornes du condensateur.

Caractéristiques de la résonance.

La résonance en tension se produit si le facteur de qualité Q est suffisamment grand. Celui-ci va être aussi appelé **facteur de surtension**. Nous verrons pourquoi par la suite.

La condition de résonance est la suivante : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Compte tenu de cette expression, la pulsation de résonance ω_r tend vers ω_0 lorsque que Q devient grand. Elle saura donc d'autant plus proche de la pulsation propre ω_0 que Q est grand devant 1.

La valeur de l'amplitude de la tension à la résonance est donc :

$$U(\omega_r) = E \times \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = U_{max}$$

Le déphasage φ entre la tension aux bornes du condensateur et la tension du générateur varie entre 0 et $-\pi$.

Il vaut $-\pi/2$ quand la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre du circuit.

Nous présentons sur la figure 5.1 un exemple typique de résonance et de non résonance en tension aux bornes du condensateur.

L'**acuité de la résonance** ou **finesse de résonance**, ou encore **bande passante** $\Delta\omega$ de la résonance est définie comme la largeur du pic de résonance à la tension $u(\omega) = u(\omega_r)/\sqrt{2}$.

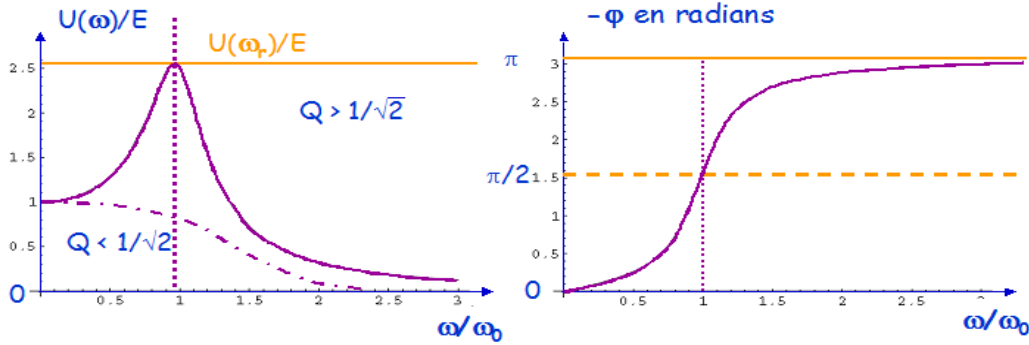


FIGURE 5.1 – Amplitude réduite et déphasage typique de la résonance en tension aux bornes de C .

Elle ne s'exprime simplement pour la résonance en tension que lorsque le facteur de qualité est bien supérieur à 1, alors nous avons tout simplement :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \text{ si } Q \gg 1$$

C'est déjà ce qui avait été observé pour la résonance en amplitude de l'oscillateur mécanique.

5.1.3 Résonance en intensité

Calcul de l'intensité complexe

Pour remonter à l'intensité circulant dans le circuit RLC , il suffit de dériver la forme complexe de la tension aux bornes du condensateur par rapport au temps et de multiplier le résultat par sa capacité puisque $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$.

Cela donne donc :

$$\underline{i}(t) = C \times \frac{du}{dt} = C \times j\omega u(t) = \frac{C\omega j\omega_0^2 E e^{j\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega j}$$

Nous rappelons que $C\omega_0^2 = \frac{1}{L}$ et $2\lambda = \frac{R}{L}$.

Cela permet d'écrire que :

$$\underline{i}(t) = \frac{1}{L} \frac{\omega j E e^{j\omega t}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + \frac{R}{L}\omega j}$$

Nous pouvons encore simplifier l'écriture :

$$\underline{i}(t) = \frac{1}{\omega j} \frac{\underline{e}(t)}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + \frac{R}{L}\omega j}$$

Cela donne pour finir :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + R}$$

Nous pouvons réécrire autrement cette dernière expression sachant que $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}$$

Nous pouvons calculer l'amplitude I de $\underline{i}(t)$, en effet

$$I = \sqrt{\underline{i}(t) \times \underline{i}^*(t)} = |\underline{i}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

Cela donne aussi avec l'autre expression complexe du courant :

$$I = |\underline{i}| = \frac{E}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

En tenant compte du fait que $R = \frac{L\omega_0}{Q}$, nous pouvons aussi écrire que

$$I = \frac{\frac{EQ}{L\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Nous pouvons comparer cette expression avec celle obtenue pour l'amplitude de la vitesse V dans le cas des oscillations forcées de l'oscillateur mécanique :

$$V = \frac{\frac{FQ}{m\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Nous trouvons donc exactement ce que nous attendons compte tenu de l'analogie entre les deux systèmes.

Pour le déphasage ψ entre le courant $i(t)$ et la tension d'excitation $e(t)$, nous retrouvons aussi que

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Caractéristiques de la résonance en intensité

Pour l'oscillateur mécanique, la vitesse présente une résonance, qui existe toujours quelle que soit la valeur du facteur de qualité Q . C'est exactement la même situation pour le courant passant dans le condensateur donc dans le circuit. La pulsation de résonance en courant est toujours la même quelle que soit la valeur du facteur de qualité Q et est égale tout simplement à la pulsation propre de l'oscillateur harmonique électrique $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

L'amplitude maximale de l'intensité obtenue à la résonance est :

$$I_{max} = \frac{EQ}{L\omega_0} = \frac{E}{R}$$

Nous présentons sur la figure 5.2, l'évolution de l'amplitude du courant $I(\omega)$ en fonction de la pulsation réduite ω/ω_0 . Il est possible de montrer que la bande passante (voir sur

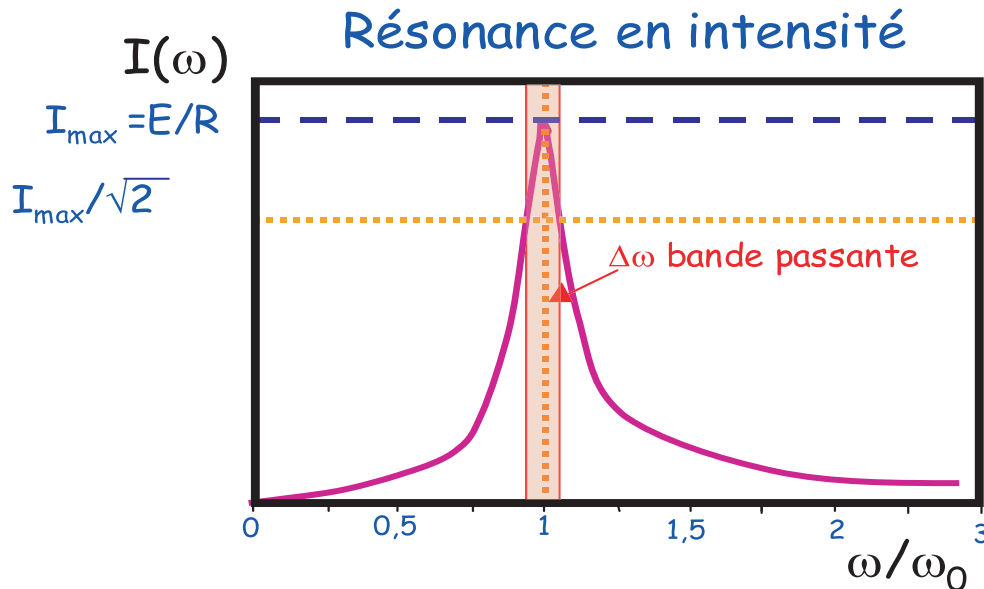


FIGURE 5.2 – Evolution de l'intensité de l'oscillateur électrique en fonction de la pulsation réduite, en régime forcé.

la figure 5.2), pour la résonance en intensité, correspondant à la gamme de pulsations $\Delta\omega$ pour laquelle $I(\omega) \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ est tout simplement telle que :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \forall Q \quad (5.5)$$

Cette relation est valide sans aucune condition sur la valeur de Q et sans approximation.

Il est aussi intéressant de noter qu'à la résonance, le courant est en phase avec l'excitateur. C'est utile expérimentalement parlant pour déterminer la pulsation propre d'un circuit RLC .

Il est important de noter aussi qu'à la résonance en intensité c'est à dire lorsque la pulsation d'excitation est égale à la pulsation propre, les amplitudes des tensions aux bornes de l'inductance et du condensateur ont des valeurs bien spécifiques.

Nous avons :

$$U(\omega_0) = Q \times E = \frac{E}{RC\omega_0}$$

et

$$U_L(\omega_0) = Q \times E = \frac{L\omega_0 E}{R}$$

Il y donc une amplification apparente des tensions aux bornes des deux composants. Ces deux tensions peuvent devenir importantes si Q est grand, et même engendrer une destruction de composants non adaptés dans le circuit. C'est pour cela que l'on parle de *surtension* et l'on donne le nom de *facteur de surtension* à Q .

5.2 Notion d'impédance complexe d'un dipôle linéaire

5.2.1 Régime permanent sinusoïdal et notation complexe

Nous avons vu précédemment que l'utilisation des grandeurs complexes simplifiait énormément la détermination des solutions particulières des équations différentielles.

Nous avons vu aussi qu'une dérivation par rapport au temps, pour une grandeur complexe, était équivalent à une multiplication par $j\omega$ et nous pourrions montrer qu'une intégration par rapport au temps est équivalente à une division par $j\omega$.

Il apparaît aussi que compte tenu des fréquences étudiées et de la taille des circuits (nous nous trouvons dans le cadre de *l'approximation des régimes quasi-stationnaires*, la propagation des ondes électromagnétiques peut être négligée), **les lois de Kirchhoff valides pour le courant continu reste alors valide pour des courants alternatifs sinusoïdaux. La lois des noeuds et la loi des mailles restent valides en remplaçant les grandeurs continues par les grandeurs instantanées correspondantes.**

Cela entraîne aussi que les lois de Kirchhoff vont aussi être valides pour une forme complexe des courants et des tensions. Cela nous donnera donc que :

Pour un noeud :

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k \dot{I}_k(t) = 0$$

avec $\epsilon_k = \pm 1$ en fonction du sens conventionnel choisi pour la branche k .

Pour une maille :

$$\sum_{k=1}^n \underline{u}_k(t) = 0$$

5.2.2 Définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour les trois types de composants étudiés, la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ étaient liées par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre.

En effet pour le condensateur nous avons :

$$i(t) - C \frac{du}{dt} = 0$$

Donc en régime sinusoïdal permanent, avec l'écriture complexe, nous avons :

$$\underline{i}(t) - C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}(t) - C j\omega \underline{u}(t)$$

Ceci peut se réécrire $\underline{u}(t) = \frac{1}{j\omega C} \underline{i}(t)$.

Pour la résistance, nous avons la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t)$$

Donc en régime sinusoïdal permanent, avec l'écriture complexe, nous avons :

$$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$$

Pour une bobine, nous avons :

$$u(t) - L \frac{di}{dt} = 0$$

Donc en régime sinusoïdal permanent, avec l'écriture complexe, nous avons :

$$\underline{u}(t) - jL\omega \underline{i}(t) = 0$$

Ceci peut se réécrire

$$\underline{u}(t) = jL\omega \underline{i}(t)$$

Pour tous les composants en notation complexe, nous avons donc une relation du type :

$$\boxed{\underline{u}(t) = \underline{Z} \times \underline{i}(t)} \quad (5.6)$$

où \underline{Z} est une grandeur complexe, appelée l'*impédance complexe* du dipôle considéré.

Cette relation porte le nom de *loi d'Ohm complexe*.

Cette impédance relie également les amplitudes complexes \underline{U} et \underline{I} .

En effet nous avons $\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{U} e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I} e^{j\omega t}$ donc nous avons obligatoirement la loi d'Ohm complexe sous une autre forme :

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}} \quad (5.7)$$

Avec les relations précédentes, nous pouvons aussi écrire que :

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$$

avec Z , module de l'impédance complexe \underline{Z} , qui est aussi appelé *impédance* et est égal au rapport des amplitudes U de la tension et de l'intensité I . Cette impédance Z ainsi définie se mesure en ohms.

L'argument φ de l'impédance complexe est donc égal au déphasage $\varphi_u - \varphi_i$ de l'intensité par rapport à la tension.

La connaissance de \underline{Z} suffit donc à déterminer complètement l'intensité $i(t)$ lorsque nous connaissons $u(t)$ ou l'inverse.

Nous pouvons aussi décrire l'impédance complexe sous sa forme cartésienne :

$$\underline{Z} = R + jS = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$

R est toujours positif pour un dipôle passif et est appelé *résistance du dipôle*.

S est appelé *réactance*.

5.2.3 Admittance complexe

Comme nous avons défini la conductance pour une résistance comme étant son inverse, nous appelons *admittance complexe* l'inverse de l'impédance complexe :

$$\underline{Y} = \underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

On la note \underline{Y} ou \underline{G} .

5.2.4 Exemples d'impédances

Résistor de résistance R

La relation temporelle instantanée $u(t) = Ri(t)$ s'écrit en notation complexe :

$$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \text{ ou } \underline{U} = R\underline{I}$$

Par identification, nous en déduisons que

$$\underline{Z} = R \tag{5.8}$$

Il n'y a pas déphasage entre courant et tension pour un conducteur ohmique.

Bobine d'inductance L

Nous considérons une bobine dont nous négligeons la résistance interne. Nous avons vu qu'en notation complexe pour une bobine, nous avons la relation suivante :

$$\underline{u}(t) = jL\omega\underline{i}(t)$$

Nous en déduisons que :

$$\underline{Z}(t) = jL\omega \quad (5.9)$$

Il s'agit d'une impédance imaginaire pure. On parle dans ce cas de *réactance pure*. L'argument de l'impédance vaut $+\pi/2$. La tension est en *quadrature avance de phase* par rapport à l'intensité.

A basse fréquence, l'impédance d'une bobine tend vers 0, cela devient un simple fil sans résistance (court-circuit).

A haute fréquence, l'impédance de la bobine tend vers $+\infty$: la bobine est donc équivalente à un interrupteur ouvert (coupe-circuit).

Condensateur de capacité C

Nous considérons un condensateur de capacité C. Nous avons vu précédemment qu'en notation complexe, nous avons pour un condensateur la relation suivante :

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{j\omega C} \underline{i}(t)$$

Nous en déduisons que l'impédance associée est la suivante :

$$\underline{Z}(t) = \frac{1}{jC\omega} \quad (5.10)$$

L'impédance du condensateur est elle aussi imaginaire pure avec un argument $-\pi/2$. L'intensité est en *quadrature avance de phase* sur la tension. Il s'agit donc aussi d'une réactance pure.

A haute fréquence, l'impédance du condensateur tend vers 0, le condensateur est équivalent à un fil sans résistance.

En basse fréquence, l'impédance du condensateur tend vers $+\infty$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

5.2.5 Association d'impédances complexes

Les impédances complexes obéissent aux mêmes lois d'association que des résistances pures en courant continu.

Association en série

Soient n impédances notées \underline{Z}_i placées en série. L'association en série de ces impédances est équivalente à une impédance unique \underline{Z}_{eq} telle que :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i \quad (5.11)$$

Association en parallèle

Soient n impédances notées Z_i placées en parallèle. L'association en parallèle de ces impédances est équivalente à une impédance unique Z_{eq} telle que :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i} \quad (5.12)$$

5.3 Utilisation de la notion d'impédance en régime sinusoïdal forcé

5.3.1 Circuit RLC série

Nous étudions à nouveau le circuit décrit à gauche sur la figure 5.3, composés des trois éléments : résistance pure R , l'inductance (on utilise aussi le terme anglais *self*) L et la capacité C montés en série.

L'impédance équivalente d'un tel circuit est donc :

$$\underline{Z}_{eq} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

Son module est donné par

$$Z_{eq} = |\underline{Z}_{eq}| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

et son argument par :

$$\varphi = \arg \underline{Z}_{eq} = \arctan \left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \right)$$

Aux très basses fréquences, l'effet de la capacité est prédominant ; aux hautes fréquences, c'est celui de l'inductance.

Il est important de remarquer que le module de l'impédance Z_{eq} passe par un minimum pour $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, donc pour $\omega = \omega_0$, où ω_0 est la pulsation propre du circuit.

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.3, le circuit d'intérêt avec la notion d'impédance équivalente devient beaucoup plus simple à étudier si nous regardons à quel circuit il est effectivement équivalent.

La détermination du courant $\underline{i}(t)$ connaissant $\underline{e}(t)$ est évidente :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{\underline{e}(t)}{j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + R}$$

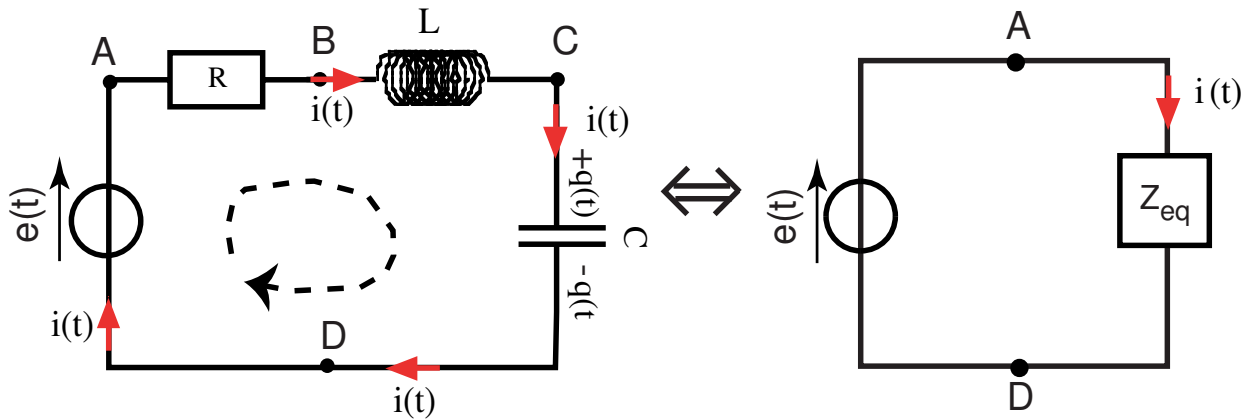


FIGURE 5.3 – Circuit RLC série et son circuit équivalent en régime forcé sinusoïdal.

Nous retrouvons le résultat trouvé précédemment lors de l'étude de la résonance en intensité. Le minimum du module de l'impédance correspond bien à la résonance en intensité dans le circuit.

Nous pouvons ensuite facilement calculer la tension aux bornes du condensateur ou de la bobine.

En effet, nous avons :

$$\underline{u}_C(t) = \underline{Z}_C \times \underline{i}(t) = \frac{1}{jC\omega} \times \frac{\underline{e}(t)}{j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + R} = \frac{\underline{e}(t)}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

et

$$\underline{u}_L(t) = \underline{Z}_L \times \underline{i}(t) = L\omega j \times \frac{\underline{e}(t)}{j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + R} = \frac{\underline{e}(t)}{(\frac{1}{LC\omega^2} - 1) + j\frac{R}{L\omega}}$$

Nous voyons ainsi comment la notion d'impédance simplifie énormément la problématique des circuits électriques en régime sinusoïdal permanent.

5.3.2 Circuit RLC parallèle.

Soit le circuit présenté sur la figure 5.4, dans ce cas les trois composants sont donc disposés en parallèle. L'impédance équivalente va donc être tout simplement :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{1/jC\omega}}$$

Cette expression peut se simplifier un peu :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

Nous en déduisons le module de l'impédance suivant

$$|Z_{eq}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{L\omega})^2}}$$

L'expression complexe du courant $\underline{i}(t)$ va donc être la suivante :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{e}(t) \times \left(\frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega}) \right)$$

Nous en déduisons l'expression de l'amplitude de I du courant $i(t)$:

$$I = E \times \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{L\omega})^2}$$

Dans un circuit oscillant parallèle, à la fréquence $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le courant passe donc par un minimum. On dit dans ce cas qu'il y a une **anti-résonance**. L'impédance est pour la pulsation propre du circuit : réelle et maximale.

Les circuits RLC parallèle, sont souvent appelés **circuits bouchons**, car ils présentent une grande impédance pour ω au voisinage de ω_0 et ils "empêchent" les signaux à cette fréquence d'accéder à une partie de circuit. En électronique, les circuits bouchons sont

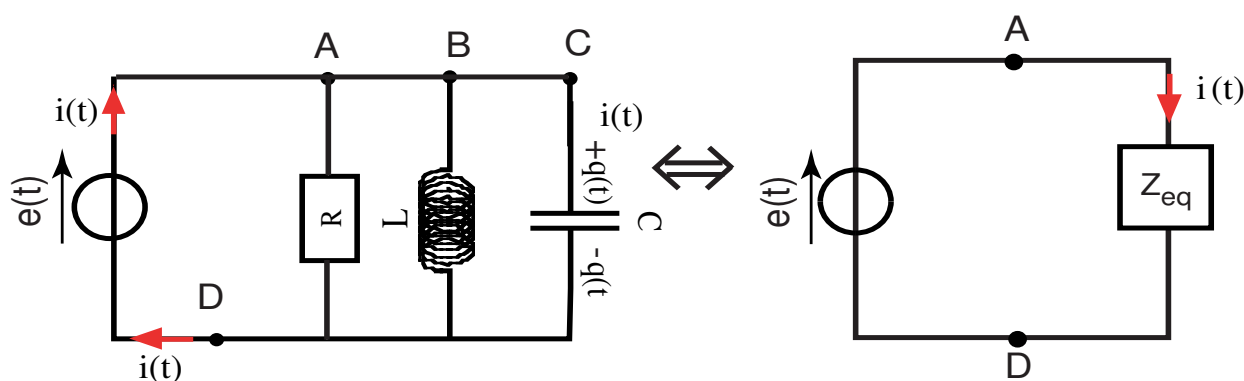


FIGURE 5.4 – Circuit RLC parallèle et son circuit équivalent en régime forcé sinusoïdal.

utilisés pour "trier" différentes fréquences dans les chaînes audio (égaliseurs) ou dans les téléviseurs couleur (séparation des fréquences son, chrominance et luminance). C'est d'une certaine façon le circuit complémentaire du circuit RLC série.

Chapitre 6

Puissance électrique en régime sinusoïdal

6.1 Définitions des puissances

6.1.1 Puissance instantanée

Soient $u(t) = U \cos(\omega t)$ la tension aux bornes du dipôle étudié et $i(t) = I \cos(\omega t - \varphi)$ l'intensité qui le parcourt. Le dipôle reçoit la puissance électrocinétique instantanée suivante (en convention récepteur) :

$$\boxed{P(t) = u(t) \times i(t) = UI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)} \quad (6.1)$$

Celle-ci peut se réécrire en développant l'expression ci-dessus :

$$P(t) = u(t) \times i(t) = \frac{1}{2}UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$$

Cette puissance varie au cours du temps de manière sinusoïdale à la pulsation 2ω autour d'une valeur P_m appelée *puissance moyenne*

6.1.2 Puissance moyenne

P_m est exactement la moyenne de la puissance reçue par le circuit lorsqu'elle est calculée sur un nombre entier n de périodes d'oscillations T :

$$P_m = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} P(t) dt \quad (6.2)$$

Nous pouvons démontrer avec cette définition que

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2}UI \cos \varphi} \quad (6.3)$$

Pour faire disparaître dans l'expression P_m de la moyenne le facteur $1/2$ et obtenir une expression analogue à celle obtenue avec des courants continus, nous définissons des *grandeurs efficaces* (grandeurs mesurées par les multimètres, voltmètres ou ampèremètres en courant alternatif), l'*intensité efficace* I_{eff} et la *tension efficace* U_{eff} :

$$I_{eff} = I/\sqrt{2} \text{ et } U_{eff} = U/\sqrt{2}$$

Nous avons donc alors :

$$\boxed{P_m = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi} \quad (6.4)$$

Le facteur $\cos \varphi$ est appelé *facteur de puissance* du dipôle.

Pour une tension imposée, l'intensité nécessaire pour obtenir une puissance donnée dans un dipôle sera d'autant plus petit que le facteur de puissance sera proche de l'unité, donc que sera plus faible le déphasage entre courant et tension. Or, diminuer l'intensité, c'est diminuer les pertes par effet Joule dans les fils conducteurs qui amènent le courant du générateur au dipôle ; d'où l'importance pour le fournisseur de courant à n'alimenter que des circuits de facteur de puissance élevé. L'EDF impose à ses usagers un $\cos \varphi$ supérieur à 0,9 sous peine d'amendes.

Pour un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = R + jS$, nous avons donc :

$$P_m = \frac{1}{2} UI \cos \varphi = \frac{1}{2} Z I^2 \cos \varphi$$

Comme $Z \cos \varphi = R$, nous en déduisons que

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2} R I^2 = R I_{eff}^2} \quad (6.5)$$

Nous pouvons remarquer que si le dipôle est passif, il ne peut que recevoir de l'énergie donc P_m et R ne peuvent qu'être positifs.

6.2 Puissance active et puissance réactive

Nous allons voir maintenant que la puissance instantanée peut être séparée en deux parties, l'une étant liée à la composante de la tension en phase avec le courant et l'autre à la composante de la tension déphasée par rapport au courant. Nous avons vu précédemment que :

$$P(t) = u(t) \times i(t) = UI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

Nous pouvons réécrire cette expression de la manière suivante :

$$P(t) = UI \cos(\omega t - \varphi + \varphi) \cos(\omega t - \varphi)$$

Nous pouvons développer encore le second cosinus, ce qui donne :

$$P(t) = \frac{1}{2}UI \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t - \varphi)] - \frac{1}{2}UI \sin \varphi \sin 2(\omega t - \varphi)$$

Nous posons alors $P_r = \frac{1}{2}UI \sin \varphi$.

Nous pouvons alors écrire que :

$$P(t) = P_m [1 + \cos 2(\omega t - \varphi)] - P_r \sin 2(\omega t - \varphi)$$

Le premier terme est la puissance instantanée consommée par les parties résistives du circuit ; il est modulé à 2ω autour de P_m .

Le deuxième terme est la puissance instantanée fournie aux parties réactives du circuit (inductives et capacitives). Sa moyenne est nulle.

Donc pour un circuit passif d'impédance $\underline{Z} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jS$, nous avons donc :

$$P_m = \frac{1}{2}RI^2 \text{ et } P_r = \frac{1}{2}SI^2$$

On appelle P_m *puissance active* et P_r *puissance réactive*.

On définit aussi parfois une puissance complexe \underline{P} telle que :

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{UI}^* = \frac{1}{2}ZI^2(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P_m + jP_r \quad (6.6)$$

Chapitre 7

Exemples d'application pratique de cette physique

7.1 Le sismographe

Un sismographe est un instrument, qui permet d'enregistrer les mouvements vibratoires ou d'oscillations du sol associés à un phénomène sismique. Nous présentons un exemple de sismographe simple sur la figure 7.1.

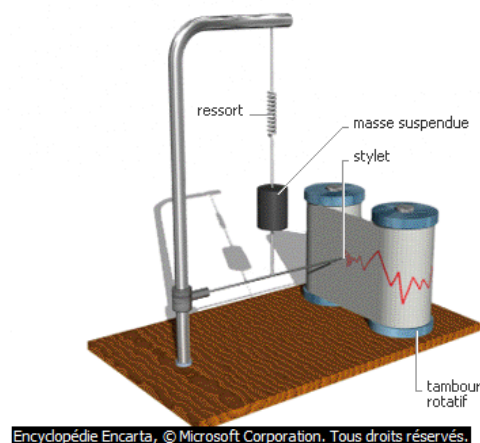


FIGURE 7.1 – Exemple de sismographe simple

Il est constitué d'une masse d'inertie m très importante attachée à une potence par un ressort. La potence, elle-même, est liée à un support en contact direct avec le sol. Un stylet est lié à cette masse d'inertie et permet d'écrire sur un papier mis en mouvement à une vitesse uniforme par des tambours en rotation. Le sismographe présenté ici permet de détecter et d'enregistrer les mouvements d'ondes verticaux.

Lorsqu'une onde sismique atteint le sismographe, le sol, le support et le tambour rotatif vibrent en oscillant verticalement, alors que la masse suspendue par le ressort reste

immobile du fait de son inertie. Le stylet relié à la masse trace ainsi une ligne brisée sur le tambour. Nous obtenons alors le type de graphe présenté sur la figure 7.2, qui est appelé *sismogramme*.

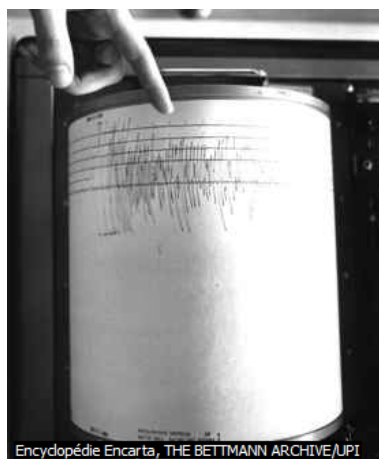


FIGURE 7.2 – Exemple d'enregistrement obtenu avec un sismographe

Pour mieux comprendre le principe de fonctionnement du sismographe, nous allons le schématiser encore plus, comme indiqué sur la figure 7.3. Il apparaît donc constituer d'une boîte en contact direct avec le sol et d'un oscillateur harmonique amorti, construit avec une masse m importante accrochée à une extrémité M d'un ressort vertical de constante de raideur k tandis que l'autre extrémité est fixée en un point A à la boîte. Les frottements éventuels sont schématisés par un amortisseur en pointillé sur la figure 7.3 avec un coefficient de frottement f .

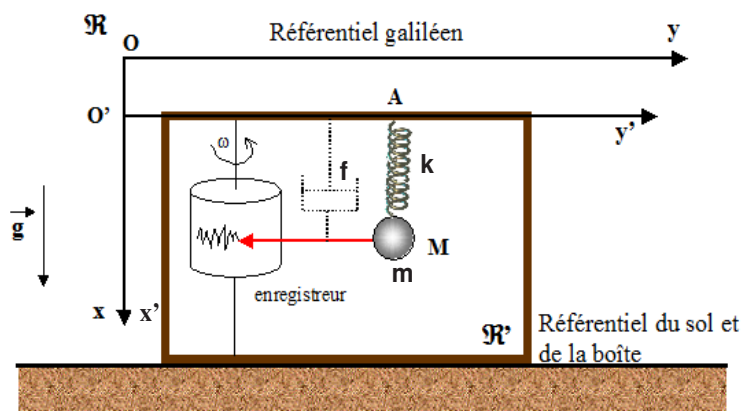


FIGURE 7.3 – Schéma permettant d'expliquer le fonctionnement d'un sismographe

Nous allons essentiellement avec un tel appareil enregistrer les mouvements verticaux du sol et de la boîte par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} .

En fait, le tracé sur le papier enregistreur enregistre le mouvement apparent de la masse m par rapport à la boîte et au sol donc par rapport au référentiel non galiléen \mathfrak{R}' . La masse d'inertie m , elle, restant fixe par rapport au référentiel galiléen \mathfrak{R} , du fait de sa grande inertie, nous enregistrons donc dans le même temps, le mouvement du référentiel \mathfrak{R} par rapport au référentiel \mathfrak{R}' donc le mouvement opposé à celui du sol et de la boîte par rapport au référentiel \mathfrak{R} .

Pour étudier quantitativement ce phénomène, nous allons donc étudier le mouvement du point matériel M par rapport à \mathfrak{R}' , qui est non galiléen. Nous allons donc considérer ici que le référentiel relatif est \mathfrak{R}' et que le repère absolu est \mathfrak{R} .

Nous rappelons la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}_r = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{j\text{ ext}} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

avec \vec{F}_{ie} force d'inertie d'entraînement.
 \vec{F}_{ic} force d'inertie de Coriolis.

Le mouvement de \mathfrak{R}' par rapport à \mathfrak{R} est supposé être un mouvement de translation suivant Ox . Il s'ensuit que l'accélération de Coriolis est nulle donc la force d'inertie de Coriolis est nulle. L'accélération d'entraînement va être l'accélération du point d'attache A , car il est fixe vis à vis de la boîte et du sol, par rapport à \mathfrak{R} . Nous pouvons en déduire l'expression de la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{A/\mathfrak{R}} = -ma_A(t)\vec{u}_x$$

Maintenant si nous faisons le bilan des forces physiques extérieures appliquées à la masse m , il y a donc :

- Son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort : $\vec{F}_{Rappel} = -k(x' - \ell_0)\vec{u}_x$
- La force de frottement visqueux (fluide) : $\vec{F}_f = -f\frac{dx'}{dt} = -f\dot{x}'\vec{u}_x$

Les deux référentiels étant en translation l'un par rapport à l'autre, les deux repères d'espace, qui leur sont associés, $Oxyz$ et $O'x'z'y'$, ont la même base vectorielle orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Nous pouvons donc écrire la relation fondamentale de la dynamique pour ce système mécanique par rapport au référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{F}_{Rappel} + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie} \quad (7.1)$$

Nous projetons ensuite cette expression sur l'axe $O'x'$

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = mg - k(x' - \ell_0) - f\frac{dx'}{dt} - ma_A(t) \quad (7.2)$$

Nous savons qu'à l'équilibre sans onde sismique, la masse m est telle que

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{Rappel} = mg\vec{u}_x - k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_x$$

donc que $mg = k(\ell_{eq} - \ell_0)$.

Si nous posons $X' = x' - \ell_{eq}$ alors l'équation 7.2 peut se réécrire

$$m \frac{d^2 X'}{dt^2} = mg - k(X' + \ell_{eq} - \ell_0) - f \frac{dX'}{dt} - ma_A(t)$$

et se simplifier

$$m \frac{d^2 X'}{dt^2} = -kX' - f \frac{dX'}{dt} - ma_A(t)$$

En divisant par m des deux côtés de l'égalité nous obtenons :

$$\frac{d^2 X'}{dt^2} = -\frac{k}{m}X' - \frac{f}{m} \frac{dX'}{dt} - a_A(t)$$

Nous obtenons donc l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre suivante pour décrire le mouvement de M par rapport à \mathfrak{R}' :

$$\frac{d^2 X'}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dX'}{dt} + \frac{k}{m}X' = -a_A(t) \quad (7.3)$$

Celle-ci peut se réécrire

$$\frac{d^2 X'}{dt^2} + 2\lambda \frac{dX'}{dt} + \omega_0^2 X' = \frac{d^2 X'}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX'}{dt} + \omega_0^2 X' = -a_A(t)$$

Nous retrouvons donc une situation qui correspond à celle rencontrée lorsque nous avons étudié l'oscillateur harmonique en régime forcé.

L'excitation est directement liée à l'accélération du sol : le sismographe est un **accéléromètre**.

Nous allons pouvoir comprendre la manière de réagir du sismographe à partir de l'étude faite dans le chapitre précédent.

Supposons que le mouvement vertical du sol soit un mouvement rectiligne vertical sinusoïdal par rapport au référentiel \mathfrak{R} tel que

$$x_A(t) = x_s \cos(\Omega t + \varphi_s)$$

Nous en déduisons que

$$a_A(t) = \ddot{x}_A = -x_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s)$$

L'équation 7.3 devient donc compte tenu de cela :

$$\frac{d^2 X'}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX'}{dt} + \omega_0^2 X' = x_s \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_s) \quad (7.4)$$

A partir de nos travaux précédents, principalement l'équation 3.6, nous en déduisons que l'amplitude $X'_m(\Omega)$ de la solution permanente de l'équation 7.4 s'écrit :

$$X'_m(\Omega) = \frac{x_s \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

Nous pouvons réécrire cette expression

$$X'_m(\Omega) = \frac{x_s \Omega^2}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$$

Si nous appelons la pulsation réduite u , avec $u = \Omega/\omega_0$, nous pouvons alors écrire que

$$X'_m(u) = \frac{x_s u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

Nous avons donc si on calcule le gain en définissant ainsi $G(u) = \frac{X'_m(u)}{x_s}$

$$G(u) = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

Des diagrammes de gain sont représentés sur la figure 7.4 pour différentes valeurs de Q .

Ils montrent un comportement qui correspond à ce que nous appelons un filtre "*passé-haut*" : le sismographe ne réagit pas (ou peu) aux basses fréquences. En revanche, une excitation "haute fréquence" ou une impulsion doit donner une bonne réponse de l'appareil.

Pour des pulsations réduites grandes, nous avons $X'_m \approx x_s$, l'amplitude est égale à celle de l'excitation. Le système restitue bien les vibrations excitatrices. Il faut pour être dans ces conditions une pulsation propre ω_0 faible, compte tenu des gammes de pulsations des phénomènes sismiques, comme nous allons le voir par la suite.

Pour des pulsations réduites petites, en fait, le sismographe va mesurer l'accélération du sol au facteur $-1/\Omega^2$ près.

Si nous voulons voir l'influence du facteur de qualité : il apparaît en fait que s'il est trop faible ou trop fort, la réponse fréquentielle n'est pas bonne. Trop faible, il ne va pas permettre d'observer des signaux petits. Trop grand, la bande passante va être trop étroite. Il y a en plus dans ce cas des risques d'avoir des oscillations amorties pour des excitations impulsionnelles très courtes en temps, donc un mélange entre des excitations différentes.

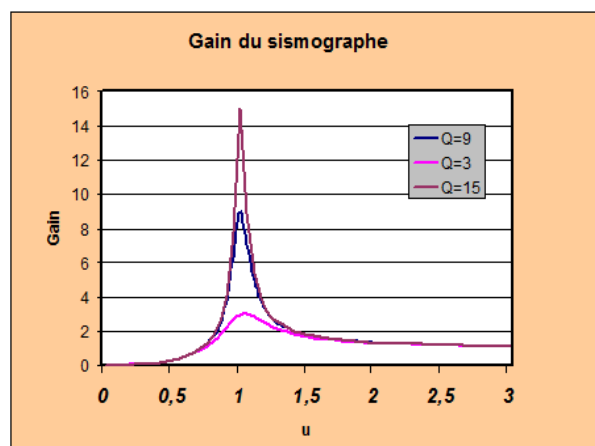


FIGURE 7.4 – Evolution du gain du sismographe en fonction de la pulsation réduite pour différentes valeurs de Q

La valeur "idéale" est celle qui à la fois donne une large bande passante et évite un phénomène de résonance trop important. Q ne doit pas être trop grand pour éviter les vibrations propres du régime amorti (régime transitoire) qui pourrait rendre le sismogramme illisible.

Les mouvements du sol sont très variables en amplitude et en période selon la nature de la source, la distance épacentrale, la nature de l'onde enregistrée. Le sismographe peut être considéré comme un filtre avec un gain et un déphasage dépendant tous les deux de la période (ou de la fréquence si l'on préfère raisonner dans ce domaine).

Les fréquences observées sont très variées :

- au-delà de 100 Hz : certaines vibrations industrielles ;
- de 100 à 10 Hz : agitation industrielle et urbaine, explosions et séismes très proches ;
- de 10 à 1 Hz : explosions lointaines, séismes proches ;
- 1 à 0,1 Hz : agitation naturelle permanente (agitation microsismique), ondes P et S des séismes lointains ;
- 0,1 à 0,01 Hz : ondes de surface directes ;
- 0,01 à ondes de surface ayant effectuées plusieurs tours du globe.
- en-deçà de 0,001 Hz : vibrations propres de la Terre.

Il est clair que seule la proximité des sources permet d'observer des hautes fréquences. Tout se passe comme si celles-ci se trouvaient très rapidement atténuées au fur et à mesure que croît la distance d'observation.

Le domaine observable des périodes des ondes sismiques est donc très large (de 0,1 seconde à plus de 1000 secondes), trop large pour qu'un seul sismographe puisse les enregistrer correctement. Pour couvrir toute cette bande de périodes, on utilisera deux types de capteurs. Un sismographe courte période "CP", dont la période propre est centrée sur une seconde approximativement. Un sismographe longue période ou large bande, "LP" ou

"LB", dont la période est centrée entre 20 ou 30 secondes, voire beaucoup plus en utilisant des techniques d'asservissement.

En réalité pour étudier complètement un phénomène sismique, il y a besoin de sismographes dans 3 directions : Ouest-Est, Sud-Nord et verticale.

Table des matières

1	L'oscillateur harmonique libre à un degré de liberté	1
1.1	Vocabulaire	1
1.1.1	Introduction	1
1.1.2	Phénomènes sinusoïdaux	2
1.1.3	Notion de déphasage	4
1.1.4	Définition d'un oscillateur harmonique libre	6
1.2	L'oscillateur harmonique le plus simple : un ressort et une masse liés ensemble	7
1.2.1	Etude du mouvement d'un tel oscillateur harmonique	9
1.2.2	Etude rapide du pendule élastique vertical	12
1.2.3	Aspects énergétiques	14
1.3	Exemples d'autres oscillateurs harmoniques libres à un degré de liberté . .	18
1.3.1	Les pendules	18
1.3.2	Tout système physique en mouvement autour d'une position d'équilibre stable	24
2	L'oscillateur harmonique libre amorti à un degré de liberté	27
2.1	L'oscillateur harmonique libre amorti par frottement fluide	27
2.1.1	Etude du mouvement d'un tel oscillateur	28
2.1.2	Trois types de régimes	30
2.1.3	Caractérisation de l'amortissement	35
2.1.4	Aspects énergétiques	39
3	L'oscillateur harmonique en régime forcé	43
3.1	Présentation du problème et mise en équation	43
3.1.1	Entretien des oscillations par une excitation périodique sinusoïdale .	43
3.1.2	Equation du mouvement	44
3.2	Résolution de l'équation différentielle	45
3.2.1	Régimes transitoire et permanent	45
3.2.2	Détermination de la solution forcée en utilisant les nombres complexes	45
3.3	Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude	48
3.3.1	Notion de résonance en amplitude du mouvement	48
3.3.2	Caractérisation physique de la résonance en amplitude	49

3.3.3	Déphasage en amplitude	52
3.4	Résonance en vitesse	53
3.4.1	Détermination de la vitesse	53
3.4.2	Phénomène de résonance en vitesse	53
3.5	Impédance mécanique	54
3.6	Conséquences pour l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique	55
3.6.1	Expression de la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur	55
3.6.2	Bilan énergétique	56
3.6.3	Résonance en puissance	56
4	L'oscillateur harmonique électrique	59
4.1	Rappels rapides d'électrocinétique de base	59
4.1.1	Conventions	59
4.1.2	Lois de Kirchhoff	60
4.2	Rappels sur les dipôles linéaires qui le constituent	62
4.2.1	Le résistor de résistance R	63
4.2.2	Le condensateur de capacité C	64
4.2.3	La bobine d'inductance L	65
4.3	Circuit linéaire RLC soumis à un échelon de tension	67
4.3.1	Définition d'un échelon de tension (ou tension échelon)	67
4.3.2	Equation différentielle du circuit RLC série	67
4.3.3	Résolution de l'équation différentielle et réponse à un échelon de tension	69
4.4	Analogie entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique	73
5	Electrocinétique des courants alternatifs	75
5.1	Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé	75
5.1.1	Circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale	75
5.1.2	Résonance aux bornes du condensateur	76
5.1.3	Résonance en intensité	78
5.2	Notion d'impédance complexe d'un dipôle linéaire	81
5.2.1	Régime permanent sinusoïdal et notation complexe	81
5.2.2	Définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire	82
5.2.3	Admittance complexe	83
5.2.4	Exemples d'impédances	83
5.2.5	Association d'impédances complexes	84
5.3	Utilisation de la notion d'impédance en régime sinusoïdal forcé	85
5.3.1	Circuit RLC série	85
5.3.2	Circuit RLC parallèle.	86
6	Puissance électrique en régime sinusoïdal	89
6.1	Définitions des puissances	89
6.1.1	Puissance instantanée	89
6.1.2	Puissance moyenne	89

6.2	Puissance active et puissance réactive	90
7	Exemples d'application pratique de cette physique	93
7.1	Le sismographe	93
A	Notation complexe	105
A.1	Rappel sur les nombres complexes	105
A.1.1	Présentation	105
A.1.2	Opérations sur les complexes	105
A.1.3	Module et conjugué	106
A.1.4	Représentation dans le plan	106
A.1.5	Relations importantes entre complexe et trigonométrie	107
A.2	Signal sinusoïdal en notation complexe	107
B	Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	109
B.1	Equation sans second membre	109

Annexe A

Notation complexe

A.1 Rappel sur les nombres complexes

A.1.1 Présentation

Les complexes sont des nombres de la forme $x + iy$, où i est un *nombre imaginaire* tel que $i^2 = -1$. Les nombres complexes, qui interviennent dans presque tous les domaines des mathématiques, sont également très employés en physique, notamment dans l'étude des circuits électriques et des ondes électromagnétiques. En électricité pour éviter de mélanger entre l'expression de l'intensité de courant et le terme imaginaire, on écrit plutôt le nombre imaginaire i sous la forme du nombre imaginaire j .

Il existe plusieurs manières de décrire qu'une variable z est un nombre complexe soit \underline{z} soit \bar{z} .

Tout élément \underline{z} de l'ensemble des nombres complexes s'écrit de manière unique :

$\underline{z} = x + iy$, où x est la *partie réelle* du nombre complexe et y sa *partie imaginaire*.

Un nombre imaginaire pure ne possède pas de partie réelle, il s'écrit donc sous la forme $\underline{z} = iy$.

On définit aussi deux opérateurs sur les complexes $\Re(\underline{z}) = x$, l'un qui donne la partie réelle du nombre complexe et l'autre la partie imaginaire $\Im(\underline{z}) = y$.

A.1.2 Opérations sur les complexes

L'addition des nombres complexes s'effectue en ajoutant séparément les parties réelles et les parties imaginaires. La règle générale pour l'addition est donc la suivante :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{A.1})$$

La multiplication des nombres complexes est fondée sur la relation $i^2 = -1$ et sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Par conséquent, la règle générale pour la multiplication est la suivante :

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (\text{A.2})$$

On démontre que l'ensemble des nombres complexes, muni des lois d'addition et de multiplication, est un corps.

A.1.3 Module et conjugué

Soit un nombre complexe $z = x + iy$, on appelle module de z le réel noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On nomme conjugué de z le complexe de symbole \bar{z} tel que $\bar{z} = x - iy$.

Il faut noter qu'un nombre complexe z et son conjugué sont reliés par la relation

$$z \times \bar{z} = |z|^2 \quad (\text{A.3})$$

A.1.4 Représentation dans le plan

Coordonnées cartésiennes

De même que les nombres réels peuvent être représentés par les points d'une droite, on peut associer les nombres complexes aux points d'un plan. Ainsi, au complexe $x + iy$, on associe le point M du plan ayant x pour abscisse et y pour ordonnée. On dit alors que $x + iy$ est l'affixe du point M . Le Suisse Argand fut l'un des premiers mathématiciens à définir en 1806 les nombres complexes par des coordonnées cartésiennes. C'est pourquoi une telle représentation est parfois appelée diagramme d'Argand. Nous pouvons en voir un exemple sur la figure A.1.

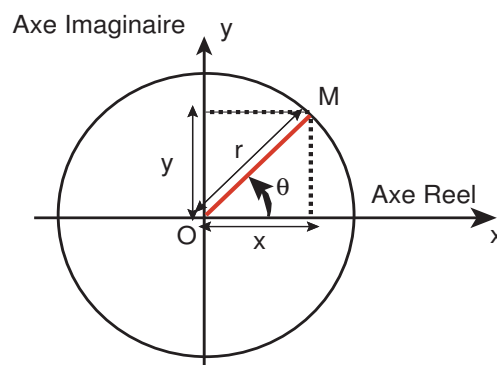


FIGURE A.1 – Diagramme d'Argand pour les complexes.

Si on représente les nombres complexes à l'aide de vecteurs du plan, alors l'addition des nombres complexes correspond à la somme des vecteurs.

Coordonnées polaires

Les points du plan pouvant être repérés à l'aide de coordonnées polaires r et θ , tout nombre complexe z peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (\text{A.4})$$

Ici, r est égal au module du complexe, et correspond à la distance du point M d'affixe z à l'origine du repère. θ est appelé argument de z , et représente l'angle orienté formé par l'axe des abscisses et la droite (OM) .

Soient $z_1 = r_1(\cos \theta + \imath \sin \theta) = r_1 e^{\imath \theta}$ et $z_2 = r_2(\cos \varphi + \imath \sin \varphi) = r_2 e^{\imath \varphi}$ deux nombres complexes. On montre que le produit de ces deux complexes a pour valeur :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta + \varphi) + \imath \sin(\theta + \varphi)) = r_1 r_2 e^{\imath(\theta + \varphi)} \quad (\text{A.5})$$

La division de ces deux mêmes nombres donnerait le résultat suivant :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta - \varphi) + \imath \sin(\theta - \varphi)) = \frac{r_1}{r_2} e^{\imath(\theta - \varphi)} \quad (\text{A.6})$$

Cela donne lieu à une interprétation géométrique simple sur un diagramme d'Argand : multiplication des modules (correspondant à une homothétie de centre O) suivie de l'addition des arguments (correspondant à une rotation de centre O).

A.1.5 Relations importantes entre complexe et trigonométrie

Il existe un certain nombre de relations importantes entre nombres complexes qui peuvent se démontrer à partir des propriétés des complexes et leur représentation dans le plan. Il y a la fameuse formule de Moivre :

$$(\cos x + \imath \sin x)^n = \cos nx + \imath \sin nx \quad (\text{A.7})$$

De même, nous pouvons écrire que

$$\cos x = \frac{(e^{\imath x} + e^{-\imath x})}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$\sin x = \frac{(e^{\imath x} - e^{-\imath x})}{2} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Signal sinusoïdal en notation complexe

Compte tenu de ces propriétés, il est facile d'associer à la grandeur $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ une forme complexe $\underline{x}(t)$ telle que :

$$\underline{x}(t) = X e^{\imath(\omega t + \varphi)}$$

On souligne le symbole x pour indiquer qu'il s'agit d'une notation complexe.

On remplace souvent en électricité le symbole imaginaire \imath par j pour éviter la confusion avec l'intensité de courant.

On peut ainsi écrire :

$$\underline{x}(t) = (X e^{\imath \varphi}) e^{j \omega t} = \underline{X} e^{j \omega t}$$

On appelle *amplitude complexe* la grandeur complexe :

$$\underline{X} = X e^{j\varphi}$$

Elle ne dépend pas du temps et contient toutes les informations sur l'amplitude initiale et la phase initiale du signal.

A partir du signal complexe en prenant sa partie réelle, on revient au signal réel de départ :

$$x(t) = \Re(\underline{x}(t))$$

Les caractéristiques du signal sont obtenues :

- en prenant le module de $\underline{x}(t)$, on obtient l'amplitude.

$$\underline{X} = |\underline{x}(t)| = |\underline{X}|$$

- en prenant l'argument de \underline{X} , on obtient la phase à l'origine.
- en prenant l'argument de $\underline{x}(t)$, on obtient la phase instantanée.

Le calcul des dérivées par rapport au temps est aussi très simplifié :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$$

L'opération de dérivation par rapport au temps est équivalent à la multiplication par le facteur $j\omega$.

Annexe B

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

B.1 Equation sans second membre

C'est une équation linéaire du type suivant :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \tag{B.1}$$

Avec a, b, c sont des constantes réelles.

L'équation est dite *sans second membre ou homogène* lorsque celui-ci est nulle.

On montre en mathématiques que la solution générale $y(t)$ d'une telle équation est une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$$

A et B étant deux constantes.

La recherche des solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ se fait en considérant comme solution possible la fonction $y(t) = e^{rt}$ et en reportant cette fonction dans l'équation B.1.

Sachant que, pour cette dernière, $\dot{y}(t) = re^{rt}$ et que $\ddot{y} = r^2e^{rt}$, l'équation B.1, qui doit être valide à tout instant t , conduit à l'équation suivante :

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

Nous obtenons ainsi l'*équation caractéristique* associée à l'équation différentielle :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{B.2}$$

Si r satisfait à cette équation, alors $y(t) = e^{rt}$ satisfait à l'équation B.1. L'équation caractéristique possède en général deux racines (réelles ou complexes conjuguées) r_1 et r_2 .

On peut donc déterminer deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation B.1 :

110 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \text{ et } y_2(t) = e^{r_2 t}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) = A \exp^{r_1 t} + B \exp^{r_2 t} \quad (\text{B.3})$$

La forme de $y(t)$ dépend de la nature des racines r_1 et r_2 et donc des valeurs positive, nulle ou négative du discriminant de l'équation caractéristique associée $\Delta = b^2 - 4ac$ ou du discriminant réduit $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Il faut remarquer que si le discriminant ou le discriminant réduit est nulle, alors la racine r_1 de l'équation caractéristique est double ($r_1 = r_2$).

Il n'y a donc qu'une solution particulière. Il faut donc en chercher une seconde qui soit linéairement indépendante de la première. il s'avère que la solution $y_2(t) = Bte^{r_1 t}$ convient.

La solution générale dans ce cas prend donc la forme :

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t} \quad (\text{B.4})$$

Les valeurs effectives des constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.